



Center for Financial Engineering Education (CFEE)

---

CFEE Discussion Paper Series No. 2014-1

一般化した **Realized Stochastic Volatility** モデルの推定：  
**Nikkei225** 収益率・実現ボラティリティの暦効果へ応用  
(増補版)

石原庸博

# 一般化した Realized Stochastic Volatility モデルの推定： Nikkei 225 収益率・実現ボラティリティの暦効果へ応用 (増補版)

石原庸博\*

## 概要

実現ボラティリティを導入した確率的ボラティリティ変動 (Realized Stochastic Volatility, RSV) モデルのマルコフ連鎖モンテカルロ法のアルゴリズムの一つである mixture sampler を用いた推定法を提案する。収益率と実現ボラティリティ測定値の観測誤差の相関と回帰の構造を導入し、これまで提案されてきた RSV モデルを含む一般的なモデルに対して mixture sampler を議論する。先行研究をサーベイし、提案したモデルとの関係を議論する。分析例として日経平均 (Nikkei 225) の日次終値収益率とその実現ボラティリティ測定値に応用し、複数の種類の実現ボラティリティ測定値を導入した場合も含んだ暦効果の検証の例を示す。特に週効果はボラティリティの潜在変数と実現ボラティリティとの間で異なった振る舞いをするのがわかった。

(本稿は石原庸博 (2015) 「一般化した Realized Stochastic Volatility モデルの推定：Nikkei 225 収益率・実現ボラティリティの暦効果へ応用」, 『経済研究』, 第 66 巻第 1 号掲載予定で省略された推定結果等を補足した増補版である。)

*Key words:* ボラティリティの非対称性, 暦効果, Markov chain Monte Carlo 法, mixture sampler, 確率的ボラティリティ変動モデル, 実現ボラティリティ.

## 1 はじめに

派生証券価格付けやポートフォリオ管理を含むリスク管理の観点から、危険金融資産価格の収益率のボラティリティと呼ばれる二次モーメントの分析は 30 年以上にわたり注目を集めている。1990 年代までは日次や週・月次の収益率の時系列データを予測するためのモデルを提案し、統計的推測を行うことで直接観測できないボラティリティの推定・予測が行われており、その中でも代表的なモデルが Engle (1982), Bollerslev (1986) に始まる (G)ARCH ((Generalized) autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルと Taylor (1982) による確率的ボラティリティ変動 (Stochastic volatility, SV) モデルである。これらのモデルの拡張や推定法などについては, Shephard (2005), Andersen et al. (2009), Bauwens et al. (2012) 等を参照されたい。一方で 2000 年代に入ると、高頻度データを用いたボラティリティの推定量である実現ボラティリティ (realized volatility, RV) が Andersen and Bollerslev (1998), Barndorff-Nielsen and Shephard (2001) らにより提案され、その性質が明らかにされてきている。特に取引データ

---

\*一橋大学大学院経済学研究科 186-8601 東京都国立市中 2 - 1 Email: T.Ishihara@r.hit-u.ac.jp

の収益率の2乗で定義された単純なRVは様々な市場のマイクロ構造 (market microstructure) に起因するノイズ (microstructure noise) により、バイアスを持つことが明らかになってきた。具体的には、最小取引価格による価格変動の離散性やビッド・アスクスプレッド等の影響により実際の価格変動よりも変動が過剰もしくは過少に推定されてしまい、バイアスが生じることも知られている<sup>1</sup>。また、昼休み・夜間などの取引が行われていない時間帯は高頻度の収益率データが得られていないので、そうした時間帯を無視してRVを計算するとそうした時間帯を含む一日のボラティリティを過小に推定してしまう。市場のマイクロ構造については Campbell et al. (1997) の3章, O'hara (1995), Hasbrouck (2006), Foucault et al. (2013) 等が詳しい。

近年、市場のマイクロ構造により効率価格 (efficient price) に観測誤差が加わったものが観測されているという仮定の下で, Barndorff-Nielsen et al. (2008) らによって HAC (heteroskedasticity and autoregressive consistent) 推定量のアイデアを用いた実現カーネル推定量 (realized kernel, RK) が提案された。RK はそれまでに提案されていた Zhang et al. (2005), Malliavin and Mancino (2002) らの提案した推定量を含んでおり、多くの計量分析で使われている。他にもプレアベレーシング推定量 (Jacod et al. (2009)) や疑似最尤推定的なアプローチ (Kunitomo and Sato (2013), Xiu (2010)) も提案されており、確率過程の変動の指標の推定量である Bi-power variation 等も Barndorff-Nielsen et al. (2006) らにより議論されており、ジャンプを含んでいる場合のジャンプの検出に応用されている。また, Andersen et al. (2012) はジャンプがある場合にも頑健な推定量であるメディアン RV を提案しており、メディアン RV はジャンプがある下では Bi-power variation よりも理論的に望ましい性質を持っていることが示されている。これらの高頻度観測に基づくボラティリティ推定量による推定値は実現ボラティリティ測定値 (realized volatility measures または realized measures of volatility) と総称され様々な実証分析で使用されている。日本語のサーベイとしては金谷 (2009), 小池 (2012) が詳しい。

実現ボラティリティ測定値は基本的には特定のボラティリティ変動モデルに依存しない推定値であるので、予測をする場合には、回帰モデルなど何らかのモデルが必要になる。初期の代表的なモデルとしては Andersen et al. (2003) らによる自己回帰実数と分移動平均 (Autoregressive fractional integrated moving average, ARFIMA) モデル, Barndorff-Nielsen and Shephard (2002) らによる重ね合わせ (superposition) を用いた状態空間モデルや Corsi (2009) の heterogeneous autoregressive (HAR) モデルなどがある。

そこで、日次の収益率のボラティリティの予測モデルとして GARCH モデルや SV モデルを利用し、そこに実現ボラティリティ測定値を導入することで実現ボラティリティ測定値の推定誤差・バイアスを緩和させ、ボラティリティ変動モデルのパラメータの推定精度や予測精度を上げるという研究が行われるようになってきた。GARCH モデルの文脈では Engle and Gallo (2006), Shephard and Sheppard (2010), Hansen et al. (2012) らにより提案される一方、SV モデルでは Takahashi et al. (2009) が提案しており、日本語の文献では大森・渡部 (2013) が解説を行っている。実現ボラティリティ測定値を取り入れた SV モデルは realized SV (RSV) モデルと呼ばれ以下のように定式化される。

$$\begin{aligned}
 y_t &= \exp(h_t/2)\varepsilon_t, & t = 1, 2, \dots, n, \\
 \log RM_t &= \xi + \psi h_t + v_t, & t = 1, 2, \dots, n, \\
 h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, & t = 1, 2, \dots, n-1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで  $y_t$  が  $t$  日の日次収益率,  $\log RM_t$  が  $y_t$  の実現ボラティリティ測定値の対数値で観測される変数であり,  $h_t$  は  $y_t$  の対数ボラティリティであり観測できない潜在変数である.  $\varepsilon_t$  と  $\eta_t, v_t$  は正規分布に従う誤差項であり,  $v_t$  は  $\varepsilon_t, \eta_t$  と独立であると仮定する.

二式目は潜在ボラティリティにその実現ボラティリティ測定値の情報を導入するための観測方程式である. パラメータ  $\xi$  は市場のマイクロ構造によるノイズや夜間などの取引のない時間から生じる実現ボラティリティ測定値のバイアスを修正するための定数項である.  $\psi$  はべき乗のずれを修正するための係数であるが, Takahashi et al. (2014) や同様の観測方程式を GARCH モデルで用いている Hansen et al. (2012) らによって  $\psi = 1$  とした方がボラティリティの予測精度が高いことが示されている.  $v_t$  は観測誤差であり, 実現ボラティリティ測定値の推定誤差を表している. 近年, Chaussé and Xu (2012) では  $v_t$  と日次収益率のショックに負の相関があることを示しており, その理論的な背景として Diebold and Strasser (2008) らの研究を挙げている. また, Hansen et al. (2012) の Realized GARCH モデルにおけるレバレッジ関数もボラティリティの変動を表す式ではなく, 実現ボラティリティ測定値の観測方程式に導入しており, 今日の収益率と明日のボラティリティの関係であるレバレッジ効果とは異なった相関構造を考慮しているといえる. もし, 実現ボラティリティ測定値と日次収益率の誤差の間に負の相関があれば, それらを考慮することで収益率の平均の変動もよりよく予測できるようになる可能性がある. そこで本稿では, 相関を導入したモデルとその推定法を考える.

三式目において対数ボラティリティであり観測できない潜在変数である  $h_t$  は一次の自己回帰モデルに従うと仮定されることが多いので三式目においてもそのようにモデル化されている. 詳細は 4 節に述べるが様々な拡張が可能であり, Dobrev and Szerszen (2010), Koopman and Scharth (2012) らは  $h_t$  を 2 つの自己回帰過程の重ね合わせによりモデル化している. 重ね合わせによる定式化は SV モデルでは Shephard (1996), Chernov et al. (2003) らに提案され, それとは別個に Fouque et al. (2003), Molina et al. (2010) も多重尺度 (multi-scale) モデルという名で同様のモデルを提案している. Omori et al. (2007), Nakajima and Omori (2009) では非対称性を導入し, 他のモデルと比較してデータへのあてはまりがよいことを示している. そのため, 本稿では重ね合わせモデルを含んだ定式化での推定法を議論する. さらに, 複数の実現ボラティリティ測定値を用いることで重ね合わせる要素に意味づけを行うことができるため, 3 節の実証分析では, ボラティリティの長期的な変動の部分と日中のジャンプに寄与される部分と, さらに実現ボラティリティ測定値のみに影響を与える要素に分解するモデルも使用する.

また, 実際のファイナンスの予測や実証分析を行うに当たって, ボラティリティ変動に対する説明変数を使うことがしばしばある. 例えば, 株式市場において, ボラティリティの月効果・曜日効果・休日効果等の暦効果を検証することがあげられる. もしボラティリティにそれらの暦効果があった場合, それを無視してモデル化してしまうと, 周期的な変動の影響で, ボラティリティの持続性の推定値に影響が出る可能性がある. SV モデルで暦効果を扱ったものとして Watanabe (1999), Watanabe (2001), Tanizaki (2004), Tsiakas (2006) がある. 本稿では, ボラティリティに加えて, さらに市場が閉まっていることによる実現ボラティリティ測定値のバイアスである  $\xi$  にも回帰の構造を導入することで, そのバイアスの暦効果を推定する.

RSV モデルの推定に関してはいくつかの手法が提案されている. Takahashi et al. (2009), Dobrev and Szerszen (2010) はマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法を用いており, Koopman and Scharth (2012) はモンテカルロ積分を用いた最尤法を用いて推定しており, Chaussé and

Xu (2012) は一般化積率法 (GMM) を用いている。本研究では回帰構造を導入することでパラメータが多くなる可能性も考慮し, Takahashi et al. (2009) と同様に MCMC 法を用いたベイズ推定を行う。MCMC 法を用いてパラメータの事後分布からのサンプルを生成する場合に重要になるのは, 生成されたパラメータの自己相関が小さくなるようにサンプリングのアルゴリズムを構成することである。そのための手段としては事後分布における相関の高いパラメータをまとめて生成する方法があげられる。非対称な RSV モデルにおいては  $h_t$  と  $h_{t+1}$  の間の相関が高いことによる問題を解消するために, 隣り合った  $h_t$  をまとめてサンプリングする方法が提案されている。Kim et al. (1998), Omori et al. (2007) の mixture sampler と Shephard and Pitt (1997), Watanabe and Omori (2004), Omori and Watanabe (2008), Takahashi et al. (2009) の block sampler である。二つを比較すると block sampler の方が様々なモデルへの適用範囲が広いことが知られている一方で, mixture sampler の方が計算プログラムの作成が容易であり, さらに生成された MCMC 標本の自己相関をより小さくできる場合がある。特に, RSV モデルの先行研究においては,  $\xi$  の MCMC 標本の自己相関が他のパラメータと比較して高くなることが知られている。これは  $h_t, t = 1, \dots, n$  と  $\mu, \xi$  の事後分布における相関が高くなるために,  $\mu, \xi$  の生成するときに状態変数  $h_t$  を条件づけてしまうことから起こる。そのため  $\mu, \xi$  を生成するときに  $h_t, t = 1, \dots, n$  を周辺化できる mixture sampler を用いることで  $\mu$  と  $\xi$  の MCMC 標本自己相関を小さくできる。そこで本稿では,  $\mu$  と  $\xi$  に回帰構造があり, 通常の場合よりもパラメータの MCMC サンプリングの自己相関がさらに高くなる可能性があることから, mixture sampler を用いた推定法を一般化した RSV に対して提案する。以下 2 節ではこれまで提案されているモデルを含む一般的なモデルとその mixture sampler を用いた推定法について述べる。3 節では RSV モデルを用いた実証分析の例として暦効果 (月・曜日・休日効果) の影響を, 通常の RSV モデルと複数の実現ボラティリティ測定値を導入したモデルを用いて分析を示す。更なる拡張と他の研究との関連についてのサーベイを 4 節で行い, 5 節でまとめと今後の課題に関して議論する。

## 2 一般化 RSV モデルとその推定法

本節では RSV モデル (1) を先行研究で提案された RSV モデルの多くを含むように一般化し, その mixture sampler を用いた推定法を議論する。

### 2.1 モデル

第  $t$  日の日次資産収益率を  $y_t$ ,  $j$  種類目の実現ボラティリティ測定値を  $RM_{jt}$  とする。  $x_{jt} = F(RM_{jt})$ ,  $t = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, q$  とする。関数  $F$  は既知の関数であり, 多くの研究では  $F(\cdot) = \log(\cdot)$  としているが対数ボラティリティの情報を含む実現ボラティリティ測定値の一対一変換であればどのような変換でもよい。観測できない対数ボラティリティ  $h_t$  は  $p$  種類の因子  $\alpha_{it}, i = 1, \dots, p$  の重ね合わせ (superposition) で表現されるとする。  $p$  個の重ね合わせで,  $q$  種類の実現ボラティリティ測定値を持ち, 説明変数を導入した RSV モデルを以下のように定式

化できる.

$$y_t = \exp(h_t/2)\varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$x_{jt} = \beta'_{xj} z_{xjt} + \sum_{i=1}^p \psi_{ji} \alpha_{it} + v_{jt}, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$h_t = \sum_{i=1}^p \psi_{yi} \alpha_{it} \quad (4)$$

$$\alpha_{i,t+1} = \beta'_{\alpha i} z_{\alpha i,t+1} + \phi_i(\alpha_{it} - \beta'_{\alpha i} z_{\alpha it}) + \eta_{it}, \quad t = 1, 2, \dots, n-1, \quad (5)$$

ここで  $z_{xjt} = (z_{xjt1}, \dots, z_{xjtK_{xj}})$ ,  $z_{\alpha it} = (z_{\alpha it1}, \dots, z_{\alpha itK_{\alpha i}})$ ,  $t = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, q$  は  $t-1$  時点で利用可能な説明変数のベクトルで第一要素として定数項を含む. 説明変数としては休日・曜日, 過去の実現ボラティリティ測定値, 取引システムの変更を表すダミーなどを想定している.  $z_{\alpha it}$ ,  $i \geq 2$  については識別のために  $z_{\alpha 1t}$  と線形独立である必要がある. Miller (2011) は (3) 式を用いた通常の RSV モデルと, (3) 式を使用せず (5) 式の  $z_{\alpha i,t+1}$  に一期前の実現ボラティリティ測定値を導入したモデルの比較を行っている.  $\psi_{ji}$  および  $\psi_{yi}$  は実現ボラティリティ測定値  $x_{jt}$  や収益率  $y_t$  と対数ボラティリティ因子  $\alpha_{it}$  を対応させるパラメータであり, 特定のボラティリティ因子変動と実現ボラティリティ測定値を結びつけることができる. ただし識別のために  $\psi_{yi}$  は 0 または 1 をデータの種類に応じて設定するパラメータとする.  $\psi_{yi} = 0$  とした場合には潜在ボラティリティ因子  $\alpha_{it}$  は収益率  $y_t$  に影響を及ぼさず, 実現ボラティリティ測定値のみに影響する変動をとらえる因子とみなすことができる.  $\psi_{ji} = \psi_j$ ,  $\psi_{yi} = 1$  と一定にしたものが Koopman and Scharth (2012) のモデルに対応する.

