HITOTSUBASHI　UNIVERSITY

Center for Financial Engineering Education (CFEE)

CFEE Discussion Paper Series No. 2010-1

株価指数及びREIT指数ヘッジへのマルコフ・レジーム・スイッチングモデルを用いたアプローチ

山口聡

Center for Financial Engineering Education (CFEE)
Department of Economics, Hitotsubashi University
2-1 Naka, Kunitachi Tokyo, 186-8601 Japan
http://www.econ.hit-u.ac.jp/~finmodel

株価指数及び REIT 指数ヘッジへのマルコフ･レジーム･スイッチングモデルを用いたアプローチ

一橋大学経済学部
下津ゼミナール
平成 22 年度卒業
学籍番号 2107253b
山口聡

1. はじめに

本稿では日経平均株価と日経平均株価指数先物，及び東証 REIT 指数と東証 REIT 指数先物を用いて最適ヘッジ比率の推定を行う．

ヘッジとは現物資産の買い(売り)に先物資産の売り(買い)を組み合わせたポートフォリオを作ることで資産価格の変動リスクを低下させることであり，最適ヘッジ比率はそのポートフォリオの変動を最小化する値である．ヘッジの最も簡単な方法は現物の買いに対して同数の先物の売りを組み合わせる手法でありナイーブヘッジと呼ばれる．しかし現物と先物の価格変動は完全に相関してはいないため，これは最適ヘッジ比率にはならない．最適ヘッジ比率の最も簡単な推定方法は OLS を用いて現物を先物で回帰したときの最小 2 乗係数推定値として推定することが知られている．しかしこの等式では現物と先物の間の関係が期間中一定であると仮定しており，時間によって変化することが知られている現実の資産価格の変動と異なっていた．そのためヘッジ比率の推定は Bollerslev(1986)が時間によって変化する分散を持つ GARCH モデルを提案して以降，この GARCH モデルを用いて推定されるようになっている．GARCH モデルが用いられる理由は，現実の株価，為替レート，金融商品価格などの資産価格の変動はひとたび大きな変動が起きるとそれがしばらく続くというボラティリティークラスタリングと呼ばれる性質を持ち GARCH モデルはこれを捕らえるのに適しているモデルだからである．また Alizadeh and Nomikos(2004)は現物と先物の間の関係が，マーケットの状態によって異なる二つのレジームを持つというマルコフ・レジーム・スイッチング(MRS)モデルを用いて S&P500 およ

びFTSE100での最適ヘッジ比率の推定を行い，GARCHやOLSのヘッジ比率とのヘッジの有効性の比較を行った．この研究では S&P500 のアウトオブサンプルでの結果を除きMRS モデルによって推定されたヘッジ比率が他のモデルのヘッジ比率よりも優れているという結果であった．

日本におけるヘッジ比率の研究として東証株価指数を用いた程島・芦谷(2003)による研究，ドル円為替レートを用いた原田(2008)などがある．本稿においては東証株価指数(TOPIX)及び東証 REIT 指数データの最適ヘッジ比率を Alizadeh and Nomikos(2004)と同様にマルコフ・レジーム・スイッチングモデルによって推定し，OLS 及びナイーブヘッジのヘッジ比率と比較を行う．マルコフ・レジーム・スイッチングモデルを用いた最適ヘッジレシオの研究は国内ではあまり行われておらず，そのため本稿の目的はマルコフ・レジーム・スイッチングモデルを用いた最適ヘッジ比率の研究である．また 2008 年 6 月に取引が開始されたばかりであまり研究が進んでいない東証 REIT 指数先物のデータに関する分析を行うという目的もある．

本稿の構成は以下のとおりである．2 章では分析に使用するモデルおよび最適ヘッジ比率の計算方法を紹介する．3 章では利用するデータの解説およびその性質について表及び図を用いて述べる．4 章では MRS モデルを用いた推定を行った結果を示し，最適ヘッジ比率を決定する．5 章においてはヘッジポートフォリオ及び効用関数を用いて MRS モデル，OLS，ナイーブヘッジの各ヘッジ比率の有効性に関しての比較を行う．6 章ではこれらの結果の要約と結論を述べる．

2. モデル

ヘッジの目的は現物資産と先物資産を組み合わせたポートフォリオを作り，その価格変動のリスクを低下させることであり，ヘッジ比率は現物資産の買い(売り)に対して売る(買う)先物の比率を表している．それゆえに最適ヘッジ比率はヘッジされた現物と先物のポートフォリオの分散を最小化する値となる．伝統的には現代ポートフォリオ理論に基づいて現物価格と先物価格の共分散を先物価格の分散で割ったものとして導出される．Ederington(1979)の用いた式を用いて，ΔS_t と ΔF_t がそれぞれ現物及び先物の価格の t 期と t-1 期間の変化を表すとする．このとき分散を最小化するヘッジ比率は現物及び先物の価格変化の間の条件なしの共分散，すなわち以下の等式の傾斜係数 $\gamma 1$ に等しい．

$$\Delta S_t = \gamma_0 + \gamma_1 \Delta F_t + u_t; \qquad u_t \sim iid(0,\sigma^2) \tag{1}$$

