

物的資本投資に伴う人的資本形成と内生的経済成長

東北大学大学院環境科学研究科*

松村 玲†

概要

本稿では、人的資本を既存技術の生産への利用に必要な技術能力として捉え、その形成に関して物的資本投資と教育投資活動の補完的メカニズムを考える。各時点での教育への時間配分に加えて、人的資本ストックと物的資本ストックの水準を物的資本投資に伴う外部効果の程度を決定する要因とすることによって、より現実的な教育投資を考慮した内生的経済成長モデルを提示する。すなわち、外部効果の程度は、教育投資活動および人的資本と物的資本のバランスによって決定される。社会計画当局が経済全体の物的資本投資水準と教育投資活動を決定するとの仮定の下で、社会的最適成長経路および鞍点安定的な定常均衡が存在する可能性があることが示される。したがって、発展途上国の当局が適切な政策を採用することによって、物的資本投資に伴う外部効果によって形成される人的資本を通じて持続的な経済成長が可能であることが理論的に示される。

1 はじめに

内生的経済成長理論は、物的資本の限界生産性逓減を補う知識や人的資本の形成をモデル内に導入することによって持続的成長を説明する。Romer (1986, 1990), Lucas (1988), Stokey (1991), Rebelo (1991), Aghion and Howitt (1992), Jones (1995) 等でみられるように、知識や人的資本の形成は、研究開発 (R&D) 投資やラーニング・バイ・ドゥーイング (learning by doing)、および教育投資活動によって行われる¹。

発展途上国における経済成長の達成には、研究開発による新たな商品や生産方法の開発よりも既存技術の生産への利用がより重要であると考えられ、そのためには十分に高い社会能力 (social capability) が必要となる。社会能力には政府や金融部門の安定性など様々な要素が考えられるが、技術能力 (technical competence) も重要である²。この側面を分析した Greiner and Semmler (2002) では、技術能力を知識資本 (knowledge capital) として扱い³、その形成に関して物的資本投資と教育投資の補完的メカニズムを考えているが、物的資本投資に伴う外部効果の程度は、各時点での教育への時間配分のみによって決定されるという点で非現実的な定式化となっている。すなわち、教育への時間配分がゼロならば学習効果 (learning effect) が生じないため、外部効果はゼロとなり、新たな知識は形成されない。また、教育への時間配分が同じであっても外部効果の程度は異なり得るとされ、その理由として社会能力に影響をもたらす他の要因の存在が指摘されているが、モデルには何ら組み込まれていない。教育への時間配分すなわち教育投資活動は、学習効果を通じて人的資本を形成するための教育水準を規定する⁴。しかしながら、教育投資活動は教育水準そのものというよりは教育水準を向上させるための努力であると考えられる。したがって、ある時点において教育投資活動が行われなくても、それまでに達成された教育水準によって新たな技術能力を得ることは可能となる。

本章では技術能力を人的資本とし、その形成に関して物的資本投資と教育投資の補完的メカニズムを考える。そして、各時点での教育への時間配分に加えて、人的資本ストックと物的資本ストックの水準を物的資本投資

*宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-20

†namasayarei@hotmail.com

¹経済成長に関する理論、実証分析のサーベイとしては Shaw (1992), Klenow and Rodríguez-Clare (1997) が挙げられる。

²Abramovitz (1986, p.388) では、技術能力を表すおおよその指標として教育年数 (years of education) を挙げている。

³Romer (1990) では、知識 (knowledge) は非競争性を有し排除可能性は不完全であると考えられている (足立 (2000, p.181) 参照)。これに対して、人的資本は競争的である。このような相違は、人的資本がヒトに体化されているのに対して、知識は、それ自体は、ヒトに体化されていないことから生じる。このような観点から知識をとらえるならば、Greiner and Semmler (2002) における知識資本 (knowledge capital) も、ヒトに体化されているという意味で人的資本と呼ぶべきであろう。

⁴教育水準は、しばしば実証分析において用いられるように、人的資本の水準を表す指標となりうる。

に伴う外部効果の程度を決定する要因とすることによって、より現実的な教育投資を考慮した内生的経済成長モデルを提示する。これは、物的資本投資に伴う新たな人的資本の形成には、各時点における教育投資活動だけでなく、それまでに形成されてきた人的資本ストックの水準が影響することを意味し、実際の人的資本形成過程をより忠実に反映しているものと考えられる。具体的には、海外直接投資などによる高性能な機械の導入はスピルオーバーの可能性を持ち、労働生産性を向上させる新たな技術能力を形成しうるが、そのためには教育への時間配分によって新たに形成される教育水準だけでなく、それまでに形成されてきた教育水準、すなわち読み書きができるといった人的資本の一定水準が存在しなければならない。また、人的資本ストックの水準が物的資本投資に伴う新たな人的資本の形成にもたらす影響は、物的資本ストックの水準とのバランスにも関連すると考えられる。均衡として社会計画当局 (social planner) の行動によって達成され得る社会的均衡を考え、社会計画当局は経済全体の物的資本投資水準と教育投資活動を決定し、その際、教育投資活動が物的資本投資に伴う外部効果に及ぼす影響についても考慮するものとする。

本章の構成は以下の通りである。第2節ではモデルについて述べる。生産部門と人的資本形成、および家計部門についての説明を行う。第3節では社会的最適成長経路が存在し、その上に鞍点安定的な定常均衡が存在する可能性があることを示す。最後に第4節において結論を述べる。

2 モデル

代表的企業と代表的家計からなる完全競争閉鎖経済を考える。各時点において、企業は家計の所有する物的資本と労働を用いて財の生産を行う。家計は消費と物的資本投資および教育投資活動を行う。物的資本投資には人的資本を形成する外部効果があるが、この外部効果は各時点での教育への時間配分と人的資本ストックおよび物的資本ストックの水準によって決定されると仮定する。

2.1 生産部門

代表的企業が同質財 (homogeneous good) $Y(t)$ を生産しているとし、その生産関数を次のようなものとする。

$$Y(t) = f(K(t), u(t)H(t)L(t))$$

$K(t)$ および $H(t)$ は物的資本ストックと人的資本ストックをそれぞれ表している。労働 $L(t)$ は時間を通じて一定であるとし、1に規準化する。 $u(t) \in [0, 1]$ は家計が有する余暇以外の時間 (nonleisure time) のうち生産に配分される時間の割合を表しており、 $u(t)H(t)$ は効率労働時間を表す。余暇以外の時間を1に規準化すると、家計が教育に配分する時間は $1 - u(t)$ となる。 $f(K(t), u(t)H(t))$ は $K(t), u(t)H(t)$ について一次同次であると仮定し、生産関数を効率労働1単位当たりになると次のようになる。

$$y(t) = f(k(t), u(t))$$

ここで、 $y(t) \equiv Y(t)/H(t)$, $k(t) \equiv K(t)/H(t)$ である。

人的資本ストック $H(t)$ は労働生産性を上昇させ、企業の最適化問題においては所与とされる。 $r(t), w(t)$ をそれぞれ効率労働1単位当たり物的資本レンタル、効率労働時間当たり賃金率とすると、完全競争企業の利潤最大化条件より以下ようになる。

$$r(t) = \frac{\partial f(k(t), u(t))}{\partial k(t)} \equiv f_k, \quad w(t) = \frac{\partial f(k(t), u(t))}{\partial u(t)} \equiv f_u$$

したがって $f_k \geq 0, f_u \geq 0$ である。さらに、以下のように生産関数は各生産要素について収穫逦減であると仮定する。

$$\frac{\partial f_k}{\partial k} \equiv f_{kk} < 0, \quad \frac{\partial f_u}{\partial u} \equiv f_{uu} < 0$$

2.2 人的資本形成

物的資本投資に伴う外部効果により新たな人的資本が形成されるものとする。外部効果の程度は、各時点における教育への時間配分と人的資本および物的資本ストックの水準によって決定されると仮定する⁵。このとき、人的資本の蓄積方程式は次のようになる。

$$\dot{H}(t) = \Phi(1 - u(t), H(t), K(t))I(t) - \eta H(t)$$

ここで、 I は物的資本への総投資を、 $\eta \geq 0$ は人的資本減耗率をそれぞれ表している⁶。 $\Phi \geq 0$ は物的資本投資 1 単位当たりの人的資本形成、すなわち物的資本投資に伴う外部効果の程度を表している。

本章では、人的資本ストックの水準は教育水準に等しいと仮定する。人的資本の形成過程には以下のような三つの特徴がある。第 1 に、教育水準 $H(t)$ が一定の下では、教育への時間配分 $1 - u(t)$ が大きいほど、学習効果によって発生する外部効果は大きくなる。逆に、 $1 - u(t)$ が一定の下では、 $H(t)$ が高いほど外部効果は大きくなる。第 2 に、教育への時間配分すなわち教育投資活動は教育水準を向上させるための努力であると考えられる。そのため、ある時点において教育投資活動が行われなくても、それまでに達成された教育水準によって、物的資本投資に伴い新たな人的資本が形成され得る。第 3 に、人的資本ストックの水準 $H(t)$ が外部効果に及ぼす影響は、物的資本ストックの水準 $K(t)$ とのバランスに関連すると考えられる。 $H(t)$ が同水準ならば $K(t)$ が低いほど、 $K(t)$ が同水準ならば $H(t)$ の水準が高いほど、物的資本投資に伴う外部効果は大きくなる⁷。すなわち、効率労働 1 単位当たりの物的資本ストック $k(t)$ が小さくなるほど外部効果は大きくなる。また、人的資本ストックが存在しない状況では外部効果は発生せず、物的資本投資による新たな人的資本の形成は生じ得ないものとする。したがって、 $\Phi(1 - u(t), H(t), K(t))$ について以下のように仮定する。

$$\Phi(1 - u(t), H(t), K(t)) = \frac{H(t)[\beta[1 - u(t)] + \gamma]}{K(t)} = \frac{\beta[1 - u(t)] + \gamma}{k(t)} \quad (\beta > 0, \gamma > 0)$$

以上より、人的資本の蓄積方程式は次のように表される。

$$\dot{H}(t) = \left[\frac{\beta[1 - u(t)] + \gamma}{k(t)} \right] I(t) - \eta H(t)$$