誤差項  $\varepsilon_t$ ,  $\mathbf{v}_t = (v_{1t}, \dots, v_{qt})'$ ,  $\boldsymbol{\eta}_t = (\eta_{1t}, \dots, \eta_{pt})'$  と初期値の分布は,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \mathbf{v}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix} \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}_{1+p+q}(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\sigma}'_v & \boldsymbol{\sigma}'_\eta \\ \boldsymbol{\sigma}_v & \Sigma_v & O \\ \boldsymbol{\sigma}_\eta & O & \Sigma_\eta \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{i1} \sim \mathcal{N}\left(\beta'_{\alpha i} z_{\alpha i1}, \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_i^2}\right),$$

とする. ここで  $\mathcal{N}_k(\mathbf{m}, \mathbf{V})$  は平均  $\mathbf{m}$ , 分散共分散  $\mathbf{V}$  の  $k$  変量正規分布である. 実現ボラティリティ測定値の観測誤差  $\Sigma_v$  は正値対称行列であり, その相関は Venter and de Jongh (2014) らにより導入された. 一般に観測方程式の誤差  $v_{jt}$  同士の相関の推定値は高いことが知られている. 代わりに観測誤差自体に系列相関が疑われる場合には,  $\psi_{yi} = 0$  とする収益率には影響を及ぼさない潜在ボラティリティ因子を用いて,  $v_{jt}$  の間の相関を表す共通因子としてモデル化することもできる. その際は識別性のために  $\Sigma_v$  を対称行列とする必要がある.

識別のために  $\Sigma_\eta = \text{diag}(\sigma_{\eta 1}^2, \dots, \sigma_{\eta p}^2)$  を対角行列とする.  $\boldsymbol{\sigma}_\eta = (\rho_{\eta 1} \sigma_{\eta 1}, \rho_{\eta 2} \sigma_{\eta 2}, \dots, \rho_{\eta p} \sigma_{\eta p})'$  は通常の意味のボラティリティの非対称性 (レバレッジ効果) を意味する行列であり,  $\rho_{\eta i}$  の推定値が負であれば, 資産価格の下落した次の日のボラティリティが上昇するという性質を意味する.  $\boldsymbol{\sigma}_v = (\rho_{v1} \sigma_{v1}, \rho_{v2} \sigma_{v2}, \dots, \rho_{vq} \sigma_{vq})'$  は収益率のショックと実現ボラティリティ測定値の観測誤差の相関を意味するパラメータのベクトルである. Hansen et al. (2012) らは realized GARCH で導入し, RSV モデルでは Chaussé and Xu (2012) らが導入している. 彼らは GMM

により負値の推定結果を得ている。このモデルの時系列構造や収益率の分布はさらに拡張が可能であるが、それらは4節で議論する。

実際にこのモデルを分析に用いる場合にはデータや分析の目的によって関数  $F(\cdot)$ , 説明変数, 実現ボラティリティ測定値の数  $q$  と状態変数の数  $p$ , パラメータのゼロ制約等を選択する必要がある。選択の基準としては、同じ収益率と実現ボラティリティ測定値を使い、説明変数  $p$  やレバレッジの有無等を選択する場合には様々なモデル選択基準を用いることができる。ベイズファクター (周辺尤度比) や期待対数尤度の事後平均, ベイズ交差検証法 (Bayesian cross validation) による予測尤度 (predictive likelihood), それらの推定量である Schwarz の BIC (Bayesian information criterion, Schwarz (1978)), 尤離度情報量基準 DIC (deviance information criterion, Spiegelhalter et al. (2002)), Ando (2011) の情報量基準, 広く使える情報量基準 WAIC (widely applicable information criterion, Watanabe (2010)) 等がベイズ統計では提案され使われている。ただしこれらの基準を計算する際、尤度計算のために  $\alpha_{it}$  を粒子フィルタ等で積分消去することが必要な場合もある。RSV モデルにおいては、条件づけたときに観測値が独立に分布するようにパラメータを定式化する (拡大尤度を用いる) とパラメータ数が観測数  $n$  に依存してしまい、積分消去した場合には独立性の構造がなくなるのでモデル比較の基準が正当化される仮定には注意する必要がある。ベイズ統計のモデル比較に関しては安道 (2010) や渡辺 (2012) が詳しい。

また、これらの基準は観測値  $\mathbf{y}, \mathbf{x}_t$  についてのあてはまりや予測のよさに基づく基準なので、使用する実現ボラティリティ測定値が異なる場合にはこれらは使うことができない。例えば、RK と RV を両方とも使うべきかどうかを比較する必要がある場合にはこれらの基準は適用できない。RSV モデルをリスク管理等に応用する際に予測の対象となる変数がある場合には、その変数を用いた予測精度による評価が考えられる。そのような場合、ベイズ統計の枠組みでは、特定したモデルが正しいかどうかを診断する方法として事後予測分析 (posterior predictive analysis) が用いられている。事後予測分析も含む包括的なベイズモデル比較のサーベイは Vehtari and Ojanen (2012), Gelman et al. (2013) にある。

しかしながら、将来のボラティリティ予測する場合には、将来のボラティリティは潜在変数であり直接観測できないため、代理変数として将来の実現ボラティリティ測定値を使うことが考えられる。代理変数を用いたときの予測パフォーマンスに関しては Patton (2011) らが研究を行っているが、ベイズ統計の枠組みではまだその研究はなされていない。

## 2.2 尤度関数

記法として以下を導入する。  $\beta_x = (\beta'_{x1}, \dots, \beta'_{xq})'$ ,  $\beta_\alpha = (\beta'_{\alpha1}, \dots, \beta'_{\alpha p})'$ ,  $\beta = (\beta'_x, \beta'_\alpha)'$ ,  $\theta = (\phi, \psi, \sigma_v, \sigma_\eta, \Sigma_v, \Sigma_\eta)'$ ,  $\psi_y = (\psi_{y1}, \dots, \psi_{yp})'$ ,  $\Psi = \{\psi_{ji}\}$  とする。ここで  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$ ,  $\psi = (\psi_{11}, \dots, \psi_{1p}, \psi_{21}, \dots, \psi_{qp})'$  である。さらに実現ボラティリティ測定値と状態変数のベクトルを  $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, \dots, x_{qt})'$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_t = (\alpha_{1t}, \dots, \alpha_{pt})'$  とする。

この一般化した RSV モデルにおいて、  $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}'_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}'_n)'$  について拡大した被説明変数  $Y^n = ((y_1, \mathbf{x}'_1), (y_2, \mathbf{x}'_2), \dots, (y_n, \mathbf{x}'_n))'$  の説明変数  $Z^n = ((\mathbf{z}'_{x1}, \mathbf{z}'_{\alpha1}), \dots, (\mathbf{z}'_{xn}, \mathbf{z}'_{\alpha n}))'$ ,  $\mathbf{z}_t = (\mathbf{z}'_{xt}, \mathbf{z}'_{\alpha t})'$

を条件づけたときの条件付拡大尤度関数は

$$\begin{aligned}
f(Y^n|\boldsymbol{\beta}, \theta, \boldsymbol{\alpha}, Z^n) &= \prod_{t=1}^{n-1} f(y_t, x_t, \alpha_{t+1}|\boldsymbol{\beta}, \theta, \boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{\alpha t+1}) f(\boldsymbol{\alpha}_1|\boldsymbol{\beta}_\alpha, \theta, \mathbf{z}_{\alpha 1}) f(y_n, x_n|\boldsymbol{\beta}_x, \theta, \boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{z}_{x n}) \\
&\propto \left| \begin{array}{cc} 1 & \boldsymbol{\sigma}'_v \\ \boldsymbol{\sigma}_v & \Sigma_v \end{array} \right|^{-\frac{1}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{i=1}^p \sqrt{\frac{1-\phi_i^2}{\sigma_{\eta i}^2}} \exp\left(-\frac{(1-\phi_i^2)\eta_{i1}^2}{2\sigma_{\eta i}^2}\right) \\
&\quad \times \prod_{t=1}^{n-1} \exp\left(-\frac{h_t}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{e}'_t \text{diag}(\exp(-h_t/2), 1, 1) \Sigma^{-1} \text{diag}(\exp(-h_t/2), 1, 1) \mathbf{e}_t\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{h_n}{2} - \frac{1}{2} (y_n \exp(-h_n/2), \mathbf{v}'_n) \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\sigma}'_v \\ \boldsymbol{\sigma}_v & \Sigma_v \end{pmatrix}^{-1} (y_n \exp(-h_n/2), \mathbf{v}'_n)'\right),
\end{aligned}$$

と書ける。ここで

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_t &= (y_t, \mathbf{v}'_t, \boldsymbol{\eta}'_t)', \\
v_{jt} &= x_{jt} - \boldsymbol{\beta}'_{xj} \mathbf{z}_{xjt} - \sum_{i=1}^p \psi_{ji} \alpha_{it}, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots, q \\
\eta_{it} &= \begin{cases} \alpha_{i1} - \boldsymbol{\beta}'_{\alpha i} \mathbf{z}_{\alpha i1} & t = 1, \\ \alpha_{i,t+1} - \boldsymbol{\beta}'_{\alpha i} \mathbf{z}_{\alpha i,t+1} - \phi_i (\alpha_{it} - \boldsymbol{\beta}'_{\alpha i} \mathbf{z}_{\alpha it}) & t = 2, \dots, n-1, \end{cases}, \quad i = 1, \dots, p
\end{aligned}$$

である。本稿では、この尤度関数を混合分布で近似する mixture sampler を用いる。

## 2.3 Mixture sampler を用いた MCMC 法による一般化 RSV モデルのベイズ推定

ここでは、mixture sampler を用いた一般化 RSV モデルのベイズ推定について述べる。Mixture sampler は Kim et al. (1998), Omori et al. (2007) らによって提案された SV モデルに特化した推定法である。適用できる状況は限られるものの、比較的容易に扱える計算効率的な手法で広く用いられている。本稿で議論する一般化した RSV モデルは mixture sampler で扱えるなかでできる限り広範囲の一般化を行っているため、先行研究を含む多くの RSV モデルは以下のアルゴリズムを用いて推定することができる。

### 2.3.1 事前分布

本節では事前分布を以下のように仮定する。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} &\sim \mathcal{N}_{K_x + K_\alpha}(\mathbf{m}_{\beta 0}, \mathbf{V}_{\beta 0}), \quad \boldsymbol{\psi} \sim \mathcal{N}_q(\mathbf{m}_{\psi 0}, \mathbf{V}_{\psi 0}), \\
\frac{\phi_i + 1}{2} &\sim \mathcal{B}(a_{\phi 0i}, b_{\phi 0i}), \quad \frac{\rho_{vj} + 1}{2} \sim \mathcal{B}(a_{\rho 0j}, b_{\rho 0j}), \quad \frac{\rho_{\eta i} + 1}{2} \sim \mathcal{B}(a_{\eta 0i}, b_{\eta 0i}), \\
\Sigma_u &\sim \mathcal{IW}(n_{u0} R_{u0}), \quad \sigma_{\eta i}^2 \sim \mathcal{IG}\left(\frac{n_{\eta i 0}}{2}, \frac{R_{\eta i 0}}{2}\right), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q,
\end{aligned}$$

ここで  $K_x = \sum_{j=1}^q K_{xj}$ ,  $K_\alpha = \sum_{i=1}^p K_{\alpha i}$  とし,  $\mathcal{B}(a, b)$ ,  $\mathcal{IG}(a, b)$ ,  $\mathcal{IW}(a, B)$  はそれぞれ, ベータ, 逆ガンマ, 逆ウィシャート分布で以下の確率密度関数を持つ.

$$\begin{aligned}\pi(x) &\propto (1+x)^{a-1} (1-x)^{b-1}, \\ \pi(x) &\propto \left(\frac{1}{x}\right)^{a+1} \exp\left(-\frac{b}{x}\right), \\ \pi(X) &\propto |X|^{-\frac{a+k+1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\text{tr}(B^{-1}X)\right).\end{aligned}$$

以下で説明する MCMC 法のアルゴリズムは  $\beta$  の分布を正規分布にすること以外は事前分布の選択には依存しないので正則であれば別の事前分布を使っても構わない.

### 2.3.2 RSV モデルの混合正規線形状態空間表現

ここでモデルの尤度関数を正規分布の混合分布で表現するためにモデルの変形を行う. 収益率の方程式 (3) の両辺を二乗して対数をとることで

$$y_t^* := \log(y_t^2) = h_t + \log \varepsilon_t^2, \quad (6)$$

と  $h_t$  に関して線形化する<sup>2</sup>. ここで  $\varepsilon_t^* = \log \varepsilon_t^2$  は自由度 1 の対数  $\chi^2$  分布に従う. Omori et al. (2007) では  $\varepsilon_t^*$  の分布の密度関数を正規密度の有限混合,

$$g(\varepsilon_t^*) = \sum_{i=1}^{10} p_i f_N(\varepsilon_t^* | m_i, v_i^2),$$

により近似している. ここで  $f_N(x|m, v^2)$  は平均  $m$ , 分散  $v^2$  の正規密度関数で,  $p_i$  は  $i$  番目の混合分布の重みであり  $\sum_{i=1}^{10} p_i = 1$  を満たす.  $m_i, v_i^2, p_i, i = 1, \dots, 10$  の数表, さらに  $\varepsilon_t^*$  を条件づけたときの正規分布の相関に関連するパラメータ  $a_i, b_i$  の数表が Omori et al. (2007) らによって与えられており, それを利用できる. 表 1 にも転載する.

