ドーンブッシュ･モデルのMatlabによるシミュレーション

(2010年11月2日、「金融経済論I」、塩路)

(1)　“Dorn1.m”の解説

ドーンブッシュ･モデルのシミュレーションを行う。

Dornbusch モデル

(1)　LM 曲線　$m - p_t = y_t - a \cdot i_t$

(2)　IS 曲線　$y_t = -b \cdot i_t + c \cdot (e_t + p^* - p_t)$

(3)　フィリップス曲線　$\Delta p_t = d \cdot \left(y_t - y^* \right)$

(4)　カバーなしの金利平価式（UIP）　$i_t = i^* + \Delta e_t$

行列演算形式に直す

上記モデルは次のように書き換えられる。

(5)　$e_{t+1} = (1 + a_{22}) \cdot e_t + a_{21} \cdot p_t + c_2$

(6)　$p_{t+1} = a_{12} \cdot e_t + (1 - a_{11}) \cdot p_t + c_1$

ただし、

$$a_{11} = \frac{(ac+b)d}{a+b},\ a_{12} = \frac{acd}{a+b},\ a_{21} = \frac{1-c}{a+b},\ a_{22} = \frac{c}{a+b},$$

$$c_1 = \frac{bd}{a+b} m + \frac{acd}{a+b} p^* - d\ {}^*, \quad c_2 y= -\frac{1}{a+b} m + \frac{c}{a+b} p^* - i^*$$

である。さらにpとeの定常値からの乖離をそれぞれ$\hat{p}$、$\hat{e}$と書くことにすると、

(5’)　$\hat{e}_{t+1} = (1 + a_{22}) \cdot \hat{e}_t + a_{21} \cdot \hat{p}_t$

(6’)　$\hat{p}_{t+1} = a_{12} \cdot \hat{e}_t + (1 - a_{11}) \cdot \hat{p}_t$

これを行列演算の形式にまとめると、

(7)　$$\begin{bmatrix} \hat{e}_{t+1} \\ \hat{p}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & 1 - a_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{e}_t \\ \hat{p}_t \end{bmatrix}$$

となる。

加藤涼氏の Matlab コードを応用したシミュレーション手順(1)

教科書の著者である加藤涼氏が自ら web 上で公開している rbc1.m を適宜改変することで、以上のモデルのシミュレーションを行う。結果は講義 web site 上の dorn1.m である。以下ではこのコードで行われていることを解説する。

加藤氏のコードで注意すべき最大のルールは変数の並べ方の順番に関するものである。次の順になっている必要がある。

① t+1 期のジャンプ変数(この場合は$\hat{e}_{t+1}$)

② t+1 期の先決変数(この場合は $\hat{p}_{t+1}$)

③ t 期のジャンプ変数(この場合は$\hat{e}_t$)

④ t 期の先決変数(この場合は $\hat{p}_t$)

その上で、(7)式の右辺を左辺に移項して「・・・＝０」という形に書き換える。

(8) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -(1+a_{22}) & -a_{21} \\ 0 & 1 & -a_{12} & -(1-a_{11}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{e}_{t+1} \\ \hat{p}_{t+1} \\ \hat{e}_t \\ \hat{p}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(8)式左辺の 2×4 係数行列は Matlab コード上では”coef”という名で呼ばれている。加藤氏のコードは(8)式の形をしたモデルの解を固有値分解を使い求めるものである。これが”[4] Solution Proc (DO NOT touch!)”と書いてある部分である。

加藤涼氏の Matlab コードを応用したシミュレーション手順(2)

この solution proc の詳細については手書きノートに記してあるので参照してほしい。結果として、2 つの重要な行列を算出する。第 1 に、先決変数のダイナミクスを決める行列”AA”である。

(9) $$\left[\hat{p}_{t+1}\right] = A_A \cdot \left[\hat{p}_t\right]$$

この例では A_A は 1×1 行列（つまり定数）である。第 2 に、ジャンプ変数と先決変数の関係を表す行列 P である。

(10) $$\left[\hat{e}_t\right] = P \cdot \left[\hat{p}_t\right]$$

この P もこの例では 1×1 行列（つまり定数）である。上記(10)がこの経済の安定的な saddle path (stable arm とも呼ぶ)である。
さて、この経済にある初期条件が与えられたとする。初期条件とは、先決変数（ジャンプしない変数)、この例では $\hat{p}_t$ の第 0 期における値のことである。例えば、$\hat{p}_0 = 1$だったとする。経済はこの後どのような経路をたどっていくだろうか。

(11) $S_0 = \left[\hat{p}_0\right] = \left[1\right]$

となる。これら初期値さえ与えられれば、第 1 期以降は(9)式より計算できる。

(12) $S_1 = \left[\hat{p}_1\right] = A_A \cdot \left[\hat{p}_0\right] = A_A \cdot S_0$、

$S_2 = \left[\hat{p}_2\right] = A_A \cdot \left[\hat{p}_1\right] = A_A \cdot S_1$、・・・

