5　正則関数の諸性質

本章のあらまし

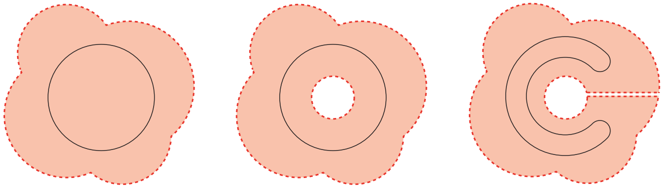
- 連続関数が正則となる十分条件として**モレラの定理**を示し，原始関数の存在条件などを解説する．応用として，対数関数の主値 $\operatorname{Log} z$ の正則性を示す．
- 2 つの正則関数が一致するため必要十分条件として，**一致の定理**を示す．その応用として，正則関数の極めて重要な性質である**最大値原理**を示す．
- 正則関数の概念を拡張した**有理型関数**を導入し，零点や極の個数の数え上げに用いられる**偏角の原理**を証明する．応用として，方程式の解の個数に関する**ルーシェの定理**を示す．
- 複素平面に**無限遠点**を加えた**リーマン球面**について概説する．

なお，各節の内容はほとんど独立しているので，興味のある節だけ読むのもよいだろう．

5.1　モレラの定理と原始関数

単連結　複素平面内の領域 D が**単連結**であるとは，D 内の任意の単純閉曲線 C に対して，その内部が D に含まれることをいう．ようするに，「穴のない」領域である．たとえば次ページの図で，左は単連結領域だが，中央は単連結でない．しかし，右のように切り込み（スリット）を入れると，単連結となる．

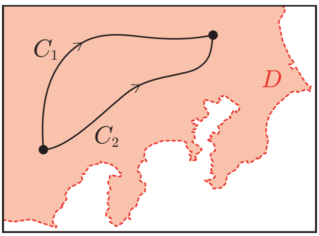
例 1　複素平面 $\mathbb{C}$ や円板 $D(\alpha, r)$ は単連結領域だが，円環領域（アニュラス）$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; r < |z| < R \right\}$ は単連結ではない．　□

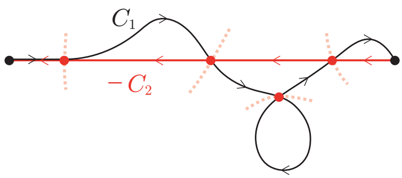


積分路の変形　第 3 章，例 7 の結果はつぎのように一般化される．

定理 5.1（積分路の変形 2）
D を複素平面内の単連結領域とし，$f(z)$ を D 上の正則関数とする．D 内の 2 つの曲線 C_1，C_2 が共通の始点と終点をもつとき，

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$





証明　C_1 と C_2 が端点以外で交差（自己交差も含む）しない場合，パラメータのとり替えにより $C_1 + (-C_2)$ は単純閉曲線となる．コーシーの積分定理（定理 3.10）より

$$\int_{C_1+(-C_2)} = 0 \iff \int_{C_1} = -\int_{-C_2} = \int_{C_2}.$$

それ以外の場合は，上図の右側のように C_1 と $-C_2$ を交差点で分割すれば，分割されたそれぞれの部分に対して同様の議論が適用できる[*1]．∎

*1　上図の右側のように，曲線の一部が完全に重なっている場合もあるが，そこでの積分値は必ず一致するので問題ない．また，無限個に分割しなくてはならない場合もある．たとえば，$u(t) = t^4 \sin(1/t)$ $(0 < t \leq 1/\pi)$, $u(0) = 0$ と定義すると，$u'(t) = -t^2 \cos(1/t) + 4t^3 \sin(1/t)$ より，これは区間 $[0,\ 1/\pi]$ 上の C^1 級関数を定める．さらに $0 \leq t \leq 1/\pi$ に対し $C_1 : z = t$, $C_2 : z = t + i\,u(t)$ とおけば，C_1 と C_2 はともに滑らかな曲線であり，$t = 0$ と $t = 1/\pi,\ 1/(2\pi),\ 1/(3\pi), \cdots$ において無限個の交差点をもつ．