$i$	$p_i$	$m_i$	$v_i^2$	$a_i$	$b_i$
1	0.00609	1.92677	0.11265	1.01418	0.50710
2	0.04775	1.34744	0.17788	1.02248	0.51124
3	0.13057	0.73504	0.26768	1.03403	0.51701
4	0.20674	0.02266	0.40611	1.05207	0.52604
5	0.22715	-0.85173	0.62699	1.08153	0.54076
6	0.18842	-1.97278	0.98583	1.13114	0.56557
7	0.12047	-3.46788	1.57469	1.21754	0.60877
8	0.05591	-5.55246	2.54498	1.37454	0.68728
9	0.01575	-8.68384	4.16591	1.68327	0.84163
10	0.00115	-14.65000	7.33342	2.50097	1.25049

表 1: 対数  $\chi^2$  分布の混合近似分布のパラメータ  $(p_i, m_i, v_i, a_i, b_i)$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) の数表. Omori et al. (2007) に依る.

$\varepsilon_t^*$  を混合分布からサンプリングをする場合には、各成分がどの混合成分に属しているかを表す潜在変数  $s_t$  を用いる。潜在変数を用いることで、(1)  $s_t$  を生成し、(2)  $\varepsilon_t^*$  を平均  $m_{s_t}$ 、分散  $v_{s_t}^2$  の正規分布から生成する、という2段階で生成できる。

潜在変数  $s_t$  を条件づけた下で (3)–(6) は以下のように線形ガウス状態空間モデルとして表現できる。

$$y_t^* = \boldsymbol{\psi}_y \boldsymbol{\alpha}_t + m_{s_t} + v_{s_t} u_{1t}, \quad (7)$$

$$\mathbf{x}_t = Z_{xt} \boldsymbol{\beta}_x + \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\sigma}_v (A_t + B_t u_{1t}) + (\boldsymbol{\Sigma}_v - \boldsymbol{\sigma}_v \boldsymbol{\sigma}_v')^{1/2} \mathbf{u}_{2t}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{t+1} &= Z_{\alpha,t+1} \boldsymbol{\beta}_\alpha + \Phi(\boldsymbol{\alpha}_t - Z_{\alpha t} \boldsymbol{\beta}_\alpha) + \boldsymbol{\sigma}_\eta (A_t + B_t z_{1t}) \\ &\quad + (\boldsymbol{\Sigma}_\eta - \boldsymbol{\sigma}_\eta \boldsymbol{\sigma}_\eta')^{1/2} \mathbf{u}_{3t}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$Pr\{s_t = i\} = p_i, \quad (10)$$

ここで  $\mathbf{u}_{2t}$ ,  $\mathbf{u}_{3t}$  はそれぞれ  $q \times 1$ ,  $p \times 1$  のベクトルであり、 $(u_{1t}, \mathbf{u}_{2t}, \mathbf{u}_{3t})' \sim \mathcal{N}_{1+q+p}(\mathbf{0}, I)$  とする。

$$\begin{aligned} A_t &= d_t a_{s_t} \exp(m_{s_t}/2), & B_t &= d_t b_{s_t} v_{s_t} \exp(m_{s_t}/2), \\ d_t &= \text{sign}(y_t) = I(\varepsilon_t > 0) - I(\varepsilon_t \leq 0). \end{aligned}$$

であり、

$$Z_{xt} = \begin{bmatrix} z'_{x1t} & \mathbf{0}_{1 \times K_{x2}} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times K_{xq}} \\ \mathbf{0}_{1 \times K_{xi}} & z'_{x2t} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times K_{xq}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times K_{x1}} & \mathbf{0}_{1 \times K_{x2}} & \cdots & z'_{xqt} \end{bmatrix}, \quad Z_{\alpha,t} = \begin{bmatrix} z'_{\alpha 1t} & \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha 2}} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha p}} \\ \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha 1}} & z'_{\alpha 2t} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha 1}} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha p}} & z'_{\alpha pt} \end{bmatrix}$$

である。この近似モデルをもとにした事後分布は以下のようになる。 $Y^{*n} = ((y_1^*, \mathbf{x}_1), \dots, (y_n^*, \mathbf{x}_n))$  として、

$$\begin{aligned} &\pi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{s} | Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n) \\ &\propto \prod_{t=1}^n \frac{p_{s_t}}{v_{s_t}} |\boldsymbol{\Sigma}_v - \boldsymbol{\sigma}_v \boldsymbol{\sigma}_v'|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(y_{1t}^* - \boldsymbol{\psi}_y \boldsymbol{\alpha}_t - m_{s_t})^2}{2v_{s_t}^2} - \frac{\mathbf{v}_t' (\boldsymbol{\Sigma}_v - \boldsymbol{\sigma}_v \boldsymbol{\sigma}_v')^{-1} \mathbf{v}_t}{2} \right\} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{1 - \phi_i^2}{\sigma_{\eta_i}^2}} \exp \left( -\sum_{i=1}^p \frac{(1 - \phi_i^2) \eta_{i1}^2}{2\sigma_{\eta_i}^2} \right) \prod_{t=1}^{n-1} |\boldsymbol{\Sigma}_\eta - \boldsymbol{\sigma}_\eta \boldsymbol{\sigma}_\eta'|^{-1/2} \exp -\frac{\boldsymbol{\eta}'_{t+1} (\boldsymbol{\Sigma}_\eta - \boldsymbol{\sigma}_\eta \boldsymbol{\sigma}_\eta')^{-1} \boldsymbol{\eta}_{t+1}}{2} \\ &\quad \times \pi(\boldsymbol{\beta}) \pi(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (11)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \mathbf{x}_t - Z_{xt} \boldsymbol{\beta}_x - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha}_t - \boldsymbol{\sigma}_v (A_t + B_t (y_t^* - h_t - m_{s_t})), \\ \boldsymbol{\eta}_{t+1} &= \boldsymbol{\alpha}_{t+1} - Z_{\alpha,t+1} \boldsymbol{\beta}_\alpha - \Phi(\boldsymbol{\alpha}_t - Z_{\alpha t} \boldsymbol{\beta}_\alpha) - \boldsymbol{\sigma}_\eta (A_t + B_t (y_t^* - h_t - m_{s_t})), \end{aligned}$$

$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ , である。この事後分布に従うパラメータの事後標本を以下の MCMC 法で生成する。<sup>3</sup>

1.  $\beta, \theta, \alpha, s$  を初期値として適当な値をとる.
2.  $s|\beta, \theta, \alpha, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n$  を生成する.
3.  $(\beta, \alpha)|\theta, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n$  を以下の二つに分けて生成する.
  - (a)  $\beta|\theta, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n$  を生成する.
  - (b)  $\alpha|\beta, \theta, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n$  を生成する.
4.  $\theta|\beta, \alpha, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n$  を生成する.
5. 生成したパラメータを保存し 2 へ戻る.

対数  $\chi^2$  分布の正規混合近似は正確であることが知られているが, mixture sampler に基づく事後分布の推論は, 厳密に元々のモデルから構成した事後分布の推論とは異なる可能性がある. そのずれは再重みづけによって修正できる. 詳しくは Omori et al. (2007) を参照されたい. 今回の分析ではすべて再重みづけによる修正を行っているが, その近似の影響は小さく再重みづけの前後で推定値はほぼ変わらなかった.

### 2.3.3 $s$ の生成

ステップ 2 では  $s_t, t = 1, \dots, n$  のサンプリングを行う. 他のパラメータをすべて条件づけた  $s_t$  の条件付事後分布は  $s_t = 1, \dots, 10$  の 10 点上の離散分布となる.  $g(s_t)$  を  $s_t$  の基準化していない事後確率関数とすると

$$g(s_t) \propto \frac{p_{s_t}}{v_{s_t}} \exp \left( - \frac{(y_t^* - \psi_y \alpha_t - m_{s_t})^2}{2v_{s_t}^2} - \frac{\mathbf{v}'_t (\Sigma_v - \sigma_v \sigma'_v)^{-1} \mathbf{v}_t}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta}'_{t+1} (\Sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma'_\eta)^{-1} \boldsymbol{\eta}_{t+1}}{2} \right).$$

したがって, 条件付事後確率関数は  $\pi(s_t = i|\cdot) = g(s_t = i) / \sum_{j=1}^{10} g(j), i = 1, \dots, n$  となる.

### 2.3.4 $(\beta, \alpha)$ の生成

ステップ 3 では Kim et al. (1998), Omori et al. (2007) らの方法により  $\beta$  を効率的にサンプリングする.  $\pi(\beta|\theta, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n)$  を  $\beta$  の条件付事後密度関数から  $\alpha$  に関して積分した周辺事後密度とする.  $(\beta, \alpha)$  の条件付事後分布からのサンプルを行うために条件付事後密度の分解を行う:

$$\pi(\beta, \alpha|\theta, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n) = \pi(\alpha|\beta, \theta, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n) \pi(\beta|\theta, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n). \quad (12)$$

線形状態空間モデルにおいては  $\pi(\beta|\theta, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n)$  は正規分布の密度に関数になることが知られており, その平均・分散は拡大カルマンフィルタ (Augmented Kalman filter) というアルゴリズムで計算することができる (de Jong (1991)). そのため, ギブスサンプラーを用いてサンプリングを行うことができる.

生成した  $\beta$  も条件づけて  $\pi(\alpha|\beta, \theta, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n)$  の密度を持つ分布からの生成を行うにはシミュレーション平滑化法を用いる. (詳しくは, 本稿の補論, de Jong and Shephard (1995), Durbin and Koopman (2002) を参照されたい).

### 2.3.5 $\theta$ の生成

ステップ4では $\theta$ を密度

$$\pi(\theta|\beta, \alpha, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n) \propto f(Y^{*n}|\beta, \theta, \alpha, s, \mathbf{d}, Z^n)\pi(\theta), \quad (13)$$

を持つ条件付事後分布から Metropolis-Hastings(MH) アルゴリズムを用いて発生させる。提案分布として $\mathcal{N}(\mu_{\hat{\theta}}^*, \Sigma_{\hat{\theta}}^*)$ をサポート上で切断した正規分布を用いる。ただし

$$\mu_{\hat{\theta}}^* = \hat{\theta} + \Sigma_{\hat{\theta}}^* \frac{\partial \log \pi(\theta|\beta, \alpha, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}, \quad (14)$$

$$\Sigma_{\hat{\theta}}^* = \left[ -\frac{\partial^2 \log \pi(\theta|\beta, \alpha, s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n)}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \right]^{-1}, \quad (15)$$

であり、 $\hat{\theta}$ は条件付事後分布の近似的なモードである<sup>4</sup>。 $\mathcal{N}(\mu_{\hat{\theta}}^*, \Sigma_{\hat{\theta}}^*)$ からサンプリングした候補点 $\theta^*$ を確率

$$\min \left\{ 1, \frac{f(Y^{*n}|\beta, \theta^*, \alpha, s, \mathbf{d}, Z^n)\pi(\theta^*)f_N(\theta^\dagger|\mu_{\hat{\theta}}^*, \Sigma_{\hat{\theta}}^*)}{f(Y^{*n}|\beta, \theta^\dagger, \alpha, s, \mathbf{d}, Z^n)\pi(\theta^\dagger)f_N(\theta^*|\mu_{\hat{\theta}}^*, \Sigma_{\hat{\theta}}^*)} \right\}$$

で採択する。採択されない場合には、ひとつ前の回でサンプリングされた値である $\theta^\dagger$ に留まるとする。

代わりに $\beta$ と $\alpha$ を拡大カルマンフィルタを用いて積分した尤度関数を使った条件付事後分布である $\pi(\theta|s, Y^{*n}, \mathbf{d}, Z^n)$ を使った方がサンプリングの効率性は向上することが知られている(例えば Kim et al. (1998), Omori et al. (2007)を参照されたい)。しかしながら、RSVモデルにおいては、サンプリングの効率性が通常のSVモデルよりも良いため、モードを求めるのに要する計算時間を考慮すると、 $\beta$ と $\alpha$ を条件付けた事後分布からのサンプリングで十分であったため、次節の実証例に関しては $\theta$ のサンプリングには拡大カルマンフィルタを使った尤度計算は行っていない。

## 3 暦効果に関する実証分析

一般化したRSVモデルを用いて暦効果の推定の実証例を示す。暦効果は株式市場のアノマリーとして知られているボラティリティの季節性である。しかし、実現ボラティリティを用いて暦効果を分析している研究は少なく、取引停止時間によるバイアスにどのような傾向があるかに関する研究はまだ少ない。本節ではRSVモデルのシンプルな特殊ケースを2種類用いてボラティリティ・実現ボラティリティ測定値のバイアスそれぞれに対して月・曜日・休日それぞれが与える影響について検証する。

### 3.1 データ

本研究ではOxford Mann Institute (Heber et al. (2009))により提供されている日経平均(Nikkei225)の日次終値収益率、実現カーネル(Realized kernel,  $RK$ )、メディアンRV(Median

truncated RV,  $MedRV$ ) を用いる。データの期間は 2007 年 1 月 5 日から 2013 年 12 月 30 日である<sup>5</sup>。高頻度データのクリーニングの方法・推定量の計算方法に関して詳しくは Barndorff-Nielsen et al. (2009) を参照されたい。第  $t$  日の日次終値収益率は  $t$  日と  $t-1$  日目の対数価格の差を 100 倍して定義した。第  $t$  日の  $RK$  と  $MedRV$  は以下のように定義される。  $t$  日に観測される  $M$  個の収益率  $y_{t+\frac{m}{M}}$ ,  $m = 1, \dots, M$  としてそれぞれ

$$\begin{aligned}
 RK &= RAC^M(0) + 2 \sum_{h=1}^H RAC^M(h) \\
 RAC^M(h) &= \sum_{m=1}^{M-h} y_{t+\frac{m}{M}} y_{t+\frac{m+h}{M}} \\
 MedRV &= \frac{\pi}{6 - 4\sqrt{3} + \pi} \left( \frac{M}{M-2} \right) \sum_{m=2}^{M-1} \text{med}(|y_{t+\frac{m-1}{M}}|, |y_{t+\frac{m}{M}}|, |y_{t+\frac{m+1}{M}}|)^2
 \end{aligned}$$

ただし  $\text{med}(\cdot)$  はメディアンを表す。 $RK$  はマイクロ構造ノイズのある下で一致性や漸近混合正規性をを持つ効率的な推定量であるがジャンプがある場合にはジャンプの二乗和の部分を除くできない。一方で  $MedRV$  は (有限個の) ジャンプがある下で、ジャンプの部分を除いたボラティリティに対して一致性や漸近混合正規性を持つなどの良い性質を持つことが知られている。

