2　複素関数の微分

本章のあらまし

- まず，複素平面内の**開集合**，**閉集合**，**領域**といった言葉を定義する．
- 複素関数の微分を考えるための準備として，実関数と同様に**極限**や**連続性**の概念を整備する．
- 実関数の微分可能性をまねて，**複素関数の微分可能性**を定義する．その幾何学的な意味を理解するために，$w = Az$ の形の**比例関数**がどんなものかを確認する．
- 複素関数の微分可能性に少しだけ条件を加えて，**正則性**とよばれる条件を定義する．
- さらに複素関数の正則性をその実部と虚部がみたす**コーシー・リーマンの方程式**によって特徴づける．応用として指数関数 e^z の導関数がやはり e^z であることを示す．

2.1　複素平面内の集合

複素平面の部分集合に関する用語と記号を準備しよう．ここではとくに，複素数のことを「点」と表現する．

円と円板　点 z と点 α の複素平面における直線距離は $|z-\alpha|$ で与えられる．したがって，正の数 r に対し，集合

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-\alpha| = r\}$$

(2)　$g(z) = z^2 - 1$ とおくと，$f(z)$ は $g(z)$ に指数関数 $\exp(z)$ を合成した関数であり，任意の複素数で定義されている．また，例 16 と上の (1) より $g(z)$ と $\exp(z)$ は連続関数である．命題 2.4 より，その合成 $f(z) = \exp\bigl(g(z)\bigr)$ は複素平面上の連続関数である．

(3)　定数関数 $g(z) = 1$ と $h(z) = e^z - 1$ を用いると，$f(z) = g(z)/h(z)$ と表される．これは $h(z) \neq 0$，すなわち $e^z \neq 1$ となる複素数 z に対して定義される．例題 1.2(1) より，$f(z)$ の定義域は $\mathbb{C} - \bigl\{2m\pi i \bigm| m \in \mathbb{Z}\bigr\}$ である．例 14 より $g(z)$ は連続．$h(z)$ も $h(z) = e^z - g(z)$ と連続関数の差で表されるから，命題 2.4 より連続．同様に，$f(z)$ は連続関数の商で表されるから，定義域上で連続である．　■

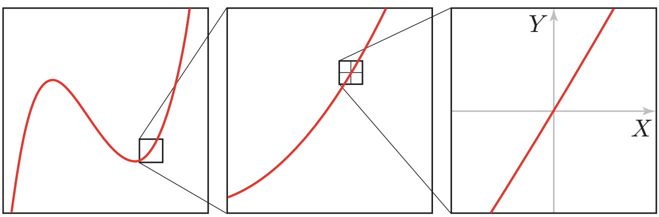
例 18（**三角関数**）　命題 2.4 と指数関数の連続性から $e^{\pm iz}$ も連続であり，$\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$, $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ も複素平面上の連続関数だとわかる．　□

例 19（**実部・虚部・絶対値・共役複素数**）　関数 $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\overline{z}$ はそれぞれ複素平面上の連続関数である（定義にもとづき確認せよ）．　□

2.4　複素関数の微分

実関数における微分係数と比例関数　まずは実関数における「微分可能性」の幾何学的な意味を思い出しておこう．

実関数 $y = f(x)$ のグラフから適当な点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ を選び，その点を中心に顕微鏡でグラフを拡大してみる．倍率を上げていくとき，関数がその点で微分可能であれば，グラフの曲がり具合は次第にやわらぎ，ほとんど直線のように見えるであろう（下図）．



そこで見えている「直線」の傾き A が，関数 $y = f(x)$ の a における微分係数であり，これを $A = f'(a)$ と表すのであった．顕微鏡の視野に XY 座標系を書いておくと，その「直線」の方程式は $Y = AX$ と表現される．すなわち，顕微鏡の中で観察されるのは，「比例定数」$A = f'(a)$ をもつ「比例関数」にほかならない．

以上を念頭におきつつ，複素関数の微分可能性を定義していこう．

比例関数　複素関数の微分を幾何学的に理解するために，**比例関数**

$$\boldsymbol{w = A\,z}$$

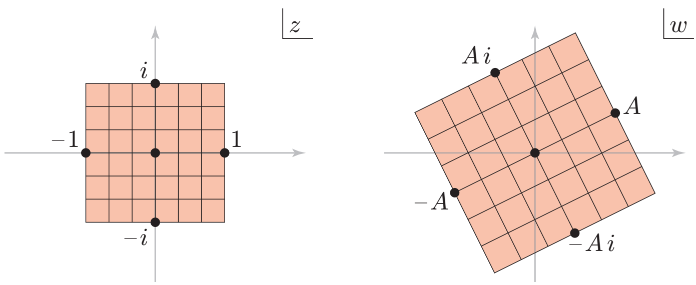
について完全に理解しておこう[*9]．ここで A は複素数の定数(比例定数)である．$A = 0$ のときは単なる定数関数なので，$A \neq 0$ と仮定する．さらに極形式で

$$A = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表されるとしよう．このとき，$w = Az$ の絶対値と偏角を計算すると，

$$|w| = |A||z| = r|z|$$
$$\arg w = \arg A + \arg z = \theta + \arg z$$

であるから，$w = Az$ とは「z を原点中心に r 倍拡大し[*10]，θ ラジアン回転さ



*9　比例関数 $w = f(z) = Az$ はすべての複素数 k に対し「比例関係」$f(kz) = kf(z)$ をみたす．逆に，そのような性質をみたす関数は比例関数に限る(章末問題 2.3)．

*10　$0 < r < 1$ のときは縮小だが「r 倍拡大」ということにする．

せて得られる複素数」だとわかる．複素数の比例関数とは，複素平面 $\mathbb{C}$ 全体を原点中心に「拡大と回転」する相似変換なのである．

微分可能性 実関数のときと同様にして，複素関数の微分可能性を定義しよう．

関数 $w = f(z)$ はある領域 D で定義されているものとする[*11]．関数 $f(z)$ が D 内の点 α で**微分可能**であるとは，極限

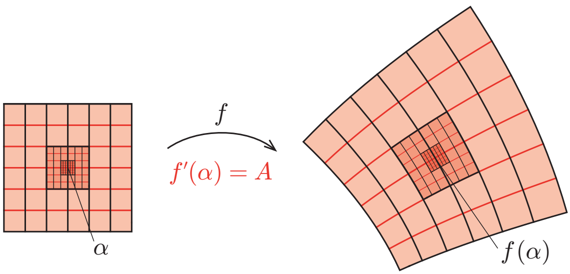
$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = A \tag{2.5}$$

が存在することをいう．この極限 A を $f(z)$ の α における**微分係数**といい，$f'(\alpha)$ と表す．関数 $f(z)$ が D 内のすべての点で微分可能であるとき，$f(z)$ は **D 上で微分可能**であるという．このとき，D の各点 α に微分係数 $f'(\alpha)$ を対応させる関数を $f(z)$ の**導関数**といい

$$f'(z), \quad \{f(z)\}', \quad \frac{df}{dz}(z), \quad \frac{d}{dz}f(z)$$

などと表す．

比例関数による近似 標語的にいうと，複素関数が微分可能であるとは，「局所的に比例関数とみなせる」ことであり，微分係数とは「比例定数」にあたる量である．以下でこれを確認しよう．



まずは大雑把に「比例関数」を導いてみよう．関数 $w = f(z)$ が $z = \alpha$ で微分可能であるとき，極限の式 (2.5) より z が α に十分近ければ近似式

*11 すなわち，D は連結な開集合である．とくに，D に属する点はすべて内点である．