2.3 家計部門

代表的家計の通時的効用関数を次のようなものとする。

$$\int_0^{\infty} U(c(t))e^{-\rho t} dt$$

ここで、 $c(t)$ は効率労働 1 単位当たりの消費を ($c(t) \equiv C(t)/H(t)$)、 $\rho > 0$ は時間選好率をそれぞれ表している。また、瞬時的効用関数 $U(c(t))$ は次のように表されるとする⁸。

$$U(c(t)) = \ln c(t)$$

⁵ 人的資本の形成に関して、Rebelo (1991, p.508, Eq.(6)) では物的資本ストックと効率労働を要素とする一次同次のコブ・ダグラス型を仮定している。また Kosempel (2004, p.207, Eq.(6)) では技術水準と人的資本ストックを要素とする一次同次のコブ・ダグラス型を仮定し、さらに学習 (learnig) への時間配分にも依存する形式となっている。

⁶ 以後、ドットは時間 t について微分することを表す。すなわち、 $dH(t)/dt \equiv \dot{H}(t)$ である。

⁷ 例えば、読み書きに加えて「知識」や「技術」を有している人的資本水準の状況において、最新のパソコン (PC) を新たに導入する場合を考える。既存の物的資本水準が相対的に低いということは、より安価な PC つまりより低性能な PC を有していることを意味すると考えられる。したがって、既存の物的資本水準がより低い状況の方が、新たな PC の導入によって得られる「知識」や「技術」はより大きくなると考えられる。

⁸ 効用が効率労働 1 単位当たりの消費に依存する点については以下のように正当化されよう。消費 $C(t)$ は $C(t) = c(t)H(t)$ であることから、効用が $U = \ln C(t)$ であるとすると、 $U = \ln c(t) + \ln H(t)$ となる。したがって、 $H(t)$ の増加は効用水準 U を高める効果を持つ可能性があるが、モデルの動学的性質を大きく変えることはないだろうと考えられる。また、効用が生産への時間配分 $u(t)$ に依存しないのは、労働していない時間は余暇ではなく教育・トレーニングに向けられ、労働の不効用と教育・トレーニングの不効用が等しいと仮定しているためである。

家計は企業に供給した労働および物的資本から所得を得、これを消費と物的資本投資に分配する。したがって、効率労働 1 単位当たりの予算制約式は次のようになる。

$$w(t)u(t) + r(t)k(t) = c(t) + \frac{I(t)}{H(t)}$$

また、物的資本減耗率を $\delta \geq 0$ とすると、物的資本の蓄積方程式は次のように表される。

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = Y(t) - C(t) - \delta K(t)$$

したがって、効率労働 1 単位当たり物的資本の蓄積方程式は次のようになる。

$$\dot{k}(t) = \left[1 - [\beta[1 - u(t)] + \gamma] \right] [f(k(t), u(t)) - c(t)] - (\delta - \eta)k(t)$$

3 社会的最適成長経路と定常均衡

社会計画当局は、経済全体の物的資本投資水準のみならず、社会構成員全体の教育への時間配分 $1 - u$ も一律に決定する。このとき、 $1 - u$ が物的資本投資に伴う外部効果に及ぼす影響についても考慮するため、その最適化問題は以下のようなものとなる。

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{c(t), u(t)} \int_0^{\infty} \ln c(t) e^{-\rho t} dt \\ & \text{s.t.} \\ & \dot{k}(t) = \left[1 - [\beta[1 - u(t)] + \gamma] \right] [f(k(t), u(t)) - c(t)] - (\delta - \eta)k(t) \\ & k(0) = k_0 > 0, \quad c(t) \geq 0, \quad u(t) \in [0, 1], \quad k(t) \geq 0 \end{aligned}$$

現在価値ハミルトン関数 (present value Hamiltonian) を次のように定義する。

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(c(t), u(t), k(t), \pi(t)) \\ & \equiv \ln c(t) e^{-\rho t} + \pi(t) \left[\left[1 - [\beta[1 - u(t)] + \gamma] \right] [f(k(t), u(t)) - c(t)] - (\delta - \eta)k(t) \right] \end{aligned}$$

ここで $\pi(t)$ は共役変数 (costate variable) であり、効率労働 1 単位当たり物的資本の帰属価値 (シャドー・プライス) を表している。ハミルトン関数の右辺第 1 項は現在時点での消費効用を表し、第 2 項は将来時点での消費効用と解釈することができることから、ハミルトン関数は効用単位で測った国民所得と解釈することができる。

本モデルでは生産への時間配分に関する不等号制約 $u(t) \in [0, 1]$ が存在するため、ラグランジュ関数を次のように定義する⁹。

$$\mathcal{L}(c(t), u(t), k(t), \pi(t), \lambda(t)) \equiv \mathcal{H}(c(t), u(t), k(t), \pi(t)) + \lambda(t)[1 - u(t)]$$

ここで $\lambda(t)$ はラグランジュ未定乗数である。最大値原理 (maximum principle) より、最適解が満足すべき 1 階の必要条件は以下のようになる。操作変数 (control variable) である $c(t)$ は \mathcal{L} を最大化するので

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c(t)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c(t)} = 0$$

となる。 $u(t)$ は制約条件 $1 - u(t) \geq 0$ の下で \mathcal{L} を最大化するので、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(t)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u(t)} - \lambda(t) = 0$$

⁹Léonard and Long (1992, pp.210-212), Daitoh (2010, p.700) 参照。

が $\lambda(t) \geq 0, 1 - u(t) \geq 0, \lambda(t)[1 - u(t)] = 0$ の下で成立する。状態変数 (state variable) である $k(t)$ と共役変数 $\pi(t)$ については、横断性条件 (transversality condition) の下で、それぞれ

$$\dot{k}(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi(t)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi(t)}, \quad \dot{\pi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k(t)} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k(t)}$$

が成立する¹⁰。

本モデルでは、条件 $\partial \mathcal{L} / \partial u = 0$ より、 $\lambda = 0, 1 - u > 0$ の場合と $\lambda > 0, 1 - u = 0$ の場合に分けて考える必要がある。前者は生産への時間配分 u が内点解となるケースに、後者は u が端点解となるケースにそれぞれ対応している。なお、生産への時間配分がゼロの場合は、生産が行われないため家計の (通時的) 効用は最大化され得ない。そこで以下では、まず u が内点解となるケース ($\lambda = 0, 1 - u > 0$) を扱い、次に u が端点解となるケース ($\lambda > 0, 1 - u = 0$) を扱う。

3.1 内点解のケース ($\lambda = 0, 1 - u > 0$)

まず、生産への時間配分 u が内点解の場合の、最適解が満足するべき 1 階の必要条件を求める。条件 $\partial \mathcal{L} / \partial u = 0$ より、 $\pi \neq 0$ とすると次のようになる。

$$\left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] f_u = -\beta[f(k, u) - c] \quad (1)$$

(1) 式は、生産への時間配分 u を増加させた場合に、ラグランジュ関数の $\pi \dot{k}$ の部分が変化しないことに対応しており、効率労働 1 単位当たり物的資本 k の蓄積方程式は次のように書き改めることができる。

$$\dot{k} = [f(k, u) - c] - \delta k - [\beta[1 - u] + \gamma][f(k, u) - c] - \eta k$$

上式の右辺第 1 項は物的資本ストックの増加率 \dot{K}/K に、右辺第 2 項は人的資本ストックの増加率 \dot{H}/H にそれぞれ対応している。そこで (1) 式を次のように書き改める。

$$f_u = [\beta[1 - u] + \gamma] f_u - \beta[f(k, u) - c]$$

上式は、 u を増加させた場合に、 \dot{K}/K の変化と \dot{H}/H の変化が等しいことを表している。 \dot{H}/H の変化を表す右辺の第 1 項と第 2 項はそれぞれ次のように解釈される。第 1 項は、 u の限界生産物を物的資本投資として用いた場合の \dot{H}/H の拡大を表している。第 2 項は、 u の増加による教育への時間配分 $1 - u$ の減少がもたらす \dot{H}/H の縮小を表している。したがって、(1) の左辺は、 u の限界生産物を物的資本投資に回した場合の \dot{k} の帰属価値である。右辺は、 $1 - u$ の減少により物的資本投資に伴って生じる人的資本形成が遅れるという損失の帰属価値である¹¹。(1) 式は両者が等しいことを表しており、労働と教育の間の時間配分についてのトレード・オフにおいて、最適な釣り合いが取れることを示している。

また、 $f_u \geq 0, \beta > 0$ および所得以上の消費はできない、すなわち $f(k, u) - c \geq 0$ より、(1) 式が成立するためには次の条件が満たされなければならない。

$$1 - [\beta[1 - u] + \gamma] < 0 \quad (2)$$

(2) 式は、減耗率を考慮しない場合に、 \dot{K}/K を \dot{H}/H が上回り \dot{k} が負となることを意味する。

条件 $\partial \mathcal{L} / \partial c = 0$ より次のようになる。

$$\frac{e^{-\rho t}}{c} = \left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] \pi \quad (3)$$

¹⁰以降、特に必要のない限り時間 t の表示を省略する。

¹¹ここでは社会全体で一斉に生産への時間配分 u を変化させることを考えているため、1 人が教育を受けることで社会全体の教育水準が向上し生産性上昇に貢献するという意味での外部性は生じない。

(3) 式の左辺は、効率労働 1 単位当たり消費 c の限界効用の現在価値を表している。右辺は、左辺の限界効用をもたらす c と同じ単位の生産物を物的資本の投資に回した場合の \dot{k} の帰属価値を表している。(3) 式は両者が等しいことを表しており、効率労働 1 単位当たりでの、消費と投資の最適な釣り合いが取れることを示している。

また、(2), (3) 式より k の帰属価値は $\pi < 0$ となる。その理由は次のように説明される。本モデルにおける π は、将来時点での効率労働 1 単位当たり消費 c^f を効用単位で表わすための価格であると解釈される。ここで、一般的な物的資本ストック K の帰属価値について確認しておこう。現在時点での消費 C をあきらめて物的資本投資 I を増やすと将来時点での K^f は増加する。その結果、将来時点での消費 C^f が増加することによって効用が改善する場合に K の帰属価値は正となる。ところが、本モデルにおいて C を減少させ I を増加させると、 K^f だけでなく将来時点での人的資本ストック H^f も増加する。このとき、(2) 式より、減耗率を考慮しない場合に \dot{H}/H が \dot{K}/K を上回るため、将来時点での k^f は減少する。 k^f の減少は効率労働 1 単位当たり生産量の減少を通じて c^f を減少させる。つまり、 K^f と H^f の増加により C^f も増加するが、それ以上に H^f が増加するため c^f は減少し、効用は悪化する。以上より、本モデルでは現在時点での消費をあきらめることによって将来時点での効用が悪化するため、帰属価値 π は負となる。