しかし，これではヘッジの意思決定に利用可能な過去の条件付情報を利用していないことになるうえ，分散が期中一定であると仮定しており，これは実際の資産価格の変動は時間によって変化するという一般的な事実に反している．それゆえに，現物価格と先物価格の条件付情報が与えられたときの条件付共分散行列が時間とともに変化するモデルを利用することで，よりすぐれたヘッジ比率の推定が可能になると考えられる．そこで本稿ではマルコフ・レジーム・スイッチングモデルを用いて，最適ヘッジ比率の推定を行い，その効果を検証する．

マルコフ・レジーム・スイッチングモデルは変数がいくつかのレジームの間で確率的にシフトすることを認めたモデルであり，等式(1)を拡大することで表すことができる．

$$\Delta S_t = \gamma_{0,st} + \gamma_{1,st}\Delta F_t + \varepsilon_{t,st}; \qquad \varepsilon_{t,st} \sim iid(0,\sigma^2_{\varepsilon,st}) \tag{2}$$

S_t=1,2 はマーケットの状態を表している，等式(2)の 2 つのレジームの関係は以下の遷移確率を持つ 1 次のマルコフ過程によって与えられている．

$$Pr(s_t = 2 \mid s_{t-1} = 1) = P_{21}, Pr(s_t = 2 \mid s_{t-1} = 2) = P_{22} = (1-P_{21}) \tag{3}$$

$$Pr(s_t = 1 \mid s_{t-1} = 2) = P_{12}, Pr(s_t = 1 \mid s_{t-1} = 1) = P_{11} = (1-P_{12})$$

遷移確率 P_{12} は状態 1 に続いて状態 2 になる確率を表し，遷移確率 P_{21} は状態 2 に続いて状態 1 になる確率を表している．遷移確率 P_{11}，P_{22} は市場の状態に変化がないことを表している．これらの遷移確率は次の期でも一定であると仮定されている．

時間によって変化する遷移確率を基にすると，ある時点でのある状態に過程がいる条件付きレジーム確率は以下のように表すことが出来る．

$$Pr(s_t=1) = \pi_1 = \frac{1 - P_{22}}{2 - P_{11} - P_{22}}, \qquad Pr(s_t=2) = \pi_2 = \frac{1 - P_{11}}{2 - P_{11} - P_{22}} \tag{4}$$

正規性を仮定すると，それぞれのレジームの密度関数は以下の式で表すことが出来る．

$$f(\Delta S_t \mid s_t;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{st}^2}} \exp\left\{\frac{-(\Delta St - \gamma_{0,st} - \gamma_{1,st}\Delta F_t)^2}{2\sigma_{st}^2}\right\}, \quad s_t = 1,\ 2 \tag{5}$$

$\theta = (\gamma_{0,st},\ \gamma_{1,st},\ \sigma_{st}^2)$，$s_t = 1,\ 2$，は推定すべきベクトルパラメータである．

それぞれのマーケットの状態とそれぞれの状態にいる確率の密度関数が定義されれば，状態変数の確率分布とそれぞれのレジームの密度関数を組み合わせることで，以下のような全サンプルの尤度関数を作ることができる．

$$f(\Delta S_t;\theta) = \frac{\pi_1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left\{ \frac{-(\Delta St - \gamma_{0,1} - \gamma_{1,1}\Delta F_t)^2}{2\sigma_1^2} \right\},$$

$$+ \frac{\pi_2}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left\{ \frac{-(\Delta St - \gamma_{0,2} - \gamma_{1,2}\Delta F_t)^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \qquad (6)$$

$\theta = (\gamma_{0,st},\ \gamma_{1,st},\ \sigma_{st}^2)$，$s_t = 1,\ 2$，そして π_1，π_2 はそれぞれレジームが 1，2，にいる確率を表している．　上記の密度関数の対数尤度関数は以下の式のように定義することができる．

$$L(\theta) = \Sigma^T{}_{t=1} \log f(\Delta S_t;\theta) \qquad (7)$$

この式は $\pi_1 + \pi_2 = 1$ と $0 \leqq \pi_1,\ \pi_2 \leqq 1$ という制約に従って数学的最適化の手法を用いて混成されている．

