『入門複素関数』に関する雑記（ver.20200116）

あらまし

- 「導関数の連続性」を仮定せずにコーシーの積分定理（本書定理 3.10）を証明する．また，それによって「導関数の連続性」を導出する．
- 有界単連結領域に対してリーマンの写像定理（本書定理 C.9）を証明する．

正則性の定義とコーシーの積分定理

正則性の定義再訪　本書の第 2.5 節で，

> 関数 $f(z)$ が領域 D 上で**正則**である，もしくは D 上の**正則関数**であるとは，つぎの 2 条件をみたすことをいう．
> (1) $f(z)$ は領域 D 上で微分可能であり，
> (2) その導関数 $f'(z)$ は D 上で連続．

と定義した（50 ページ）．その部分の脚注で述べたように，条件 (2) は実は不要で，条件 (1) だけから条件 (2) は導くことができる．すなわち，各点での複素微分可能性のみで正則性を定義しても理論上は問題ないし，記憶もしやすい[*1]．

条件 (1) から条件 (2) を導くには，次のようにする：

- まず，条件 (1) だけからコーシーの積分定理（定理 3.10）を証明する．
- それを用いて，コーシーの積分公式（定理 3.14）と n 階導関数の積分公式（定理 3.16）を証明する．証明方法は本書のものと同じ．

[*1] じつは，条件 (1) を導くさらに弱い条件も知られている．一般に，条件を弱める（= 仮定を減らす）と定理などの証明が難しくなるので，正則性の定義としてどこまで削るかは状況に応じて判断すればよい．

- これより，2 階導関数の存在がいえる．とくに，導関数もまた複素微分可能，すなわち正則である．
- 複素微分可能であれば連続であるから，導関数は連続である（命題 2.6）．

よって「正則＝各点で複素微分可能」として，コーシーの積分定理を証明すれば十分である．以下，そのような証明を与えるが，定理の主張はすこし形を変えてある．

定理 3.10'（コーシーの積分定理，その 2）

(1) D を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域，
(2) C を D 内の単純閉曲線，
(3) $f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．

このとき，

$$(*) \qquad \int_C f(z)\,dz \;=\; 0.$$

たとえば，$D = \mathbb{C}$（複素平面）とし，C を任意の単純閉曲線，f を多項式関数，指数関数，三角関数のいずれかとすれば，定理の条件を満たす．

これから，「積分定理」の証明を次の 3 段階に分けて解説する．

- **ステップ１**：f に原始関数が存在する場合（命題 A）．
- **ステップ２**：積分路が長方形の境界である場合（命題 B）．
- **ステップ３**：一般の場合．ステップ 1 に帰着されることを示す（命題 C）．

積分定理の証明（ステップ１） 関数 $f(z)$ に対し，$F'(z) = f(z)$ を満たす関数 $F(z)$ を f の**原始関数**と呼ぶ．すなわち，$F(z)$ は $f(z)$ を導関数とする正則関数である．

たとえば z^2 の原始関数は $z^3/3$，$z^3/3+i$ など，定数の分だけ無数に存在する．

命題 A 定理 3-10' の条件 (1)〜(3) を仮定する．さらに関数 $f(z)$ に原始関数 $F(z)$ が存在すれば，$(*)$ が成り立つ．

公式 2.9 などから，多項式関数，指数関数，三角関数については簡単に原始関数を見つけることができる．よって，これらの初等的関数については，この命題 A で「積分定理」が証明されたことになる．

とくに，$f(z)=Az+B$ の形の 1 次関数についても，原始関数 $Az^2/2+Bz$ が存在するから「積分定理」は正しい．この事実はあとで用いる．

【証明】 条件 (2) の単純閉曲線 $C: z=z(t)$ $(a \le t \le b)$ に対し，公式 3.4（本書の該当箇所を参照．以下同様）より

$$I := \int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,\dot{z}(t)\,dt.$$

いま $F'(z)=f(z)$ であるから，関数 $t \mapsto F(z(t))$ $(a \le t \le b)$ で与えられる曲線の速度について

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) = \frac{d}{dz}F(z(t))\frac{d}{dt}z(t) = f(z(t))\,\dot{z}(t)$$

が成り立つ（図 1）[*2]．ここで $F(z(t))$ の実部と虚部をそれぞれ $U(t), V(t)$ とおけば，

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}U(t)\,dt + i\int_a^b \frac{d}{dt}V(t)\,dt \\ &= \{U(b)-U(a)\} + i\,\{V(b)-V(a)\} \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) = 0. \end{aligned}$$