日次終値収益率  $y_t$  は  $t$  日と  $t-1$  日の終値の対数階差の 100 倍として定義されているため、東京証券取引所の取引停止時間である昼休みと夜間の間を含んでいることになる。一方で  $RK_t$ ,  $MedRV_t$  に関しては  $t$  日の市場の取引開始から終了までのデータを用いて計算される。その際、昼休みも取り除かれている。 $RK_t$ ,  $MedRV_t$  は取引停止の間の収益率の情報は含んでいないため下方バイアスがあると考えられる。Hansen and Lunde (2005) は夜間の取引を日次収益率の分散でバイアスを調整する方法を提案している。しかし暦効果などのバイアスに影響する変数がある場合には、全体の調整を一つのスケールで行うだけでなく、それらの変数を考慮した調整をする必要がある。本稿で提案した RSV モデルを用いるとバイアスの構造が式 (8) の  $Z_{xt}\beta_x$  に依存するならばそれをバイアス補正できる。例えば  $Z_{xt}\beta_x$  の要素が負バイアスが下方であればそれに対応する実現ボラティリティ測定値に下方バイアスがあるということになる。

本稿ではさらに暦効果の推定のために説明変数  $Z_{xt}$ ,  $Z_{ot}$  としてそれぞれに定数項、月・火・木・金の曜日ダミー、2 月から 12 月までの月ダミー、休日の前・後日ダミーの 17 種類のダミーを用いる。定数項は 1 月の前後に休日のない水曜日の平均的水準を意味する<sup>6</sup>。曜日効果も考えているので、ここでの休日ダミーの定義は土日以外の休日、例えば祝日・年末年始などを休日としている。また、ダミー変数ではとらえきれない休日が 2 日以上ある場合の影響を図るために、平日内の休日の日数を説明変数とした追加的な分析も行う。なお、日次収益率自体に暦効果がある可能性があるが、ここでは単純化のためにモデルの中には組み込まずに、日次収益率を最小二乗法でダミー変数に回帰し、その残差を  $y_t$  として用いる。

### 3.2 モデルの設定

ここでは 2 種類のモデルを考える。

モデル I 一つ目のモデルは  $F(\cdot) = \log(\cdot)$ ,  $q = 1$  として実現ボラティリティ測定値には  $RK$  を用いる。  $p = 1$  とし, さらに  $\psi_{ij} = \psi_{yj} = 1$  としたモデルである。 このモデルは Takahashi et al. (2009) のモデルに  $\rho_v$  を追加したものである。

モデル II 二つ目のモデルは,  $F(\cdot) = \log(\cdot)$ ,  $q = 2$  とし  $RK$  だけでなく  $MedRV$  を用いる。  $MedRV$  は日中 (intraday) のジャンプを取り除いたボラティリティを推定しているが, 式 (2) で表した収益率の方程式ではジャンプを個別にモデル化していない。 そこで, 日中のデータがジャンプを持っている場合, 収益率の分散  $\exp(h_t)$  は日中のジャンプによる変動を含んでいると仮定する。 また, 実現ボラティリティ測定値の測定誤差にも自己相関を仮定する。 この二つの仮定の下で,  $p = 3$  とし以下のように定式化する。

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_{1t} + \alpha_{2t} \\ x_{1t} &= \log(RK) = \beta'_{x1} z_{x1t} + \alpha_{1t} + \alpha_{2t} + \alpha_{3t} + v_{1t} \\ x_{2t} &= \log(MedRV) = \beta'_{x2} z_{x2t} + \alpha_{1t} + \psi_{23} \alpha_{3t} + v_{2t} \end{aligned}$$

即ち式 (7), (8) において

$$\begin{aligned} \psi_y &= (1 \quad 1 \quad 0) \\ \Psi &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \psi_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする。 ここで  $\psi_{23}$  は推定するパラメータである。 また識別のために  $\Sigma_v$  は対角行列とし,  $Z_{at}\beta_\alpha$  の第 2・3 要素はゼロとしている。

しばしば実証分析で用いられているモデルは, モデル I やモデル II を  $p = 2, 3$  のように拡張したモデルであるが,  $\alpha_{jt}$ ,  $j = 1, 2, 3$  について特に意味づけは行われず, 推定の結果  $\alpha_{1t}$  が持続性が高く,  $\alpha_{2t}$ ,  $\alpha_{3t}$  が一時的な変動や周期定期的な変動をとらえていると結論付けることが多い。 一方でモデル II の下では  $\alpha_{1t}$  は「ジャンプを含んでいない部分の日次のボラティリティ変動」,  $\alpha_{2t}$  は主に「日中のジャンプによる日次のボラティリティの変動」<sup>7</sup>,  $\alpha_{3t}$  は「実現ボラティリティ測定値特有の推定誤差の変動」と解釈することができる。 日次のボラティリティの変動は  $\alpha_{1t}$  と  $\alpha_{2t}$  から,  $MedRV$  は  $\alpha_{1t}$  と  $\alpha_{3t}$  から,  $RK$  はすべての要因の変動を受けていることになる。 推定するパラメータである  $\psi_{23}$  は, 実現ボラティリティ測定値特有の推定誤差の変動  $\alpha_{3t}$  を動学的に変動する因子モデルと考えたときの  $\log(MedRV)$  の因子負荷量と解釈できる。

モデル I は Dobrev and Szerszen (2010) や Koopman and Scharth (2012) の定式化に含まれるが, モデル II は含まれない。 実際 Dobrev and Szerszen (2010) や Koopman and Scharth (2012) は実証分析の際,  $RK$  と  $MedRV$  両方とも用いているが, 同時にモデル化するのではなく別々の分析で扱っている。

事前分布はモデル I については

$$\begin{aligned} \beta &\sim \mathcal{N}_{K_x + K_\alpha}(\mathbf{0}, \mathbf{I}), \quad \frac{\phi + 1}{2} \sim \mathcal{B}(20, 1.5), \\ \frac{\rho_v + 1}{2} &\sim \mathcal{B}(1, 1), \quad \frac{\rho_\eta + 1}{2} \sim \mathcal{B}(1, 1), \\ \Sigma_u = \sigma_v^2 &\sim \mathcal{IG}\left(\frac{5}{2}, \frac{0.2}{2}\right), \quad \sigma_\eta^2 \sim \mathcal{IG}\left(\frac{5}{2}, \frac{0.05}{2}\right), \end{aligned}$$

とした。  $\theta$  のサンプリングの際は、モードの探索を容易にするために  $\theta = (\log(1 - \phi) - \log(1 + \phi), \log \sigma_\eta^2, \log(1 - \rho_\eta) - \log(1 + \rho_\eta), \log \sigma_v^2, \log(\sqrt{(1 - \rho_\eta^2)} - \rho_v) - \log(\sqrt{(1 - \rho_\eta^2)} + \rho_v))'$  と変換して  $\theta$  の条件付事後分布からサンプリングを行っている。

モデル II に関しても同様で

$$\begin{aligned} \beta &\sim \mathcal{N}_{K_x + K_\alpha}(\mathbf{0}, \mathbf{I}), & \psi_{23} &\sim \mathcal{N}(1, 1) \\ \frac{\phi_i + 1}{2} &\sim \mathcal{B}(20, 1.5), i = 1, 2, & \frac{\phi_3 + 1}{2} &\sim \mathcal{B}(1, 1), \\ \frac{\rho_{\eta i} + 1}{2} &\sim \mathcal{B}(1, 1), & \sigma_{\eta i}^2 &\sim \mathcal{IG}\left(\frac{5}{2}, \frac{0.05}{2}\right), i = 1, \dots, 3 \\ \frac{\rho_{v j} + 1}{2} &\sim \mathcal{B}(1, 1), & \sigma_{v j}^2 &\sim \mathcal{IG}\left(\frac{5}{2}, \frac{0.2}{2}\right), i = 1, 2 \end{aligned}$$

とし、  $\theta$  のサンプリングの際は、  $\theta = \{\log(1 - \phi_1) - \log(1 + \phi_1), \log(1 - \phi_2) - \log(1 + \phi_2), \log(1 - \phi_3) - \log(1 + \phi_3), \log \sigma_{\eta 1}^2, \log \sigma_{\eta 2}^2, \log \sigma_{\eta 3}^2, \log(1 - \rho_{\eta 1}) - \log(1 + \rho_{\eta 1}), \log(\sqrt{(1 - \rho_{\eta 1}^2)} - \rho_{\eta 2}) - \log(\sqrt{(1 - \rho_{\eta 1}^2)} + \rho_{\eta 2}), \log(\sqrt{(1 - \rho_{\eta 1}^2) - \rho_{\eta 2}^2}) - \rho_{\eta 3} - \log(\sqrt{(1 - \rho_{\eta 1}^2) - \rho_{\eta 2}^2}) + \rho_{\eta 3}, \log \sigma_{v 1}^2, \log \sigma_{v 2}^2, \log \sigma_{v 3}^2, \log(\sqrt{(1 - \sum_{i=1}^3 \rho_{\eta i}^2)} - \rho_{v 1}) - \log(\sqrt{(1 - \sum_{i=1}^3 \rho_{\eta i}^2)} + \rho_{v 1}), \log(\sqrt{(1 - \sum_{i=1}^3 \rho_{\eta i}^2) - \rho_{v 1}^2}) - \rho_{v 2} - \log(\sqrt{(1 - \sum_{i=1}^3 \rho_{\eta i}^2) - \rho_{v 1}^2}) + \rho_{v 2}\}'$  と変換して  $\theta$  の条件付事後分布からサンプリングを行っている。

### 3.3 予備的な分析

まず最初に、  $y_t, y_t^*, \log(RK_t), \log(\text{Med}RV_t)$  を各説明変数に最小二乗法で回帰を行った。標準誤差は HAC 推定量を用いて計算している。  $y_t^*$  に関しては、  $y_t$  を各説明変数に回帰した残差を 2 乗したものの対数として定義している。推定結果は表 2 に掲載している。

各係数の  $t$  検定の結果を見ると、(i) 収益率  $y_t$  の平均自体には暦効果がないこと、(ii)  $y_t^*$  には休日後に大きくなり、7月に小さくなっていること、(iii)  $\log(RK_t), \log(\text{Med}RV_t)$  は金曜に大きくなること、(iv) 全体的に  $y_t^*$  と比べて  $\log(RK_t), \log(\text{Med}RV_t)$  は暦効果の影響が小さいことがわかる。曜日効果に関しては 1980 年代には火曜に収益率が小さくなる曜日効果が知られており(加藤 (1990)), 1990 年代に入るとその傾向が月曜に移ったという結果が砂田 (1996) の研究で指摘されている。今回は収益率は月・火曜日に負の値をとっており、砂田 (1996) が TOPIX で行った研究と同じ傾向を示しているが、係数は有意ではない。これは 2007 年から 2013 年と標本期間が異なることによると考えられ、近年は収益率の曜日効果が弱まっていると考えられる。ボラティリティに関しては、週末の金曜日に大きくなる傾向がみられ、特に  $\log(RK_t), \log(\text{Med}RV_t)$  では有意に大きくなっている。この結果は週末効果とも呼ばれており、砂田 (1996) や、SV モデルに導入した Watanabe (1999) と整合的な結果となっている。また、休日効果に関しては  $y_t^*$  については正の効果が出ている一方で、  $\log(RK_t), \log(\text{Med}RV_t)$  には効果がみられない。休日前後の影響は、特に市場が閉まる直前に異なっているものの、日中全体としてみると小さいことを示していると考えられる。

変数	$y_t$		$y_t^*$		$\log(RK_t)$		$\log(MedRV_t)$	
	推定値	s.e.	推定値	s.e.	推定値	s.e.	推定値	s.e.
定数項	-0.08	0.16	-0.49	0.30	-0.35	0.19	-0.95	0.19
月曜	-0.13	0.13	0.21	0.18	-0.02	0.05	-0.02	0.04
火曜	-0.12	0.13	-0.27	0.19	0.01	0.04	0.02	0.04
木曜	-0.01	0.13	0.34	0.18	0.06	0.04	0.03	0.04
金曜	-0.13	0.12	0.25	0.18	0.11*	0.05	0.09*	0.04
休日前	0.04	0.18	0.02	0.22	0.00	0.10	-0.01	0.09
休日後	0.44	0.26	0.91**	0.25	0.01	0.10	-0.12	0.08
2月	0.22	0.18	-0.49	0.36	-0.13	0.24	-0.07	0.23
3月	0.20	0.22	-0.17	0.38	0.08	0.26	0.14	0.25
4月	0.32	0.19	-0.35	0.34	-0.02	0.23	0.03	0.22
5月	0.04	0.20	-0.46	0.35	0.03	0.22	0.10	0.21
6月	0.16	0.19	-0.43	0.37	-0.11	0.25	-0.05	0.25
7月	0.11	0.18	-0.82*	0.34	-0.26	0.22	-0.21	0.22
8月	-0.01	0.19	-0.22	0.34	0.04	0.21	0.09	0.21
9月	0.07	0.20	-0.12	0.34	0.02	0.21	0.03	0.20
10月	-0.05	0.27	-0.20	0.44	0.18	0.29	0.23	0.27
11月	0.13	0.21	-0.19	0.38	0.11	0.27	0.20	0.26
12月	0.35	0.19	-0.49	0.35	-0.30	0.26	-0.28	0.25

表 2: 各ダミー変数の重回帰モデルの最小二乗法による推定結果. 変数名は各時期において 1 をとるダミー変数を意味する. s.e. は標準誤差を表す, 有意水準 5%, 1% で係数がゼロかどうかの  $t$  検定を行い, 棄却された変数の推定値にはそれぞれ\*, \*\*を付している.

