1　複素数と指数関数

本章のあらまし

- まず，高校で学んだ複素数と複素(数)平面に対して，**厳密な定義**を与え，その存在を確認しよう．また，基本的な計算規則も復習しておく．
- つぎに，有名な**オイラーの公式**

$$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \quad (\theta \text{ は実数})$$

をヒントにして，複素数 z の**指数関数** e^z を定義する．
- 複素数の指数関数が定義されたのだから，複素数の**対数関数**も考えるのが自然だろう．たとえば $\log(-1)$ や $\log i$ に数学的な意味づけを与える．
- 指数関数はさらに，オイラーの公式を経由して三角関数と密接に関わっている．その関係を利用して複素数の**三角関数**も定義する．

1.1　複素数と複素平面

「はじめに」で述べたように，本書ではまず複素数の存在を正当化することから始めたい．

実数の存在を前提として複素数を構成する方法はいくつか知られている．ここではハミルトン*1による，平面ベクトルを用いた直観的でわかりやすい定義を採用しよう．基本的なアイディアは，「ベクトル (a, b) を改名し，複素数 $a + bi$ とよぶ」，ただそれだけである．

*1 William Rowan Hamilton (1805 – 1865)，アイルランドの数学者．

が成り立つのであった[*7]．

ここで発想を柔軟にして，x に複素数 $i\theta$ (θ は実数) を代入してみると，

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\,\theta) + \frac{(i\,\theta)^2}{2!} + \frac{(i\,\theta)^3}{3!} + \frac{(i\,\theta)^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

を得る．三角関数のマクローリン展開

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

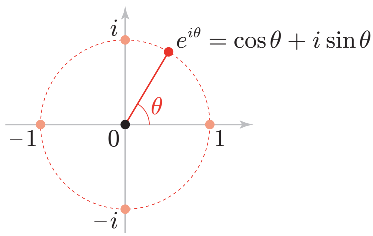
(x は実数) より，つぎの有名な「オイラー[*8]の公式」を得る．

公式 1.5 (オイラーの公式)

実数 θ に対し，

$$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}. \tag{1.5}$$

ただし，左辺の表す「$e^{i\theta}$」がきちんと定義されていないので，上の議論はオイラーの公式の証明とはいえない．それでも，「$e^{i\theta}$ という複素数が存在するならば，単位円上にある偏角 θ の複素数となるべきだ」と示唆している (右図)．



指数関数の定義　「複素数 $x+y\,i$ の指数関数 e^{x+yi}」を定義しよう．任意の実数 x と y に対し「指数法則」$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ が成り立つことから，$e^{x+yi} = e^x \cdot e^{iy}$ が成り立つことが期待される．さらに「オイラーの公式」からの啓示に従えば，

$$e^{x+yi} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot \big(\cos y + i\sin y\big)$$

---

*7 たとえば，x に実数 7 を代入した等式 $e^7 = 1 + \frac{7}{1!} + \frac{7^2}{2!} + \frac{7^3}{3!} + \cdots$ は，「右辺の無限級数は収束し，その値は $e = 2.718\cdots$ の 7 乗と一致する」という意味．

*8 Leonhard Euler (1707 – 1783)，スイスに生まれ，ドイツ，ロシアで活動した数学者，物理学者．

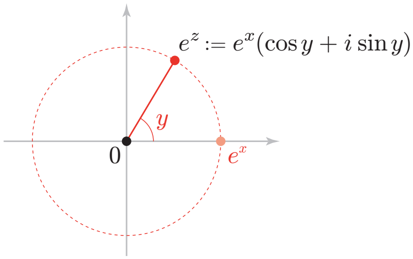
が成り立つべきであろう．そこで，複素数 $x+yi$ に対し，

$$\boldsymbol{e^{x+yi} := e^{x}\,(\cos y + i \sin y)}$$

と定義する[*9]．すなわち，絶対値 e^x，偏角 y の複素数を記号 e^{x+yi} で表すのである．複素数 z に対し，複素数 e^z（を対応させる関数）を z の**指数関数**という[*10]．指数関数 e^z は $\mathbf{exp}\,\boldsymbol{z}$ とも表される．