■

[*2] 曲線は有限個の点で急激な方向転換をしている可能性があるので，その時刻にあたる有限個の t は除外する．もちろん，積分の値には影響しない．

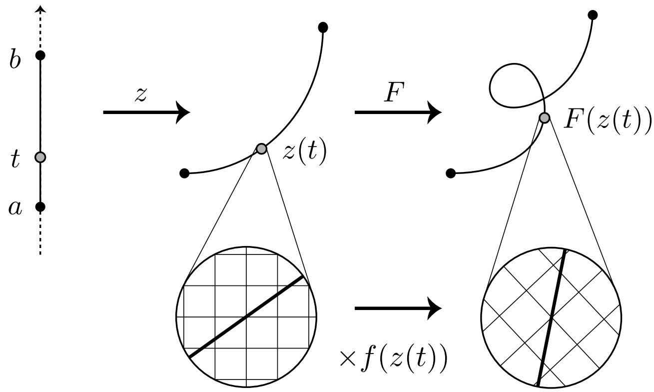


図 1　時刻 t において，曲線 $t \mapsto z(t)$ の速度は F によって局所的にほぼ $F'(z(t)) = f(z(t))$ 倍（拡大と回転）される．

積分定理の証明（ステップ２）　以後**長方形**といった場合，領域 D に含まれる長方形で，実軸と虚軸に平行な辺をもつものに限ることにする．また，与えられた長方形 R に対し，その境界を左回りに一周する曲線を ∂R と表そう．

命題 B 定理 3.10’ の条件 (1)〜(3) を仮定する．さらに C がある長方形 R の境界 ∂R であれば，$(*)$ が成り立つ．

【証明】 長方形 R を図 2 のように 4 等分し，それぞれ $S(1), S(2), S(3), S(4)$ とする．

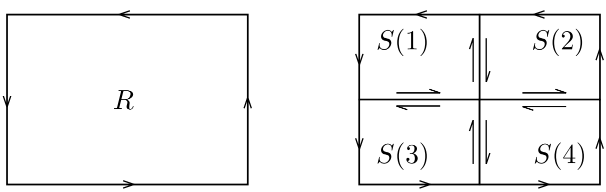


図 2　長方形の等分割．

さらに

$$I_0 := \int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_{\partial R}$$

のように略記すると，

$$\int_{\partial R} = \int_{\partial S(1)} + \int_{\partial S(2)} + \int_{\partial S(3)} + \int_{\partial S(4)}$$

となる．右辺の 4 項の中で，絶対値がもっとも大きなものを（ふたつ以上あればひとつ選んで）$I_1 = \displaystyle\int_{\partial S(k)}$ とすれば，三角不等式より

$$|I_0| \leq 4|I_1|$$

を得る．さらにこの $S(k)$ を $\delta(R)$ と表すことにしよう．

$R_0 := R$ として，同様の操作で帰納的に $R_{n+1} := \delta(R_n)$ と定めれば，積分 $I_n := \displaystyle\int_{\partial R_n}$ について

$$(**) \qquad |I_0| \leq 4^n |I_n|$$

が成立する．また，区間縮小法の原理により，

$$\bigcap_{n\geq 0} R_n = \{\alpha\}$$

を満たす D 内の点 α が存在する（図 3）．

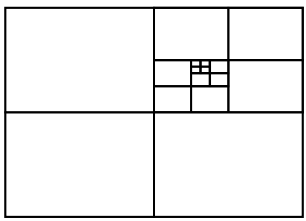


図 3　R_n の構成．共通部分として点 α が残る．

条件 (3) より α において f は微分可能であった．よって $A = f'(\alpha)$ とおき，$z \neq \alpha$ に対し

$$\eta_\alpha(z) := \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} - A$$

と定めると，$z \to \alpha,\, z \neq \alpha$ のとき

$$\eta_\alpha(z) \to 0$$

となる．ここで $\eta_\alpha(\alpha) := 0$ と定めれば，$\eta_\alpha(z)$ はいわゆる「平均変化率」と微分係数の誤差を測る D 上の連続関数である．

たとえば，誤差の許容量として $\varepsilon = 0.00000001 = 10^{-8}$ とおいてみる．もし z が α に十分近ければ $|\eta_\alpha(z)| \leq \varepsilon$ を満たすであろう．より具体的に，十分小さな半径 r を選べば，$|z-\alpha| < r$ のとき $|\eta_\alpha(z)| \leq \varepsilon$ を満たすようにできる．

いま n が十分に大きいとき，

$$\{\alpha\} \subset \cdots \subset R_{n+1} \subset R_n \subset D(\alpha, r)$$

が成り立つとしてよい．このとき，

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\partial R_n} f(z)\,dz \\ &= \int_{\partial R_n} \Big\{ \underline{f(\alpha) + A(z-\alpha)} + \eta_\alpha(z)(z-\alpha) \Big\}\,dz. \end{aligned}$$

