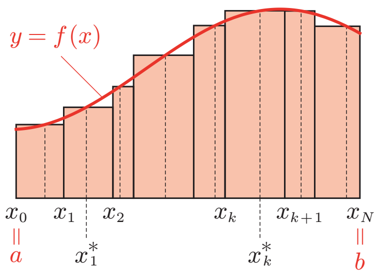
3　複素線積分

本章のあらまし

- 実関数の定積分を拡張したものとして，**複素線積分**を定義する．そのために，「積分区間」にあたる**滑らかな曲線**を定義する．
- 複素線積分の定義は**リーマン和**を用いた複雑なものであり，具体的な計算には向かない．そこで，**複素線積分を実関数の定積分に帰着**させるための公式を与える．
- 複素関数論のハイライト，**コーシーの積分定理**を示す．
- **コーシーの積分定理**から，豊富な応用をもつ**コーシーの積分公式**と **n 階導関数の積分公式**を証明する．
- n 階導関数の積分公式の応用として，**正則関数の導関数も正則関数**となることを示す．また，代数方程式の解の存在を保証する**代数学の基本定理**を示す．

3.1　複素関数の積分

積分とは何か　複素関数の積分を考える前に，実関数の定積分とは何か思い出しておこう．



連続な実関数 $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ に対し，積分

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

とは「$y = f(x)$ と $y = 0$ のグラフが囲む部分の符号つき面積」であった．正確には，つぎのように定義される．

区間 $[a, b]$ から分割点 $x_0, x_1, \cdots, x_N$ を

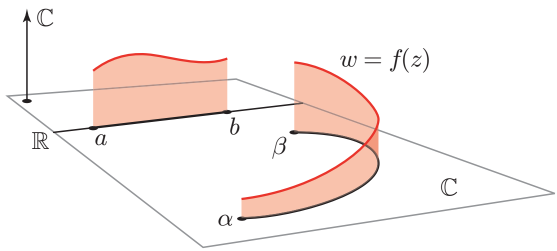
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

となるように選び，さらに各閉区間 $[x_k, x_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq N-1)$ から「代表点」とよばれる x_k^* を選ぶ．このとき定まる有限和(「リーマン和」という)

$$\sum_{k=0}^{N} f(x_k^*)\,(x_{k+1} - x_k) \tag{3.1}$$

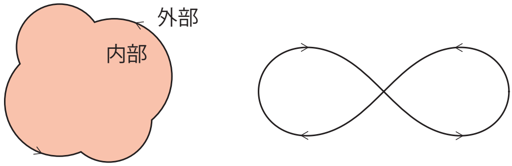
は前ページの図のような短冊(細長い長方形)たちの符号つき面積の総和であり，求めたい積分の近似値だと考えられる．いま，区間の分割数 N を増やしながら短冊の幅 $|x_{k+1} - x_k|$ を一様に 0 に近づけるとき，式 (3.1) は(x_k や x_k^* の取り方によらず)ある実数に収束することが知られている．その値を積分 I と定めるのであった．

同じことを複素関数でやるのが，これから学ぶ「複素線積分」である．実数から複素数へと世界が広がった分，積分の「経路」にもかなり自由度が生じる．下の図は，その気分を表現したものである．



曲線　複素線積分は，積分される「複素関数」と積分する「経路」のペアによって定まる複素数である．まずは，「経路」となる複素平面内の曲線を定義しよう．

2 つの連続な実関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \leq t \leq b)$ を選んだとき，複素平面上の動点 $z(t) = x(t) + y(t)\,i$ が定まる．実数 t にこのような複素数 $z = z(t)$ を対応させる関数を**曲線**という．ふつうは「曲線 C」といった名前をつけ，



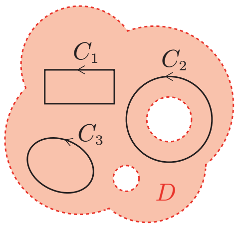
定理 3.10（コーシーの積分定理）

$f(z)$ を領域 D 上の正則関数，C を D 内の単純閉曲線とする．曲線 C の内部が D に含まれるとき，

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

コーシーの積分定理は単に「積分定理」ともよばれる．証明は本節の最後に与える．

注意! 「単純閉曲線 C の内部が D に含まれる」とは，C の内部に領域 D の「穴」がないということである．たとえば，右の図で C_1 と C_3 は条件をみたしているが，C_2 はその内部に D に属さない点があるので条件をみたさない．すなわち，定理を適用できない．



例 7 「コーシーの積分定理」を用いて，例題 3.4 における積分値の一致を説明しよう（第 5 章定理 5.1 も参照）．より一般に，任意の多項式関数 $P(z)$ に対し式 (3.19) が成り立つことを確認する．以下，与えられた曲線 C に対し，$\displaystyle\int_C P(z)\,dz$ を単に $\displaystyle\int_C$ と略記する[*9]．

まず多項式関数 $P(z)$ は，複素平面上で正則である（第 2 章，例 25）．また，例題 3.4 における曲線 C_1 と C_2 に対し，必要なら C_2 のパラメーターを取り替えることで $C_1 + (-C_2)$ は単純閉曲線となる．よって $D = \mathbb{C}$，$f(z) = P(z)$，

[*9] 以後も，被積分関数が固定されており文脈から明らかな場合は，断りなくこのような略記を行うことがある．

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)$$

より，右辺の 2 つの積分が 0 になることを証明すればよい．

関数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ は D 上の C^1 級関数なので，グリーンの定理(定理 3.13)が適用できる．C を D 内の任意の単純閉曲線，Ω を C とその内部の和集合とするとき，$P=u$, $Q=-v$ もしくは $P=v$, $Q=u$ としてグリーンの定理に代入すれば，

$$\begin{aligned}\int_C u\,dx - v\,dy &= \iint_\Omega (-u_y - v_x)\,dx\,dy\\ \int_C v\,dx + u\,dy &= \iint_\Omega (-v_y + u_x)\,dx\,dy\end{aligned}$$

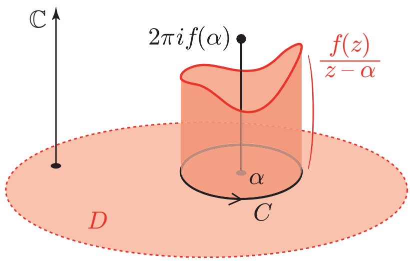
を得る．いま，$f(z)$ は正則であったから，u, v は D 上でコーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y$，$v_x = -u_y$ (定理 2.8) をみたす．よって，これらの積分値はともに 0 である． ∎

3.4 コーシーの積分公式

積分公式 コーシーの積分定理 (定理 3.10) と同じ仮定のもと，つぎが成り立つ．

定理 3.14 (コーシーの積分公式)
$f(z)$ を領域 D 上の正則関数，C を D 内の単純閉曲線とする．曲線 C の内部が D に含まれるとき，その内部の点 α に対し

$$\boldsymbol{f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz.} \tag{3.24}$$



式 (3.24) は**コーシーの積分公式**とよばれる．C はいわば α を囲む単純閉曲線である (円でなくてもよい)．その上をぐるっと回って $f(z)/(z-\alpha)$ を積分すると値は $2\pi i f(\alpha)$ となる．すなわち，「α を触らずに」$f(\alpha)$ の値が計算できてしまうのである．帽子から鳩が飛び出すような，不思議な公式である．