課題2 解答（塩路）

$$\max U_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(C_t)$$

s.t. $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + A_t K_t^{\alpha} - C_t \quad \forall t$

(1) $$\mathcal{L} \equiv E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln(C_t) + \lambda_t \{ (1-\delta)K_t + A_t K_t^{\alpha} - C_t - K_{t+1} \} \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_t} = \lambda_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = 0 \Leftrightarrow \lambda_t = E_t \{ (1-\delta) + A_{t+1} \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} \} \lambda_{t+1} \cdot \beta$$

両式合わせると、

$$\frac{1}{C_t} = E_t \beta \frac{1}{C_{t+1}} \left[1 + \alpha A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} - \delta \right]$$

(2) 定常状態 $$\frac{1}{C^*} = \beta \frac{1}{C^*} \left[1 + \alpha A^* K^{*\alpha-1} - \delta \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} = 1 + \alpha A^* K^{*\alpha-1} - \delta \quad \cdots \text{★}$$

$$\Rightarrow K^* = \left[\frac{\alpha A^*}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

また、 $K^* = (1-\delta)K^* + A^* K^{*\alpha} - C^*$

$$\therefore C^* = A^* K^{*\alpha} - \delta K^*$$

(3)

当面、確率的要素を無視して分析する。

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + A_t K_t^{\alpha} - C_t$$

[左辺] $\dfrac{\partial \text{左辺}}{\partial K_{t+1}} = 1$ より、 $K^* \cdot 1 \cdot \widehat{\ln K_{t+1}}$

[右辺] $\dfrac{\partial \text{右辺}}{\partial K_t} = (1-\delta) + \alpha A_t \cdot K_t^{\alpha-1}$, $\dfrac{\partial \text{右辺}}{\partial C_t} = -1$, $\dfrac{\partial \text{右辺}}{\partial A_t} = K_t^{\alpha}$ より、

$$K^* \cdot \left[(1-\delta) + \alpha A^* K^{*\alpha-1}\right] \cdot \widehat{\ln K_t}$$

$$+ \, C^* \cdot (-1) \cdot \widehat{\ln C_t}$$

$$+ \, A^* \cdot (K^{*\alpha}) \cdot \widehat{\ln A_t}$$

よって両辺をK^*でわると、

$$\widehat{\ln K_{t+1}} = \left[(1-\delta) + \alpha A^* K^{*\alpha-1}\right] \cdot \widehat{\ln K_t} - \frac{C^*}{K^*} \cdot \widehat{\ln C_t}$$

$$+ \, A^*(K^{*\alpha-1}) \widehat{\ln A_t}$$

まず①より、 $(1-\delta) + \alpha A^* K^{*\alpha-1} = \dfrac{1}{\beta}$

次に $C^* = A^* K^{*\alpha} - \delta K^*$ より、 $\dfrac{C^*}{K^*} = AK^{*\alpha-1} - \delta$

ここで $MPK^* = \alpha A K^{*\alpha-1}$ より、 $\dfrac{C^*}{K^*} = \dfrac{1}{\alpha} MPK^*$

同様に、 $A^*(K^{*\alpha-1}) = \dfrac{1}{\alpha} \cdot MPK^*$

以上を代入すると答えを得る。

(最後に t+1 期の変数に E_t をつける。)

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \frac{1}{C_{t+1}}\left[1+\alpha A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} - \delta\right]$$

左辺 $\quad C^* \cdot \left(-\frac{1}{C^{*2}}\right) \cdot \widehat{\ln C}_t$

右辺 $\quad \beta \cdot C^* \cdot \left(-\frac{1}{C^{*2}}\right)\left[1+\alpha A^* K^{*\alpha-1} - \delta\right] \cdot \widehat{\ln C}_{t+1}$

$$+ \beta K^* \cdot \frac{1}{C^*} \alpha(\alpha-1) A^* K^{*\alpha-2} \cdot \widehat{\ln K}_{t+1}$$

$$+ \beta A^* \cdot \frac{1}{C^*} \alpha K^{*\alpha-1} \cdot \widehat{\ln A}_{t+1}$$

よって、両辺に $-C^*$ をかけて、

$$\widehat{\ln C}_t = \underbrace{\beta\left[1+\alpha A^* K^{*\alpha-1} - \delta\right]}_{\substack{= \\ 1 \\ (\text{定より})}} \cdot \widehat{\ln C}_{t+1} + \beta(1-\alpha) \underbrace{\alpha A^* K^{*\alpha-1}}_{\substack{= \\ MPK^*}} \widehat{\ln K}_{t+1}$$

$$- \beta \underbrace{\alpha A^* K^{*\alpha-1}}_{\substack{= \\ MPK^*}} \cdot \widehat{\ln A}_{t+1}$$

よって、$\widehat{\ln C}_{t+1} - \widehat{\ln C}_t = -(1-\alpha)\beta\, MPK^* \cdot \widehat{\ln K}_{t+1}$

$$+ \beta\, MPK^* \cdot \widehat{\ln A}_{t+1}$$

(最後に $t+1$ 期の変数に E_t をつける)