金融経済論１　講義ノート　2010 年 11 月 9 日　　（塩路）赤字は授業後訂正

RBCの理論

教科書では第１章で RBC 理論を解説し、第７章で対応する Matlab コードを解説している。しかし、第１章と第７章では微妙に使われている記号が違う。（また、第７章とコードの間でも、技術水準の記号が違っている）ここではできるだけ第７章の記号でモデルを解説する。

代表的家計

資本ストックを所有。労働を供給。所得から消費を差し引いたものが貯蓄＝資本ストックへの投資となる。

$$Max\, U_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t)$$

$$s.t.\, k_{t+1} = (1-\delta)\cdot k_t + w_t \cdot l_t + r_t \cdot k_t - c_t, \quad \forall t \geq 0 \tag{1}$$

k_0は所与

（このほかに no ponzi game 条件と呼ばれる条件が（暗に）課されている）

c は消費、l は労働供給、k は資本ストック、w は実質賃金、r は資本の実質レンタル料である。

ただし

$$u(c_t, l_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\mu}{1+\lambda}\cdot l_t^{1+\lambda} \tag{2}$$

ラグランジュ乗数法を用いる（第７章 p.216 参照）。

$$\Lambda_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\mu}{1+\lambda}\cdot l_t^{1+\lambda} + \beta\cdot\phi_{t+1}\cdot\left\{(1-\delta)\cdot k_t + w_t\cdot l_t + r_t\cdot k_t - c_t - k_{t+1}\right\}\right] \tag{3}$$

微分してゼロとおく。なお、k_t は t 期初には既に決まっているから、t 期に選ぶのは k_t ではなく k_{t+1} である。

$$\frac{\partial \Lambda_0}{\partial c_t} = 0 \quad \Leftrightarrow c_t^{-\sigma} = \beta\cdot\phi_{t+1} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Lambda_0}{\partial l_t} = 0 \quad \Leftrightarrow \mu\cdot l_t^{\lambda} = \beta\cdot\phi_{t+1}\cdot w_t \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Lambda_0}{\partial k_{t+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \beta\cdot\phi_{t+1} = \beta^2\cdot E_t\phi_{t+2}\left[1 + r_{t+1} - \delta\right] \tag{6}$$

(4)と(5)より、

$$w_t / \left(\mu \cdot c_t^{\ \sigma}\right) = l_t^{\lambda} \qquad (7)$$

(4)と(6)より、

$$c_t^{-\sigma} = \beta \cdot E_t c_{t+1}^{\ \ -\sigma}\left[1 + r_{t+1} - \delta\right] \qquad (8)$$

（これがオイラー方程式）

$\boxed{\text{企業}}$

利潤を最大化。生産関数は

$$y_t = v_t \cdot k_t^{\alpha} \cdot l_t^{1-\alpha} \qquad (9)$$

ここで y は生産、v は技術水準（確率的）。利潤は

$$\Pi_t = y_t - r_t \cdot k_t - w_t \cdot l_t \qquad (10)$$

利潤最大化問題を解くと

$$r_t = \alpha \cdot v_t \cdot \left(k_t / l_t\right)^{\alpha-1} \qquad (11)$$

$$w_t = \left(1-\alpha\right) \cdot v_t \cdot \left(k_t / l_t\right)^{\alpha} \qquad (12)$$

なお、(11)を 1 期進めると、

$$r_{t+1} = \alpha \cdot v_{t+1} \cdot \left(k_{t+1} / l_{t+1}\right)^{\alpha-1} \qquad (11')$$

また技術水準は AR(1)過程に従う。

$$\ln(v_{t+1}) = \phi \cdot \ln(v_t) + \xi_{t+1} \qquad (13)$$

なお $0 < \phi < 1$（ここは教科書とはちょっと変えました）。ショック項 ξ_{t+1} の期待値はゼロとする。

また、(11)と(12)より、

$$w_t \cdot l_t + r_t \cdot k_t = y_t \qquad (14)$$

が言えることに注意しておこう。

$\boxed{\text{均衡}}$

式(1)の予算制約式に(14)を代入して、(9)を用いると

$$k_{t+1} = (1-\delta) \cdot k_t + v_t \cdot k_t^{\alpha} \cdot l_t^{1-\alpha} - c_t \qquad (15)$$

