

この講義について

作成日：April 14, 2011 Version：1.1

担当教官：川平 友規（かわひら ともき）

担当 TA：若狭 尊裕（わかさ たかひろ，博士課程 1 年，理 1-252 号室）

講義ウェブサイト：

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/11S-kansuron.html>

配布されたプリントが pdf 形式でダウンロードできます．また，毎週の進捗状況についてコメントしていきます．

本授業の目的およびねらい（全学シラバスより）：複素数を変数とする複素関数は，自然科学のさまざまな場面に現れ，基本的役割を果たしているとともに幅広い応用を持っている．特に，複素関数の微積分は，実関数の微積分とは全く異なった美しい統一的な世界を形作っており，一方で，自然科学への応用上重要なベクトル解析とも深い関係にある．本科目では，ベクトル解析の基礎を学びながら，複素関数の微積分の基礎，特に正則関数の基本的性質について理解することを目的とする．

授業内容（全学シラバスより，一部訂正あり．）：

- (1) 複素数平面．複素数の幾何学的表示を理解し，その基本的な演算に習熟する．
（キーワード）複素数平面，絶対値，偏角と主値，オイラーの公式，1 の n 乗根
- (2) 複素関数の微分．複素関数としての微分について学び，正則関数，コーシー・リーマンの定理を理解する．また，指数関数などの基本的な正則関数の例に習熟する．
（キーワード）正則関数，コーシー・リーマンの定理，初等関数
- (3) 平面上のベクトル解析．平面上の関数に対する線積分を学び，グリーンの定理，ガウスの発散定理などの積分公式を理解する．
（キーワード）線積分，勾配・発散・回転，グリーンの定理，ガウスの発散定理
- (4) 複素関数の積分とコーシーの定理．複素関数の積分について学び，グリーンの定理を通してコーシーの定理を理解する．
（キーワード）複素積分，コーシーの定理

参考書：教科書は指定しないが，複素関数論の本はたくさんあるので，各自の好みでどれかひとつを参考書として持っておくことが望ましい（薄くてコンパクトなものが良い．）
以下はその一例である．

- 樋口禎一ほか『現代複素関数通論』培風館（バランスがよく，微積も復習できる）
- 今吉洋一『複素関数概説』サイエンス社（昨年度のテキスト）
- 神保道夫『複素関数入門』岩波書店（昨年度の参考書）
- 高橋礼司『複素解析』東京大学出版会（饒舌だが読み物として）
- L.V. アールフォルス『複素解析』現代数学社（古典．読み物として）

演習問題について：ときどき演習問題プリントを配布します．

成績評価の方法：原則として中間試験と期末試験の平均で評価し，演習・レポートを加味する．詳細は以下の通り：

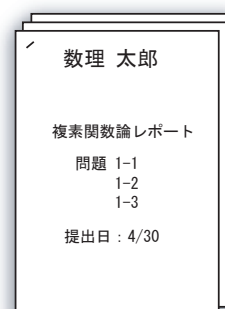
- 中間試験および期末試験をそれぞれ 50 点満点で評価し、合計点 100 点満点中 60 点以上を合格とする。
- 成績は 59 点以下を不可, 60 - 69 点を可, 70 - 79 点を良, 80 点以上を優とする。
- 演習問題を解いてレポートとして提出することにより、成績に加点する。とくに出席状況や中間試験の成績が芳しくない受講者には、レポートの提出を義務付ける場合がある。

出席：授業の前半に出席を取ります。

小テスト：皆さんの理解度を確認するため、ときどき小テストを実施します。出題内容は、演習問題をベースにした基本的な問題です。

レポートの様式：必ず A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙を使用し、右図のような表紙をつけてください。また、必ず左上をホチキス等でとめてください。

毎回の授業開始前に教壇前の机に提出しておいてください。学期中ならばいつ、どの問題を提出してもかまいません。受講者同士で協力し合い、グループで解答してもかまいません。



- ・名前は上の方に大きく書く。
- ・左上をホチキスで留める。
- ・解いた問題の番号、提出日を書く。
- ・裏面はなるべく使わない。

オフィスアワー：授業中・授業前後の質問は大歓迎です。それ以外の時間に質問したい場合は、ぜひオフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を活用してください。私のオフィスアワーは、Cafe David（カフェ・ダヴィド）という合同のオフィスアワー内に設定しています。Cafe David は月曜から金曜の 12:00-13:30 にオープンし、コーヒー・紅茶を無料で提供しています。私の担当は金曜日です。その他のスタッフ（名札をつけています）も待機しているので、自由に質問していただいてもかまいません。数理学科の学部生・院生もたくさんいるので、勉強のこと、進路のことなど、情報収集の場としても活用してください。

