4 留数定理

本章のあらまし

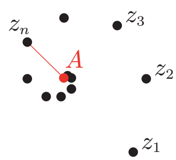
- まず，正則関数は局所的に**テイラー展開**できることを確認する．
- つぎに，円環領域上の正則関数に対し，テイラー展開の一般化である**ローラン展開**ができることを示す．
- とくに，穴あき円板上の正則関数のローラン展開から，その中心(**孤立特異点**)に付随する**留数**とよばれる複素数が定まる．
- 留数を用いると，積分計算を「ローラン展開の係数を求める」という代数的な計算(式変形)に帰着できる．その原理を**留数定理**としてまとめる．
- 留数定理を用いて，難しい**実関数の定積分を計算**する．

4.1 テイラー展開

実関数のテイラー展開(級数)にあたるものを複素関数でも考えることができる．その準備として，複素数からなる数列と級数の収束・発散を定義する．

数列・級数の収束　複素数からなる数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数 A に**収束**するとは，$n \to \infty$ のとき $|z_n - A| \to 0$ が成り立つことをいい，これを

$$z_n \to A \qquad (n \to \infty)$$



と表す．また，複素数 A を数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限**といい，

$$A = \lim_{n \to \infty} z_n$$

と表す．

注意! 留数は 0 になることもある(たとえば α が除去可能な特異点の場合).

例 7 例題 4.2 (1) の関数 $\dfrac{e^z}{z^2}$ の, $z=0$ における留数を求めてみよう. 例題で計算したローラン展開 $\dfrac{e^z}{z^2}=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+\cdots$ の z^{-1} の係数は 1 なので, $\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^z}{z^2},0\right)=1$. 定理 4.7 より, たとえば単位円 $C=C(0,1)$ に対し,

$$\int_C \frac{e^z}{z^2}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^2},0\right) = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i.$$

□

例 8 同様に例題 4.2 (2) の関数 $\dfrac{1}{z^2(z-2)}$ の, $z=0$ における留数を求めると, ローラン展開 $\dfrac{1}{z^2(z-2)}=\cdots-\dfrac{1}{4z}+\cdots$ より $\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{z^2(z-2)},0\right)=-\dfrac{1}{4}$ となる. □

留数定理 これまで, 積分計算はコーシーの積分公式(定理 3.14)や積分路の変形を組み合わせて行ってきた. 留数を用いれば, それらをすっきりと公式の形でまとめることができる.

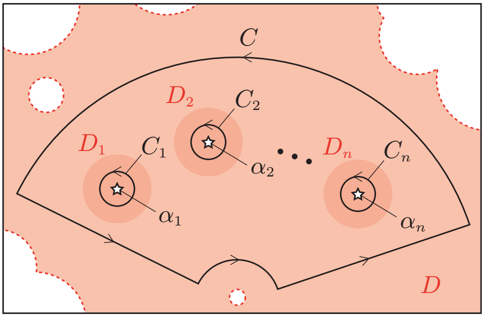
定理 4.8 (留数定理)
正則関数 $f(z)$ の定義域 D は単純閉曲線 C と, C の内部から互いに異なる点 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ を除いた領域を含むものとする. このとき,

$$\boldsymbol{\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\big(f(z),\,\alpha_k\big).}$$

証明 各 $k=1,2,\cdots,n$ に対し $D_k:=D(\alpha_k,r)$ とおき, $r>0$ を十分に小さくとれば, $D_1,\cdots,D_n$ はすべて C の内部に含まれ, 互いに交わらないとしてよい(次ページの図, ☆は孤立特異点). また, 各 $D_k-\{\alpha_k\}$ 上では式 (4.9) のようなローラン展開をもつ.

各 D_k 内に円 $C_k:=C(\alpha_k,r/2)$ をとれば, 定理 3.11 より

$$\int_C = \int_{C_1}+\cdots+\int_{C_n}$$



が成り立つ．定理 4.7 より $\displaystyle\int_{C_k} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\bigl(f(z),\,\alpha_k\bigr)$ であるから，求める等式が得られた．∎

留数の計算公式　留数定理（定理 4.8）の応用に入るまえに，使い勝手のよい留数の公式を 2 つ紹介しておこう[*5]．これらの公式を用いれば，ローラン展開をせずに，留数だけ直接求めることができる（ただし，真性特異点には適用できないので，ローラン展開が不要になるわけではない）．

公式 4.9（留数の計算公式 1）

関数 $g(z)$ は点 α を含む領域上の正則関数であるとする．k を自然数とするとき，関数 $\dfrac{g(z)}{(z-\alpha)^k}$ に対し

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{(z-\alpha)^k},\,\alpha\right) = \frac{1}{(k-1)!}\,g^{(k-1)}(\alpha).$$

とくに $k=1$ のとき，

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{z-\alpha},\,\alpha\right) = g(\alpha).$$

注意!　このとき，α は関数 $\dfrac{g(z)}{(z-\alpha)^k}$ の除去可能な特異点か，k 位以下の極と

[*5] 証明はとりあえず読み飛ばしてもかわまない．

$$\mathrm{Res}\left(f(z), -\frac{1}{3}\right) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8}.$$

よって，$I = \dfrac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{2}$.　■

有理関数の広義積分　つぎに，広義積分の計算に応用してみよう[*9].