推定式(2)は，与えられた状態で最小分散を実現する二つのヘッジ比率 $\gamma_{1,1}$ と $\gamma_{2,2}$ を持つ．これは最適ヘッジ比率の上限と下限を表していると考えられる．マーケットが状態 1 及び状態 2 にいる確率はそれぞれ π_1、$\pi_2 = 1 - \pi_1$，$0 \leqq \pi_1 \leqq 1$、$0 \leqq \pi_2 \leqq 1$ と表せるので，最適ヘッジ比率は二つのヘッジ比率 $\gamma_{1,1}$，$\gamma_{1,2}$ をそれぞれの確率で荷重をかけた加重平均で表すことができる．従って t 期の最適ヘッジ比率はマーケットが状態 1 及び状態 2 にいる確率に依存し，以下のように表すことが出来る．

$$\gamma_t^* = \pi_1\gamma_{1,1} + (1 - \pi_1)\gamma_{1,2} \qquad (8)$$

上記の MRS ヘッジ比率の推定は平均と分散，及びそれらの関係がシフトするよう定式化されており，期中一定の OLS の推定値よりも優れた最適ヘッジ比率の推定が期待される．それが本当かどうかを以下の章で評価していく．

3.　データ

本稿では，2005 年 12 月 2 日から 2010 年 12 月 9 日までの東証株価指数及び東証株価指数先物の終値，2008 年 6 月 16 日から 2010 年 12 月 9 日までの東証 REIT 指数及び東証 REIT 指数先物の終値をデータとして用いる．東証株価指数及び東証株価指数先物のデータは 1232 個，東証 REIT 指数及び東証 REIT 指数先物のデータは 609 個である．すべてのデータは Bloomberg から取得した．

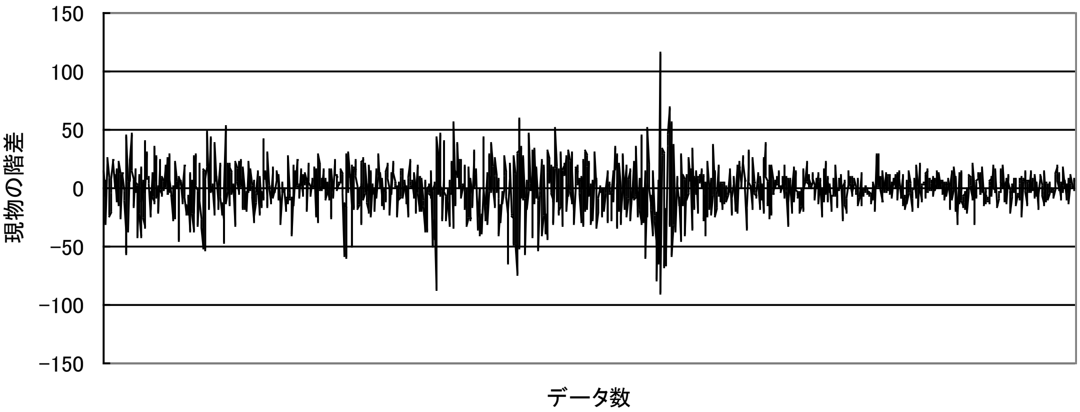
使用する先物価格の限月は直近限月を用い，限月切り替えの一週間前から次の限月に切り替える．T 期の現物価格を S_t，t 期の先物価格を F_t と置くと，その階差は以下のように表すことが出来る．