### 3.4 暦効果なしの RSV モデルの推定結果

	事後平均	標準偏差	95% 信用区間	IF
$\phi$	0.952	0.007	[ 0.937, 0.965]	9.6
$\rho_\eta$	-0.550	0.041	[-0.628,-0.469]	9.9
$\sigma_\eta$	0.247	0.014	[ 0.219, 0.276]	19.7
$\rho_v$	-0.311	0.033	[-0.372,-0.241]	4.2
$\sigma_v$	0.458	0.030	[ 0.421, 0.536]	3.8
$\beta_{x1}$	-0.948	0.092	[-1.134,-0.770]	1.1
$\beta_{\alpha1}$	0.601	0.137	[ 0.333, 0.874]	1.1
$\exp(\beta_{x1})$	0.389	0.036	[ 0.322, 0.463]	1.1
$\exp(\beta_{h1})$	1.842	0.254	[ 1.395, 2.397]	1.1

表 3: 暦効果なしの RSV モデル I の推定値: 事後平均, 事後標準偏差, 95%信用区間, 非効率性因子 (IF)

表 3 に  $z_x, z_\alpha$  としてそれぞれに定数項のみを導入したモデル I の推定結果 (事後平均・事後分布の標準偏差・95%信用区間<sup>8</sup>・非効率性因子 (IF)<sup>9</sup>) を示す。

モデル I の推定値は, 多くの先行研究と整合的な結果が得られている。自己相関  $\phi$  は 1 の近くに分布しており, これはボラティリティ・クラスタリングと整合的である。 $\rho_\eta$  は負と推定されており, 収益率が下がった日の次の日の方が, ボラティリティが上昇していることがわかる。実現ボラティリティ測定値のバイアス項  $\beta_{x1}$  は負値に分布している。今回は終値収益率を使っているため, 実現ボラティリティ測定値に含まれていない夜間の変動を  $y_t$  は含んでおり, その部分のずれがバイアスとなっている。また, 収益率と実現ボラティリティ測定値の誤差の相関  $\rho_v$  は負の値に分布し, 95% 信用区間にはゼロは含まれていないが,  $\rho_\eta$  よりも絶対値の意味で小さい値に分布する。これは Chaussé and Xu (2012) の GMM による推定結果と一致している。なぜこのような相関の推定値が得られるかに関する議論はまだ少ない。今回仮定している実現ボラティリティ測定値のバイアス・誤差は乗法的にかかっているが, 加法的な誤差を考えた場合には, 通常のマイクロストラクチャノイズの仮定の下で誤差と収益率には負の相関が現れることを Diebold and Strasser (2008) が示している。また, Koopman and Scharth (2012) は日次収益率と実現ボラティリティ測定値が同じ高頻度データから計算されるため, 内生性があるという議論を行っている。

MCMC の標本生成の効率性を示す非効率性因子 IF は十分低い値が得られている。特に他の手法を用いると非効率性因子が高くなりがちな  $\beta_{x1}$  は 1.2 とほぼ無相関に近いサンプルが得られているといえる。

	事後平均	標準偏差	95% 信用区間	IF
$\phi_1$	0.956	0.008	[ 0.938, 0.970]	13.9
$\phi_2$	0.959	0.013	[ 0.927, 0.979]	19.0
$\phi_3$	0.177	0.073	[ 0.032, 0.323]	16.6
$\rho_{\eta 1}$	-0.480	0.048	[-0.576,-0.386]	11.3
$\rho_{\eta 2}$	-0.015	0.112	[-0.240, 0.196]	22.9
$\rho_{\eta 3}$	-0.121	0.041	[-0.200,-0.043]	8.3
$\sigma_{\eta 1}$	0.222	0.018	[ 0.188, 0.261]	25.5
$\sigma_{\eta 2}$	0.038	0.006	[ 0.029, 0.050]	32.2
$\sigma_{\eta 3}$	0.359	0.021	[ 0.316, 0.396]	13.0
$\rho_{v 1}$	-0.459	0.083	[-0.600,-0.284]	4.5
$\rho_{v 2}$	-0.483	0.090	[-0.631,-0.292]	4.0
$\sigma_{v 1}$	0.304	0.058	[ 0.230, 0.450]	4.3
$\sigma_{v 2}$	0.285	0.059	[ 0.212, 0.435]	3.8
$\psi_{23}$	0.802	0.067	[0.622, 0.897]	3.3
$\beta_{x 1}$	-0.942	0.098	[-1.136,-0.753]	1.0
$\beta_{x 2}$	-1.516	0.101	[-1.712,-1.318]	1.0
$\beta_{\alpha 1}$	0.591	0.148	[ 0.306, 0.880]	1.0
$\exp(\beta_{x 1})$	0.392	0.038	[ 0.321, 0.471]	1.0
$\exp(\beta_{x 2})$	0.221	0.022	[ 0.181, 0.268]	1.0
$\exp(\beta_{h 1})$	1.825	0.271	[ 1.357, 2.410]	1.0

表 4: 暦効果なしの RSV モデル II の推定値: 事後平均, 事後標準偏差, 95%信用区間, 非効率性因子 (IF)

表 4 に  $z_x, z_\alpha$  としてそれぞれに定数項のみを導入したモデル II の推定結果を示す。「ジャンプを含んでいない部分の日次のボラティリティ変動」を意味するボラティリティの第一成分  $\alpha_{1t}$  に関連するパラメータについてはモデル I のパラメータ推定値と同様の推定値が得られていることがわかる。「日中のジャンプによる日次のボラティリティの変動」である第二成分  $\alpha_{2t}$  に関連するパラメータについては高い自己相関を持っていることがわかる。これはジャンプの多い日が持続していることを意味している。しかしながらジャンプによる効果の部分にはレバレッジ効果  $\rho_\epsilon$  については信用区間にゼロを含んでおり、ジャンプによる日次ボラティリティ変動に関しては前日の収益率からの影響を受けにくいことがわかる。一方で「実現ボラティリティ測定値特有の推定誤差の変動」即ち実現ボラティリティ測定値の観測誤差の因子を意味する  $\alpha_{3t}$  のパラメータに関しては自己相関レバレッジの 95%信用区間にはゼロを含んでいないものの、推定値はそれぞれ 0.177, -0.171 と低い値になっている。実現ボラティリティ測定値の推定誤差の変動は通常自己相関がゼロと仮定されているが、弱い自己相関やレバレッジ効果を持つことがわかる。実現ボラティリティの測定方程式のパラメータに関しては、 $\log(\text{MedRV})$  の  $\alpha_{3t}$  についての因子負荷を表す  $\psi_{23}$  が 0.802 と高い値を示している。これは実現ボラティリティ測定誤差の相関が高いという先行研究 (Venter and de Jongh (2014)) と整合的な結果を示している。実現ボラティリティ測定値の誤差の相関  $\rho_{vj}$  の推定値は -0.459, -0.483 とモデル I よりも相関が高くなっている。これは測定誤差を自己相関を持つ因子部分とそれ以外の誤差に分離してい

ることの影響と考えられる。分散  $\sigma_{v1}$  はモデル I と比較して小さくなっているが、これも  $\alpha_{3t}$  を導入した影響であろう。ボラティリティの平均水準と  $\log(RK)$  のバイアスに関しては  $\beta_{h1}$ ,  $\beta_{x1}$  両方ともモデル I の推定値とほぼ同様の推定値が得られている。  $\log(MedRV)$  のバイアスに関しては  $-1.516$  と  $\log(RK)$  のバイアスよりも小さい値が推定されている。どちらも推定値の計算に使われている日中のデータに関しては同じなので、夜間などの取引停止時間のバイアスだけでなく、ジャンプの影響によると解釈できる。

### 3.5 暦効果のある RSV モデルの推定結果

次に暦効果あるモデルの推定結果を示す。

	事後平均	標準偏差	95% 信用区間	IF
$\phi$	0.961	0.006	[ 0.947, 0.972]	7.4
$\rho_\eta$	-0.561	0.044	[-0.644,-0.473]	11.0
$\sigma_\eta$	0.223	0.013	[ 0.198, 0.249]	17.4
$\rho_v$	-0.273	0.034	[-0.336,-0.204]	3.4
$\sigma_v$	0.507	0.038	[ 0.456, 0.602]	2.1

表 5: 暦効果のある RSV モデル I の推定値: 事後平均, 事後標準偏差, 95%信用区間, 非効率性因子 (IF)

表 5 は暦効果を導入した RSV モデル I の回帰構造以外のパラメータの推定の結果である。暦効果を導入したことによりボラティリティの持続性を表す  $\phi$  の推定値が 0.951 から 0.962 に上がっている。これは暦効果による周期性を取り除いたために上昇したものと考えられる。レバレッジ効果を表す  $\rho_\eta$  や分散  $\sigma_\eta^2$  はそれほど大きな変化はない。一方で収益率と実現ボラティリティ測定誤差  $\rho_v$  が絶対値の意味で小さくなり、分散  $\sigma_v^2$  は大きくなっている。これは、暦効果を考えない場合には  $v_t$  にその影響が強く出ているためと考えられる。

表 6 は曜日・休日・月ダミーの係数の推定値である。係数  $\beta_\alpha$  はボラティリティの平均水準を表すパラメータである。火曜, 休日の後日, 12 月の係数ダミーの信用区間にゼロを含んでいない。火曜, 12 月ダミーの係数の推定値は負であり、水曜, 1 月と比較してボラティリティが小さいことを示している。火曜効果に関しては Tanizaki (2004) の Model 7 の結果と整合的であり、砂田 (1996) 等でも 90 年代以降は同様の効果が推定されている。これは月曜のアメリカ証券市場からの影響などが考えられる。12 月は年末で長期休みの前であることから、変動が小さくなっていると考えられる。休日の後日の係数は正であり休日の次の日のボラティリティは大きくなっていることがわかる。しかしながら火曜, 休日の後日の実現ボラティリティのバイアスに関する係数  $\beta_x$  のパラメータの推定値は符号が逆になっている。結果として実現ボラティリティ測定値の平均水準である  $\beta_x + \beta_\alpha$  に関しては金曜, 7 月, 11 月, 12 月に関して信用区間にゼロを含んでおらず、金曜が正、7 月, 11 月, 12 月が負となった。実現ボラティリティ測定値に関しては、金曜が他の曜日よりも相対的に高く、7, 11, 12 月が他の月よりも相対的に低くなった。これは予備的に行った最小二乗法の結果と整合的であるが、月効果に関しては最小二乗法での結果では得られなかった結果が得られている。これは、RSV モデルにおいてボラティリティの自己相関を導入したことによると考えられる。

変数	$\beta_x$		$\beta_\alpha$		$\beta_x + \beta_\alpha$	
	事後平均 [95%信用区間]	IF	事後平均 [95%信用区間]	IF	事後平均 [95%信用区間]	IF
定数項	-0.949 [-1.358, -0.548]	2.8	0.794 [0.270, 1.315]	2.1	-0.155 [-0.519, 0.201]	1.1
月曜	0.012 [-0.217, 0.240]	5.7	-0.022 [-0.239, 0.196]	6.4	-0.009 [-0.087, 0.071]	0.9
火曜	0.290 [0.065, 0.518]	4.9	-0.284 [-0.498, -0.071]	5.3	0.006 [-0.071, 0.083]	1.0
木曜	-0.009 [-0.229, 0.210]	5.3	0.068 [-0.140, 0.271]	5.8	0.059 [-0.015, 0.134]	0.9
金曜	0.067 [-0.167, 0.298]	5.5	0.044 [-0.180, 0.266]	6.1	0.111 [0.033, 0.191]	0.7
休日前	0.150 [-0.157, 0.444]	4.7	-0.160 [-0.442, 0.132]	5.2	-0.010 [-0.129, 0.109]	1.0
休日後	-0.743 [-1.076, -0.431]	5.7	0.730 [0.431, 1.043]	6.0	-0.013 [-0.128, 0.102]	1.1
2月	-0.002 [-0.433, 0.438]	4.0	-0.203 [-0.690, 0.282]	3.3	-0.205 [-0.488, 0.086]	1.0
3月	-0.154 [-0.613, 0.317]	3.6	-0.122 [-0.684, 0.445]	2.8	-0.276 [-0.643, 0.095]	1.2
4月	-0.010 [-0.506, 0.468]	3.1	-0.133 [-0.752, 0.487]	2.6	-0.142 [-0.539, 0.279]	1.3
5月	0.021 [-0.488, 0.532]	3.3	-0.166 [-0.795, 0.477]	2.6	-0.146 [-0.567, 0.289]	1.2
6月	-0.125 [-0.638, 0.366]	2.7	-0.095 [-0.725, 0.533]	2.0	-0.220 [-0.665, 0.211]	1.0
7月	0.046 [-0.463, 0.561]	2.6	-0.442 [-1.079, 0.191]	1.8	-0.396 [-0.848, 0.053]	1.0
8月	-0.071 [-0.589, 0.426]	2.7	-0.056 [-0.689, 0.608]	2.0	-0.128 [-0.574, 0.313]	1.1
9月	-0.136 [-0.641, 0.361]	3.3	0.046 [-0.572, 0.693]	2.6	-0.089 [-0.523, 0.341]	1.2
10月	0.122 [-0.350, 0.606]	2.8	-0.268 [-0.895, 0.336]	2.1	-0.146 [-0.558, 0.259]	1.2
11月	-0.063 [-0.529, 0.398]	3.2	-0.367 [-0.935, 0.204]	2.6	-0.430 [-0.801, -0.065]	1.4
12月	0.046 [-0.371, 0.451]	3.7	-0.573 [-1.022, -0.093]	2.8	-0.526 [-0.816, -0.221]	1.2

表 6: 暦効果のある RSV モデル I の暦効果, 各ダミー変数の係数の推定結果. 変数名は各時期において 1 をとるダミー変数を意味する.

	事後平均	標準偏差	95% 信用区間	IF
$\phi_1$	0.959	0.008	[ 0.942, 0.972]	10.6
$\phi_2$	0.956	0.015	[ 0.922, 0.979]	14.9
$\phi_3$	0.293	0.099	[ 0.110, 0.498]	18.7
$\rho_{\eta 1}$	-0.453	0.054	[-0.554,-0.343]	14.2
$\rho_{\eta 2}$	-0.109	0.150	[-0.401, 0.162]	29.0
$\rho_{\eta 3}$	-0.162	0.051	[-0.267,-0.064]	11.5
$\sigma_{\eta 1}$	0.217	0.017	[ 0.183, 0.249]	23.0
$\sigma_{\eta 2}$	0.038	0.005	[ 0.029, 0.049]	31.3
$\sigma_{\eta 3}$	0.307	0.024	[ 0.261, 0.352]	16.4
$\rho_{v 1}$	-0.343	0.057	[-0.453,-0.231]	4.0
$\rho_{v 2}$	-0.355	0.061	[-0.473,-0.233]	3.7
$\sigma_{v 1}$	0.406	0.053	[ 0.326, 0.540]	4.0
$\sigma_{v 2}$	0.378	0.056	[ 0.295, 0.518]	3.3
$\psi_{23}$	0.742	0.101	[ 0.498, 0.898]	2.9

表 7: 暦効果のある RSV モデル II の推定値: 事後平均, 事後標準偏差, 95%信用区間, 非効率性因子 (IF)

次にモデル II における曜日効果を示す。まず回帰構造以外のパラメータの推定の結果を表 7 に示す。モデル I のときと同様に、暦効果の導入の有無で特に異なるのは実現ボラティリティ測定誤差 ( $\alpha_{3t}, \mathbf{v}_t$ ) に関連するパラメータである。モデル I と同様  $\rho_{vi}$  が絶対値の意味で小さくなり、分散  $\sigma_{vi}^2$  は大きくなっているが、モデル II で導入した因子  $\alpha_{3t}$  の自己相関  $\phi_3$  やレバレッジ効果  $|\rho_{\eta 3}|$  は大きく、分散  $\sigma_{\eta 3}^2$  は小さくなっており、暦効果を無視すると周期性の影響が  $\alpha_{3t}, \mathbf{v}_t$  に出ていることがわかる。

表 8 は  $\beta_\alpha, \beta_{x1} + \beta_\alpha, \beta_{x2} + \beta_\alpha$  の推定結果である。それぞれ対数日次ボラティリティ,  $\log(RK)$ ,  $\log(\text{Med}RV)$  の暦効果を表している。95%信用区間にゼロを含んでいないのは対数日次ボラティリティに関しては火曜, 休日の後日, 12 月の係数ダミー,  $\log(RK)$  については金曜, 7 月, 11 月, 12 月であり, これらは符号や値もモデル I の結果とほぼ同じ結果になっている。 $\log(\text{Med}RV)$  の曜日効果については金曜, 休日の後日, 11 月, 12 月ダミーの係数に 95%信用区間にゼロが含まれていない。特に他の二つと結果が異なるのは休日の後日のダミーの係数推定値である。休日の後日の係数は負に推定されている。これは休日の後日に上昇しているボラティリティが MedRV では除去されるジャンプの部分の寄与により上昇していることを意味していると考えられる。