下線部は 1 次関数であり，この部分の積分は命題 A より 0 となる．よって

$$I_n = \int_{\partial R_n} \eta_\alpha(z)\,(z-\alpha)\,dz.$$

これに公式 3.3（$M\ell$ 不等式）を適用しよう．変数 z は R_n の境界を動き，α は長方形 R_n 内にあるから，距離 $|z-\alpha|$ は R_n の対角線の長さを超えない．もとの長方形 R の対角線の長さを L とおけば，

$$|z-\alpha| \leq \frac{L}{2^n}$$

が成り立つ．$R_n \subset D(\alpha, r)$ より $|\eta_\alpha(z)| \leq \varepsilon$ であるから，$z \in \partial R_n$ に対し

$$|\eta_\alpha(z)\,(z-\alpha)| \leq \varepsilon \cdot \frac{L}{2^n}.$$

一方，積分路 ∂R_n の長さは R_n の対角線の長さの 4 倍より小さいから

$$\ell(\partial R_n) < \frac{L}{2^n} \cdot 4.$$

よって公式 3.3（$M\ell$ 不等式）より

$$|I_n| < \left(\varepsilon \cdot \frac{L}{2^n}\right)\left(\frac{L}{2^n} \cdot 4\right) = \frac{4\varepsilon L^2}{4^n}.$$

もとの積分 I_0 についても，$(**)$ より

$$|I_0| \leq 4^n |I_n| < 4\varepsilon L^2.$$

いま $\varepsilon = 10^{-8}$ とおいたが，これに深い意味はない．$\varepsilon = 10^{-80}$ でも $\varepsilon = 10^{-800}$ でも，いくらでも小さい正の数に置き換えて同様の議論ができるから，$I_0 = 0$ 以外はありえない． ■

積分定理の証明（ステップ３） 最後に，次の命題を示そう．

命題 C 定理 3.10' の条件 (1)〜(3) のもと，関数 f は原始関数 $F : D \to \mathbb{C}$ をもつ．

よって一般の場合もステップ 1 に帰着されて，命題 A より「積分定理」の証明が完了する．

【証明】 以下，**折れ線**とは実軸もしくは虚軸に平行な線分を有限個つなぎあわせてできる D 内の曲線をさすものと約束する．

いま D 内の点 α を選び固定しておく．D は「ひとつながり」であるから，D 内の任意の点 ζ に対し α を始点とし ζ を終点とする折れ線 C が存在する（図 4 左）．さらに，点 ζ を変数とする関数

$$F(\zeta) := \int_C f(z)\, dz$$

を考えよう．

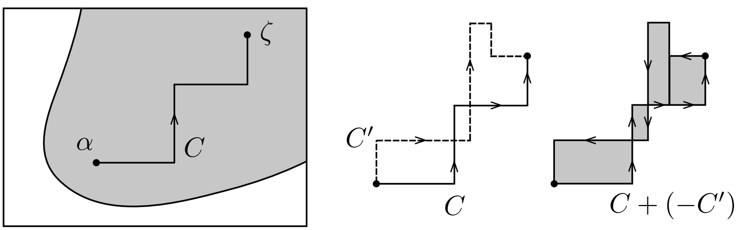


図 4　折れ線 C で α と ζ を結ぶ．閉曲線 $C + (-C')$ は有限個の長方形に分割される．

まず，$F(\zeta)$ の値が積分路の折れ線 C の取り方に依存しないことを確かめよう．α を始点とし ζ を終点とする別の折れ線 C' があるとき，閉曲線 $C+(-C')$ は図 4 右のように有限個の長方形の和集合に分割できる[*3]．よって命題 B より，積分

$$\int_{C+(-C')} f(z)\,dz = \int_C - \int_{C'}$$

の値は 0．すなわち

$$F(\zeta) = \int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(z)\,dz$$

であり，$F(\zeta)$ の値は積分路の折れ線に依存しないことが示された．

次に，$F(\zeta)$ が $f(\zeta)$ を導関数に持つことを示そう．D 内から任意の点 ζ を選び固定する．このとき，

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{F(\zeta+h)-F(\zeta)}{h} = f(\zeta)$$

を示せばよい．

関数 f は正則だから，連続である（前回の定理 3-1）．すなわち $z \to \zeta$ のとき，$f(z) \to f(\zeta)$ が成り立つ．より精密に，たとえば $\varepsilon = 10^{-8}$ とするとき，十分に小さな半径 $r > 0$ をとれば，$D(\zeta, r) \subset D$ かつ $z \in D(\zeta, r)$ のとき

$$(***) \qquad |f(z) - f(\zeta)| \le \varepsilon$$

となるようにできる．これを念頭に，以下では $|h| < r$ を仮定し，$\zeta + h \in D(\zeta, r)$ が成り立っているとしよう．

いま，定点 α から点 ζ へと結ぶ折れ線 C に加えて，ζ から $\zeta + h$ を最短で結ぶ折れ線 H を考えよう[*4]．このとき，H は $D(\zeta, r)$ に含まれているから，z が H 上にある限り $(***)$ 式を満たしている．