注意!　$|e^z| = e^x > 0$ より，指数関数 e^z は決して 0 とならない．

注意!　複素数 z に対し，「指数関数 e^z」と「e の z 乗」は区別される．後者はまたあとで定義する．



例 10　$z = 3 + \dfrac{\pi}{4}\, i$ のとき，

$$e^{3+\pi i/4} := e^3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = e^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right).$$

□

例 11（実数での値）　実数 x を複素数 $x + 0\,i$ とみなした場合，その指数関数は $e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$．すなわち，複素数の指数関数は実数の指数関数の拡張になっている．□

例 12　θ を実数とするとき，$e^{i\theta} = e^{0+\theta i} := e^0(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$．すなわち，複素数の指数関数は「オイラーの公式が成り立つように」定義されている．□

新しい極形式　絶対値 $r > 0$，偏角 θ の複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ は，オイラーの公式 (1.5) を用いて，

[*9] テイラー展開を用いた定義も広く用いられる（第 4 章，例 1 参照）．

[*10] 第 2 章では「指数関数」を実際に「関数」として扱うが，ここでは記号 e^z の便宜的な呼称として「指数関数」を用いた（記号 e^z はふつう「e の z 乗」と読まれるが，本ページの「注意！」にあるように，この呼称はあまり適切ではない）．

げ方程式 $z^3-1=0$ の複素数解を求めると，$z=1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$ の3つの解を得る．一般に考える数の世界を広げると方程式の解は増えてしまうのだが，つぎの場合はどうだろうか．

例題 1.8　方程式 $\sin z = 0$ の複素数解を求めよ．

解答　三角関数の定義式より，

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0 \iff e^{iz}=e^{-iz} \iff e^{2iz}=1.$$

例題 1.2 (1) より，m を任意の整数とするとき $1=e^{2m\pi i}$ であるから，$2iz=2m\pi i$，すなわち $z=m\pi$．よって，方程式 $\sin z=0$ の解は π の整数倍のみである．∎

すなわち，複素数で考えても方程式 $\sin z=0$ の解は実数解からまったく増えない．$\cos z$ についても同様である（章末問題 1.25）．

章末問題

□ **1.1**　$z=2-i$, $w=-3+2i$ のとき，以下を計算し複素平面上に図示せよ．

(1) $z+w$　　(2) $z-w$　　(3) zw　　(4) z/w

□ **1.2（共役複素数）**　公式 1.2 をすべて証明せよ．

□ **1.3**　公式 1.3 を応用して，つぎの複素数の絶対値を求めよ．

(1) $(1+i)^5$　　(2) $-2i(2+i)(2+4i)(1+i)$　　(3) $\dfrac{(3+4i)(1-i)}{2-i}$

□ **1.4**　複素数 z, w に対し，$zw=0$ となる必要十分条件は「$z=0$ または $w=0$」であることを示せ．

□ **1.5**　a, b, c, d をすべて実数とする．もし方程式 $az^3+bz^2+cz+d=0$ が $z=\alpha$ を解に持てば，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解となることを示せ．

□ **1.6**　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\neq 0$ とするとき，以下を示せ．

(1) $\overline{z}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$　　(2) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

□ **1.7（ド・モアヴルの公式）**　数学的帰納法を用いて公式 1.4 を示せ．

□**1.8** $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ とするとき，z, z^2, z^3, z^4 をそれぞれ極形式で表せ．

□**1.9（逆数の作図）** 複素数 z が $|z| > 1$ をみたすと仮定する．z から単位円へ 2 本接線を引き，それらの接点を結んだ線分と z と原点を結ぶ線分が交わる点を w とすると，$\overline{w} = 1/z$ となることを示せ*19．

□**1.10（正三角形）** 0 でない複素数 α, β と 0 がある正三角形の 3 頂点となるための必要十分条件は，$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$ であることを証明せよ．

□**1.11（アポロニウスの円）** 複素平面上で $|z+1| : |z-2| = 3 : 1$ となる z の軌跡は円になることを証明せよ．

□**1.12（極形式）** つぎの値を求めよ．

(1) $e^{2+\pi i/4}$ (2) $e^{-3+\pi i}$ (3) $e^{\log 3 - 3\pi i/2}$

□**1.13（指数関数と複素共役）** 指数関数の定義と指数法則（定理 1.6）を用いて，以下の公式を示せ．

(1) 任意の複素数 z に対し，$\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.