このような繰り返し計算を、dorn1.m では(加藤氏のコードに習い)Matlab の重要な機能である”for”ループを使って行っている。計算は 1+”t”回繰り返され、結果は”SY”という(1+”t”)×1 行列に保存されている。
先決変数の値がわかれば、ジャンプ変数の値は(10)式から求めることができる。結果は”X”という行列に保存されている。
最後に SY と X の中身がグラフ化される。

(2)　“Dorn2.m”の解説

金融政策ショックを加え、貨幣供給の増加に対して物価と為替レートが時間を通じてどう反応するかを分析する。貨幣供給は AR(1)過程に従うものとする。

(13)　$m_{t+1} = \rho \cdot m_t + \varepsilon_{t+1}$

ここで$\left|\rho\right| < 1$であり、またε_{t+1}は確率的なショック（期待値 0）である。ここで m_t の定常値は暗黙のうちに 0 と想定されている。
またこれに応じて、

(1’)　LM 曲線　$m_t - p_t = y_t - a \cdot i_t$

と、m に t をつける必要が出てくる。

また、モデルが確率的になったので、厳密に、e_{t+1}, p_{t+1}には期待値のオペレーターをつけて、$E_t e_{t+1}, E_t p_{t+1}$と書くことにする。ただしこれによる本質的な違いは

生じない。
再び p と e の定常値からの乖離をそれぞれ $\hat{p}$ 、$\hat{e}$ と書くことにすると、

(5'') $E_t\hat{e}_{t+1} = (1+a_{22})\cdot\hat{e}_t + a_{21}\cdot\hat{p}_t + b_2\cdot m_t$

(6'') $E_t\hat{p}_{t+1} = a_{12}\cdot\hat{e}_t + (1-a_{11})\cdot\hat{p}_t + b_1\cdot m_t$

(13) $m_{t+1} = \rho\cdot m_t + \varepsilon_{t+1}$

ただし $b_1 = \dfrac{bd}{a+b}, b_2 = -\dfrac{1}{a+b}$ である。
これを行列演算の形式にまとめると、

(7') $$\begin{bmatrix} E_t\hat{e}_{t+1} \\ E_t\hat{p}_{t+1} \\ m_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a_{22} & a_{21} & b_2 \\ a_{12} & 1-a_{11} & b_1 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \hat{e}_t \\ \hat{p}_t \\ m_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\varepsilon_{t+1}$$

となる。先決変数が $\hat{p}_t, m_t$ の 2 つに増えていることに注意しよう。Matlab コード上ではこの式を変形して次の形で入力することになる。

(8') $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -(1+a_{22}) & -a_{21} & -b_2 \\ 0 & 1 & 0 & -a_{12} & -(1-a_{11}) & -b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\rho \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} E_t\hat{e}_{t+1} \\ E_t\hat{p}_{t+1} \\ m_{t+1} \\ \hat{e}_t \\ \hat{p}_t \\ m_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし $\varepsilon_{t+1} = 0$ が仮定されている（つまりショックは来期以降はもう起きない）。

と、言うことは、t 期の時点で次の期以降に起こることは完全に予見できるはずだから、以後は期待値のオペレーターは取り外して書くことにする。
加藤涼氏の solution proc は先決変数のダイナミクスを決める行列”AA”：

(9') $$\begin{bmatrix} \hat{p}_{t+1} \\ m_{t+1} \end{bmatrix} = A_A\cdot\begin{bmatrix} \hat{p}_t \\ m_t \end{bmatrix}$$

（ただし A_A は 2×2 行列）及びジャンプ変数と先決変数の関係を表す行列 P：

(10') $$\begin{bmatrix} \hat{e}_t \end{bmatrix} = P\cdot\begin{bmatrix} \hat{p}_t \\ m_t \end{bmatrix}$$

(ただし P は 1×2 行列)を算出する。
さていよいよ金融政策の効果を計算してみよう。もともと経済は定常状態にあ

ったとする($\hat{e}_t = \hat{p}_t = m_t = 0$、$t$<0)。第 0 期になって突然貨幣供給が 1(%)増加した（$\varepsilon_0 = 1$）。このとき、物価 $\hat{p}_t$ は先決変数であるから急に値がジャンプすることはない。よって、

$$(11')\quad \begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる。これら初期値さえ与えられれば、第 1 期以降は(9')式より計算できる。

$$(12')\quad \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = A_A \cdot \begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = A_A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}、\begin{bmatrix} \hat{p}_2 \\ m_2 \end{bmatrix} = A_A \cdot \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = A_A \cdot A_A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}、\cdots$$

結果は"SY"という(1+"t")×2 行列に保存される。先決変数の値がわかれば、ジャンプ変数の値は(10')式から求めることができる。結果は"X"という行列に保存されている。最後に SY と X の中身がグラフ化される。これが金融政策ショックに対する各変数の反応、いわゆる「インパルス応答関数」(impulse response function)である。