固有値分解法，一般ケース　(メモ)

$$A x_{t+1} = x_t \qquad x_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix}$$

x_{1t} ← ジャンプ変数のベクトル (nコ)

x_{2t} ← 先決変数のベクトル (kコ)

↓

$$A = W \cdot \Lambda W^{-1}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+k} \end{bmatrix}$$

λは絶対値が小さい物から順に並んでいるものとする.
Blanchard-Kahn条件はみたされる.

$$W = \left[\begin{array}{c:c:c:c} W_1 & W_2 & \cdots\cdots & W_{n+k} \end{array}\right]$$

↑ λ₁に対応する固有ベクトル …… ↑ λₙ₊ₖに対応する……

$Q \equiv W^{-1}$ とすると.

$$A = Q^{-1} \cdot \Lambda \cdot Q$$

これより、

$$\Lambda \cdot Q \cdot x_{t+1} = Q \cdot x_t$$

↓

書き下すと

$$\begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} \overbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 \ddots & \lambda_n\end{matrix}}^{n} & & \overbrace{O}^{k} & \\ \hdashline O & & \begin{matrix}\lambda_{n+1} & 0 \\ 0 \ddots & \lambda_{n+k}\end{matrix} & \end{array}\right] \end{array} \cdot \left[\begin{array}{c:c} \overbrace{Q_A}^{n} & \overbrace{Q_B}^{k} \\ \hdashline Q_C & Q_D \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_{11t+1} \\ \vdots \\ x_{1nt+1} \\ \hdashline x_{21t+1} \\ \vdots \\ x_{2kt+1} \end{array}\right] = \cdots\cdots$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \underbrace{\left[Q_A \cdot x_{1t+1} + Q_B \cdot x_{2t+1} \right]}_{\overset{|||}{z_{1t+1}}} = \underbrace{\left[Q_A \cdot x_{1t} + Q_B \cdot x_{2t} \right]}_{\overset{|||}{z_{1t}}}$$

… z_{1t}は「不安定な動学」に従う.

$$\begin{bmatrix} \lambda_{n+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n+k} \end{bmatrix} \underbrace{\left[Q_C \cdot x_{1t+1} + Q_D \cdot x_{2t+1} \right]}_{\overset{|||}{z_{2t+1}}} = \underbrace{\left[Q_C \cdot x_{1t} + Q_D \cdot x_{2t} \right]}_{\overset{|||}{z_{2t}}}$$

---- z_{2t}は「安定な動学」に従う.

(Blanchard-Kahn条件:

λ_1 …… λ_n の絶対値 < 1 --- 不安定

$\lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_{n+k}$ 〃 > 1 --- 安定)

「発散しない」ための条件は、

$$Q_A \cdot x_{1t} + Q_B \cdot x_{2t} = 0$$

or $$\underline{x_{1t} = -Q_A^{-1} \cdot Q_B \cdot x_{2t}}$$

"stable arm"上に経済があるための条件.

一方で、

$$\begin{bmatrix} \lambda_{n+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+k} \end{bmatrix} \cdot \left[Q_C \cdot x_{1t+1} + Q_D \cdot x_{2t+1}\right] = \left[Q_C\, x_{1t} + Q_D\, x_{2t}\right]$$

上の stable arm の条件を用いると、

$$\begin{bmatrix} \lambda_{n+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+k} \end{bmatrix} \cdot \left[-Q_A^{-1} \cdot Q_B \cdot \underset{+Q_D}{Q_C}\right] x_{2t+1} = \left[-Q_A^{-1} \cdot Q_B \cdot \underset{+Q_D}{Q_C}\right] x_{2}$$

⇒ ここで $Q_E \equiv -Q_A^{-1} \cdot Q_B \cdot Q_C + Q_D$ と書くことにすると、

$$x_{2t+1} = \underbrace{Q_E^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_{n+1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_{n+k}} \end{bmatrix} \cdot Q_E}_{\overset{|||}{A}} \cdot x_{2t}$$

∴ $x_{2t+1} = A \cdot x_{2t}$

… "stable arm"上における先決変数の挙動.