ここで，定数関数 $g(z) = 1$ に関する次の補題を用いる．

補題. z を始点，w を終点とする任意の曲線 C について，

$$\int_C 1 \cdot dz = w - z.$$

[*3] 一般には C と C' が線分の一部を共有する可能性があるが，$C+(-C')$ を考えるとその部分の積分は相殺されて 0 になる．

[*4] 最短といっても選び方は無数にある．一番単純なのは，タテ線・ヨコ線あわせて 2 本以下の線分で結ぶもの．

証明は難しくないのでみなさんの練習問題としよう[*5]．これより

$$\int_H 1 \cdot dz = (\zeta + h) - \zeta = h$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{F(\zeta+h)-F(\zeta)}{h} - f(\zeta) \\
=&\frac{1}{h}\left\{\int_{C+H} f(z)dz - \int_C f(z)dz\right\} - \frac{f(\zeta)}{h}\cdot h \\
=&\frac{1}{h}\int_H f(z)\,dz - \frac{f(\zeta)}{h}\int_H 1\cdot dz \\
=&\frac{1}{h}\int_H \{f(z)-f(\zeta)\}\,dz.
\end{aligned}$$

最後の式の絶対値を公式 3.3（$M\ell$ 不等式）で評価しよう．H としては最短なものを選んだので，折れ線の長さ $\ell(H)$ は $2|h|$ を超えない．また H が $D(\zeta, r)$ に含まれることから，

$$\frac{1}{|h|}\left|\int_H \{f(z)-f(\zeta)\}\,dz\right| \leq \frac{1}{|h|}\cdot\varepsilon\cdot\ell(H) \leq 2\varepsilon.$$

いま $\varepsilon = 10^{-8}$ としたが，この値にはとくに意味はなく，どんなに 0 に近い正の数に変えても，r を十分に小さく取り替えれば同様の議論ができる．よって $h \to 0, h \neq 0$ のとき

$$\frac{F(\zeta+h)-F(\zeta)}{h} \to f(\zeta).$$

ζ は任意だったので D 上で $F' = f$ であることが示された． ■

[*5] リーマン和を用いた積分の定義に立ち返ればよい．$g(z)$ の原始関数のひとつが z であることから，命題 A の証明の議論も使える．

正規族とリーマンの写像定理

定義（一様収束など）

- 位相空間 X が**可分** (separable) であるとは，ある可算部分集合 $E \subset X$ が存在して，$\overline{E} = X$ が成り立つことをいう．すなわち，$E = \{a_1, a_2, \cdots\}$ と点列で表現できて，X 内の任意の点の任意の近傍の中に，E の点が存在する．
  例えば $\mathbb{C}$，$\widehat{\mathbb{C}}$ は可分であることが知られている．
- $\mathbb{X}$ を完備距離空間，d_0 をその距離とする．例えば $\mathbb{X} = \mathbb{C}$，$d_0(z, w) = |z - w|$ と置いたものは（可分な）完備距離空間である．$\mathbb{X} = \widehat{\mathbb{C}}$，$d_0 = d$ を球面距離[*6]とした場合も同様に（可分な）完備距離空間である．以下では $\mathbb{X}$ はこのふたつのいずれかと仮定しよう．[*7]
- $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ を領域とする．関数の列 $\{f_n : D \to \mathbb{X}\}$ が部分集合 $E \subset D$ において $f : E \to \mathbb{X}$ に**一様収束**するとは，

$$
{}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N},\ {}^{\forall}n \geq N,\ {}^{\forall}z \in E,\ d_0(f(z), f_n(z)) < \varepsilon
$$

  が成り立つことをいう．
- 関数の列 $\{f_n : D \to \mathbb{X}\}$ が $f : D \to \mathbb{X}$ に**広義一様収束**するとは，D の任意のコンパクト集合上で f_n が f に一様収束することをいう．
- **例：** $f_n(z) = \dfrac{nz}{z+n}$ とおくと，f_n は $D = \widehat{\mathbb{C}}$ 上 $f = \mathrm{id}$ に一様収束する．
- $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ を領域とする．D 上で定義され $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ または $\widehat{\mathbb{C}}$ に値をもつ連続関数全体の集合を $C^0(D, \mathbb{X})$ で表す．

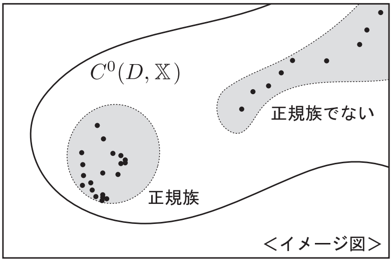
[*6] $\widehat{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{R}^3$ 内の球面とみなし，点の距離を普通の直線距離ではかったもの

[*7] このあと可分であること，完備であることがどのように使われているか意識しておこう．

- 部分集合 $\mathcal{F} \subset C^0(D, \mathbb{X})$ が**正規族** (normal family) であるとは，$\mathcal{F}$ 内の任意の点列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ にたいし，D 上広義一様収束する部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在することをいう．

注意！ $\{f_{n(k)}\}$ の広義一様収束極限 $f = \lim_k f_{n(k)}$ が $\mathcal{F}$ に入っているとは限らない．

注意！ $C^0(D, \mathbb{X})$ は適切な距離を定義することで完備距離空間とみなすことができる．このとき，$\mathcal{F}$ が正規族であることと，閉包 $\overline{\mathcal{F}}$ が点列コンパクトであることは同値である．