$$\Delta S_t = (S_t - S_{t-1})$$

$$\Delta F_t = (F_t - F_{t-1})$$

図 1，図 2 は ΔS_t と ΔF_t の時系列のグラフで，表 1 は記述統計量を表している．

図 1　東証株価指数の現物と先物の収益率



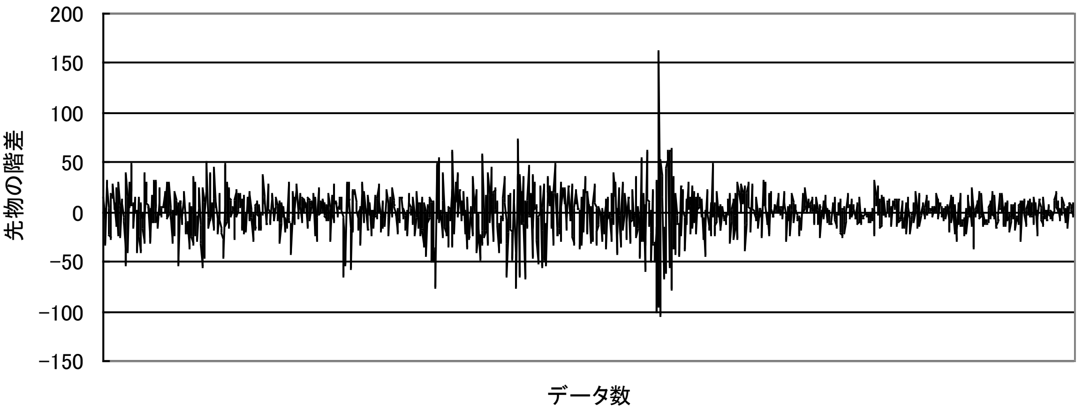
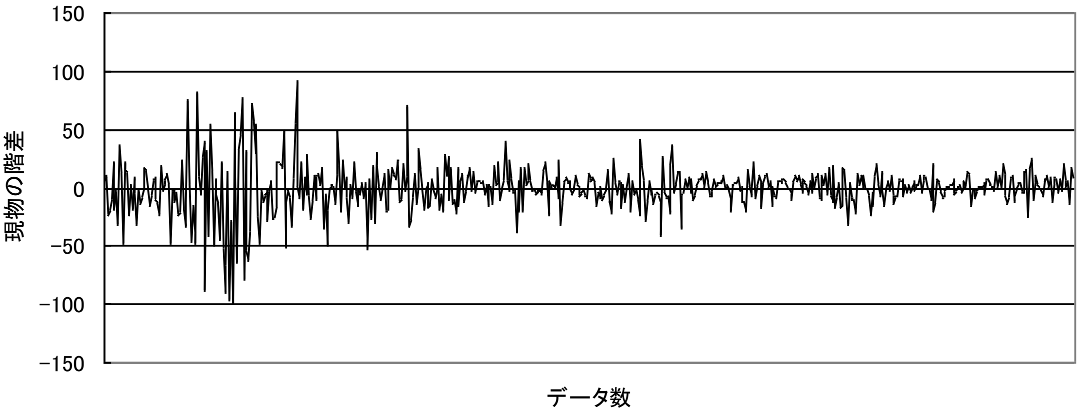


図 2　東証 REIT 指数の現物と先物の収益率



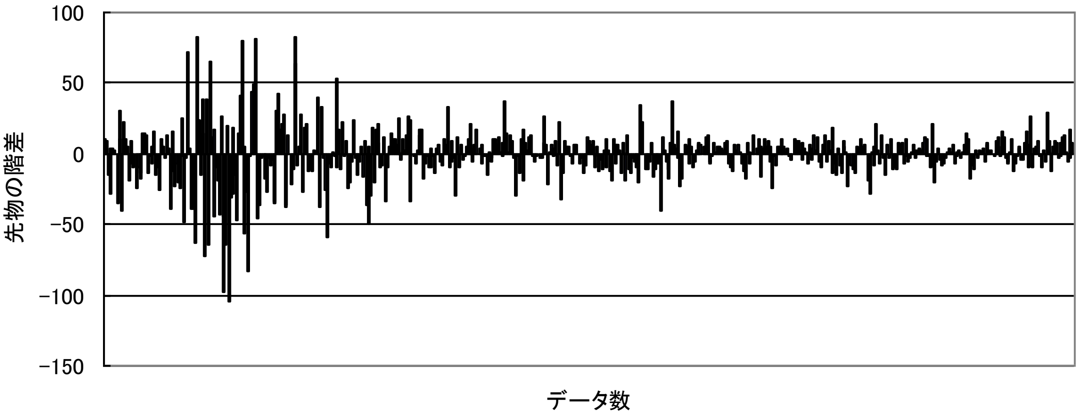


表 1　記述統計量

	東証株価指数		東証 REIT 指数	
	ΔS_t	ΔF_t	ΔS_t	ΔF_t
平均値	-0.5622	-0.5633	-0.5797	-0.4926
中央値	0.27	0.5	0.235	0.0025
最大値	115.44	162.5	91.34	83
最小値	-90.99	-105.5	-100.04	-104
標準偏差	19.1075	20.5629	20.3269	18.9514
歪度	-0.2824	-0.1142	-0.3409	-0.3362
尖度	2.7130	5.2213	5.2840	6.2778
標本数	1231	1231	608	608

4. 結果

この章では2章で説明したマルコフ・レジーム・スイッチングモデルを最尤法を用いて推定した結果を示す．ここではこのモデルのレジームの数は2つであると仮定し推定された．なお推定には計算の都合上 ΔS 及び ΔF を 100 分した値を用いた．表 2 には MRS モデルを推定した結果が示されている．