条件 $\dot{k} = \partial\mathcal{L}/\partial\pi$ より次のようになる。

$$\frac{\dot{k}}{k} = \left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] \left[\frac{f(k, u) - c}{k}\right] - \delta + \eta \quad (4)$$

(4) 式は制約条件に含まれる遷移式であり、 k の蓄積方程式である。

条件 $\dot{\pi} = -\partial\mathcal{L}/\partial k$ より次のようになる。

$$\frac{\dot{\pi}}{\pi} = -\left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] f_k + \delta - \eta \quad (5)$$

(5) 式はオイラー方程式であり、効用単位で測った国民所得を表すハミルトン関数に k の増加が与える限界の効用に等しい分だけ、 k の帰属価値が下落していくことを表している。

横断性条件は以下のように与えられる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t)\pi(t) = 0 \quad (6)$$

(6) 式は無限の将来における k の帰属価値がゼロであることを表している。

ラグランジュ関数 \mathcal{L} が操作変数 c, u と状態変数 k について強い意味で凹関数であれば、(1), (3), (4), (5), (6) 式で表される 1 階の必要条件は十分条件でもある¹²。 \mathcal{L} のヘッセ行列式 $|\mathcal{L}|$ の第 1、第 2、第 3 首座小行列式をそれぞれ $|\mathcal{L}_1|, |\mathcal{L}_2|, |\mathcal{L}_3|$ とすると、 \mathcal{L} が強い意味で凹関数であるための十分条件は $|\mathcal{L}_1| < 0, |\mathcal{L}_2| > 0, |\mathcal{L}_3| < 0$ となる¹³。 \mathcal{L} のヘッセ行列式

$$|\mathcal{L}| = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{cc} & \mathcal{L}_{cu} & \mathcal{L}_{ck} \\ \mathcal{L}_{uc} & \mathcal{L}_{uu} & \mathcal{L}_{uk} \\ \mathcal{L}_{kc} & \mathcal{L}_{ku} & \mathcal{L}_{kk} \end{vmatrix}$$

について、 $|\mathcal{L}_1|, |\mathcal{L}_2|, |\mathcal{L}_3|$ を求めると以下のようになる。

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_1| &= \mathcal{L}_{cc} = -\frac{e^{-\rho t}}{c^2} < 0 \\ |\mathcal{L}_2| &= \mathcal{L}_{cc}\mathcal{L}_{uu} - \mathcal{L}_{cu}\mathcal{L}_{uc} = -\frac{e^{-\rho t}}{c^2} \left[2\beta f_u + \left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] f_{uu} \right] \pi - \beta^2 \pi^2 \\ |\mathcal{L}_3| &= \mathcal{L}_{cc}\mathcal{L}_{uu}\mathcal{L}_{kk} + \mathcal{L}_{cu}\mathcal{L}_{uk}\mathcal{L}_{kc} + \mathcal{L}_{ck}\mathcal{L}_{uc}\mathcal{L}_{ku} - (\mathcal{L}_{ck}\mathcal{L}_{uu}\mathcal{L}_{kc} + \mathcal{L}_{cc}\mathcal{L}_{uk}\mathcal{L}_{ku} + \mathcal{L}_{cu}\mathcal{L}_{uc}\mathcal{L}_{kk}) \\ &= \mathcal{L}_{cc}\mathcal{L}_{uu}\mathcal{L}_{kk} - \mathcal{L}_{cc}\mathcal{L}_{uk}\mathcal{L}_{ku} - \mathcal{L}_{cu}\mathcal{L}_{uc}\mathcal{L}_{kk} \\ &= |\mathcal{L}_2|\mathcal{L}_{kk} - |\mathcal{L}_1|\mathcal{L}_{uk}\mathcal{L}_{ku} \end{aligned}$$

¹²Léonard and Long (1992, pp.213-214) 参照。

¹³西村 (1990, p.163) 参照。

$\pi < 0$ より、 $|\mathcal{L}_2| > 0$ となるための必要十分条件は以下ようになる。

$$2\beta f_u + \left[1 - [\beta[1-u] + \gamma]\right] f_{uu} + \frac{\beta^2 c^2 \pi}{e^{-\rho t}} > 0 \quad (7)$$

ヤングの定理と $\pi < 0, |\mathcal{L}_1| < 0$ より、 $|\mathcal{L}_3| < 0$ となるための必要十分条件は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \left[2\beta f_u + \left[1 - [\beta[1-u] + \gamma]\right] f_{uu} + \frac{\beta^2 c^2 \pi}{e^{-\rho t}}\right] \left[1 - [\beta[1-u] + \gamma]\right] f_{kk} \\ & > \left[\beta f_k + \left[1 - [\beta[1-u] + \gamma]\right] f_{uk}\right]^2 \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式は (2), (7) 式と整合的に成立する。以上より、(2), (7), (8) 式が同時に満たされれば、ラグランジュ関数は操作変数と状態変数について強い意味で凹関数となり、(1), (3), (4), (5), (6) 式で表される 1 階の必要条件は十分条件でもある。

次に、最適解が満たすべき 1 階の必要十分条件より、社会的最適成長経路が満たす c, k, u の動学方程式を導く。(1) 式より

$$c = f(k, u) + \frac{1}{\beta} \left[1 - [\beta[1-u] + \gamma]\right] f_u \quad (9)$$

よって c は k, u の関数であり、これを $c = c(k, u)$ と表す。(3) 式の両辺を時間について微分して辺々を (3) 式で割ると次のようになる。

$$\frac{\dot{c}}{c} = - \left[\frac{\beta u}{1 - [\beta[1-u] + \gamma]} \right] \frac{\dot{u}}{u} - \frac{\dot{\pi}}{\pi} - \rho$$

これに (5) 式を代入すると次のようになる。

$$\frac{\dot{c}}{c} = - \left[\frac{\beta u}{1 - [\beta[1-u] + \gamma]} \right] \frac{\dot{u}}{u} + \left[1 - [\beta[1-u] + \gamma]\right] f_k - \delta + \eta - \rho \quad (10)$$

また、(1) 式の両辺を時間について微分し、(10) 式を代入して整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\dot{k}}{k} &= - \frac{k}{u\mu(k, u)} \left[\beta f_k + \left[1 - [\beta[1-u] + \gamma]\right] f_{uk} \right] \frac{\dot{k}}{k} \\ &+ \frac{\beta c(k, u)}{u\mu(k, u)} \left[\left[1 - [\beta[1-u] + \gamma]\right] f_k - \delta + \eta - \rho \right] \end{aligned} \quad (11)$$

なお、 $\mu(k, u)$ は以下の通りであり、 $\mu(k, u) \neq 0$ と仮定する。。

$$\mu(k, u) \equiv 2\beta f_u + \left[1 - [\beta[1-u] + \gamma]\right] f_{uu} + \frac{\beta^2 c(k, u)}{1 - [\beta[1-u] + \gamma]}$$

(4) 式に (9) 式を代入して整理すると次のようになる。

$$\frac{\dot{k}}{k} = - \frac{\left[1 - [\beta[1-u] + \gamma]\right]^2 f_u}{\beta k} - \delta + \eta \quad (12)$$

(12) 式より \dot{k}/k は k, u の関数であるから、(11) 式より \dot{u}/u も k, u の関数であり、したがって、(10) 式より \dot{c}/c も k, u の関数である。

以上より、生産への時間配分 u が内点解の場合の社会的最適成長経路は、効率労働 1 単位当たり物的資本 k の初期条件 $k(0) = k_0$ から出発して、 k の蓄積方程式 (12) 式、および Keynes-Ramsey Rule (10), (11) 式によって導かれていく成長経路の中で、最終的に横断性条件 (6) 式を満たすことのできるものとなる。

定常均衡

定常均衡 (steady state) を C, K, H が同じ一定率 ν で成長し、 u が一定値を取る状態とする。したがって、生産への時間配分 u が内点解になる場合、定常均衡点 $E(c^*, k^*, u^*)$ では $\dot{c} = \dot{k} = \dot{u} = 0$ となり、効率労働 1 単位当たり生産量 y の成長率もゼロ、すなわち生産量 Y の成長率は ν となる¹⁴。(12) 式より \dot{k} は k, u の関数 $\Theta(k, u)$ として次のように表される。

$$\dot{k} = -\frac{[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]]^2 f_u}{\beta} - (\delta - \eta)k \equiv \Theta(k, u) \quad (13)$$

また、(11) 式に (9), (13) 式を代入して整理すると、 \dot{u} は k, u の関数 $\Omega(k, u)$ として次のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\Theta(k, u)}{\mu(k, u)} \left[\beta f_k + [1 - [\beta[1 - u] + \gamma]] f_{uk} \right] \\ &\quad + \frac{\beta f(k, u) + [1 - [\beta[1 - u] + \gamma]] f_u}{\mu(k, u)} \left[[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]] f_k - \delta + \eta - \rho \right] \\ &\equiv \Omega(k, u) \end{aligned} \quad (14)$$

定常均衡の状態では、(13), (14) 式においてそれぞれ $\Theta(k, u) = 0, \Omega(k, u) = 0$ であり、これらを同時に満たす k, u の組み合わせ (k^*, u^*) が定常均衡点 E となる。なお、定常均衡点 E における効率労働 1 単位当たりの消費 c^* は、(9) 式より (k^*, u^*) によって決定される。 $\delta - \eta > 0$ の場合、(13) 式より常に $\dot{k} = \Theta(k, u) < 0$ となるため、定常均衡は存在し得ない。 $\delta - \eta < 0$ の場合は $\dot{k} = \Theta(k, u) = 0$ となる可能性がある。

$\delta - \eta$ は物的資本と人的資本の減耗率の差である。本章では人的資本ストックの水準は教育水準に等しいと仮定しているが、新たな人的資本が物的資本投資に伴って形成されることから、ここでの教育水準は生産活動に有効な知識や技術を意味している。そのため、人的資本の減耗には忘却によるものだけでなく、生産に不要となったものも含まれると考えられ、人的資本減耗率 η が物的資本減耗率 δ よりも高い可能性を完全に否定することはできない。よって、以下では $\delta - \eta < 0$ の場合を考える。

$\Theta(k, u) = 0, \Omega(k, u) = 0$ を全微分して整理すると次のようになる。

$$\left. \frac{du}{dk} \right|_{\Theta(k, u)=0} = -\frac{\Theta_k(k, u)}{\Theta_u(k, u)} \quad (15)$$

$$\left. \frac{du}{dk} \right|_{\Omega(k, u)=0} = -\frac{\Omega_k(k, u)}{\Omega_u(k, u)} \quad (16)$$