よく使う記号など：数の集合

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| (1) $\mathbb{C}$: 複素数全体 | (2) $\mathbb{R}$: 実数全体 | (3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体 |
| (4) $\mathbb{Z}$: 整数全体 | (5) $\mathbb{N}$: 自然数全体 | (6) $x \in \mathbb{R}$: x は実数 |

ギリシャ文字

- | | | | | |
|-------------------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| (1) α : アルファ | (2) β : ベータ | (3) γ, Γ : ガンマ | (4) δ, Δ : デルタ | (5) ϵ : イプシロン |
| (6) ζ : ゼータ | (7) η : エータ | (8) θ, Θ : シータ | (9) ι : イオタ | (10) κ : カッパ |
| (11) λ, Λ : ラムダ | (12) μ : ミュー | (13) ν : ニュー | (14) ξ, Ξ : クシー | (15) $\omicron$: オミクロン |
| (16) π, Π : パイ | (17) ρ : ロー | (18) σ, Σ : シグマ | (19) τ : タウ | (20) υ, Υ : ウプシロン |
| (21) ϕ, Φ : ファイ | (22) χ : カイ | (23) ψ, Ψ : プサイ | (24) ω, Ω : オメガ | |

複素数と複素平面

作成日: April 21, 2011 Version: 1.1

複素数の「正当化」

方程式 $x^2 = 2$ の解は $\pm\sqrt{2}$ と表されるが、そもそも $\sqrt{2}$ というのは「2 乗したら 2 になる数」を表す記号であって、有理数の世界から見ればその存在すら未知である（もちろん値も不明である。）にもかかわらず、文字式の要領で

$$(1 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 3 - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \underbrace{(\sqrt{2})^2}_{\text{これは 2 で置き換え}} = 1 + 2\sqrt{2}$$

といった計算は可能である。この計算は有理数に無理数を加えた「実数」という概念を導入することで正当化できるのであった。¹

同様に、方程式 $x^2 = -1$ の解（のひとつ）として、記号 $\sqrt{-1}$ を導入してみよう。すなわち、 $\sqrt{-1}$ は「2 乗したら -1 になる数」であり、実数ではない。すると、文字式の要領で

$$(1 + \sqrt{-1})(3 - \sqrt{-1}) = 3 - \sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} - \underbrace{(\sqrt{-1})^2}_{\text{これは -1 で置き換え}} = 4 + 2\sqrt{-1}$$

といった計算ができる。この計算を正当化するために、数の体系を拡張しよう。

一旦この未知なる数 $\sqrt{-1}$ の存在は仮定して話を進める。また慣例にしたがって、 $\sqrt{-1}$ は文字 i で表すことにする。一般に a と b を実数とするとき、 $a + bi$ の形の数（文字式）を複素数 (complex number) と呼ぶ。また、複素数全体の集合を記号 $\mathbb{C}$ で表す。すなわち、

$$\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

$b = 0$ の場合、複素数 $a + 0i$ を単に a と表し、これを実数 a だと思ふことにすれば、集合 $\mathbb{C}$ は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を含む集合だと考えられる。

さて先ほどの計算を正当化するために、次のようにして $\mathbb{C}$ の計算規則（四則）を定義する：²

複素数の四則. $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$(C0) \quad a + bi = 0 \iff a = b = 0 \quad (\iff a^2 + b^2 = 0)$$

$$(C1) \quad z \pm w := (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$(C2) \quad zw := (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(C3) \quad w \neq 0 \text{ のとき, } \frac{z}{w} := \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i$$

注意. (C0) と (C1) より、 $a + bi = c + di \iff (a - c) + (b - d)i = 0 \iff a = c$ かつ $b = d$ を得る。すなわち、与えられた複素数 z にたいして、 $z = a + bi$ という表現は一通りに定まる。

実部、虚部、共役複素数. 複素数 $z = a + bi$ にたいし、実数 a を z の実部 (real part) 実数 b を z の虚部 (imaginary part) とよび、