これらのデータから，式(1)から求められた OLS のヘッジ比率は MRS モデルによって求められた 2 つのヘッジ比率の間にあることが分かる．これは MRS モデルではヘッジ比率はマーケットの状態に依存するが，OLS では期中一定であるため平均的なヘッジ比率を推定するからだと考えられる．また東証株価指数のデータでは OLS のヘッジ比率は MRS モデルのヘッジ比率のちょうど中間にあるが、他方東証 REIT 指数では OLS のヘッジ比率は MRS モデルの状態 2 におけるヘッジ比率に非常に近い値をとっている。表 2 の中の市場が各レジームにいる確率 $P(s_t)$を見ると、東証 REIT 指数の $P(s_t=2)$は 0.6933 となっており状態 2 にいる確率が高いことが分かる。これを反映し OLS のヘッジ比率が MRS モデルの状態 2 のヘッジ比率に近い値をとっていると考えられる。またレジーム間の遷移確率を見ると，東証株価指数では分散が低いレジームから高いレジームにシフトする確率 P_{12} は，分散が高いレジームから低いレジームへシフトする確率 P_{21} よりも低いが，東証 REIT 指数では逆となっている．これは東証株価指数においては分散が高い状態は持続的ではないが，東証 REIT 指数においては分散が高い状態が持続的であることを意味する．このような相違が生まれる原因は 2 つ考えられる． 1 つ目の理由はそもそも東証 REIT 指数を構成する REIT の価格変動が大きいという可能性である．2 つ目の理由は東証株価指数は 1600 以上の株価を平均化したものである一方，東証 REIT 指数を構成する REIT の数は 37 しかなく，また全て不動産という同種の資産であり個別資産や業種のリスクを分散しきれないため指数全体の変動が大きくなっている可能性である．これらについては更なる検証が必要になるが、ここではこれ以上議論しない．

図 3 から 6 図は東証株価指数及び東証 REIT 指数の MRS モデルを計算して求められた状態 2 の smooth regime probability 及びヘッジ比率をあらわしたものである．東証株価指数において状態 2 の確率が高く推移しているのは 2007 年 8 月から 2008 年 4 月，及び 2008 年 8 月から 2008 年 12 月であるが，東証 REIT 指数では 2008 年 6 月から 2010 年 6 月程度までかなりの長期にわたって状態 2 の確率が高くなっている．

ヘッジ比率の図を見ると，レジーム確率と MRS モデルのヘッジ比率が似たような動きをしているのが分かるが，MRS モデルのヘッジ比率はレジーム確率を用いて計算されているため予想された結果といえる．また以前にも述べたように MRS モデルのヘッジ比率の上限と下限の間に OLS のヘッジ比率が位置していることが分かる．

表 2　推計結果

	東証株価指数		東証 REIT 指数	
	MRS		MRS	
	st=1	st=2	st=1	st=2
$\gamma_{0,st}$	0.0001	-0.0031	-0.0021	-0.0008
	(Inf)	(0.0047)	(0.0002)	(0.0053)
	[1.00]	[0.50]	[0.00]	[0.88]
$\gamma_{1,st}$	0.9560	0.8541	1.0073	0.9485
	(0.0075)	(0.0157)	(0.0027)	(0.0248)
	[0.00]	[0.00]	[0.00]	[0.00]
$P_{st,not\ st}$	0.03	0.13	0.30	0.13
	(0.01)	(0.04)	(0.05)	(0.02)
	[0.00]	[0.00]	[0.00]	[0.00]
σ^{st}	0.00087	0.005031	0.000007	0.012387
	(0.0000)	(0.0004)	(0.0000)	(0.0009)
	[0.00]	[0.00]	[0.00]	[0.00]
P(st)	0.8125	0.1875	0.3023	0.6977
OLS_HR	0.9051		0.952201	