均衡条件は(7)、(8)、(13)、(15)に(11’)と(12)を代入すれば求まる。

先決変数は k_t と v_t、ジャンプ変数が c_t と l_t。

まとめると、

$$c_t^{-\sigma}=\beta\cdot E_t c_{t+1}^{-\sigma}\left[1+\alpha\cdot v_{t+1}\cdot\left(k_{t+1}/l_{t+1}\right)^{\alpha-1}-\delta\right] \tag{16}$$

$$\left(1-\alpha\right)\cdot v_t\cdot\left(k_t/l_t\right)^{\alpha}/\left(\mu\cdot c_t^{\sigma}\right)=l_t^{\lambda} \tag{17}$$

$$k_{t+1}=(1-\delta)\cdot k_t+v_t\cdot k_t^{\alpha}\cdot l_t^{1-\alpha}-c_t \tag{15}$$

$$\ln(v_{t+1})=\phi\cdot\ln(v_t)+\xi_{t+1} \tag{13}$$

非確率的定常状態の条件

「非確率的」（つまり確率的ショックがない場合の、言い換えれば全ての期において$\xi_{t+1}=0$であるときの）定常状態の値を*をつけて表すことにしよう。このとき、期待値のオペレーターは無視することが出来る。

まず、(13)より、

$$\ln(v^*)=0\quad\Rightarrow\quad v^*=1 \tag{18}$$

これを用いると非確率的定常状態の条件は

$$c^{*-\sigma}=\beta\cdot c^{*-\sigma}\left[1+\alpha\cdot\left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1}-\delta\right] \tag{19}$$

$$\left(1-\alpha\right)\cdot\left(k^*/l^*\right)^{\alpha}/\left(\mu\cdot c^{*\sigma}\right)=l^{*\lambda} \tag{20}$$

$$k^*=(1-\delta)\cdot k^*+k^{*\alpha}\cdot l^{*1-\alpha}-c^* \tag{21}$$

非確率的定常状態の解法

まず(19)から、

$$1=\beta\cdot\left[1+\alpha\cdot\left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1}-\delta\right] \tag{22}$$

より、

$$\alpha\cdot\left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1}=1/\beta-1+\delta \tag{22'}$$

（これが定常状態における MPK である。）これより

$$k^*/l^*=\left[\frac{\alpha}{1/\beta-1+\delta}\right]^{1/(1-\alpha)} \tag{23}$$

のように資本・労働比率が求まる。

次に(21)の両辺を l^*で割ると

$$k^*/l^* = (1-\delta)(k^*/l^*) + (k^*/l^*)^{\alpha} - c^*/l^* \tag{24}$$

よって、

$$c^*/l^* = (k^*/l^*)^{\alpha} - \delta(k^*/l^*) \tag{25}$$

これに(23)を代入すれば c^*/l^*は求まるはずである。
最後に、(20)の両辺に $c^{*\sigma}$ をかけると

$$(1-\alpha)\cdot(k^*/l^*)^{\alpha}/\mu = l^{*\lambda}\cdot c^{*\sigma} \tag{26}$$

変形して、

$$(1-\alpha)\cdot(k^*/l^*)^{\alpha}/\mu = l^{*\lambda+\sigma}\cdot(c^*/l^*)^{\sigma} \tag{27}$$

これより、

$$l^* = \left[(1-\alpha)\cdot(k^*/l^*)^{\alpha}/\left(\mu(c^*/l^*)^{\sigma}\right)\right]^{1/(\lambda+\sigma)} \tag{28}$$

こうして l^*が求まった。すでに k^*/l^*と c^*/l^*が求まっているから、ここから k^*と c^*を求めることが出来るはずである。(手で求めるのは大変だがパソコンならやれるはずである。)