アスコリ・アルツェラの定理 与えられた連続関数の族が正規族になるための必要十分条件が，次の定理で与えられる：

アスコリ・アルツェラの定理 (the Ascoli-Arzelà theorem, AAT)
関数の族 $\mathcal{F} \subset C^0(D, \mathbb{X})$ が正規族

$$\iff \begin{cases} (1) & \text{すべての } z \in D \text{ において } \mathcal{F} \text{ は}\underline{\text{同程度連続}}\text{; かつ} \\ (2) & \text{すべての } z \in D \text{ において } \mathcal{F} \text{ は}\underline{\text{一様有界}} \end{cases}$$

下線の言葉をちゃんと定義しよう．

$$(1) \quad :\iff \quad ({}^\forall z \in D)({}^\forall \varepsilon > 0)({}^\exists \delta = \delta(z) > 0)({}^\forall f \in \mathcal{F}),$$

$$w \in D \text{ かつ } d(z, w) < \delta \implies d_0(f(z), f(w)) < \varepsilon$$

この δ は z のみに依存し，$f \in \mathcal{F}$ に依存しないのがミソ．D の各点においては，$\mathcal{F}$ の元に一様な速度制限がかかっている，と解釈できる．

(2) $:\Longleftrightarrow$ $({}^\forall z \in D)({}^\exists E = E(z) \subset \mathbb{X}$：コンパクト$)({}^\forall f \in \mathcal{F})$,

$$\{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset E$$

こちらも E は z のみに依存し，$f \in \mathcal{F}$ に依存しないのがミソ．D の各点においては，$\mathcal{F}$ の元に一様な渡航制限がかかっている，と解釈できる．

AAT の系　AAT を仮定すると，次の簡単な系が得られる．

系　($\mathbb{X} = \widehat{\mathbb{C}}$ のとき)

関数の族 $\mathcal{F} \subset C^0(D, \widehat{\mathbb{C}})$ が正規族 $\Longleftrightarrow$ (1) すべての $z \in D$ において $\mathcal{F}$ は同程度連続

【証明】 全ての $z \in D$ において $E(z) = \widehat{\mathbb{C}}$ とおくと，AAT の (2) が成立する． ■

AAT の証明　以下の議論では，D の可分性と $\mathbb{X}$ の完備性がとくに重要である．たとえば D, $\mathbb{X}$ をユークリッド空間（$\mathbb{R}^n$ など）に変えても成立することに注意しておこう．

($\Longleftarrow$)　まず (1) と (2) が正規性の十分条件であることを 5 ステップ（ア）〜（オ）にわけて示す．

(ア)：$A = (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i) \cap D$ とおくと，A は可算かつ $\overline{A} = \overline{D} \subset \widehat{\mathbb{C}}$．よって A の元を

$$A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\}$$

と表しておく．

(イ)：$\mathcal{F}$ 内の任意の列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と任意の $a_k \in A$ に対し，条件 (2) の一様有界性より集合 $\{f_n(a_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は集積点を持つ．たとえば $k = 1$ にたいし，

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$$

のある増加列からなる部分集合

$$N_1 = \{n_{11},\ n_{12},\ n_{13},\ n_{14},\ \cdots\}$$

が存在し，点列 $\{f_n(a_1)\}_{n\in N_1}$ は収束列となる．（すなわち，$\lim_{j\to\infty} f_{n_{1j}}(a_1)$ が収束する．）さらに増加列からなる N_1 の部分集合

$$N_2 = \{n_{21},\ n_{22},\ n_{23},\ n_{24},\ \cdots\} \subset N_1$$

で，今度は点列 $\{f_n(a_2)\}_{n\in N_2}$ が収束列となるようなものが存在する．同様に続けていけば，増加列からなる部分集合の列

$$\mathbb{N}\supset N_1\supset N_2\supset N_3\supset\cdots\supset N_k\supset\cdots$$

で，各自然数 k にたいし点列 $\{f_n(a_k)\}_{n\in N_k}$ が収束するようなものが存在する．いま，

$$N_k=\{n_{k1},\,n_{k2},\,n_{k3},\,n_{k4},\,\cdots\}$$

とおくと，

$$M=\{n_{11},\,n_{22},\,n_{33},\,n_{44},\,\cdots\}$$

も増加列からなる $\mathbb{N}$ の部分集合であり，各自然数 k にたいし点列 $\{f_n(a_k)\}_{n\in M}$ は収束する．[*8] この M について，関数列 $\{f_n\}_{n\in M}=\{f_{n_{kk}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が D 上で広義一様収束することを示せばよい．