図 3 東証株価指数における状態 2 の Smooth regime probability

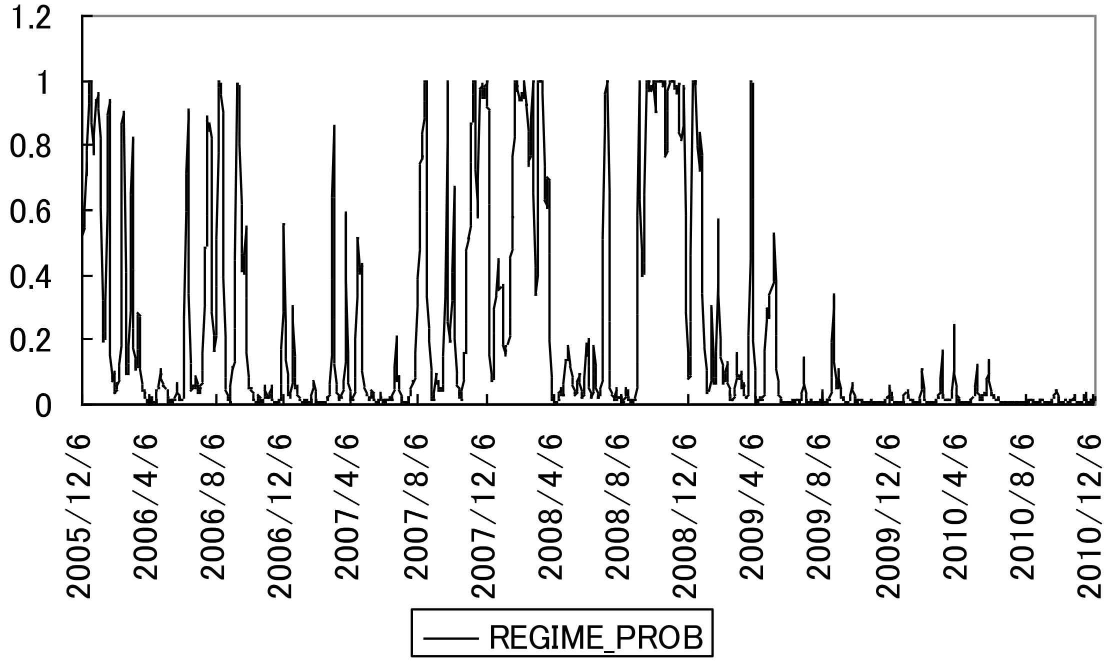


図 4 東証株価指数の OLS 及び MRS ヘッジ比率

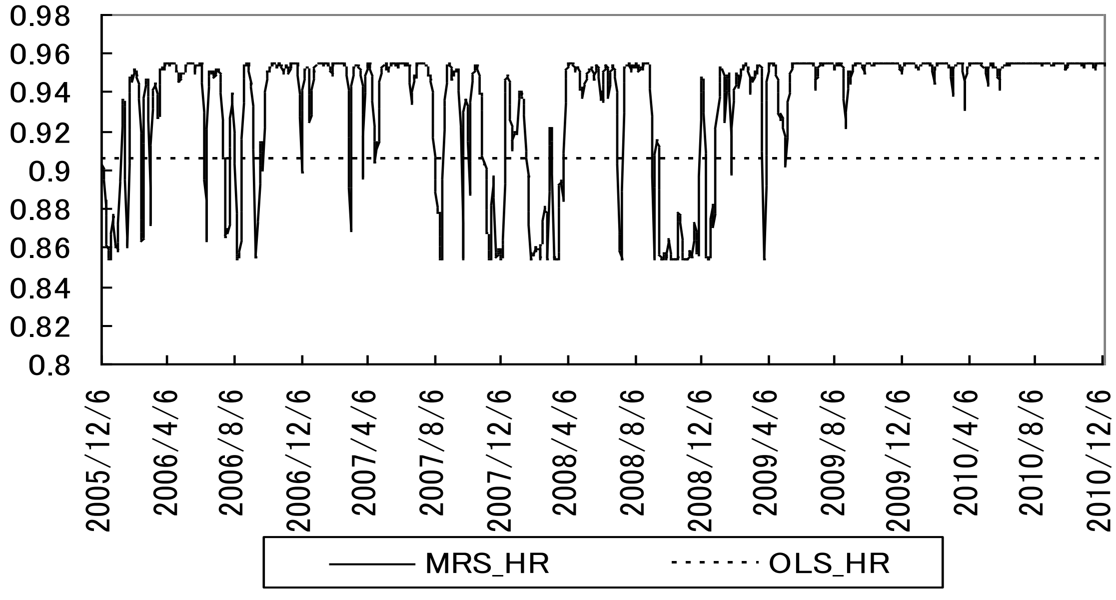


図 5 東証 REIT 指数における状態 2 の Smooth regime probability

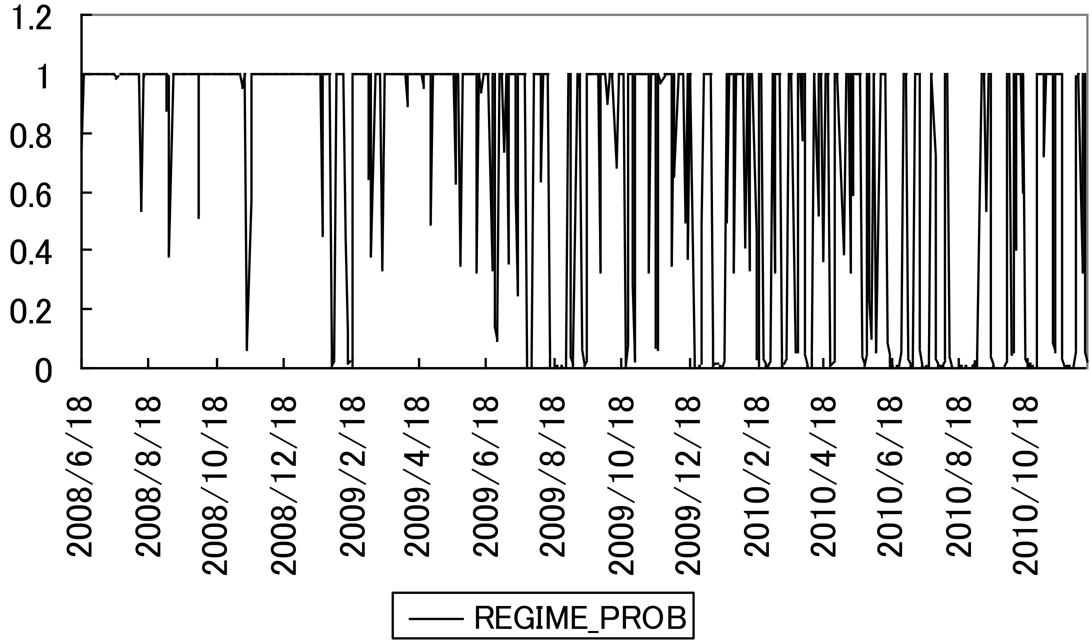
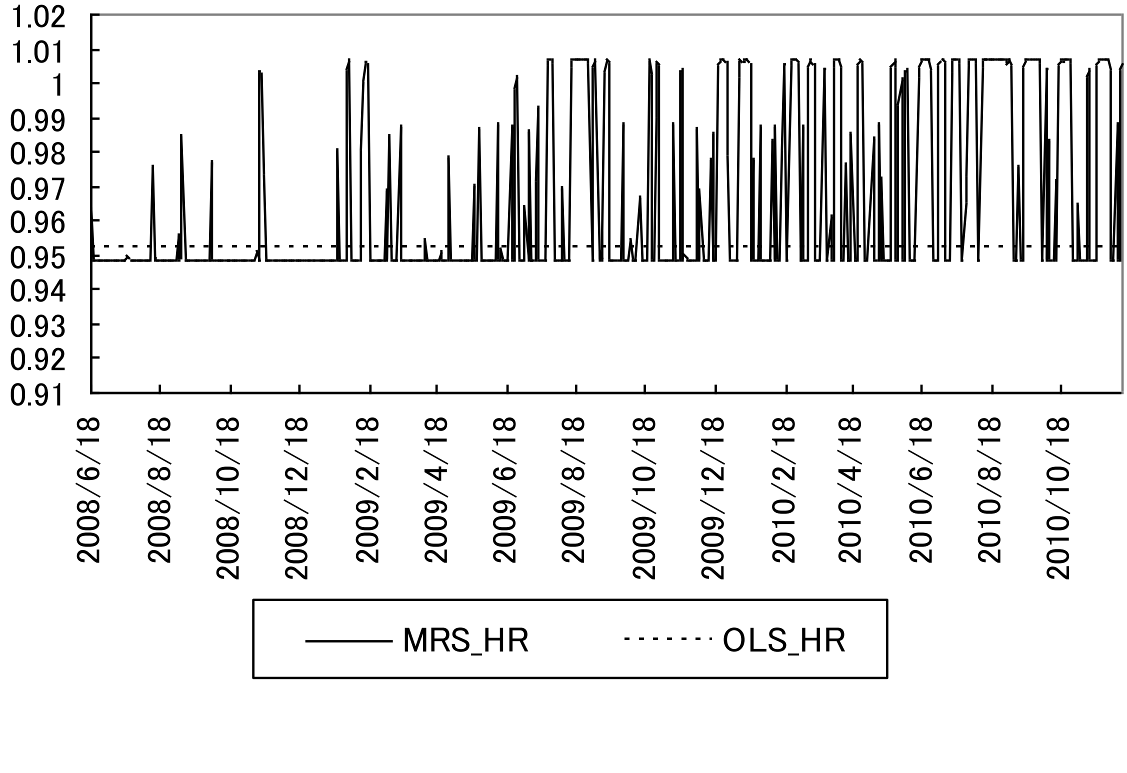


図 6 東証 REIT 指数の OLS 及び MRS ヘッジ比率



5. ヘッジの有効性の検証

MRSモデルのおける smooth regime probability がインサンプルでのヘッジ比率の計算に用いられた．MRS モデルを用いて推定された t 期の最適ヘッジ比率は(8)式の π_t を，MRSによって求められたt期に状態1にいる確率に置き換えることによって求められる．すなわち t 期の最適ヘッジ比率は以下の式によって計算される．

$$\gamma_t^* = \pi_{1,t}\gamma_{1,1} + (1 - \pi_{1,t})\gamma_{1,2} \tag{9}$$

ここで $\pi_{1,t}$ は MRS モデルによって求められた状態 1 の smooth regime probability を表す．

これらのヘッジ比率のパフォーマンスを評価するために計算されたヘッジ比率を用いて以下のようなポートフォリオを構築する．

$$Var(\Delta S_t - \gamma_t^* \Delta F_t) \tag{10}$$

γ_t^*は計算されたヘッジ比率である．MRS モデルのヘッジのパフォーマンスを比較するために，等式(1)を用いて OLS のヘッジ比率の計算も行った．またベンチマークとして現物のポジションと同数の反対の先物ポジションを持つ，すなわち $\gamma=1$ であるナイーブヘッジを用いる．