対数線形近似(復習)

次のステップは、均衡条件を前節で求めた非確率的定常状態の周りで対数線形近似することである。このステップはパソコンにやらせることもできるが、1 回くらいは自分でやってみたい。復習になるが、ある関数

$$f(x,y) = 0$$

があったとしよう。また、ある点 $(x,y) = (x^*, y^*)$ において、

$$f(x^*, y^*) = 0$$

が成立しているものとしよう（この条件は特に必要ないが、後の説明が簡潔になるので採用する）。

<u>線形近似</u>

$$f(x,y) \fallingdotseq \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,y^*}\cdot(x-x^*) \quad + \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x^*,y^*}\cdot(y-y^*)$$

ただし、見慣れない記号、たとえば

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,y^*}$$

は、「関数 f を x について偏微分して、それを $(x,y)=(x^*,y^*)$ の点で評価したもの」という意味であるとする。

(例) $f(x,y)=x\cdot y-1,\quad x^*=1, y^*=1$

$\Rightarrow\quad f(x,y)\doteqdot y^*\cdot(x-x^*)+x^*\cdot(y-y^*)=(x-x^*)+(y-y^*)$

対数線形近似

$$f(x,y)\doteqdot x^*\cdot\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,y^*}\cdot\hat{x}\quad+\quad y^*\cdot\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x^*,y^*}\cdot\hat{y}$$

ただしここでは、

$$\hat{x}\equiv\ln(x)-\ln(x^*),\quad \hat{y}\equiv\ln(y)-\ln(y^*)$$

と定義している。（ただし、この近似が可能となる前提は、x も y も正の値しかとらないことである。）

対数線形近似(実際)

上のモデルを対数線形近似してみよう。ここで気になるのは、(16)式右辺の E_t という期待値オペレーターである。実は、対数線形近似の場合にはこのオペレーターはいったん無視してかまわないことが知られている。手順でいうと、あたかも期待値オペレーターがないかのように通常の対数線形近似を行い、全てのシミュレーション結果が出そろった後に、将来の変数について E_t を左に足せばよい。この性質は「確実性等価」と呼ばれ、我々の暮らしをだいぶ楽にしてくれる。詳細は補論に譲るが、対数線形近似の結果、次のような式が得られる。

$$-\hat{c}_t+\hat{c}_{t+1}+(\beta/\sigma)\cdot\left[1/\beta-1+\delta\right]\cdot\left[(1-\alpha)\cdot(\hat{k}_{t+1}-\hat{l}_{t+1})-\hat{v}_{t+1}\right]=0 \qquad (29)$$

$$\hat{v}_t+\alpha\cdot(\hat{k}_t-\hat{l}_t)-\sigma\cdot\hat{c}_t-\lambda\cdot\hat{l}_t=0 \qquad (30)$$

$$\hat{k}_{t+1}-(1-\delta)\cdot\hat{k}_t-\left(k^*/l^*\right)^{-(1-\alpha)}\left(\hat{v}_t+\alpha\cdot\hat{k}_t+(1-\alpha)\cdot\hat{l}_t\right)+(c^*/k^*)\hat{c}_t=0 \qquad (31)$$

$$\hat{v}_{t+1}=\phi\cdot\hat{v}_t+\xi_{t+1} \qquad (32)$$

加藤涼氏の Matlab コードに代入

ここまで来たら結果を加藤涼氏のコードに代入するだけである。前にも言ったが、唯一注意すべきは、変数の並べ方の順番に関するルールである。次の順になっている必要がある。

① t+1 期のジャンプ変数(この場合は$\hat{l}_{t+1}, \hat{c}_{t+1}$)

② t+1 期の先決変数(この場合は$\hat{k}_{t+1}, \hat{v}_{t+1}$)

③ t 期のジャンプ変数(この場合は$\hat{l}_t, \hat{c}_t$)

④ t 期の先決変数(この場合は$\hat{k}_t, \hat{v}_t$)