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z$$

¹裏を返すと、厳密な定義が与えられる以前 (19 世紀まで) の無理数とは「存在すると仮定すると万事説明がつくもの」であった。ある意味、物理学における「エーテル」、化学における「熱素」、果ては「幽霊」や「UFO」とかわらない。

²新しく覚えるべきことは (C0) ぐらいで、あとは高校で学んだように文字式のような計算すればよい。

と表す. また, 実部が a , 虚部が $-b$ となる複素数を z の共役複素数 (complex conjugate of z) とよび, $\bar{z} = a - bi$ と表す. 以下の公式は簡単にわかる:

公式 1-1. $z = a + bi$, w を複素数とすると, 以下が成り立つ:

$$\begin{array}{llll} (1) \overline{\bar{z}} = z & (2) \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} & (3) \overline{zw} = \bar{z}\bar{w} & (4) \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \\ (5) \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} & (6) \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} & (7) z\bar{z} = a^2 + b^2 \ (\geq 0) & \end{array}$$

複素平面と極形式

いわゆる xy 平面を $\mathbb{R}^2$ で表そう. すなわち,

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

これは集合 $\mathbb{C}$ の定義

$$\mathbb{C} := \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

とよく似ている. いや, 同じと考えてしまおう:

複素数 $x + yi$ はベクトル (x, y) の, 集合 $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ の別名として改めて定義しなおす.

この時点で, 未知の数 $i \in \mathbb{C}$ は $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ の別名だということになり, その存在が正当化される. 四則に関して言えば, (C1) は $\mathbb{R}^2$ 内でのベクトルの和と差の定義

$$(a, b) \pm (c, d) := (a \pm c, b \pm d)$$

を, 名前 (記号) を変えて言い換えただけである. また (C2) は, ベクトルに「新しい積」

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

を導入した, ということになる. 以上で, 集合 $\mathbb{C}$ とその計算規則がきちんと定義された.³

複素平面. さて集合 $\mathbb{R}^2$ が xy 平面と呼ばれるように, 集合 $\mathbb{C}$ は複素平面 (complex plane) と呼ばれる. xy 平面の種々の要素につけられた名前を消して (忘れて), 改めて命名し直したのが複素平面だ, と考えればよい. すなわち, x 軸は実軸 (real axis) と改名され, y 軸は虚軸 (imaginary axis) と改名される. 原点 $O = (0, 0)$ は複素数 $z = 0$ となるが, これも便宜上原点 (origin) と呼ぶことが多い.

絶対値と偏角. さて複素数 $z = x + yi$ と 0 の複素平面上での距離 (すなわち xy 平面上の距離) を z の絶対値 (absolute value) もしくは長さ (modulus) とよび, $|z|$ で表す. 公式 1-1 より,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

また, $z \neq 0$ と 0 を結ぶ線分と実軸の正の方向のなす角を z の偏角 (argument) とよび, 仰々しいが $\arg z$ と表す.⁴ 偏角は普通ラジアン (radian) で測り, 必要に応じて 2π の整数倍を加減する. たとえば, $\arg i = \pi/2$ とするのが普通だが, $\arg i = 5\pi/2$ や $\arg i = -3\pi/2$ も認める. もちろん

³ちなみに, 実数 $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ は $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$ の別名だ, ということになる.

⁴ $\arg 0$ は考えない.

$0 \leq \arg z < 2\pi$ となるように値を固定することもできるが, そのような自由度を残しておくほうがあとで都合がよいのである.

極表示. 複素数 $z = x + yi \neq 0$ において, $r = |z| > 0$, $\arg z = \theta$ とすれば, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ が成り立つ. 複素数 z を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表したものを, z の極表示 (polar representation) と呼ぶ (11/04/14(木) はここまで.)⁵ たとえば,

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 + i \sin 0 & i &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \\ -1 &= \cos \pi + i \sin \pi & -i &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \\ 1+i &= \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) & -\sqrt{3}+i &= 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) \end{aligned}$$

あとで見るように, この極表示はものすごく便利である.

和・積の幾何学的意味

さて $\mathbb{C}$ における四則を平面上に図示してみよう. 和と差は本質的にベクトルのそれであるから, 平行四辺形の頂点として作図できる.

