はじめに

「方程式 $x^2 = 2$ を解け」

と問われたら，反射的に

「$\pm\sqrt{2}$」

と答えてしまうだろう．しかし，「$\sqrt{2}$」とは「$x^2 = 2$ をみたす正の数 x」を表す記号である．もとの方程式から，ほとんど前進していない．そもそも，そのような x は存在するのだろうか．この方程式は，本当に解けたといえるのだろうか．

整数や有理数の世界から見ると，「2 乗したら 2 になる数」の存在はかなり曖昧である．実際，かのピタゴラス[*1]ですら，有理数以外の数の存在を否定していたという．それでも，文字式の要領で

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right) - 1 \\
&= 1 + 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 - 2\sqrt{2} - 1 \qquad \Leftarrow 2\text{ で置き換え} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

といった計算は矛盾なくできてしまう（すなわち，$1+\sqrt{2}$ は方程式 $x^2-2x-1=0$ の解になっている）．このような計算も，$\sqrt{2}$ という数の存在自体も，有理数に無理数を加えた**実数**という数の体系が導入されて，はじめて正当化できたのであった[*2]．

同様に，方程式 $x^2 = -1$ の解（の 1 つ）として，記号 $\sqrt{-1}$ を導入してみよう．$\sqrt{-1}$ は「2 乗して負になる数」であり，実数ではありえない．それでも，

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\sqrt{-1}\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{-1}\right) + 2 \\
&= 1 + 2\sqrt{-1} + \left(\sqrt{-1}\right)^2 - 2 - 2\sqrt{-1} + 2 \qquad \Leftarrow -1\text{ で置き換え} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

といった計算は矛盾なくできる（すなわち，$1+\sqrt{-1}$ は方程式 $x^2-2x+2=0$ の解になっている）．この計算を正当化するには，有理数を拡張して実数を考え

---

*1 Pythagoras（B.C. 582 – B.C. 496），ギリシャの数学者．

*2 19 世紀後半の出来事である．裏を返すと，厳密な定義が与えられる以前の無理数とは「存在すると仮定すると万事説明がつくもの」であった．ある意味，物理学における「エーテル」，化学における「熱素」，果ては「幽霊」，「UFO」，「神様」とかわらない．

たように，何らかの方法で実数を拡張しなくてはならない．それを実現するのが，**複素数**とよばれる数の体系である．

本書の目標は，大学初年級で学習する実数の微分積分学を土台として，複素数の微分積分学の理論をわかりやすく解説することである．まずは実数を含む新たな数の体系として，複素数の存在を保証することから始める．その後の流れについては，各章の冒頭にある「あらまし」をざっと眺めていただくとよいだろう．大学の教程で標準的な「留数定理」と「実関数の積分への応用」までは，ほとんど寄り道をせず，第 4 章までに完結する．残りの第 5 章は，重要であり魅力的だが，大学の半期 15 回の講義ではなかなか教えられない内容である．

本書は実数の微分積分学(最低限の必要事項は付録 A にまとめた)を既知として書かれているので，いわゆる ε-δ 論法を表に出すことなく，ほぼすべての定理に厳密かつ丁寧な証明がつけられている．唯一の例外は複素線積分の存在に関する定理で，その証明だけは付録 B に回さざるを得なかった．そのほか，見かけに反してデリケートな議論を要する「べき級数」の一般論を避けながらも，理論的に完結している点は本書の特徴かもしれない．なお，ε-δ 論法が必要な発展的内容は付録 B に，「べき級数」の一般論は付録 C にまとめられている．

第 5 章までの各章の最後には，章末問題をつけた．とくに発展的な問題には $*$ をつけ区別してある．$*$ がついていない問題に対しては，本文中の例や例題が十分参考になるだろう．

(株)裳華房編集部の久米大郎氏には，企画の段階からさまざまな形でサポートしていただいた．氏と教科書作りへの熱意を共有できたことを，心から嬉しく思う．石谷常彦氏には，本書のもとになった講義ノートの段階から原稿を通読していただき，有益なコメントを数多くいただいた．本書の作成にあたりお世話になったすべての方々に，この場を借りて感謝の意を表したい．

2019 年 1 月

著　　者