(ウ)：E を D 内の任意のコンパクト集合とする．また，任意の $\varepsilon>0$ を固定する．このとき，条件 (1) の同程度連続性より，

$$\begin{aligned}&({}^{\forall}\zeta\in E)({}^{\exists}\delta=\delta(\zeta)>0)({}^{\forall}f\in\mathcal{F}),\\&z\in D\text{ かつ }d(z,\zeta)<\delta(\zeta)\implies d_0(f(z),f(\zeta))<\varepsilon/6\end{aligned}$$

とできる．E はコンパクトなので，有限個の $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_\ell$ が存在し，すべての $z\in E$ に対してある $j\in\{1,2,\ldots,\ell\}$ が存在して

$$z\in B(\zeta_j,\delta(\zeta_j))$$

とできる．[*9] ただし，$B(\alpha,r)$ は球面距離に関する中心 α，半径 r の開円板である．よって z，$w\in B(\zeta_j,\delta(\zeta_j))$ のとき，任意の $f\in\mathcal{F}$ にたいし

$$d_0(f(z),f(w))\le d_0(f(z),f(\zeta_j))+d_0(f(\zeta_j),f(w))\le\varepsilon/6+\varepsilon/6=\varepsilon/3$$

[*8] いわゆる対角線論法．例えば

$$\begin{aligned}\mathbb{N}&=\{1,2,3,4,\ldots\}\\N_1&=\{\underline{10},20,30,40,\ldots\}\\N_2&=\{100,\underline{200},300,400,\ldots\}\\N_3&=\{1000,2000,\underline{3000},4000,\ldots\}\end{aligned}$$

のとき，$M=\{10,200,3000,\ldots\}$ となる．

[*9] E の開被覆 $\bigcup\bigl\{B(\zeta,\delta(\zeta))\bigm|\zeta\in E\bigr\}$ から有限開被覆 $\{B(\zeta_j,\delta(\zeta_j))\}$ を選べばよい．

が成り立つ．

(エ)：可算集合 A は D 内で稠密であったから，(必要なら有限個の元について番号を入れ替えて）$a_j \in B(\zeta_j, \delta(\zeta_j))$ $(j = 1, 2, \ldots, \ell)$ としてよい．ここで，（イ）で構成した関数列 $\{f_n\}_{n\in M} = \{f_{n_{kk}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ にたいし，$g_k := f_{n_{kk}}$ とおくと，ある自然数 k_0 が存在し，$\mu, \nu \geq k_0$ のとき任意の $j = 1, 2, \ldots, \ell$ にたいし

$$d_0(g_\mu(a_j), g_\nu(a_j)) \leq \varepsilon/3$$

が成り立つ．

(オ)：任意の $z \in E$ にたいし，$z \in B(\zeta_j, \delta(\zeta_j))$ となる $j \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ を選ぶと，

$$d_0(g_\mu(z), g_\nu(z)) \leq d_0(g_\mu(z), g_\mu(a_j)) + d_0(g_\mu(a_j), g_\nu(a_j)) + d_0(g_\nu(a_j), g_\nu(z))$$

がなりたつ．右辺第 1 項については，$g_\mu \in \mathcal{F}$ と（ウ）より

$$d_0(g_\mu(z), g_\mu(a_j)) \leq d_0(g_\mu(z), g_\mu(\zeta_j)) + d_0(g_\mu(\zeta_j), g_\mu(a_j)) < \varepsilon/6 + \varepsilon/6 < \varepsilon/3$$

がいえる．右辺第 3 項についても同様である．右辺第 2 項については（エ）より，$d_0(g_\mu(a_j), g_\nu(a_j)) < \varepsilon/3$ であったから，結局

$$d_0(g_\mu(z), g_\nu(z)) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$$

が成り立つ．（よって $\{g_\mu(z)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であり，収束列．すなわち極限が存在する．ここで $\mathbb{X}$ の完備性が必要．）$z \in E$ は任意だったので，関数列 $\{f_n\}_{n\in M} = \{g_\mu(z)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ は収束する．

■$(\Longleftarrow)$

$(\Longrightarrow)$　次に条件 (1)(2) が正規性の必要条件であることを示そう．もし正規族 $\mathcal{F}$ があるコンパクト集合 E 上同程度連続でないとすると，$\varepsilon > 0$ と点の列 z_n, $z'_n \in E$, 関数列 $f_n \in \mathcal{F}$ が存在して $d(z_n, z'_n) < 1/n$ かつ $d_0(f_n(z_n), f_n(z'_n)) \geq \varepsilon$ を満たすようにできる．E のコンパクト性より，$\{z_n\}$ と $\{z'_n\}$ は同じ点 α に集積するが，必要なら部分列をとることで収束すると仮定してもよい．さらに部分列をとれば，正規性より $\{f_n\}$ もある $f : E \to \mathbb{X}$ に E 上一様収束すると仮定してもよい．このとき

$$d_0(f_n(z_n), f_n(z'_n)) \leq d_0(f_n(z_n), f(z_n)) + d_0(f(z_n), f(z'_n)) + d_0(f(z_n), f_n(z'_n))$$