ここで、 $\Theta_i(k, u) \equiv \partial\Theta(k, u)/\partial i, \Omega_i(k, u) \equiv \partial\Omega(k, u)/\partial i$ ($i = k, u$) である。 $\Theta(k, u) = 0, \Omega(k, u) = 0$ が表す曲線をそれぞれ Θ 線と Ω 線と呼ぶことにすると、(15), (16) 式はそれぞれ Θ 線と Ω 線の傾きを表している。

(13) 式より $\Theta_k(k, u), \Theta_u(k, u)$ はそれぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Theta_k(k, u) &= -\frac{[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]]^2 f_{uk}}{\beta} - (\delta - \eta) \\ \Theta_u(k, u) &= -\frac{1 - [\beta[1 - u] + \gamma]}{\beta} \left[2\beta f_u + [1 - [\beta[1 - u] + \gamma]] f_{uu} \right] \end{aligned}$$

$\delta - \eta < 0$ の場合、 $\Theta_k(k, u)$ は正にも負にもなり得る。 $\Theta_u(k, u)$ については、(2), (7) 式より $\Theta_u(k, u) > 0$ となる。したがって、 Θ 線の傾きは $\Theta_k(k, u)$ の符号に依存し、 Ω 線の傾きについては容易に判断することができない。そこで $\Theta_k(k, u), \Omega_k(k, u), \Omega_u(k, u)$ の各符号により、以下のようにケース 1 からケース 8 に分けて定常均衡点が存在するための条件を求めらる。

(ケース 1) $\Theta_k(k, u) > 0, \Omega_k(k, u) > 0, \Omega_u(k, u) > 0$ の場合、 Θ 線と Ω 線はいずれも右下がりとなる。このとき、(a) $-\Theta_k(k, u)/\Theta_u(k, u) > -\Omega_k(k, u)/\Omega_u(k, u)$ ならば Θ 線の傾きは Ω 線よりも緩やかとなり、(b)

¹⁴ $\dot{y}/y = \dot{Y}/Y - \dot{H}/H = 0$ より $\dot{Y}/Y = \dot{H}/H = \nu$ となる。

$-\Theta_k(k, u)/\Theta_u(k, u) < -\Omega_k(k, u)/\Omega_u(k, u)$ ならば Θ 線の傾きは Ω 線よりも急となる。そして、 $k > 0$ 且つ u が内点解となる範囲 ($0 < u < 1$) に定常均衡点が存在するための条件は、(a) の場合は

$$\Theta(k, 0) > \Omega(k, 0), \quad \Theta(k, 1) < \Omega(k, 1) \quad (17)$$

であり、(b) の場合は

$$\Theta(k, 0) < \Omega(k, 0), \quad \Theta(k, 1) > \Omega(k, 1) \quad (18)$$

である (図 1, 2 参照)。

(ケース 2) $\Theta_k(k, u) > 0, \Omega_k(k, u) < 0, \Omega_u(k, u) < 0$ の場合も、 Θ 線と Ω 線はいずれも右下がりとなる。このとき、(a) $-\Theta_k(k, u)/\Theta_u(k, u) > -\Omega_k(k, u)/\Omega_u(k, u)$ ならば Θ 線の傾きは Ω 線よりも緩やかとなり、(b) $-\Theta_k(k, u)/\Theta_u(k, u) < -\Omega_k(k, u)/\Omega_u(k, u)$ ならば Θ 線の傾きは Ω 線よりも急となる。 $k > 0$ 且つ u が内点解となる範囲に定常均衡点が存在するための条件は、(a) の場合は (17) 式であり、(b) の場合は (18) 式である (図 3, 4 参照)。

(ケース 3) $\Theta_k(k, u) > 0, \Omega_k(k, u) < 0, \Omega_u(k, u) > 0$ および (ケース 4) $\Theta_k(k, u) > 0, \Omega_k(k, u) > 0, \Omega_u(k, u) < 0$ の場合、 Θ 線は右下がり、 Ω 線は右上がりとなる。これらの場合、 $k > 0$ 且つ u が内点解となる範囲に定常均衡点が存在するための条件は、いずれにおいても (17) 式である (図 5, 6 参照)。

(ケース 5) $\Theta_k(k, u) < 0, \Omega_k(k, u) > 0, \Omega_u(k, u) > 0$ および (ケース 6) $\Theta_k(k, u) < 0, \Omega_k(k, u) < 0, \Omega_u(k, u) < 0$ の場合、 Θ 線は右上がり、 Ω 線は右下がりとなる。これらの場合、 $k > 0$ 且つ u が内点解となる範囲に定常均衡点が存在するための条件は、いずれにおいても (18) 式である (図 7, 8 参照)。

(ケース 7) $\Theta_k(k, u) < 0, \Omega_k(k, u) < 0, \Omega_u(k, u) > 0$ の場合、 Θ 線と Ω 線はいずれも右上がりとなる。このとき、(a) $-\Theta_k(k, u)/\Theta_u(k, u) > -\Omega_k(k, u)/\Omega_u(k, u)$ ならば Θ 線の傾きは Ω 線よりも急となり、(b) $-\Theta_k(k, u)/\Theta_u(k, u) < -\Omega_k(k, u)/\Omega_u(k, u)$ ならば Θ 線の傾きは Ω 線よりも緩やかとなる。 $k > 0$ 且つ u が内点解となる範囲に定常均衡点が存在するための条件は、(a) の場合は (17) 式であり、(b) の場合は (18) 式である (図 9, 10 参照)。

(ケース 8) $\Theta_k(k, u) < 0, \Omega_k(k, u) > 0, \Omega_u(k, u) < 0$ の場合、 Θ 線と Ω 線はいずれも右上がりとなる。このとき、(a) $-\Theta_k(k, u)/\Theta_u(k, u) > -\Omega_k(k, u)/\Omega_u(k, u)$ ならば Θ 線の傾きは Ω 線よりも急となり、(b) $-\Theta_k(k, u)/\Theta_u(k, u) < -\Omega_k(k, u)/\Omega_u(k, u)$ ならば Θ 線の傾きは Ω 線よりも緩やかとなる。 $k > 0$ 且つ u が内点解となる範囲に定常均衡点が存在するための条件は、(a) の場合は (17) 式であり、(b) の場合は (18) 式である (図 11, 12 参照)。

以上より、生産への時間配分 u が内点解となる場合、人的資本減耗率 η が物的資本減耗率 δ より高い場合に限って定常均衡は存在し得る。また、 u が内点解であり且つ $k > 0$ となる範囲に定常均衡点が存在するための条件は (17) 式と (18) 式のいずれかとなる。すなわち、(17) 式が満たされている場合、1a, 2a, 3, 4, 7a, 8a の各ケースにおいて定常均衡が存在する (図 1, 3, 5, 6, 9, 11 参照)。他方で、(18) 式が満たされている場合には、1b, 2b, 5, 6, 7b, 8b の各ケースにおいて定常均衡が存在する (図 2, 4, 7, 8, 10, 12 参照)。

次に、上述した各ケースにおける定常均衡点の安定性について検討する。(13), (14) 式を定常均衡点 (k^*, u^*) の近傍で線形近似すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \Theta_k^* \cdot (k - k^*) + \Theta_u^* \cdot (u - u^*) \\ \dot{u} &= \Omega_k^* \cdot (k - k^*) + \Omega_u^* \cdot (u - u^*) \end{aligned}$$

ここで、 $\Theta_i^* \equiv \partial\Theta(k^*, u^*)/\partial i, \Omega_i^* \equiv \partial\Omega(k^*, u^*)/\partial i$ ($i = k, u$) である。これらを行列表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_k^* & \Theta_u^* \\ \Omega_k^* & \Omega_u^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k - k^* \\ u - u^* \end{bmatrix}$$

係数行列を J と表記すると、定常均衡点が安定であるための必要十分条件は $tr.J < 0$ 且つ $det.J > 0$ であり、鞍点 (saddle point) 安定的であるための必要十分条件は $det.J < 0$ である。したがって、 $\Theta_k^* + \Omega_u^* < 0$ 且つ

$\Theta_k^* \Omega_u^* > \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立すれば定常均衡点は安定であり、 $\Theta_k^* \Omega_u^* < \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立すれば定常均衡点は鞍点安定的となる。

(ケース 1) においては、(a) の場合には $\Theta_k^* \Omega_u^* < \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立するため、定常均衡点 E^{1a} は鞍点安定的である(図 1 参照)。 (b) の場合には $\Theta_k^* \Omega_u^* > \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立するが、 $\Theta_k^* + \Omega_u^* > 0$ となるため定常均衡点 E^{1b} は不安定である(図 2 参照)。

(ケース 2) においては、(a) の場合には $\Theta_k^* \Omega_u^* > \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立するが、 $\Theta_k^* + \Omega_u^*$ の符号については判断できない(図 3 参照)。 (b) の場合には $\Theta_k^* \Omega_u^* < \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立するため、定常均衡点 E^{2b} は鞍点安定的である(図 4 参照)。

(ケース 3) においては、 $\Theta_k^* \Omega_u^* > \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立するが、 $\Theta_k^* + \Omega_u^* > 0$ となるため定常均衡点 E^3 は不安定である(図 5 参照)。

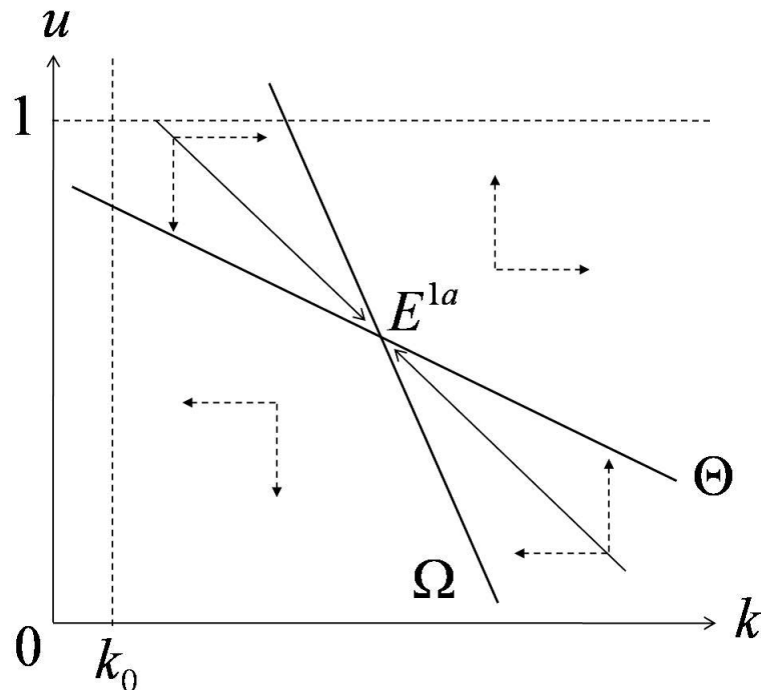
(ケース 4) においては、 $\Theta_k^* \Omega_u^* < \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立するため、定常均衡点 E^4 は鞍点安定的である(図 6 参照)。