積の作図が一番面白い. 試みに, $z = x + yi$ にたいして, $iz = i(x + yi) = -y + xi$ を図示してみよう. ちょうど, 原点中心の $\pi/2$ 回転になっていることがわかる. 同様に $i(iz) = -z = -x - yi$, $i(-z) = y - xi$ を作図すると, 結果として z, iz, i^2z, i^3z がひとつの正方形の頂点をなすことがわかる. とくに,

複素数に i を掛けると $\mathbb{C}$ 内で $\pi/2$ 回転, $-1 = i^2$ を掛けると $\mathbb{C}$ 内で π 回転.

というのは面白い. これはベクトルにはない不思議である. 一般化してみよう. 回転というキーワードに着目して, 複素数 z と w をそれぞれ極表示する:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad w = r'(\cos \theta' + i \sin \theta').$$

これらの積は三角関数の加法定理により

$$\begin{aligned} zw &= rr'(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= rr'\{(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')\} \\ &= rr'\{\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')\} \end{aligned}$$

を得る. 試しに $w = i$ とすれば, $r' = 1$, $\theta' = \pi/2$ より $iz = r\{\cos(\theta + \pi/2) + i \sin(\theta + \pi/2)\}$ となり, 「 $\pi/2$ 回転」という性質を完璧に記述している. すばらしい. 一般に, 次が成り立つ:

公式 1-2. 複素数 $z, w \neq 0$ にたいし, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} (1) \quad |zw| &= |z||w| \quad \text{かつ} \quad \arg zw = \arg z + \arg w \\ (2) \quad \left| \frac{z}{w} \right| &= \frac{|z|}{|w|} \quad \text{かつ} \quad \arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w \end{aligned}$$

⁵ $r = 1$ のときは単に $z = \cos \theta + i \sin \theta$ と書いたり, $z = e^{i\theta}$ と表す. $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ というのはいわゆる「オイラーの公式」だが, 詳しくはあとで正当化する.

標語的にいうと: 「複素数の積」 $\iff$ 「絶対値の積」と「偏角の和」

「複素数の商」 $\iff$ 「絶対値の商」と「偏角の差」

この性質は, べき乗の計算でもっとも威力を発揮する. たとえば, 数学的帰納法を用いれば, 次の公式が証明される:

公式 1-3 (de Moivre の公式). $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とするとき, 任意の整数 n にたいし $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ が成り立つ.

例. $A = (1 + \sqrt{3}i)^{10}$ を計算してみよう (まじめに計算すると悲劇である.) $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ であるから, de Moivre の公式より

$$A = 2^{10}(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3}) = 1024(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = -512 - 512\sqrt{3}i.$$

演習問題 (「練習 x-x」は試験範囲に含まれます!)

練習 1-1. $z = 2 - i$, $w = -3 + 2i$ のとき, 以下を計算し複素平面上に図示せよ.

(1) $z + w$ (2) $z - w$ (3) zw (4) z/w

練習 1-2. 次の複素数の絶対値を求めよ:

(1) $(1 + i)^5$ (2) $-2i(2 + i)(2 + 4i)(1 + i)$ (3) $\frac{(3 + 4i)(1 - i)}{2 - i}$

練習 1-3. 公式 1-1 をすべて証明せよ.

練習 1-4. a, b, c, d をすべて実数とする. もし方程式 $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ が $z = \alpha$ を解に持てば, その共役複素数 $\bar{\alpha}$ も解となることを示せ.

練習 1-5. $z = 1 + \sqrt{3}i$ とするとき, z, z^2, z^3, z^4 をそれぞれ極座標表示せよ.

練習 1-6. $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0$ とするとき, 以下を示せ:

(1) $\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}$ (2) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}$

さらに (2) を用いて, 公式 1-2(2) を示せ.

レポート問題 1-1. 複素数 z, w にたいし, 次を証明せよ:

$$zw = 0 \iff z = 0 \text{ もしくは } w = 0$$

レポート問題 1-2. 数学的帰納法を用いて, de Moivre の公式 (公式 1-3) を証明せよ. ただし, 公式 1-2 は直接用いてはならない (Hint: $n \geq 0$ のときと, $n < 0$ のときで場合分けせよ.)