ポートフォリオの分散を表 3 に表している．またヘッジの有効性をよりよく評価するため，ヘッジャーの効用関数を用いた経済的効用の比較を行う．ここでは Kroner and Sultan(1993)が用いた以下のモデルを用いる．

$$E_tU(x_{t+1}) = E_t(x_{t+1}) - \kappa Var_t(x_{t+1}) \tag{11}$$

κ は個々の投資家のリスク回避係数をあらわしており，$\kappa>0$ である．x_{t+1} はヘッジポートフォリオからのリターンを表している．

表 3 から OLS のヘッジ比率が用いられたときのヘッジポジションの階差の分散は東証株価指数で 18.6789，東証 REIT 指数で 87.6748．MRS モデルから得られたヘッジ比率を用いた場合は東証株価指数で 17.4340，東証 REIT 指数で 87.8857 である．ヘッジされたポートフォリからの超過リターンがゼロであり，リスク回避係数が 4 と仮定すると，東証株価指数のポートフォリオでは OLS のヘッジ比率を用いた場合 $U(x_{t+1}) = -4(18.6789) = -74.716$，MRS モデルのヘッジ比率を用いた場合 $U(x_{t+1}) = -4(17.4340) = -69.736$ の効用を得ることが出来る．したがって MRS モデルを用いた場合効用を 4.98 だけ OLS のヘッジ比率に対して増加させることが出来る。東証 REIT 指数においても同様の分析を行うと OLS のヘッジ比率を用いた場合 $U(x_{t+1}) = -4(87.6748) = -350.6993$，MRS モデルのヘッジ

比率を用いた場合 $U(x_{t+1})$ = -4(87.8857) = -351.5427 の効用を得ることが出来る．このとき MRS モデルを用いると OLS のヘッジ比率に対して 0.8483 だけ効用が低下してしまう．以上のことから平均分散効用を持つ投資家は東証株価指数においては MRS モデルの戦略，東証 REIT 指数においては OLS の戦略を選好すると考えられる．

表 3 ヘッジの有効性

	東証株価指数			東証 REIT 指数		
	分散	効用(κ＝1)	効用(κ＝4)	分散	効用(κ＝1)	効用(κ＝4)
ヘッジなし	365.0774	-365.077	-1460.310	413.1829	-413.1829	-1652.7317
ナイーブ	22.4868	-22.487	-89.947	88.4965	-88.4965	-353.9861
定数	18.6789	-18.679	-74.716	87.6748	-87.6748	-350.6993
MRS	17.4340	-17.434	-69.736	87.8857	-87.8857	-351.5427

6. 結論

本稿では東証株価指数および東証 REIT 指数の現物および先物のデータを用いて，マルコフ・レジーム・スイッチング・モデルから得られるヘッジ比率のパフォーマンスの分析を行った．MRS モデルを用いた理由は現物と先物の関係はレジームシフトによって特徴付けられており，ヘッジ比率がマーケットの状態に依存するようにすることで他の手法よりも優れたヘッジ比率を推定することが可能であると考えられるからである．

東証株価指数においては約 5 年，東証 REIT 指数においては約 2 年半のデータを分析した結果，ヘッジ比率は異なる市場の状態では有意に異なっていることが明らかになった．ヘッジ比率はボラティリティーが低いマーケットでは高くなっており，逆にボラティリティーが高いマーケットでは低くなっている．

マルコフ・レジーム・スイッチングモデルのヘッジ比率を OLS を用いたヘッジ比率と比較した結果，東証株価指数の市場においてはマルコフ・レジーム・スイッチングモデルは OLS のヘッジ戦略よりも優れていたが，しかし東証 REIT 指数においては OLS のヘッジ戦略のほうが優れていた．東証 REIT 指数先物は取引開始からまだ約 2 年半と歴史が浅いため十分なデータがなく，また REIT という資産そのものの分析もいまだ十分に行われていないためこのような結果となった理由を考察するのは困難であり，REIT 市場の分析は今後の課題である．

参考文献

程島次郎，芦谷政浩(2003).「東証株価指数の時変ヘッジ比率の推定」. オイコノミカ 第39巻 第3・4号，1-17.

原田真一(2008).「為替ヘッジ比率についての考察」. 三菱 UFJ 銀行調査情報 2008年3月号，4-15.

Alizadeh, A., & Nomikos, N. (2004). A Markov regime switching approach for hedging stock indices. The Journal of Future Markets, Vol24, No. 7, 649-674.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 31, 307-327.

Ederington, L. H. (1979). The hedging performance of the new futures markets. The Journal of Finance, 34, 157-170.

Kroner, K., & Sultan, J. (1993). Time-varying distributions and dynamic hedging with foreign currency futures. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 28, 535-551.