(ケース 5) においては、 $\Theta_k^* \Omega_u^* < \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立するため、定常均衡点 E^5 は鞍点安定的である(図 7 参照)。

(ケース 6) においては、 $\Theta_k^* \Omega_u^* > \Theta_u^* \Omega_k^*$, $\Theta_k^* + \Omega_u^* < 0$ が成立するため、定常均衡点 E^6 は安定である(図 8 参照)。

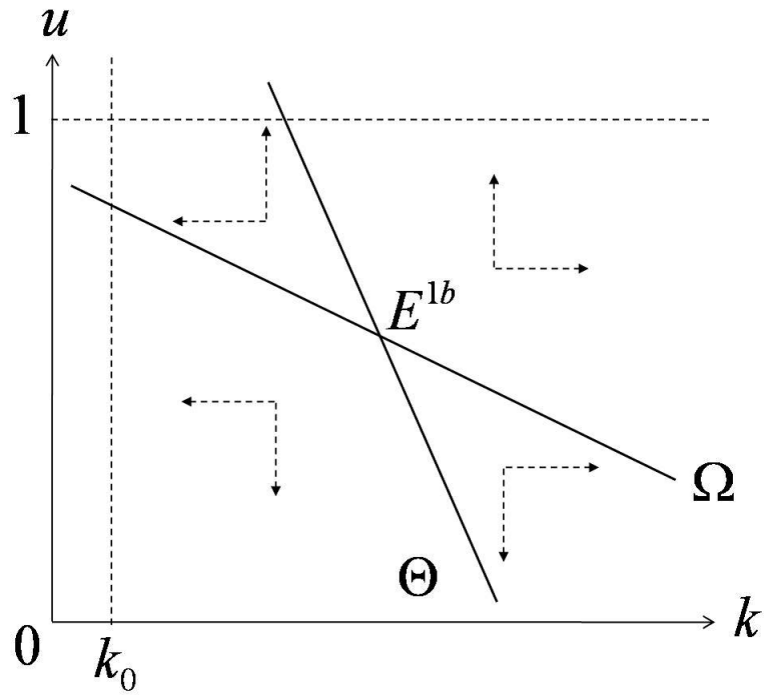
(ケース 7) においては、(a) の場合には $\Theta_k^* \Omega_u^* < \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立するため、定常均衡点 E^{7a} は鞍点安定的である(図 9 参照)。 (b) の場合には $\Theta_k^* \Omega_u^* > \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立するが、 $\Theta_k^* + \Omega_u^*$ の符号については判断できない(図 10 参照)。

(ケース 8) においては、(a) の場合には $\Theta_k^* \Omega_u^* > \Theta_u^* \Omega_k^*$, $\Theta_k^* + \Omega_u^* < 0$ が成立するため、定常均衡点 E^{8a} は安定である(図 11 参照)。 (b) の場合には $\Theta_k^* \Omega_u^* < \Theta_u^* \Omega_k^*$ が成立するため、定常均衡点 E^{8b} は鞍点安定的である(図 12 参照)。



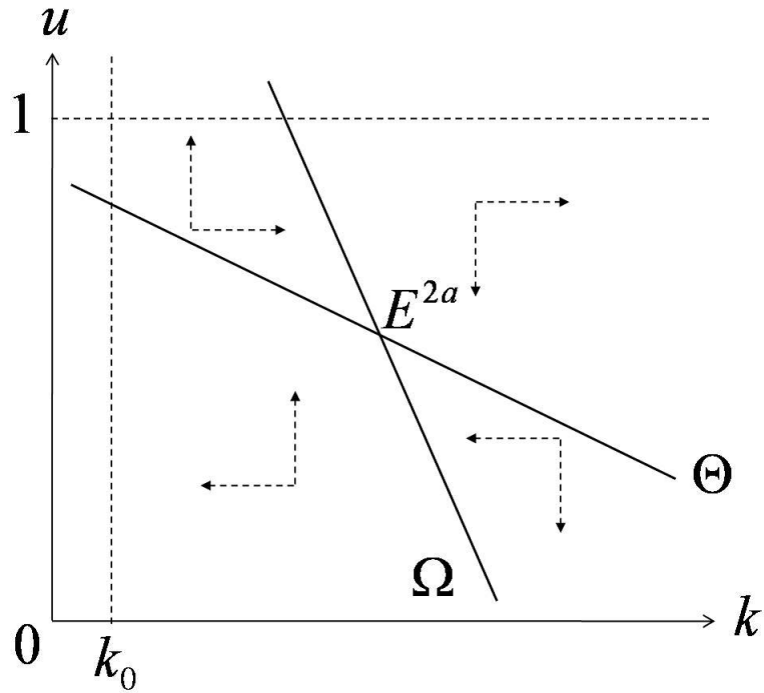
$$\Theta_k(k, u) > 0, \Omega_k(k, u) > 0, \Omega_u(k, u) > 0, -\frac{\Theta_k(k, u)}{\Theta_u(k, u)} > -\frac{\Omega_k(k, u)}{\Omega_u(k, u)}$$

図 1: 鞍点安定的な定常均衡点 (内点解、ケース 1a)



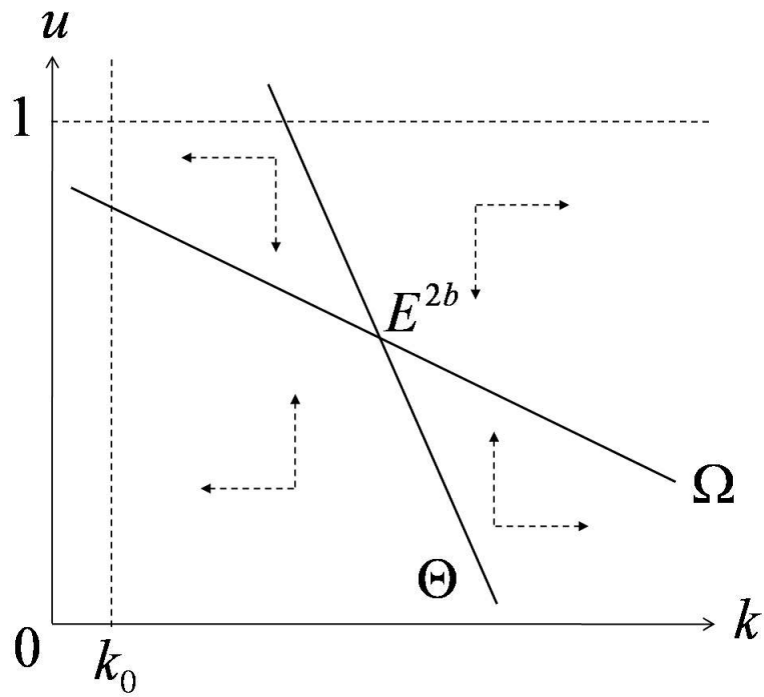
$$\Theta_k(k, u) > 0, \Omega_k(k, u) > 0, \Omega_u(k, u) > 0, -\frac{\Theta_k(k, u)}{\Theta_u(k, u)} < -\frac{\Omega_k(k, u)}{\Omega_u(k, u)}$$

図 2: 不安定な定常均衡点 (内点解、ケース 1b)



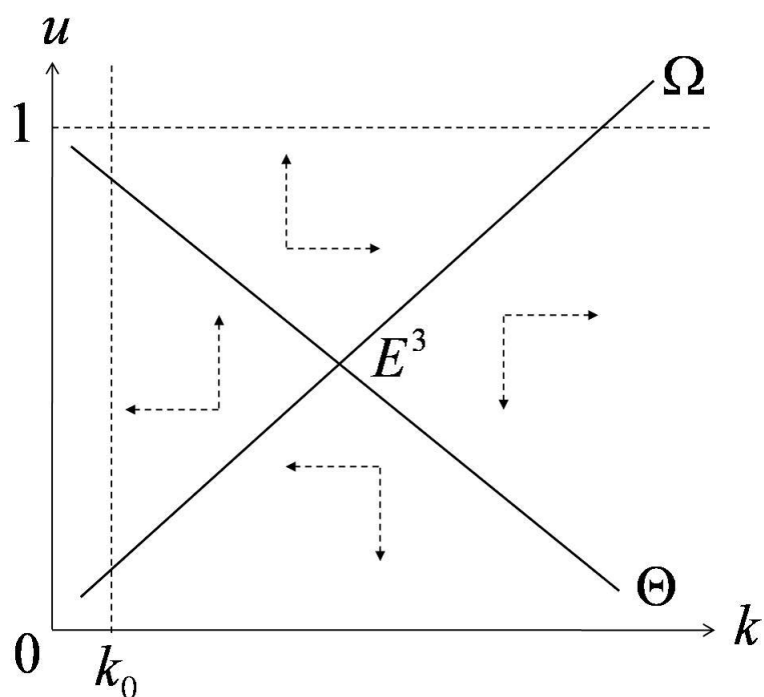
$$\Theta_k(k, u) > 0, \Omega_k(k, u) < 0, \Omega_u(k, u) < 0, -\frac{\Theta_k(k, u)}{\Theta_u(k, u)} > -\frac{\Omega_k(k, u)}{\Omega_u(k, u)}$$

図 3: 鞍点安定的な定常均衡点 (内点解、ケース 2a)