(2) 任意の複素数 z と w に対し，$e^{\overline{z+w}} = \overline{(e^z)} \cdot \overline{(e^w)}$.

□**1.14（べき根）** 例題 1.3 を参考にして，つぎの方程式の解を極形式で表し，図示せよ．

(1) $z^4 = 16\,i$ (2) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

□**1.15（複素数の N 乗根）** 定理 1.10 を証明せよ．

□**1.16（指数関数による像）** 以下の複素平面上の集合に対し，その指数関数 $w = e^z$ による像を図示せよ．

(1) $S_1 = \left\{x + y\,i \in \mathbb{C} \;\middle|\; x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi/2\right\}$

(2) $S_2 = \left\{x + y\,i \in \mathbb{C} \;\middle|\; |x| \leq \log 2,\ |y| \leq \pi/6\right\}$

□**1.17（指数関数による像）** 集合 T' が

$$T' = \left\{u + v\,i \in \mathbb{C} - \{0\} \;\middle|\; 0 < u \leq 1,\ v = 0\right\}$$

*19 これは逆数 $1/z$ を作図により求める方法を与えている．$0 < |z| < 1$ のときはこの方法を逆にたどればよく，$|z| = 1$ のときは $1/z = \overline{z}$ である．

で与えられているとき，e^z が T' に属するような複素数 z 全体からなる集合 T を図示せよ．

□ **1.18（複素対数）**　つぎの複素対数としての値を求めよ．

(1) $\log(1+\sqrt{3}\,i)$　(2) $\log(-2)$　(3) $\log i$　(4) $\log e$

□ **1.19***（複素対数の和）**　0 でない複素数 A, B について，$\mathrm{Log}\,A+\mathrm{Log}\,B=\mathrm{Log}\,AB$ は成り立つか．より一般に，$\log A+\log B=\log AB$ という等式が成り立つかどうか考察せよ．

□ **1.20（複素数べき）**　つぎの値の複素数べきとしての値を求めよ．

(1) $(1+\sqrt{3}\,i)^i$　(2) $(-2)^{1+i}$　(3) $i^{1/3}$

□ **1.21（複素数の整数乗）**　0 でない複素数 A と整数 m に対し，「複素数べき」の意味での A^m とふつうの整数乗の意味での A^m は一致することを示せ．

□ **1.22（三角関数の性質）**　三角関数の定義にもとづき，公式 1.12 をすべて証明せよ．

□ **1.23（三角関数のその他の性質）**　三角関数の定義にもとづき，つぎの公式を示せ．

(1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\sin z$　(2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$　(3) $\overline{\cos z}=\cos\overline{z}$

(4) $\overline{\sin z}=\sin\overline{z}$　(5) $e^{iz}=\cos z+i\sin z$

□ **1.24（三角関数の値）**　(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+i\right)$ の値を求めよ．

(2) 一般に x, y を実数とするとき，つぎを示せ．

$$\cos(x+y\,i)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y,$$

$$\sin(x+y\,i)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y.$$

ただし，$\cosh y=(e^y+e^{-y})/2$, $\sinh y=(e^y-e^{-y})/2$ である．とくに，$x=0$ のとき

$$\boldsymbol{\cos yi=\cosh y,\quad \sin yi=i\sinh y}.$$

□ **1.25（正接関数）**　(1) 方程式 $\cos z=0$ を解け．

(2) $\cos z\neq 0$ となる z に対し $\tan z:=\dfrac{\sin z}{\cos z}$ と定義するとき，つぎを示せ．

(a) $\tan(z+\pi)=\tan z$　(b) $i\tan i=\dfrac{1-e^2}{1+e^2}$