よって、上の均衡条件は以下のように書き換えられる。

$$\begin{bmatrix} -(1-\alpha)\cdot a & 1 & (1-\alpha)\cdot a & -a & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\alpha+\lambda) & -\sigma & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -(1-\alpha)b & c & -(1-\delta+\alpha b) & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{l}_{t+1} \\ \hat{c}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \\ \hat{v}_{t+1} \\ \hat{l}_t \\ \hat{c}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{v}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし

$$a = (\beta/\sigma)\cdot[1/\beta - 1 + \delta]$$

$$b = \left(k^*/l^*\right)^{-(1-\alpha)}、\quad c = (c^*/k^*)$$

左辺の係数行列を代入しさえすれば、あとの計算は Matlab がやってくれるはずである。

補論　対数線形近似の取り方、詳細

この補論では(16)式の対数線形近似を丁寧にやる。他の式は簡単に触れる。
確実性等価の性質が成り立つことが分かっているから、まず期待値オペレーターを無視した対数線形近似を行おう。
まず、(16)式を変形して、ついでに期待値オペレーターを落としておくと、

$$c_t^{-\sigma} - \beta \cdot c_{t+1}^{-\sigma}\left[1+\alpha \cdot v_{t+1} \cdot \left(k_{t+1}/l_{t+1}\right)^{\alpha-1} - \delta\right] = 0$$

まず左辺第 1 項を c_t について微分すると $-\sigma \cdot c_t^{-\sigma-1}$ を得る。これを非確率的定常状態で評価してやると、

$$-\sigma \cdot c^{*-\sigma-1}$$

対数線形近似の場合にはこれに c^*をかけるから、

$$c^*(-\sigma \cdot c^{*-\sigma-1}) = -\sigma \cdot c^{*-\sigma}$$

よって第 1 項部分を取り出すと、対数線形近似された式では

$$-\sigma \cdot c^{*-\sigma} \cdot \hat{c}_t$$

と、いう感じになるはずである。同様に、第 2 項

$$-\beta \cdot c_{t+1}^{-\sigma}\left[1+\alpha \cdot v_{t+1} \cdot \left(k_{t+1}/l_{t+1}\right)^{\alpha-1} - \delta\right]$$

は、各変数で微分して非確率的定常状態で評価すると

c_{t+1} で微分→ $\beta \cdot \sigma \cdot c^{*-\sigma-1}\left[1+\alpha \cdot v^* \cdot \left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1} - \delta\right]$　　(a)

l_{t+1} で微分→ $-\beta \cdot c^{*-\sigma}\left[\alpha \cdot (1-\alpha) \cdot v^* \cdot \left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1}\right]/l^*$　　(b)

k_{t+1} で微分→ $\beta \cdot c^{*-\sigma}\left[\alpha \cdot (1-\alpha) \cdot v^* \cdot \left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1}\right]/k^*$　　(c)

v_{t+1} で微分→ $-\beta \cdot c^{*-\sigma}\left[\alpha \cdot v^* \cdot \left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1}\right]/v^*$　　(d)

次に、$v^*=1$ を考慮に入れつつ、

(a)に c^*をかける→ $\beta \cdot \sigma \cdot c^{*-\sigma}\left[1+\alpha \cdot \left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1} - \delta\right]$　　(a') (b)に l^*をかける→ $-\beta\cdot c^{*-\sigma}\left[\alpha\cdot(1-\alpha)\cdot\left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1}\right]$ (b')

(c)に k^*をかける→(b')にマイナスをつけたものになる (c')

(d)に v^*をかける→(b')を $(1-\alpha)$ で割ったものになる (d')

以上、なんだかすごい計算のようにも見えるが、整理すると

$$-\sigma\cdot c^{*-\sigma}\cdot\hat{c}_t+\beta\cdot\sigma\cdot c^{*-\sigma}\left[1+\alpha\cdot\left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1}-\delta\right]\cdot\hat{c}_{t+1}$$

$$+\beta\cdot c^{*-\sigma}\left[\alpha\cdot\left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1}\right]\cdot\left[(1-\alpha)\cdot(\hat{k}_{t+1}-\hat{l}_{t+1})-\hat{v}_{t+1}\right]=0$$