が成り立つが，一様収束性より右辺第 1 項と第 3 項は十分大きな n にたいし $\varepsilon/3$ より小さくなる．また，f は連続関数列 f_n の一様収束極限なので連続，とくにコンパクト集合 E 上一様連続なので，右辺第 2 項も十分大きな n にたいし $\varepsilon/3$ より小さくなる．

これは仮定に矛盾である．よって条件 (1) は必要条件である．次に正規性から条件 (2) を示そう．$z \in D$ を固定し，$U = \{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\}$ の閉包がコンパクトであることをいえばよい．任意の点列 $\{w_n\} \subset \overline{U}$ をとると，$f_n \in \mathcal{F}$ で $d_0(f_n(z), w_n) < 1/n$ を満たすものが存在する．正規性より $\{f_n\}$ の収束部分列 $\{f_{n(k)}\}$ をとると，$\{f_{n(k)}(z)\}$ が極限をもつことから $\lim w_{n(k)}$ が存在する．すなわち $\overline{U}$ の（点列）コンパクト性が示された．　$\blacksquare(\Longrightarrow)$

モンテルの定理　$\mathbb{X} = \mathbb{C}$ かつ関数族 $\mathcal{F}$ が正則な場合，次のモンテルの定理を得る：

モンテルの定理 (Montel's Theorem)
正則関数の族 $\mathcal{F} \subset C^0(D, \mathbb{C})$ にたいし，$\mathcal{F}$ が正規族であることと，以下は同値：

(2)'　すべてのコンパクト集合 $E \subset D$ 上で $\mathcal{F}$ は一様有界.

(2)' は $f \in \mathcal{F}$ によらないコンパクト集合 $K = K(E)$ が存在して，すべての $f \in \mathcal{F}$ にたいし $f(E) \subset K$ が成り立つことをいう．

証明.　AAT より，条件 (2)' から AAT の条件 (1)(2) が得られることを示せばよい．(2)' なら (2) であることは明らかなので，(2)' の仮定のもと，全ての $\alpha \in D$ で $\mathcal{F}$ が同程度連続であることを示せばよい．

$\alpha \in D$ を固定し十分小さな $r > 0$ を取ると，$D(\alpha, r) \subset D$ とできる．いま任意の $f \in \mathcal{F}$ と $\zeta.\zeta' \in D(\alpha, r/2)$ を取り，$C = C(\alpha, r)$ とする．このとき，コーシーの積分公式より

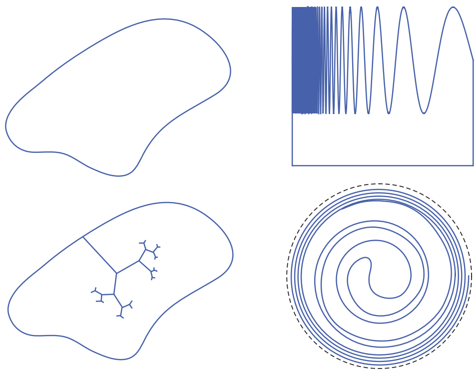
$$|f(\zeta) - f(\zeta')| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \zeta'}\, dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)(\zeta - \zeta')}{(z - \zeta)(z - \zeta')}\, dz \right|$$

が成り立つ．条件 (2)' より，ある f によらない $M > 0$ が存在して C 上 $f(z) < M$ が成立する．また，$z \in C$ のとき $|z - \zeta| \geq r/2$ かつ $|z - \zeta| \geq r/2$ であるから，

$$|f(\zeta) - f(\zeta')| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M|\zeta - \zeta'|}{(r/2)(r/2)} \cdot \ell(C) = \frac{4M}{r}|\zeta - \zeta'|.$$

ただし $\ell(C)$ は C の長さ $2\pi r$ である．r も M も $f \in \mathcal{F}$ には依存しないから，$\zeta' = \alpha$ とすることで $\mathcal{F}$ の同程度連続性が言えた．　$\blacksquare$

リーマンの写像定理　領域 $D \subset \mathbb{C}$ が単連結であるとは，任意の D 内の単純閉曲線 C について，その内部 $\mathrm{int}(C)$ が D に含まれることをいうのであった．直感的には，「穴のない領域」である．「穴がない」といっても，境界部分にはかなりワイルドな形状も考えられる．



それにもかかわらず，単連結領域には単位円板 $\mathbb{D} := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1 \right\}$ からの正則同相写像が存在するのである：

リーマンの写像定理 (the Riemann Mapping Theorem, RMT)
D を $\mathbb{C}$ 内の有界な単連結領域とする．このとき，正則な上への同相写像 $\psi : D \to \mathbb{D}$ が存在する．

注意！

- D が有界でない単連結領域であっても，$D \neq \mathbb{C}$ であるかぎり定理は正しい．(証明ではうまく写像を合成して有界な場合に帰着させる．)
- D 上では $\psi'(z) \neq 0$ となるので，等角写像（局所的な角度を保つ写像）になっている．