変数	$\beta_\alpha$		$\beta_{x1} + \beta_\alpha$		$\beta_{x2} + \beta_\alpha$	
	事後平均 [95%信用区間]	IF	事後平均 [95%信用区間]	IF	事後平均 [95%信用区間]	IF
定数項	0.845 [ 0.343, 1.357]	2.2	-0.080 [-0.429, 0.276]	1.1	-0.674 [-1.011,-0.326]	1.1
月曜	-0.053 [-0.273, 0.153]	6.2	-0.012 [-0.090, 0.065]	0.9	-0.018 [-0.086, 0.050]	1.0
火曜	-0.269 [-0.486,-0.063]	5.0	0.004 [-0.069, 0.075]	1.1	0.011 [-0.052, 0.078]	1.0
木曜	0.071 [-0.141, 0.290]	5.9	0.060 [-0.012, 0.132]	1.1	0.026 [-0.038, 0.088]	1.1
金曜	0.072 [-0.149, 0.293]	6.5	0.111 [ 0.035, 0.189]	1.1	0.087 [ 0.019, 0.153]	1.2
休日前	-0.178 [-0.458, 0.122]	4.8	0.003 [-0.109, 0.115]	1.0	-0.003 [-0.101, 0.096]	1.3
休日後	0.754 [ 0.450, 1.060]	6.7	0.019 [-0.094, 0.129]	1.2	-0.107 [-0.208,-0.009]	0.9
2月	-0.218 [-0.679, 0.253]	3.6	-0.211 [-0.482, 0.062]	1.3	-0.152 [-0.417, 0.107]	1.3
3月	-0.131 [-0.666, 0.409]	2.8	-0.309 [-0.662, 0.045]	1.4	-0.244 [-0.585, 0.096]	1.4
4月	-0.144 [-0.719, 0.448]	2.2	-0.194 [-0.582, 0.202]	1.3	-0.149 [-0.525, 0.227]	1.2
5月	-0.331 [-0.919, 0.285]	2.4	-0.305 [-0.707, 0.109]	1.4	-0.256 [-0.649, 0.149]	1.3
6月	-0.178 [-0.805, 0.438]	2.1	-0.344 [-0.763, 0.076]	1.2	-0.298 [-0.709, 0.111]	1.2
7月	-0.510 [-1.140, 0.096]	2.0	-0.459 [-0.888,-0.032]	1.2	-0.413 [-0.835, 0.003]	1.2
8月	-0.176 [-0.791, 0.441]	2.3	-0.253 [-0.686, 0.177]	1.3	-0.217 [-0.638, 0.208]	1.3
9月	-0.046 [-0.672, 0.557]	2.7	-0.206 [-0.628, 0.210]	1.4	-0.211 [-0.626, 0.203]	1.3
10月	-0.357 [-0.919, 0.202]	2.8	-0.263 [-0.660, 0.121]	1.5	-0.226 [-0.609, 0.156]	1.5
11月	-0.439 [-0.995, 0.093]	2.9	-0.521 [-0.877,-0.173]	1.4	-0.433 [-0.786,-0.084]	1.3
12月	-0.616 [-1.080,-0.152]	3.4	-0.587 [-0.871,-0.298]	1.3	-0.572 [-0.845,-0.298]	1.2

表 8: 暦効果のある RSV モデル II の暦効果, 各ダミー変数の係数の推定結果. 変数名は各時期において 1 をとるダミー変数を意味する.

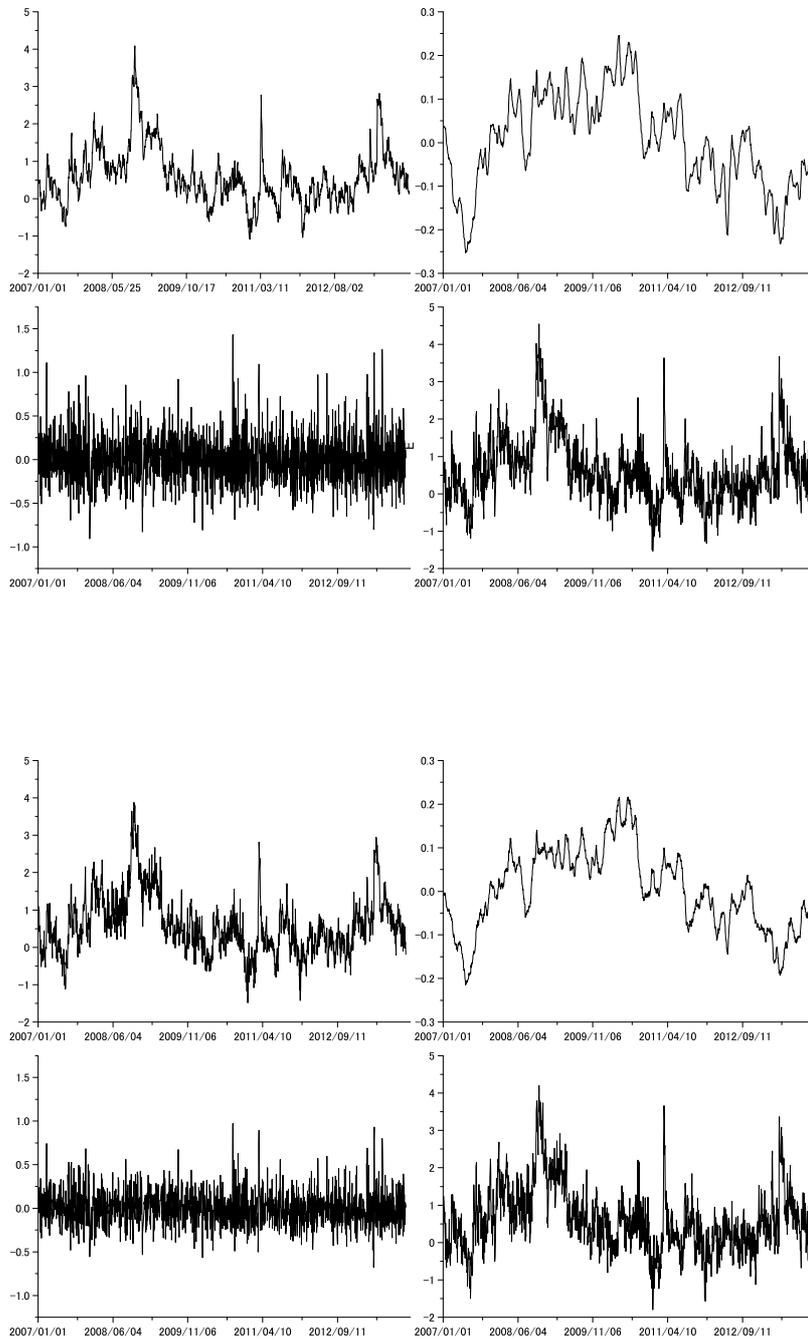


図 1: 上図: 暦効果なし, 下図: 暦効果ありの RSV モデル II の状態変数  $\alpha_t$  の事後平均のプロット. それぞれ左上:  $\alpha_{1t}$ , 右上:  $\alpha_{2t}$ , 左下:  $\alpha_{2t}$ , 右下:  $\sum_{i=1}^3 \alpha_{it}$ .

図1はモデルIIのそれぞれの対数ボラティリティの状態変数  $\alpha_t$  の推定値(事後平均)のプロットである。 $\alpha_t$ の動きが暦効果の有無でどのように変化したかを表している。ボラティリティの変動を表す  $\alpha_{1t}$  が2008年から2009年ごろに最も高くなるのと比較してジャンプの寄与を表す  $\alpha_{2t}$  は2010年以降も株式の急激な変化があった時期(例えば2011年の3月頃)には上昇し、その急激な変化が治まった時期に低下している。暦効果有無に関して比較すると、 $\alpha_{1t}$  の変動に暦効果が導入されるため、変化が激しくなり、その分、 $\alpha_{3t}$  の分散が小さくなっていることがわかる。結果的には全てを重ね合わせた  $\sum_{i=1}^3 \alpha_{it}$  にはほぼ影響はないといえる。

### 3.6 休日の長さを導入したRSVモデルの推定結果

最後に休日の長さの影響を調べるために、説明変数に休日の前後日にその休日の日数を入れた説明変数を追加した。これまでの結果の通り、モデルIの暦効果の結果とモデルIIの  $\log(RK)$  に関する暦効果の結果は同様であるのでモデルIIに関する  $\beta_\alpha$ ,  $\beta_{x1} + \beta_\alpha$ ,  $\beta_{x2} + \beta_\alpha$  の推定結果のみ表9に示す。

95%信用区間内にゼロを含んでいない暦効果の変数はボラティリティ潜在変数の平均 ( $\beta_\alpha$ ) に関しては火曜、休日の前日ダミー、休日の前後に入れた休日日数である。 $\log(RK)$  の平均 ( $\beta_{x1} + \beta_\alpha$ ) は金曜ダミーと休日の次の日に入れた休日日数であり、 $\log(MedRV)$  の平均 ( $\beta_{x2} + \beta_\alpha$ ) は金曜、休日前後ダミーと休日の前日に入れた休日日数である。休日の日数が1日のみの場合、ダミーと日数が相殺され日数を入れない場合と同様の結果になる。どのばあいも休みの日が2日以上の場合、休日の日数分、休日の前日は小さく、休日の後日は大きくなっている。休日の長さは前後の終値に影響していることがわかる。また、 $\log(RK)$  には休日の後に日数の正の影響があり、 $\log(MedRV)$  には休日の後にはダミーでのみ負の影響があることから、特に日中のジャンプの影響が前日までの休みの長さに影響を受けていることがわかる。一方で休日の長さが長いほど休日の前日はジャンプ以外の部分 ( $\beta_{x2} + \beta_\alpha$ ) は小さくなっていることがわかる。これは後の長期の休みの存在により、ジャンプなどの短期的な変動以外の株価の変動が小さくなっているといえる。休日の日数を導入したことにより、月効果の推定値が大きく変わり、12月効果もなくなっている。これは、12月の終わり、1月(定数項)の始めの部分の長期休みの影響が休日数の影響を受けるため、月ダミーとして説明されていた効果が休日数の効果で説明されることによると考えられる。

変数	$\beta_\alpha$		$\beta_{x1} + \beta_\alpha$		$\beta_{x2} + \beta_\alpha$	
	事後平均 [95%信用区間]	IF	事後平均 [95%信用区間]	IF	事後平均 [95%信用区間]	IF
定数項	0.615 [ 0.100, 1.141]	2.4	-0.254 [-0.610, 0.096]	1.0	-0.834 [-1.177,-0.491]	1.0
月曜	-0.088 [-0.302, 0.120]	5.6	-0.013 [-0.092, 0.062]	0.9	-0.018 [-0.088, 0.052]	1.1
火曜	-0.250 [-0.472,-0.041]	6.3	0.007 [-0.066, 0.083]	0.9	0.012 [-0.053, 0.077]	0.9
木曜	0.099 [-0.112, 0.308]	5.7	0.057 [-0.013, 0.130]	0.9	0.024 [-0.039, 0.087]	1.2
金曜	0.054 [-0.165, 0.267]	6.4	0.108 [ 0.031, 0.183]	1.1	0.084 [ 0.015, 0.151]	0.9
休日前	0.612 [ 0.180, 1.075]	4.7	0.140 [-0.059, 0.345]	0.9	0.205 [ 0.020, 0.392]	1.1
休日後	0.004 [-0.600, 0.544]	6.6	-0.153 [-0.350, 0.044]	0.9	-0.182 [-0.357,-0.006]	1.0
休日数前	-0.586 [-0.830,-0.325]	3.5	-0.110 [-0.236, 0.019]	0.9	-0.160 [-0.276,-0.052]	0.9
休日数後	0.500 [ 0.180, 0.910]	7.0	0.132 [ 0.012, 0.253]	0.9	0.062 [-0.048, 0.169]	0.9
2月	-0.106 [-0.579, 0.360]	3.7	-0.161 [-0.441, 0.110]	1.3	-0.114 [-0.375, 0.146]	1.2
3月	0.029 [-0.513, 0.562]	2.5	-0.213 [-0.564, 0.128]	1.2	-0.164 [-0.499, 0.168]	1.1
4月	0.002 [-0.584, 0.573]	2.5	-0.079 [-0.465, 0.298]	1.4	-0.050 [-0.423, 0.312]	1.2
5月	-0.122 [-0.733, 0.455]	2.0	-0.138 [-0.562, 0.273]	1.4	-0.098 [-0.503, 0.309]	1.4
6月	0.048 [-0.569, 0.659]	2.5	-0.168 [-0.588, 0.253]	1.3	-0.135 [-0.553, 0.281]	1.3
7月	-0.258 [-0.880, 0.367]	2.3	-0.272 [-0.704, 0.151]	1.4	-0.241 [-0.663, 0.179]	1.3
8月	0.070 [-0.552, 0.673]	2.4	-0.060 [-0.487, 0.368]	1.4	-0.036 [-0.455, 0.375]	1.4
9月	0.256 [-0.375, 0.885]	2.8	0.004 [-0.423, 0.429]	1.4	-0.018 [-0.424, 0.403]	1.3
10月	-0.069 [-0.680, 0.529]	2.3	-0.028 [-0.438, 0.368]	1.4	-0.010 [-0.408, 0.374]	1.4
11月	-0.102 [-0.672, 0.456]	2.6	-0.238 [-0.625, 0.135]	1.4	-0.169 [-0.524, 0.182]	1.3
12月	-0.136 [-0.617, 0.345]	3.1	-0.270 [-0.576, 0.030]	1.3	-0.271 [-0.563, 0.026]	1.3

表 9: 暦効果のある RSV モデル II の暦効果, 各ダミー変数の係数の推定結果. 変数名は各時期において 1 をとるダミー変数を意味する.