これでもすごい式に見えてくらくらするかもしれないが、対数線形近似のいいところは、我々が講義で扱うようなモデルに関しては、定常状態の条件を使ってがんがん簡単にできるということである。事実、(22)をそのまま使うだけで上の式は一気に

$$-\hat{c}_t+\hat{c}_{t+1}+(\beta/\sigma)\cdot\left[\alpha\cdot v^*\cdot\left(k^*/l^*\right)^{\alpha-1}\right]\cdot\left[(1-\alpha)\cdot(\hat{k}_{t+1}-\hat{l}_{t+1})-\hat{v}_{t+1}\right]=0$$

へと単純化される。さらに(22')より、この式は

$$-\hat{c}_t+\hat{c}_{t+1}+(\beta/\sigma)\cdot\left[1/\beta-1+\delta\right]\cdot\left[(1-\alpha)\cdot(\hat{k}_{t+1}-\hat{l}_{t+1})-\hat{v}_{t+1}\right]=0$$

と、ここまで単純化される。最後に「忘れていた」期待値オペレーターを戻しておくと、

$$-\hat{c}_t+E_t\left\{\hat{c}_{t+1}+(\beta/\sigma)\cdot\left[1/\beta-1+\delta\right]\cdot\left[(1-\alpha)\cdot(\hat{k}_{t+1}-\hat{l}_{t+1})-\hat{v}_{t+1}\right]\right\}=0$$

以上で(16)式の対数線形近似が完了した。

式(16)以外

次に、(17)式を取り上げる。ちょっと書きなおして、

$$\left(1-\alpha\right)\cdot v_t\cdot\left(k_t/l_t\right)^{\alpha}-\left(\mu\cdot c_t^{\sigma}\right)l_t^{\lambda}=0 \qquad (17')$$

としておく。この式はさっきのよりは簡単である。次のような結果が得られるはずである。

$$\hat{v}_t+\alpha\cdot(\hat{k}_t-\hat{l}_t)-\sigma\cdot\hat{c}_t-\lambda\cdot\hat{l}_t=0$$

あるいは、「別解」であるが、(17)の両辺の対数をとると

$$\ln\left(1-\alpha\right)+\ln v_t+\alpha\cdot\left[\ln k_t-\ln l_t\right]-\ln(\mu)-\sigma\ln c_t=\lambda\ln l_t$$

この式を各変数のログについて線形近似すれば上の式が得られる。

次に(15)式である。

$$k_{t+1} = (1-\delta)\cdot k_t + v_t \cdot k_t^{\alpha} \cdot l_t^{1-\alpha} - c_t \qquad (15)$$

先に(16)式に当てはめたのと同じ方法から、

$$k^*\cdot\hat{k}_{t+1} = (1-\delta)\cdot k^*\cdot\hat{k}_t + k^{*\alpha}\cdot l^{*1-\alpha}\left(\hat{v}_t + \alpha\cdot\hat{k}_t + (1-\alpha)\cdot\hat{l}_t\right) - c^*\hat{c}_t$$

両辺を k^*で割るとぐっと簡単になり、

$$\hat{k}_{t+1} = (1-\delta)\cdot\hat{k}_t + \left(k^*/l^*\right)^{-(1-\alpha)}\left(\hat{v}_t + \alpha\cdot\hat{k}_t + (1-\alpha)\cdot\hat{l}_t\right) - (c^*/k^*)\hat{c}_t$$

これらの係数は定常状態の条件から求められるはずである。

最後に、

$$\ln(v_{t+1}) = \phi\cdot\ln(v_t) + \xi_{t+1} \qquad (13)$$

この式は「もとから対数線形」である。単に書き換えて、

$$\hat{v}_{t+1} = \phi\cdot\hat{v}_t + \xi_{t+1}$$