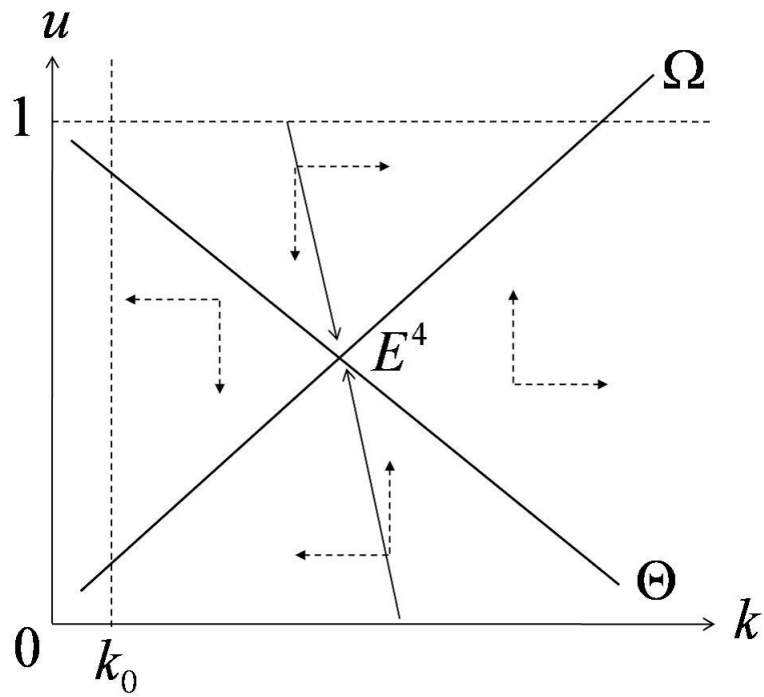
$$\Theta_k(k, u) > 0, \Omega_k(k, u) < 0, \Omega_u(k, u) < 0, -\frac{\Theta_k(k, u)}{\Theta_u(k, u)} < -\frac{\Omega_k(k, u)}{\Omega_u(k, u)}$$

図 4: 鞍点安定的な定常均衡点 (内点解、ケース 2b)



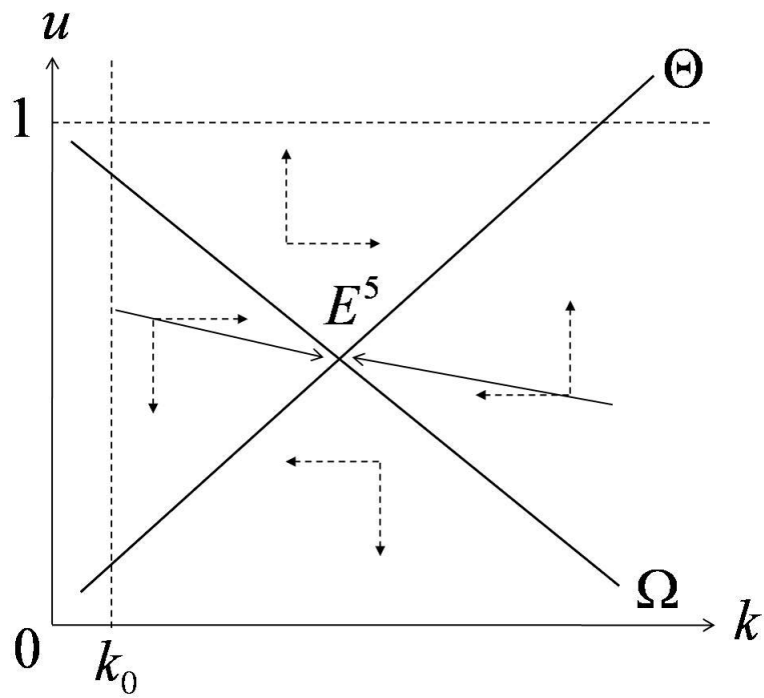
$$\Theta_k(k, u) > 0, \Omega_k(k, u) < 0, \Omega_u(k, u) > 0$$

図 5: 不安定な定常均衡点 (内点解、ケース 3)



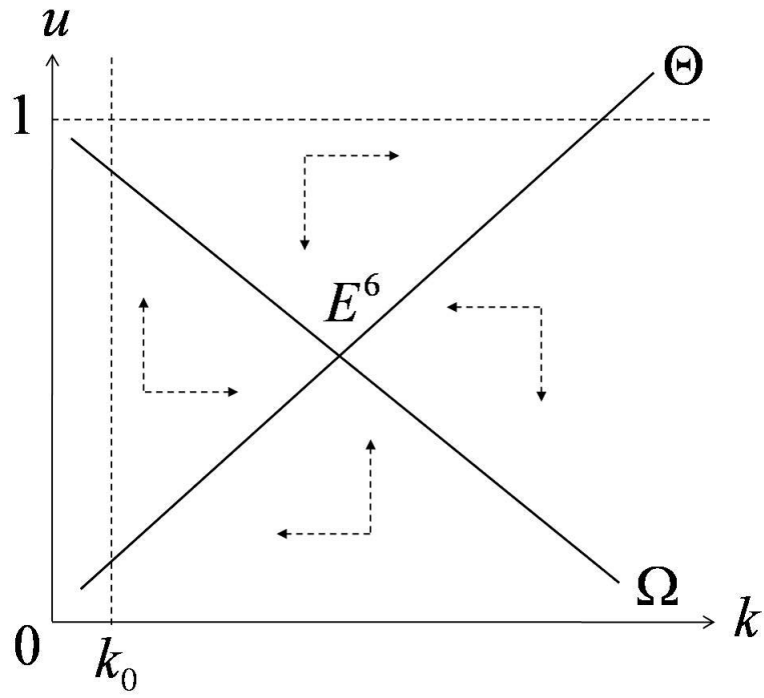
$$\Theta_k(k, u) > 0, \Omega_k(k, u) > 0, \Omega_u(k, u) < 0$$

図 6: 鞍点安定的な定常均衡点 (内点解、ケース 4)



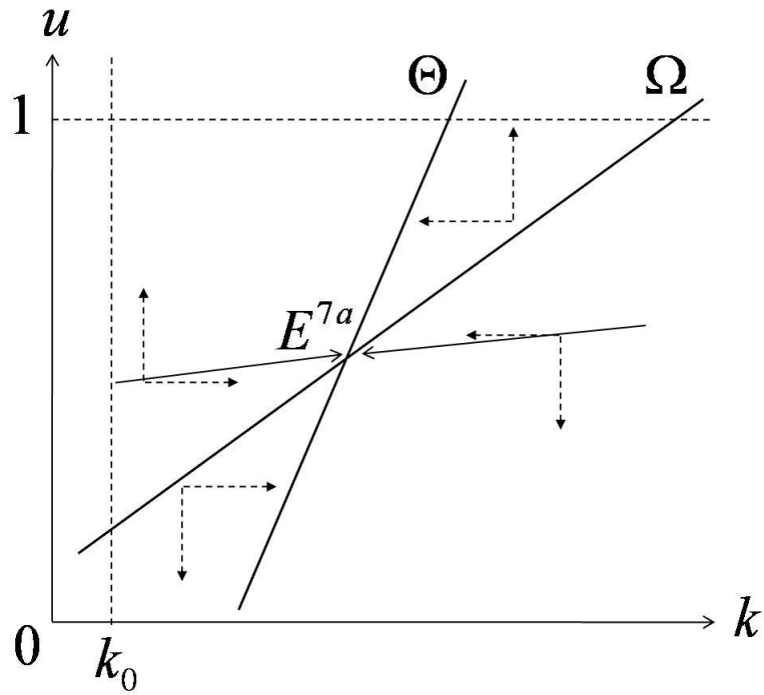
$$\Theta_k(k, u) < 0, \Omega_k(k, u) > 0, \Omega_u(k, u) > 0$$

図 7: 鞍点安定的な定常均衡点 (内点解、ケース 5)



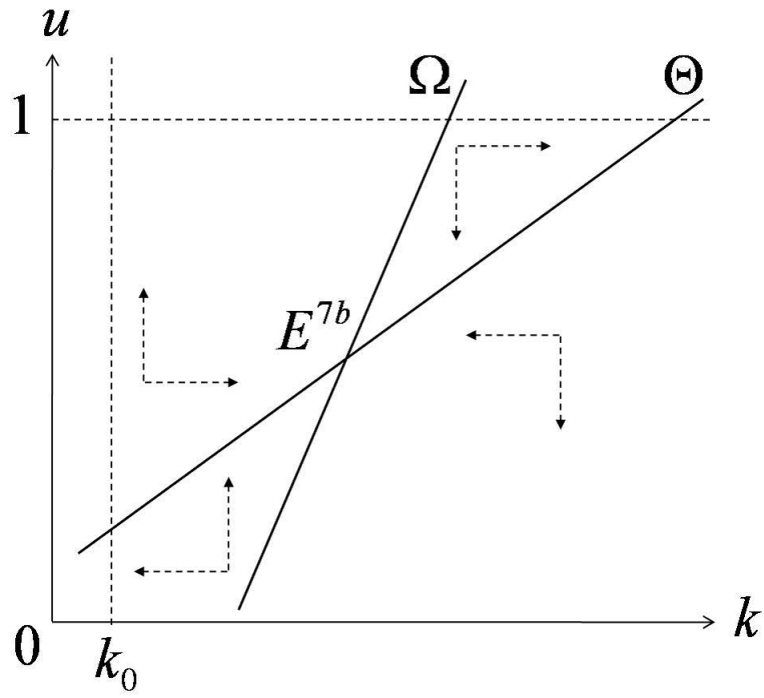
$$\Theta_k(k, u) < 0, \Omega_k(k, u) < 0, \Omega_u(k, u) < 0$$

図 8: 安定な定常均衡点 (内点解、ケース 6)



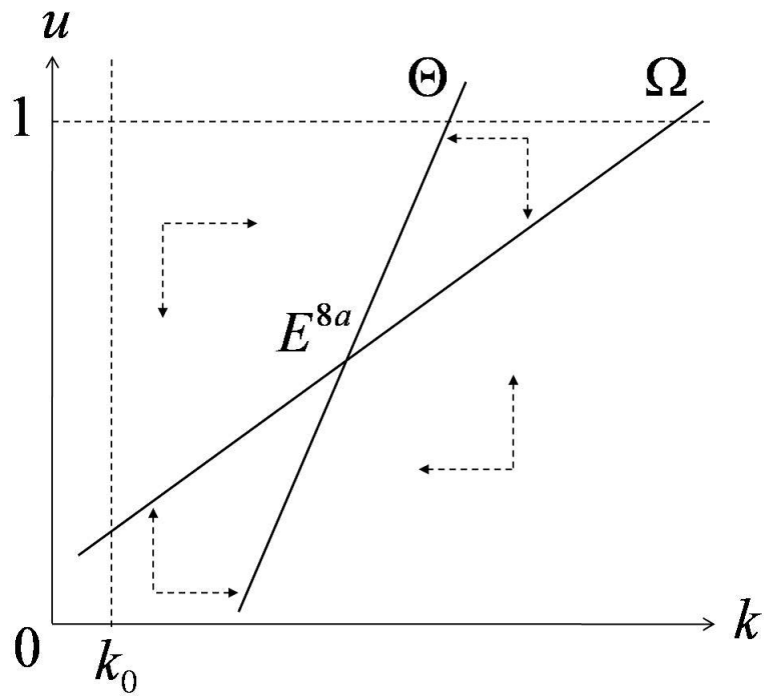
$$\Theta_k(k, u) < 0, \Omega_k(k, u) < 0, \Omega_u(k, u) > 0, -\frac{\Theta_k(k, u)}{\Theta_u(k, u)} > -\frac{\Omega_k(k, u)}{\Omega_u(k, u)}$$