## 4 モデルの拡張

この節では式 (2), (3), (5) や式 (7), (8), (9) モデルの拡張とその応用に関する研究を紹介し、今回提案した RSV モデルと mixture sampler との関連を議論する。

### 4.1 時系列構造の拡張

本稿では  $h_t$  の時系列モデルとして 1 次の自己回帰過程とその重ね合わせ、および季節性を導入する手法を考慮した。RSV モデルではボラティリティのより一般の時系列特性を表現するように拡張する研究もなされている。例えば Shirota et al. (2014) は  $h_t$  に ARFIMA 過程となるモデルを考え、移動平均過程で近似する方法を用いてボラティリティの長期記憶時系列の性質を表現している。実現ボラティリティ測定値を用いていない通常の SV モデルでは So (1999), Jensen (2004) がそれぞれ別の表現法を用いて ARFIMA SV モデルの mixture sampler を用いた推定法を提案している。その特殊ケースとして、通常の自己回帰移動平均 (ARMA) モデルに関しては、状態空間表現として書き直すことができる。計算のしやすい ARMA の状態空間表現として de Jong and Penzer (2004) がある。また、mixture sampler は適用できないものの、Ando (2006) は  $h_{t+1}$  と  $h_t$  の一般的な関数形をスプラインを用いて定式化した SV モデルを提案している。同様に mixture sampler では推定できないが、Nugroho and Morimoto (2013) は Box-Cox 変換を用いた RSV モデル を提案している。

これまでの実現ボラティリティ測定値の理論的な研究に関しては、高頻度収益率のモデルとしてジャンプのあるセミマルチンゲールを議論することが多く、ジャンプの検出も関心がもたれている (Barndorff-Nielsen and Shephard (2006), Ait-Sahalia and Jacod (2009))。日次収益率のモデルである SV にジャンプを導入した研究に、Andersen et al. (2002), Chib et al. (2002), Nakajima and Omori (2009) がある。Chib et al. (2002), Nakajima and Omori (2009) は mixture sampler を SV モデルを推定している。

本稿の実証分析モデル II では  $RK$  と、ジャンプ以外のボラティリティの推定量である  $MedRV$  の 2 種類の実現ボラティリティ測定値を用いて、RSV でジャンプの寄与分を分離するようなモデルを提案したが、元々の SV モデルの中でジャンプの動きがモデル化されていない。日中のジャンプが極端に大きく、日次収益率のジャンプとみなせるような場合には、RSV モデルにジャンプを導入することが重要になると考えられる。

### 4.2 収益率と実現ボラティリティ測定値の観測誤差の誤差分布の拡張

収益率のショックである  $\varepsilon_t$  は正規分布と仮定しているが、一般に正規分布の尺度混合分布で作られる分布に拡張することができる。例えば、SV モデルの文脈では Kim et al. (1998) では  $t$  分布への mixture sampler が提案されている。より一般に正規分布の平均尺度混合である一般化双曲分布 (Generalized Skew) への拡張も可能であるが、特殊ケースである GH skewed  $t$  分布で十分であることが Nakajima and Omori (2012) で議論されている。RSV モデルでは Takahashi et al. (2014) で GH skewed  $t$  分布への拡張が提案されている。さらに、SV モデルの研究では  $\varepsilon_t$  には分布を仮定せずに、ベイジアン・ノンパラメトリック (例えば Hjort et al. (2010) を参照されたい) の手法を用いて推定する、セミパラメトリック SV モデルが提案され

ている。Jensen and Maheu (2010) は混合する尺度の分布を、Delatola and Griffin (2011) は  $\log \varepsilon_t^2$  の分布そのものをディリクレ過程事前分布を用いて無限個の正規分布の混合分布でモデル化しており、Delatola and Griffin (2011) は mixture sampler を適用している。

これまでの RSV モデルの研究では実現ボラティリティ測定値の誤差項である  $v_t$  に関しては正規分布が仮定されている。ボラティリティの実現ボラティリティ測定値には中心極限定理 (もしくは正規混合分布への安定収束) が成立することが証明されており、対数をとることで正規分布での近似がよくなるといわれている。しかしながら実際の誤差項が必ずしも正規分布に従うわけではないので  $v_t$  の分布を今後分布を用いて一般化することで予測やあてはまりがよくなる可能性がある。

さらに、実現ボラティリティ測定値の漸近分散はボラティリティと、integrated quarticity と呼ばれる確率的な量に依存することが知られている。Dobrev and Szerszen (2010) ではその推定量である実現 quarticity を用いて  $\Sigma_v$  をモデル化している。しかし、実現ボラティリティに誤差やバイアスがある場合、実現 quarticity にもその影響はあると考えられるのでそれを考慮したモデル化も必要であろう。

本稿の実証分析モデル II では実現ボラティリティ特有の因子として  $\alpha_{3t}$  を導入した。この量は integrated quarticity に依存している可能性があるため今後は  $\alpha_{3t}$  と実現 quarticity を結びつける拡張が重要になると考えられる。

## 5 まとめと今後の課題

本稿では SV モデルに実現ボラティリティ測定値を導入した RSV モデルを一般化し、mixture sampler の提案を行った。mixture sampler を用いると、他の方法では行うことの難しい  $(\beta_x, \beta_\alpha)$  の  $\alpha$  を積分消去した条件付同時事後分布からの効率的なサンプリングを行うことができることを示した。これまで提案されている RSV との関連を議論し、暦効果に関する実証例を示した。更に拡張できる様々な一般化の方法を議論した。今後はリスク管理のための予測精度の比較などを通じてどのような変数を用いるべきか、レバレッジや相関の有無等どのようなパラメータ化をすべきかを調べていく必要がある。

また、第 3 節の分析でも示された通り、mixture sampler は非常に効率的なサンプリング方法ではある。しかしながら推定が難しいモデルも存在する。例えば、平均やリスクプレミアムを考慮して収益率の方程式を

$$y_t = \beta_y' z_{yt} + \gamma \exp(h_t) + \exp(h_t/2)\varepsilon_t$$

としてしまうと両辺を二乗して対数をとった時に  $h_t$  が線形で出てこなくなるために問題が生じる。 $\gamma = 0$  のときは理論的には問題なく適用できるが、実際計算する場合には  $\beta_y$  の計算効率的なサンプリングアルゴリズムが提案されていない。Chib et al. (2002) では  $\beta_y$  の条件付き事後分布からのサンプリングを行う時に、真のモデルから近似的に発生させる方法を用いているが、その場合、近似モデルからのサンプリングですらなくなるため、再重みづけ法が確立されていない。このような場合には、 $\beta$  に関するサンプリングの効率性は落ちるものの、Omori and Watanabe (2008), Takahashi et al. (2009) らのブロックサンプラーなどの別の手法を使って推定する必要がある。

最後に、提案されたモデルを用いて実際のリスク管理に応用することは重要である。例えば Takahashi et al. (2014) では RSV モデル、Watanabe (2012) は RGARCH モデルで分位点 (Value-at-risk) の予測を行っているオプション価格の予測に関しては Ubukata and Watanabe (2014) が ARFIMA や HAR モデルなどを用いて、Takeuchi-Nogimori (2012) は RGARCH モデルの下で様々な実現ボラティリティ測定値を使用した影響を網羅的に調べている。今回提案した一般化 RSV モデルを派生証券価格付け・リスク管理へと応用し、それぞれの問題に適した定式化を探ることが今度の課題である。

## 6 謝辞

渡部敏明教授 (一橋大学), 2 名の匿名査読者には有益なコメントをいただいた。ここに心よりお礼申し上げる。本研究は文部科学省科研費基盤 (A) (No. 24243031; 25245035), 一橋大学グローバル COE プログラム「社会科学の高度統計・実証分析拠点構築」, 一橋大学経済研究所共同利用・共同研究拠点事業プロジェクト研究 (高頻度データを用いたボラティリティ変動モデルの開発とリスク管理への応用) から助成を受けている

## 注

<sup>1</sup> 観測頻度を細かくしたとき、マイクロ構造によるノイズが価格に加法的に加わり、ノイズと価格が無相関な場合には RV に上方バイアスが生じることが知られている (詳しくは Bandi and Russell (2008), Zhang et al. (2005) 等を参照されたい). 一方で Andersen et al. (2010) や Ubukata and Watanabe (2014) では実際の収益率のデータで下方バイアスが生じる場合があることを報告している.

<sup>2</sup> 実際には  $\log(\cdot)$  の中がゼロになって発散するのを防ぐために, Kim et al. (1998) や Omori et al. (2007) では,  $y_t^* = \log(y_t^2 + c)$  と正の数  $c > 0$  を加えている. 本稿では  $c = 10^{-32}$  とした.

<sup>3</sup> MCMC 法については Chib (2001), 渡部 (2000), 和合 (2005), 小西他 (2008), 古澄 (2009) 等を参照されたい.

<sup>4</sup> 最大化計算が不十分で,  $\hat{\theta}$  による条件付き事後分布のモードの近似が悪い場合には,  $\Sigma_{\theta}^*$  は正値定符号行列にならない場合がある. 特にサンプリングの初期に起こりやすいが, この場合には  $\Sigma_{\theta}^* = 0.001\mathbf{I}$  とおき, その後の計算を行う (ただし  $\mathbf{I}$  は単位行列).

<sup>5</sup> Heber et al. (2009) の公開データでは 2008 から 2009 年に計 20 日データが欠損している部分がある. 特に曜日の偏りや特殊な出来事もなかった. ここではそれらも休日として扱っているが, 影響はほとんどない.

<sup>6</sup> 月ダミーに関しては, ダミーではなく周期関数を用いる Flexible Fourier Form (Gallant (1981)) や, 和に制約を入れたランダムウォークとして  $\alpha_{it}$  を用いてモデル化することも可能である (例えば北川 (2005) を参照されたい). ここでは単純化のためにダミー変数を用いた. ボラティリティの予測を目的とする場合にはこれらの定式化がより適切である可能性もある.

<sup>7</sup> パラメータの識別のため,  $\alpha_{2t}$  の定常平均がゼロを意味しているので「日中のジャンプによる日次ボラティリティ変動」の平均水準は取引停止時間等のバイアスと一緒に  $Z_{xt}\beta_x$  の 2 行目に含まれることになる. 「日中のジャンプによる日次ボラティリティ変動の平均水準」を取引停止時間等のバイアスから識別するためには, RK と MedRV のジャンプ以外のバイアスが等しいと仮定する必要がある. これは  $Z_{xt}\beta_x$  の一行目と二行目の要素を等しいと制約を置き,  $Z_{\alpha t}\beta_{\alpha}$  の 2 行目を自由に動くようにモデル化することを意味する. どちらで推定しても  $\log(\text{MedRV})$  と  $\log(\text{RK})$  の平均の差をジャンプによる変動の平均水準と等しいと仮定していることは変わらないので, 今回は  $\alpha_{2t}$  の定常平均がゼロとした.

<sup>8</sup> 事後分布の標準偏差および  $\alpha\%$  信用区間 (Bayesian credible interval) はベイズ統計における事後分布の標準偏差と  $\alpha\%$  区間である. 頻度論における推定量の標準誤差, 信頼区間 (confidence interval) とは異なり, モデルとデータを条件づけた下でのパラメータの従う事後分布の標準偏差および,  $\alpha\%$  の確率でとり得る範囲を示している. 標本サイズが十分大きい下では, 最尤推定量の標準誤差・信頼区間 (confidence interval) と近い値を示す.

<sup>9</sup> 非効率性因子は  $1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k$  で定義される.  $\rho_k$  は生成した MCMC 標本の自己相関であ

る。これは、独立標本と同精度の推定値を得るのに、MCMC では何倍の標本が必要かを意味している。詳しくは Chib (2001) を参照されたい。

## 参考文献

- Aït-Sahalia, Y. and J. Jacod (2009) “Testing for jumps in a discretely observed process,” *The Annals of Statistics*, Vol. 37, No. 1, pp. 184–222.
- Andersen, T. G. and T. Bollerslev (1998) “Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts,” *International Economic Review*, pp. 885–905.
- Andersen, T. G., L. Benzoni, and J. Lund (2002) “An empirical investigation of continuous-time equity return models,” *The Journal of Finance*, Vol. 57, No. 3, pp. 1239–1284.
- Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold, and P. Labys (2003) “Modeling and forecasting realized volatility,” *Econometrica*, Vol. 71, No. 2, pp. 579–625.
- Andersen, T. G., R. A. Davis, J. P. Kreiss, and T.V. Mikosch ed. (2009) *Handbook of financial time series*: Springer.
- Andersen, T. G., T. Bollerslev, P. Frederiksen, and M. Ø. Nielsen (2010) “Continuous-time models, realized volatilities, and testable distributional implications for daily stock returns,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 25, No. 2, pp. 233–261.
- Andersen, T. G., D. Dobrev, and E. Schaumburg (2012) “Jump-robust volatility estimation using nearest neighbor truncation,” *Journal of Econometrics*, Vol. 169, No. 1, pp. 75–93.
- Ando, T. (2006) “Bayesian inference for nonlinear and non-Gaussian stochastic volatility model with leverage effect,” *Journal of Japan Statistical Society*, Vol. 36, pp. 173–197.
- (2011) “Predictive Bayesian model selection,” *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, Vol. 31, No. 1-2, pp. 13–38.
- 安道知寛 (2010) 『ベイズ統計モデリング』, 朝倉書店.
- Bandi, F. M. and J. R. Russell (2008) “Microstructure noise, realized variance, and optimal sampling,” *The Review of Economic Studies*, Vol. 75, No. 2, pp. 339–369.
- Barndorff-Nielsen, O. E., S. E. Graversen, J. Jacod, and N. Shephard (2006) “Limit theorems for bipower variation in financial econometrics,” *Econometric Theory*, Vol. 22, No. 4, p. 677.
- Barndorff-Nielsen, O. E., P. R. Hansen, A. Lunde, and N. Shephard (2008) “Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise,” *Econometrica*, Vol. 76, No. 6, pp. 1481–1536.
- (2009) “Realized kernels in practice: Trades and quotes,” *The Econometrics Journal*, Vol. 12, No. 3, pp. C1–C32.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard (2001) “Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics,” *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, Vol. 63, No. 2, pp. 167–241.
- (2002) “Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models,” *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, Vol. 64, No. 2, pp. 253–280.

- (2006) “Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation,” *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4, No. 1, pp. 1–30.
- Bauwens, L., C. M. Hafner, and S. Laurent (2012) *Handbook of volatility models and their applications*, Vol. 3: John Wiley & Sons.
- Bollerslev, T. (1986) “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 307–327.
- Campbell, J. Y., A. W. Lo, and A. C. MacKinlay (1997) *The Econometrics of Financial Markets*: Princeton University Press. (祝迫 得夫, 大橋 和彦, 中村信弘, 本多 俊毅, 和田 賢治 訳 (2003) 『ファイナンスのための計量分析』 共立出版.)
- Chaussé, P. and D. Xu (2012) “GMM Estimation of a Stochastic Volatility Model with Realized Volatility: A Monte Carlo Study,” Technical report, Waterloo University Working paper series 12-003.
- Chernov, M., A. R. Gallant, E. Ghysels, and G. Tauchen (2003) “Alternative models for stock price dynamics,” *Journal of Econometrics*, Vol. 116, No. 1, pp. 225–257.
- Chib, S (2001) “Markov chain Monte Carlo methods: computation and Inference,” in Heckman, James J and E Leamer eds. *Handbook of Econometrics*, Vol. 5, Amsterdam: North-Holland, pp. 3569-3649.
- Chib, S., F. Nardari, and N. Shephard (2002) “Markov chain Monte Carlo methods for generalized stochastic volatility models,” *Journal of Econometrics*, Vol. 108, pp. 281-316.
- Corsi, F. (2009) “A simple approximate long-memory model of realized volatility,” *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 7, No. 2, pp. 174–196.
- Delatola, E.I. and J. E. Griffin (2011) “Bayesian nonparametric modelling of the return distribution with stochastic volatility,” *Bayesian Analysis*, Vol. 6, No. 4, pp. 901–926.
- Diebold, F. X. and G. Strasser (2008) “On the correlation structure of microstructure noise in theory and practice.” Penn Institute for Economic Research Working Paper.
- Dobrev, D. and P. Szerszen (2010) “The information content of high-frequency data for estimating equity return models and forecasting risk.” FEDS Working Paper.
- Durbin, J. and S. J. Koopman (2002) “A simple and efficient simulation smoother for state space time series analysis,” *Biometrika*, Vol. 89, pp. 603-616.
- Engle, R. F. (1982) “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation,” *Econometrica*, pp. 987–1007.
- Engle, R. F. and G. M. Gallo (2006) “A multiple indicators model for volatility using intra-daily data,” *Journal of Econometrics*, Vol. 131, No. 1, pp. 3–27.
- Foucault, T., M. Pagano, and A. Röell (2013) *Market Liquidity: Theory, Evidence, and Policy*. Oxford University Press.
- Fouque, J. P., . Papanicolaou, R. Sircar, and K. Solna (2003) “Multiscale stochastic volatility asymptotics,” *Multiscale Modeling and Simulation*, Vol. 2, No. 1, pp. 22–42.
- Gallant, A. R. (1981) “On the bias in flexible functional forms and an essentially unbiased form: the Fourier flexible form,” *Journal of Econometrics*, Vol. 15, No. 2, pp. 211–245.