RMT の証明　(ア)： $z_0 \in D$ を任意にとる．有界性より，ある十分小さな $r > 0$ が存在し，アファイン写像 $T(z) = r(z - z_0)$ による D の像 $T(D)$ は単位円板 $\mathbb{D}$ に含まれるとしてよい．したがって，以後は $0 \in D \subset \mathbb{D}$ の場合に RMT を証明すれば十分である．

(イ)：関数族 $\mathcal{F}$ を次の (1)〜(3) を満たす $f : D \to f(D)$ の全体とする：

(1) $f(D) \subset \mathbb{D}$

(2) $f(0) = 0$

(3) $f : D \to f(D)$ は正則な全単射

例えば $f_0(z) = z$ （恒等写像）はこの 3 条件を満たすので，$f_0 \in \mathcal{F}$ である．また，任意の $z \in D$ と $f \in \mathcal{F}$ にたいし $f(z) \in \mathbb{D} \subset \overline{\mathbb{D}}$ であるから，$\mathcal{F}$ は一様有界である．よってモンテルの定理から，$\mathcal{F}$ は正規族となっている．

（ウ）いま，$M := \sup\{|f'(0)| \mid f \in \mathcal{F}\}$ とおく．$f_0 \in \mathcal{F}$ であるから，$M \geq 1$ である．また，sup の定義から，任意の増加列 $M_n \nearrow M$ $(n \to \infty)$ にたいし，ある $f_n \in \mathcal{F}$ が存在し，$M_n \leq |f_n'(0)| < M$ を満たす．$\mathcal{F}$ は正規族であったから，必要なら部分列を取ることで $\{f_n\}$ は D 上広義一様収束するとしてよい．その極限を ψ とおくと，$|\psi'(0)| = M$ が成り立つことに注意しよう．[*10]

（エ）：$\psi \in \mathcal{F}$ を示す．任意の $z \in D$ にたいし，$|f_n(z)| \leq 1$ より $|\psi(z)| \leq 1$ がわかるが，最大値原理より $|\psi(z)| < 1$ でなくてはならない．よって (1) は満たしている．次に (2) は $\psi(0) = \lim f_n(0) = 0$ よりわかる．(3) は単射であることをいえばよい：単射でないと仮定すると，ある異なる $a, b \in D$ が存在し，$\psi(a) = \psi(b) =: p \in \mathbb{D}$ である．ここで $F_n(z) := f_n(z) - p$，$\Psi(z) := \psi(z) - p$ とおいてみよう．いま D は単連結なので，その中にうまく単純閉曲線 C をとって，$\mathrm{int}(C)$ に a と b が含まれ，かつ C 上には Ψ の零点が存在しないようにできる．（一致の定理より零点は孤立しているから．）$\Psi(a) = \Psi(b) = 0$ と偏角の原理より $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)}\,dz \geq 2$ であるが，一方で F_n の単射性から F_n の零点は高々 1 点であり，$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{F_n'(z)}{F_n(z)}\,dz \leq 1$ である．ワイエルシュトラスの定理から F_n および F_n' は C 上 Ψ および Ψ に一様収束するから，積分 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{F_n'(z)}{F_n(z)}\,dz$ は $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)}\,dz$ に収束する．これは矛盾である．

（オ）：最後に $\psi(D) = \mathbb{D}$ を示そう．そうでないと仮定して矛盾を導く．その前に，任意の $\alpha \in \mathbb{D}$ に対し，メビウス変換 $T_\alpha : w \mapsto \dfrac{w - \alpha}{1 - \overline{\alpha} w}$ は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ の上への正則な同相写像を与えることに注意する．[*11]

さて $\alpha \in \mathbb{D} - \psi(D)$ として，写像

$$\phi(z) := \sqrt{\frac{\psi(z) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\psi(z)}} \quad (= \sqrt{T_\alpha(\psi(z))})$$

[*10] ワイエルシュトラスの定理．正則関数の（広義）一様収束極限は正則であり，導関数も（広義）一様収束する．

[*11] 確かめてみよ．

を考える．（$\psi(0)=0$ より $\alpha\neq 0$ である．）根号の中は 0 にならないので，適当な分枝をとればこれは正則な同相写像 $\phi: D\to\phi(D)\subset\mathbb{D}$ を与える．さらに

$$\Phi(z):=\frac{\phi(z)-\phi(0)}{1-\overline{\phi(0)}\phi(z)}=\frac{\phi(z)-\sqrt{-\alpha}}{1-\overline{\sqrt{-\alpha}}\phi(z)}\quad(=T_{\phi(0)}(\phi(z)))$$

とおくと，$\Phi\in\mathcal{F}$ であることがわかる．ところが，原点での微分を計算すると，$|\alpha|\neq 0,1$ より

$$|\Phi'(0)|=\frac{1}{2}\left(\sqrt{|\alpha|}+\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}\right)\cdot|\psi'(0)|>|\psi'(0)|=M$$

となる．これは M の定義に矛盾する． ■