図 9: 鞍点安定的な定常均衡点 (内点解、ケース 7a)



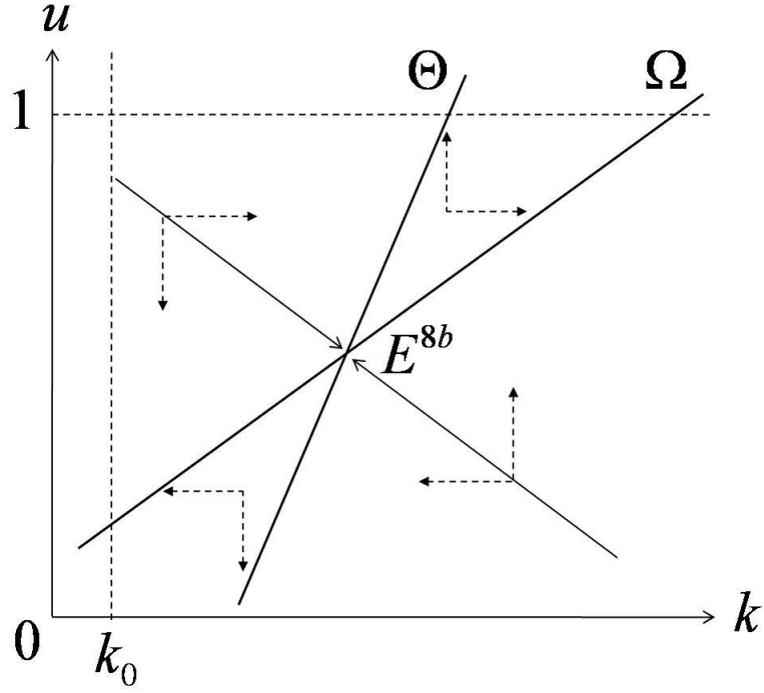
$$\Theta_k(k, u) < 0, \Omega_k(k, u) < 0, \Omega_u(k, u) > 0, -\frac{\Theta_k(k, u)}{\Theta_u(k, u)} < -\frac{\Omega_k(k, u)}{\Omega_u(k, u)}$$

図 10: 鞍点安定的な定常均衡点 (内点解、ケース 7b)



$$\Theta_k(k, u) < 0, \Omega_k(k, u) > 0, \Omega_u(k, u) < 0, -\frac{\Theta_k(k, u)}{\Theta_u(k, u)} > -\frac{\Omega_k(k, u)}{\Omega_u(k, u)}$$

図 11: 安定な定常均衡点 (内点解、ケース 8a)



$$\Theta_k(k, u) < 0, \Omega_k(k, u) > 0, \Omega_u(k, u) < 0, -\frac{\Theta_k(k, u)}{\Theta_u(k, u)} < -\frac{\Omega_k(k, u)}{\Omega_u(k, u)}$$

図 12: 鞍点安定的な定常均衡点 (内点解、ケース 8b)

3.2 端点解のケース ($\lambda > 0, 1 - u = 0$)

生産への時間配分 u が端点解となる場合、ラグランジュ関数は次のようになる。

$$\bar{\mathcal{L}}(c(t), k(t), \pi(t)) = \ln c(t)e^{-\rho t} + \pi(t) \left[(1 - \gamma)[f(k(t), 1) - c(t)] - (\delta - \eta)k(t) \right]$$

最適解が満足するべき 1 階の必要条件は

$$\frac{e^{-\rho t}}{c} = (1 - \gamma)\pi \quad (19)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{(1 - \gamma)[f(k, 1) - c]}{k} - \delta + \eta \quad (20)$$

$$\frac{\dot{\pi}}{\pi} = -(1 - \gamma)f_k + \delta - \eta \quad (21)$$

および境界条件 (6) 式となる。

ラグランジュ関数 $\bar{\mathcal{L}}$ が操作変数 c と状態変数 k について強い意味で凹関数であれば、上に示した 1 階の必要条件は十分条件でもある。 $\bar{\mathcal{L}}$ のヘッセ行列式 $|\bar{\mathcal{L}}|$ の第 1、第 2 首座小行列式をそれぞれ $|\bar{\mathcal{L}}_1|, |\bar{\mathcal{L}}_2|$ とすると、 $\bar{\mathcal{L}}$ が強い意味で凹関数であるための十分条件は $|\bar{\mathcal{L}}_1| < 0, |\bar{\mathcal{L}}_2| > 0$ となる。 $\bar{\mathcal{L}}$ のヘッセ行列式

$$|\bar{\mathcal{L}}| = \begin{vmatrix} \bar{\mathcal{L}}_{cc} & \bar{\mathcal{L}}_{ck} \\ \bar{\mathcal{L}}_{kc} & \bar{\mathcal{L}}_{kk} \end{vmatrix}$$

について、 $|\bar{\mathcal{L}}_1|, |\bar{\mathcal{L}}_2|$ を求めると以下ようになる。

$$|\bar{\mathcal{L}}_1| = \bar{\mathcal{L}}_{cc} = -\frac{e^{-\rho t}}{c^2} < 0$$

$$|\bar{\mathcal{L}}_2| = \bar{\mathcal{L}}_{cc}\bar{\mathcal{L}}_{kk} - \bar{\mathcal{L}}_{ck}\bar{\mathcal{L}}_{kc} = (1 - \gamma) \left[-\frac{e^{-\rho t}}{c^2} \right] f_{kk}\pi$$

$f_{kk} < 0$ および (19) 式より $(1 - \gamma)\pi > 0$ であることから、 $|\bar{c}_2| > 0$ となる。したがって、ラグランジュ関数は操作変数と状態変数について強い意味で凹関数であるので、(6), (19), (20), (21) 式で表される 1 階の必要条件は十分条件でもある。

次に、最適解が満たすべき 1 階の必要十分条件より、社会的最適成長経路が満たす c, k の動学方程式を導く。 k については (20) 式で表される。 c については、(19) 式の両辺を時間について微分して辺々を (19) 式で割り、(21) 式を代入すると次のようになる。

$$\frac{\dot{c}}{c} = (1 - \gamma)f_k - \delta + \eta - \rho \quad (22)$$

(20) 式は c, k の関数であり、(22) 式は k の関数である。したがって、生産への時間配分 u が端点解の場合の社会的最適成長経路は、効率労働 1 単位当たり物的資本 k の初期条件 $k(0) = k_0$ から出発して、 k の蓄積方程式 (20) 式と Keynes-Ramsey Rule (22) 式によって導かれていく成長経路の中で、最終的に横断性条件 (6) 式を満たすことのできるものとなる。

定常均衡

生産への時間配分 u が端点解になる場合、定常均衡点 $\bar{E}(c^*, k^*, 1)$ では $\dot{c} = \dot{k} = 0$ となる。(20), (22) 式より、 \dot{k}, \dot{c} は k, c の関数として以下のように表される。

$$\dot{k} = (1 - \gamma)[f(k, 1) - c] - (\delta - \eta)k \quad (23)$$

$$\dot{c} = [(1 - \gamma)f_k - (\delta - \eta + \rho)]c \quad (24)$$

以下では $1 - \gamma \neq 0$ とする。(23) 式において $\dot{k} = 0$ とすると

$$(1 - \gamma)[f(k, 1) - c] - (\delta - \eta)k = 0 \quad (25)$$

となり、(25) 式が成立するためには $1 - \gamma$ と $\delta - \eta$ は同符号でなければならない。また、(25) 式の両辺を全微分して整理すると次のようになる。

$$\frac{dc}{dk} = f_k - \frac{\delta - \eta}{1 - \gamma} \quad (26)$$

したがって、(25) 式で表される $\dot{k} = 0$ の曲線は、原点を通り傾きが (26) 式で表される曲線となる¹⁵。(26) 式より、 k の増加に伴って $\dot{k} = 0$ を表す曲線の傾きは遞減し、 $f_k(\tilde{k}, 1) = (\delta - \eta)/(1 - \gamma)$ を満たす \tilde{k} において傾きはゼロとなる。次に (24) 式において $\dot{c} = 0$ とすると、 $c = 0$ または

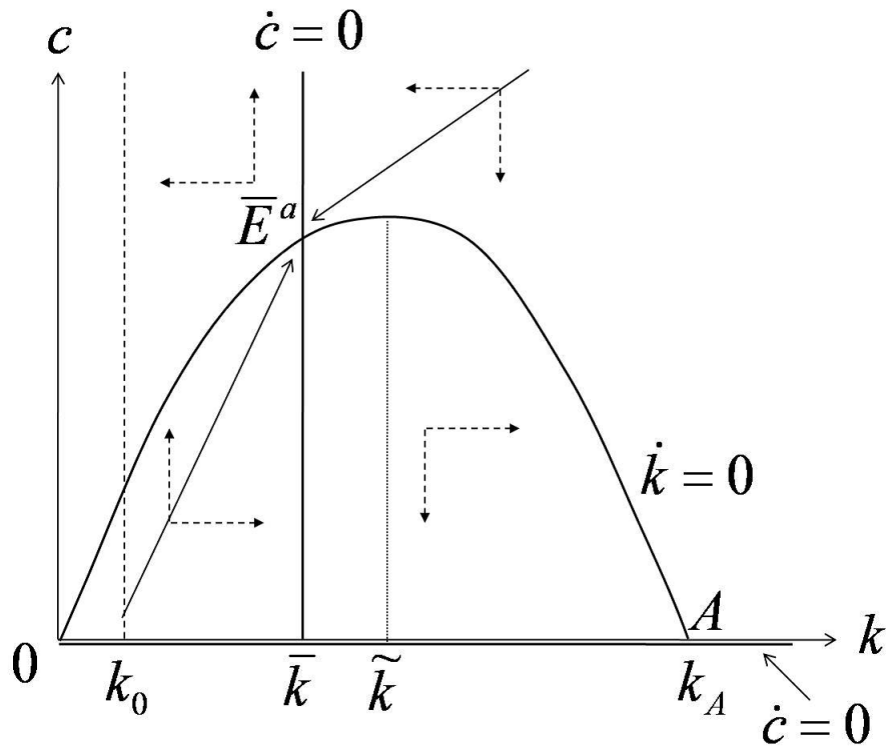
$$f_k = \frac{\delta - \eta + \rho}{1 - \gamma} \quad (27)$$