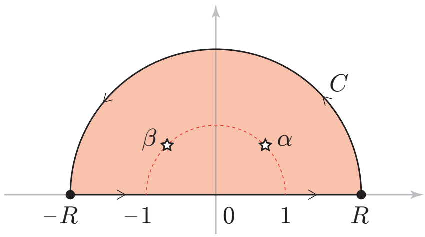
例題 4.5（有理関数の広義積分）

つぎを示せ.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

解答　正の数 $R > 1$ を固定し，右図のような積分路 C および $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ に対し，複素線積分

$$\int_C = \int_C \frac{1}{1+z^4}\,dz$$



を考える．ひとまずこの積分を計算しよう．被積分関数 $\dfrac{1}{1+z^4}$ は複素平面から $z^4 = -1$ をみたす 4 つの z（-1 の 4 乗根）を除いた領域で正則である．定理 1.10 よりそのような z は $e^{\pi i/4}$, $e^{3\pi i/4}$, $e^{5\pi i/4}$, $e^{7\pi i/4}$ である．そのうち積分路 C の内部にあるのは $\alpha := e^{\pi i/4}$ と $\beta := e^{3\pi i/4}$ の 2 つなので，留数定理（定理 4.8）より

$$\int_C = 2\pi i \cdot \left\{\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \alpha\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \beta\right)\right\}.$$

留数の計算公式 2（公式 4.10, $g(z) = 1$, $h(z) = z^4 + 1$ とおく．このとき $h'(z) = 4z^3$ より $h'(\alpha) \neq 0$ かつ $h'(\beta) \neq 0$）より，

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \alpha\right) = \frac{1}{4\alpha^3} = \frac{e^{-3\pi i/4}}{4} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$$

（もしくは，$\alpha^4 = -1$ より $1/(4\alpha^3) = -\alpha/4$ とも計算できる）．同様にして

[*9] これも有理関数なので，部分分数展開を用いれば原理的には不定積分を計算できるが，かなり複雑な式になる．

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4},\,\beta\right) = \frac{1}{4\beta^3} = \frac{e^{-9\pi i/4}}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

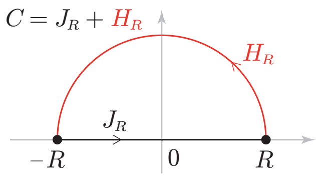
であるから，

$$\int_C = 2\pi i\left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

さて，この複素線積分から実関数の広義積分 I の値を引き出そう．まず，積分路 C を線分 J_R と半円 H_R に分割する．すなわち，$C = J_R + H_R$ となるように

$$J_R:\ z = x \quad (-R \leq x \leq R)$$

$$H_R:\ z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$



と定める(積分の計算がしやすいようにパラメーターの取り替えを行った)．このとき，

$$\int_C = \int_{J_R} + \int_{H_R} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

であるから，

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{J_R} = \lim_{R\to\infty}\left(\int_C - \int_{H_R}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \lim_{R\to\infty}\int_{H_R}.$$

よって，$R \to \infty$ のとき $\displaystyle\int_{H_R} \to 0$ であることを示せばよい[*10]．

z が H_R 上にあるとき，$|z| = R > 1$ と三角不等式 (2.1) より

$$|1+z^4| \overset{\text{三角不等式}}{\geq} |z|^4 - 1 = R^4 - 1 > 0$$

であるから，H_R 上 $\left|\dfrac{1}{1+z^4}\right| \leq \dfrac{1}{R^4-1}$．したがって，$M\ell$ 不等式(公式 3.3)より，

$$\left|\int_{H_R}\frac{1}{1+z^4}\,dz\right| \overset{M\ell\text{不等式}}{\leq} \frac{1}{R^4-1}\cdot\ell(H_R) = \frac{\pi R}{R^4-1} \to 0 \qquad (R\to\infty).$$

以上で $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ が示された． ∎

---

*10　積分路 H_R の長さは無限大に発散するのに，積分値が 0 に収束するのは違和感があるかもしれない．しかし，証明の $M\ell$ 不等式を使う部分からわかるように，積分路の長さ πR が増加するスピードよりも被積分関数の絶対値($1/(R^4-1)$ 以下)が 0 に近づくスピードのほうが勝っているので，積分の値は 0 に収束せざるを得ないのである．