- Gelman, A., J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari, and D. B. Rubin (2013) *Bayesian data analysis*: CRC press.
- Hansen, P. R., Z. Huang, and H. H. Shek (2012) “Realized GARCH: a joint model for returns and realized measures of volatility,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 27, No. 6, pp. 877–906.
- Hansen, P. R. and A. Lunde (2005) “A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH (1, 1)?” *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 20, No. 7, pp. 873–889.
- Hasbrouck, J. (2006) *Empirical Market Microstructure: The Institutions, Economics, and Econometrics of Securities Trading*: Oxford University Press.
- Heber, G., A. Lunde, N. Shephard, and K. K. Sheppard (2009) *Oxford-Man Institute’s realized library version 0.2*: Oxford-Man Institute, University of Oxford.
- Hjort, N. L., C. Holmes, P. Müller, and S. G. Walker ed. (2010) *Bayesian nonparametrics*: Cambridge University Press.
- Jacod, J., Y. Li, P. A. Mykland, M. Podolskij, and M. Vetter (2009) “Microstructure noise in the continuous case: the pre-averaging approach,” *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 119, No. 7, pp. 2249–2276.
- Jensen, M. J. (2004) “Semiparametric Bayesian Inference of Long-Memory Stochastic Volatility Models,” *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 25, No. 6, pp. 895–922.
- Jensen, M. J. and J. M. Maheu (2010) “Bayesian semiparametric stochastic volatility modeling,” *Journal of Econometrics*, Vol. 157, No. 2, pp. 306–316.
- de Jong, P. (1991) “The diffuse Kalman filter,” *Annals of Statistics*, Vol. 19, pp. 1073–1083.
- de Jong, P. and J. Penzer (2004) “The ARMA model in state space form,” *Statistics and Probability Letters*, Vol. 70, No. 1, pp. 119–125.
- de Jong, P. and N. Shephard (1995) “The simulation smoother for time series models,” *Biometrika*, Vol. 82, pp. 339–350.
- 金谷太郎 (2009) 「マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズがある場合のボラティリティ推定に関する最近の研究」, 『京都大学経済論叢』, 第 183 卷, 第 2 号, 77–86 頁.
- 加藤清 (1990) 『株価変動とアノマリー』, 日本経済新聞社.
- Kim, S., N. Shephard, and S. Chib (1998) “Stochastic Volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models,” *Review of Economic Studies*, Vol. 65, pp. 361–393.
- 北川源四郎 (2005) 『時系列解析入門』, 岩波書店.
- 小池祐太 (2012) 「実現ボラティリティとその周辺」. SART2012 Statistical Analysis and Related Topics: Theory, Methodology and Data Analysis 講演資料.
- 小西貞則・越智義道・大森裕浩 (2008) 『計算統計学の方法: ブートストラップ・EM アルゴリズム・MCMC』, 朝倉書店.
- Koopman, S. J. and M. Scharth (2012) “The analysis of stochastic volatility in the presence of daily realized measures,” *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 11, No. 1, pp. 76–115.
- 古澄英男 (2009) 「マルコフ連鎖モンテカルロ法入門」, 国友直人・山本拓・北川源四郎・竹村彰通 (編) 『21 世紀の統計科学 III: 数理・計算の統計科学』, 東京大学出版会.

- Kunitomo, N. and S. Sato (2013) “Separating Information Maximum Likelihood estimation of the integrated volatility and covariance with micro-market noise,” *The North American Journal of Economics and Finance*, Vol. 26, pp. 282–309.
- Malliavin, P. and M. E. Mancino (2002) “Fourier series method for measurement of multivariate volatilities,” *Finance and Stochastics*, Vol. 6, No. 1, pp. 49–61.
- Miller, S. (2011) “Estimation of State Space Models and Stochastic Volatility,” Ph.D. dissertation, Université de Montréal.
- Molina, G., C. H. Han, and J. P. Fouque (2010) “MCMC estimation of multiscale stochastic volatility models,” in *Handbook of Quantitative Finance and Risk Management*: Springer, pp. 1109–1120.
- Nakajima, J. and Y. Omori (2009) “Leverage, heavy-tails and correlated jumps in stochastic volatility models,” *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 53-6, pp. 2335-2353.
- (2012) “Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy-tailed error using GH skew Student’s t-distribution,” *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 56, No. 11, pp. 3690–3704.
- Nugroho, D. B. and T. Morimoto (2013) “Realized Box-Cox stochastic volatility models.” mimeo.
- O’hara, M. (1995) *Market microstructure theory*: Blackwell.
- Omori, Y., S. Chib, N. Shephard, and J. Nakajima (2007) “Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inference,” *Journal of Econometrics*, Vol. 140, No. 2, pp. 425–449.
- Omori, Y. and T. Watanabe (2008) “Block sampler and posterior mode estimation for asymmetric stochastic volatility models,” *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 52, No. 6, pp. 2892–2910.
- 大森裕浩・渡部敏明 (2013) 「Realized Stochastic Volatility モデル—マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたベイズ分析—」, 『日本統計学会誌』, 第 42 卷, 第 2 号, 273–303 頁.
- Patton, A. J. (2011) “Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies,” *Journal of Econometrics*, Vol. 160, No. 1, pp. 246–256.
- Schwarz, G. (1978) “Estimating the dimension of a model,” *The annals of statistics*, Vol. 6, No. 2, pp. 461–464.
- Shephard, N (1996) “Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility,” in *Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields*, pp. 1–67.
- Shephard, N. (2005) *Stochastic Volatility*.: Oxford University Press.
- Shephard, N. and M. K. Pitt (1997) “Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series,” *Biometrika*, Vol. 84, No. 3, pp. 653–667.
- Shephard, N. and K. Sheppard (2010) “Realising the future: forecasting with high-frequency-based volatility (HEAVY) models,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 25, No. 2, pp. 197–231.
- Shirota, S., T. Hizu, and Y. Omori (2014) “Realized stochastic volatility with leverage and long memory,” *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 76, pp. 618–641.
- So, M. K. P. (1999) “Time series with additive noise,” *Biometrika*, Vol. 86, No. 2, pp. 474–482.

- Spiegelhalter, D. J., N. G. Best, Carlin B. P., and A. Van Der Linde (2002) “Bayesian measures of model complexity and fit,” *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, Vol. 64, No. 4, pp. 583–639.
- 砂田洋志 (1996) 「日本の株式市場における曜日効果」, 『三田商学研究』, 第 39 卷, 第 1 号, 81–106 頁.
- Takahashi, M., Y. Omori, and T. Watanabe (2009) “Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously,” *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 53-6, pp. 2404-2426.
- (2014) “Volatility and Quantile Forecasts of Financial Returns Using Realized Stochastic Volatility Models with Generalized Hyperbolic Distribution.” Discussion paper series, CIRJE-F-921, Faculty of Economics, University of Tokyo.
- Takeuchi-Nogimori, A. (2012) “An empirical analysis of the Nikkei 225 put options using realized GARCH models,” Technical report, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University.
- Tanizaki, H. (2004) “On Asymmetry, Holiday and Day-of-the-Week Effects in Volatility of Daily Stock Returns: The Case of Japan,” *Journal of the Japan Statistical Society*, Vol. 34, No. 2, pp. 129–152.
- Taylor, S. J. (1982) “Financial returns modelled by the product of two stochastic processes, a study of daily sugar prices 1961-79,” in Anderson, O. D. ed. *Time Series Analysis: Theory and Practice 1*, Amsterdam: North-Holland, pp. 203–226.
- Tsiakias, I. (2006) “Periodic stochastic volatility and fat tails,” *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4, No. 1, pp. 90–135.
- Ubukata, M. and T. Watanabe (2014) “Pricing Nikkei 225 Options using realized volatility,” *The Japanese Economic Review*. forthcoming.
- Vehtari, A. and J. Ojanen (2012) “A survey of Bayesian predictive methods for model assessment, selection and comparison,” *Statistics Surveys*, Vol. 6, pp. 142–228.
- Venter, J. H. and P. J. de Jongh (2014) “Extended stochastic volatility models incorporating realised measures,” *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 76, pp. 687–707.
- 和合肇編著 (2005) 『ベイズ計量経済分析-マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』, 東洋経済新報社.
- Watanabe, S. (2010) “Equations of states in singular statistical estimation,” *Neural Networks*, Vol. 23, No. 1, pp. 20–34.
- Watanabe, T. (1999) “A non-linear filtering approach to stochastic volatility models with an application to daily stock returns,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 14, No. 2, pp. 101–121.
- (2001) “Price volatility, trading volume, and market depth: evidence from the Japanese stock index futures market,” *Applied Financial Economics*, Vol. 11, No. 6, pp. 651–658.
- (2012) “Quantile Forecasts of Financial Returns Using Realized GARCH Models\*,” *Japanese Economic Review*, Vol. 63, No. 1, pp. 68–80.
- Watanabe, T. and Y. Omori (2004) “A multi-move sampler for estimating non-Gaussian time series models: Comments on Shephard & Pitt (1997),” *Biometrika*, Vol. 91, pp. 246–248.
- 渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』, 朝倉書店.
- Xiu, D. (2010) “Quasi-maximum likelihood estimation of volatility with high frequency data,” *Journal of Econometrics*, Vol. 159, No. 1, pp. 235–250.

Zhang, L., P. A. Mykland, and Y. Ait-Sahalia (2005) "A tale of two time scales," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 100, No. 472.

渡辺澄夫 (2012) 『ベイズ統計の理論と方法』, コロナ社.

## A 線形状態空間表現とシミュレーション平滑化

正規線形時系列のベイズ分析の研究では de Jong and Shephard (1995) の状態空間表現

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{u}_t, \\ \boldsymbol{\alpha}_{t+1} &= \mathbf{W}_t \boldsymbol{\beta} + \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{H}_t \mathbf{u}_t, \\ \boldsymbol{\beta} &\sim \mathbf{b} + \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{u}_t &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}), \quad \boldsymbol{\mu} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}), \end{aligned}$$

を用いてモデルを表現し直すことが多い。これは彼らの提案したシミュレーション平滑化や拡大カルマンフィルタを使用するために都合がよいからである。ここでは一般化した RSV モデルの混合分布による近似モデル (7), (8), (9) を状態空間表現を示すと以下のように書ける,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \begin{bmatrix} y_t^* \\ \mathbf{x}_t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_t = \boldsymbol{\alpha}_t, \quad \mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} m_{st} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times K_{x1}} & \mathbf{0}_{1 \times K_{x2}} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times K_{xq}} & \mathbf{0}_{1 \times (1+K_\alpha)} \\ 0 & \sigma_v A_t & \mathbf{z}'_{x1t} & \mathbf{0}_{1 \times K_{x2}} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times K_{xq}} & \mathbf{0}_{1 \times (1+K_\alpha)} \\ 0 & \sigma_v A_t & \mathbf{0}_{1 \times K_{xi}} & \mathbf{z}'_{x2t} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times K_{xq}} & \mathbf{0}_{1 \times (1+K_\alpha)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \sigma_v A_t & \mathbf{0}_{1 \times K_{x1}} & \mathbf{0}_{1 \times K_{x2}} & \cdots & \mathbf{z}'_{xqt} & \mathbf{0}_{1 \times (1+K_\alpha)} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{W}_t &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times (2+K_x)} & \sigma_\eta A_t & \mathbf{z}'_{\alpha 1t+1} - \Phi \mathbf{z}'_{\alpha 1t} & \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha 2}} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha p}} \\ \mathbf{0}_{1 \times (2+K_x)} & \sigma_\eta A_t & \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha 1}} & \mathbf{z}'_{\alpha 2t+1} - \Phi \mathbf{z}'_{\alpha 2t} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha p}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times (2+K_x)} & \sigma_\eta A_t & \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha 1}} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times K_{\alpha p}} & \mathbf{z}'_{\alpha pt+1} - \Phi \mathbf{z}'_{\alpha pt} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{1 \times p} \\ \Psi \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\beta} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta_x \\ 1 \\ \beta_\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathbf{0}_{K_x \times 1} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{K_\alpha \times 1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times K_x} & \mathbf{0}_{2 \times K_\alpha} \\ \mathbf{I}_{K_x} & \mathbf{0}_{K_x \times K_\alpha} \\ \mathbf{0}_{1 \times K_x} & \mathbf{0}_{1 \times K_\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{K_\alpha} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_t = \Phi, \\ \mathbf{G}_t &= \begin{bmatrix} v_{st} & \mathbf{0}_{1 \times q} & \mathbf{0}_{1 \times p} \\ \sigma_v B_t & (\Sigma_v - \sigma_v \sigma_v')^{1/2} & \mathbf{0}_{q \times p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_t = \left[ \sigma_\eta B_t \quad \mathbf{0}_{p \times q} \quad (\Sigma_\eta - \sigma_\eta \sigma_\eta')^{1/2} \right], \\ \mathbf{H}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p \times q} & \mathbf{0}_{p \times (q+1)} & \text{diag} \left( \sqrt{\frac{\sigma_{\eta 1}^2}{1 - \phi_1^2}}, \dots, \sqrt{\frac{\sigma_{\eta p}^2}{1 - \phi_p^2}} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ただし正定値行列  $X$  に対し,  $X^{1/2}$  はコレスキー分解とする。このモデルにたいして拡大カルマンフィルタ, シミュレーション平滑化を行うことで効率的なサンプリングを行うことができる。アルゴリズムの詳細については, de Jong (1991), de Jong and Shephard (1995), Durbin and Koopman (2002) を参照されたい。