となる。したがって、 $\dot{c} = 0$ を表す曲線は $c = 0$ すなわち k 軸に一致する直線となるか、(27) 式を満たす \bar{k} において k 軸に垂直な直線となる。また、 $f_k > 0$ より (27) 式が成立するためには $1 - \gamma$ と $\delta - \eta + \rho$ は同符号でなければならない。

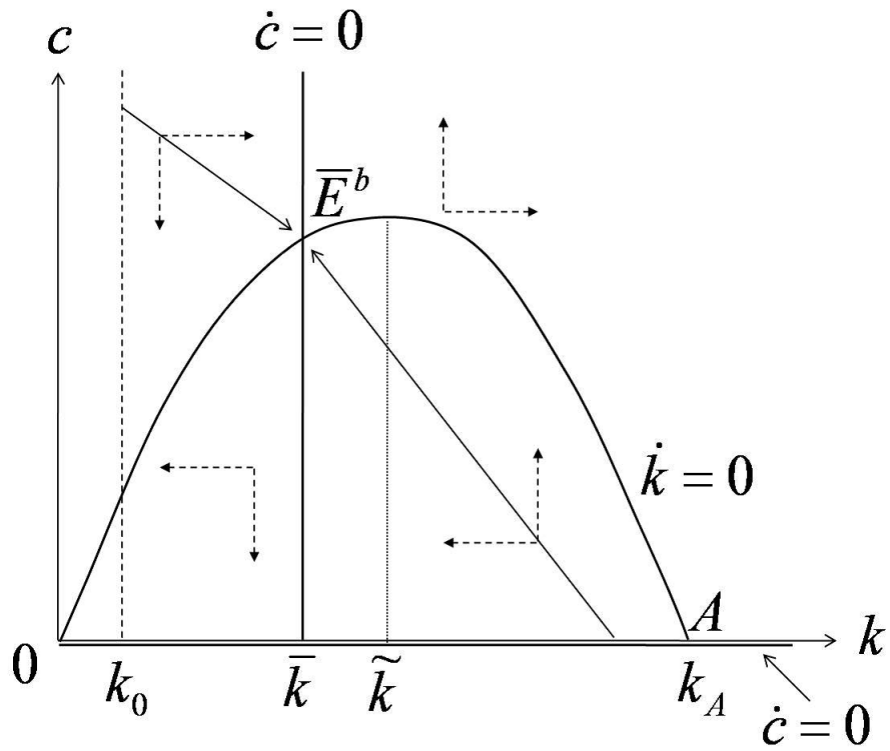
以上より、 $\dot{k} = 0, \dot{c} = 0$ を表す曲線は図 13 のようになり、定常均衡点 \bar{E} が存在し得る。 $f_k(\tilde{k}, 1) = (\delta - \eta)/(1 - \gamma)$ および $f_k(\bar{k}, 1) = (\delta - \eta + \rho)/(1 - \gamma)$ より $f_k(\tilde{k}, 1) < f_k(\bar{k}, 1)$ であり、 $f_{kk} < 0$ より $\tilde{k} > \bar{k}$ である。また、(25) 式より $c = 0$ のとき $(1 - \gamma)f(k, 1) - (\delta - \eta)k = 0$ である。これを満たす k は $k = 0$ または $k_A = [(1 - \gamma)/(\delta - \eta)]f(k_A, 1)$ である。

\bar{E} の安定性については以下のようになる。(23) 式より $dk/dc = -(1 - \gamma)$ であり、(24) 式より $d\dot{c}/dk = (1 - \gamma)c f_{kk}$ である。したがって、(a) $1 - \gamma > 0$ の場合には $d\dot{k}/dc < 0, d\dot{c}/dk < 0$ となり、(b) $1 - \gamma < 0$ の場合には $d\dot{k}/dc > 0, d\dot{c}/dk > 0$ となる。よって、図 13 より、定常均衡点 \bar{E}^a と \bar{E}^b はいずれも鞍点安定的となる。

¹⁵(25) 式より、 $k = 0$ のときは $(1 - \gamma)[f(0, 1) - c] = 0$ となる。 $1 - \gamma \neq 0$ および $f(0, 1) = 0$ より $c = 0$ である。



(a) $1 - \gamma > 0$



(b) $1 - \gamma < 0$

図 13: 鞍点安定的な定常均衡点 (端点解のケース)

4 結論

本稿では、発展途上国の経済成長には研究開発による新たな技術の獲得よりも既存技術の生産への利用が重要であると考え、そのために必要となる社会能力の一つである技術能力を考慮した内生的経済成長モデルを提示した。技術能力を人的資本と捉え、その形成に関して物的資本投資と教育投資の補完的メカニズムを考えている。すなわち、人的資本は物的資本投資の外部効果によって形成され、外部効果の程度は教育投資活動だけでなく、各時点での人的資本ストックの水準にも依存する。なぜなら、教育投資活動は教育水準そのものというよりは教育を向上させるための努力であると考えられ、したがって、ある時点において教育投資活動が行われなくても、既存の教育水準によって新たな技術能力を獲得することが可能であるからである。さらに、外部効果の程度は人的資本ストックの水準と物的資本ストックの水準とのバランスに関連すると考えられることから、各時点での教育投資活動に加えて、物的資本ストックの人的資本ストックに対する比率を外部効果の程度を決定する要因としている。

社会計画当局は、経済全体の物的資本投資水準のみならず、教育への時間配分が物的資本投資に伴う外部効果に及ぼす影響を考慮した上で、社会構成員全体の教育投資活動をも一律に決定するとの仮定の下で、社会的最適成長経路が存在することを示した。さらに、一定の成長率を達成する定常均衡が鞍点安定的となる可能性があることについても示した。したがって、発展途上国の当局が適切な政策を採用することによって、物的資本投資に伴う外部効果によって形成される人的資本を通じて持続的な経済成長が可能であることが理論的に示された。

Appendix

ヘッセ行列式の各要素の導出

ラグランジュ関数 \mathcal{L} のヘッセ行列式 $|\mathcal{L}|$ の各要素は、(2) 式および $\beta > 0, \pi < 0, f_k \geq 0, f_u \geq 0, f_{kk} < 0, f_{uu} < 0$ であることから、以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c &= \frac{e^{-\rho t}}{c} - \left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] \pi \\ \mathcal{L}_{cc} &= -\frac{e^{-\rho t}}{c^2} < 0, \quad \mathcal{L}_{cu} = -\beta\pi > 0, \quad \mathcal{L}_{ck} = 0 \\ \mathcal{L}_u &= \left[\beta[f(k, u) - c] + \left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] f_u\right] \pi \\ \mathcal{L}_{uc} &= -\beta\pi > 0, \quad \mathcal{L}_{uu} = \left[2\beta f_u + \left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] f_{uu}\right] \pi < 0 \\ \mathcal{L}_{uk} &= \left[\beta f_k + \left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] f_{uk}\right] \pi \\ \mathcal{L}_k &= \left[\left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] f_k - (\delta - \eta)\right] \pi \\ \mathcal{L}_{kc} &= 0, \quad \mathcal{L}_{ku} = \left[\beta f_k + \left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] f_{ku}\right] \pi \\ \mathcal{L}_{kk} &= \left[1 - [\beta[1 - u] + \gamma]\right] f_{kk} \pi < 0\end{aligned}$$

ここで、 $f_{ku} > 0, f_{uk} > 0$ については次のように証明される。 $y = f(k, u)$ は k, u について一次同次であるから、オイラーの定理 (Euler's Theorem) より $y = k f_k + u f_u$ となる。 f_k, f_u はゼロ次同次であるから

$$k f_{kk} + u f_{ku} = 0, \quad k f_{uk} + u f_{uu} = 0$$

となる。したがって、 $f_{ku} = (-k/u) f_{kk} > 0, f_{uk} = (-u/k) f_{uu} > 0$ となる。

参考文献

- Abramovitz, Moses (1986) "Catching Up, Forging Ahead, and Falling Behind," *Journal of Economic History*, Vol. 46, No. 2, pp. 385–406, June.
- Aghion, Philippe and Peter Howitt (1992) "A Model of Growth Through Creative Destruction," *Econometrica*, Vol. 60, No. 2, pp. 323–351, March.
- Daitoh, Ichiroh (2010) "Productive Consumption and Population Dynamics in an Endogenous Growth Model: Demographic Trends and Human Development Aid in Developing Economies," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 34, No. 4, pp. 696–709, April.
- Greiner, Alfred and Willi Semmler (2002) "Externalities of Investment, Education and Economic Growth," *Economic Modelling*, Vol. 19, No. 5, pp. 709–724, November.
- Jones, Charles I. (1995) "R&D-Based Models of Economic Growth," *Journal of Political Economy*, Vol. 103, No. 4, pp. 759–784, August.
- Klenow, Peter J. and Andrés Rodríguez-Clare (1997) "Economic Growth: A Review Essay," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 40, No. 3, pp. 597–617, December.

- Kosempel, Stephen (2004) “A Theory of Development and Long Run Growth,” *Journal of Development Economics*, Vol. 75, No. 1, pp. 201–220, October.
- Léonard, Daniel and Ngo Van Long (1992) *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Lucas, Robert E., Jr. (1988) “On the Mechanics of Economic Development,” *Journal of Monetary Economics*, Vol. 22, No. 1, pp. 3–42, July.
- Rebelo, Sergio (1991) “Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth,” *Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, pp. 500–521, June.
- Romer, Paul M. (1986) “Increasing Returns and Long-Run Growth,” *Journal of Political Economy*, Vol. 94, No. 5, pp. 1002–1037, October.
- Romer, Paul M. (1990) “Endogenous Technological Change,” *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, pp. S71–S102, October.
- Shaw, G.K. (1992) “Policy Implications of Endogenous Growth Theory,” *Economic Journal*, Vol. 102, No. 412, pp. 611–621, May.
- Stokey, Nancy L. (1991) “Human Capital, Product Quality, and Growth,” *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 106, No. 2, pp. 587–616, May.
- 足立英之 (2000) 『不完全競争とマクロ動学理論』, 有斐閣 .
- 西村和雄 (1990) 『ミクロ経済学』, 東洋経済新報社 .