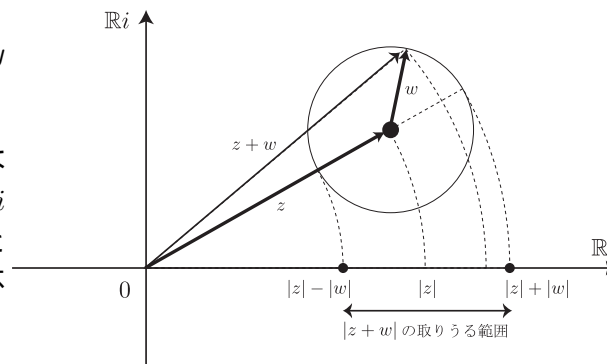
レポート問題 1-3. 複素数 z が $|z| > 1$ を満たすとき, その逆数 $1/z$ は以下の方法で作図できる: z から単位円へ 2 本接線を引く. それらの接点を結んだ線分と z と原点を結ぶ線分が交わる点を w とすると, $\bar{w} = 1/z$ となる. これを証明せよ. また, $0 < |z| < 1$ の場合, $|z| = 1$ の場合はどうか?

複素数列・級数の収束

作成日: April 28, 2011 Version: 1.1

前回 (4/21) のまとめと補足

- $\forall$ と $\exists$. 「すべての x にたいし」を $\forall x$, 「ある y が存在して」を $\exists y$ と略記する.
- 円の式. α 中心半径 ϵ の円をあらわす方程式は $|z - \alpha| = r$ である. 実際 $z = x + yi$, $\alpha = a + bi$ とおくと, $|z - \alpha| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$ となる. 同様に, α 中心半径 r の (開) 円板 は不等式 $|z - \alpha| < r$ で表される.



- 三角不等式 (triangle inequality). 任意の複素数 $z, w \in \mathbb{C}$ について,

$$|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

が成り立つ (もちろん, z と w が実数でも成り立つ.)

定義 (複素数列の収束). ある数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ が複素数 α に収束する (converges to α) とは, 次が成り立つときをいう:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \quad |z_n - \alpha| < \epsilon.$$

すなわち『任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある自然数 N が存在して, $n > N$ ならば $|z_n - \alpha| < \epsilon$ が成り立つ』. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ もしくは $z_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) と表す. また, α を数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限 (limit) と呼ぶ.

注意 1. 「任意の $\epsilon > 0$ 」という言葉は「任意に小さい $\epsilon > 0$ 」と心の中で読みかえるべし.

注意 2. 「 $|z_n - \alpha| < \epsilon$ とは α 中心半径 ϵ の円板内に z_n がある」という意味.

命題 2-1 (収束条件の「実数化」). 数列 $\{z_n = x_n + y_n i\}_{n \geq 0}$ と定数 $\alpha = a + bi$ にたいし, 次は互いに同値 (必要十分条件):

- | | |
|---|------------|
| (1) $z_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) | (複素数の収束) |
| (2) $x_n \rightarrow a$ かつ $y_n \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$) | (実部と虚部の収束) |

証明. (1) を仮定する. すなわち

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \quad |z_n - \alpha| < \epsilon.$$

$|x_n - a| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leq |z_n - \alpha|$ であるから, このとき同時に $|x_n - a| < \epsilon$ も成り立つ. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ を得る. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ も同様に成り立つので, (2) が示された.

逆に, (2) を仮定すると,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \quad |x_n - a| < \epsilon/2 \quad \text{かつ} \quad |y_n - b| < \epsilon/2.$$

このとき三角不等式より $|z_n - \alpha| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \epsilon$ も同時に成り立つので, (1) を得る. ■

公式 2-2 (極限の四則). 二つの数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \beta$ と仮定する. このとき,

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = \alpha + \beta$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = \alpha \beta$
 (3) $\beta \neq 0$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (4) C が定数のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} (C z_n) = C \alpha$

証明. これらの公式が実数の世界で正しいことは既知としよう. 複素数の場合も, 実部と虚部に分けて考えれば, 命題 2-1 より実数列の場合に帰着される. ■

定義 (級数とその収束・発散). 数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ にたいし, $w_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$ で定まる数列 $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ を

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \quad \text{もしくは} \quad \sum_{n \geq 0} z_n \quad \text{もしくは} \quad z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$$

と表し, これを数列 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ の定める級数 (series) と呼ぶ. 極限が存在するとき, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は収束するといい, 存在しないとき発散する (diverge) という.

注意. $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は形式的な記号であって, 一般に有限和の極限が存在するとは限らない.

例 (オイラーの公式). もし $z_n = \frac{(i\theta)^n}{n!}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とした場合, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は収束するだろうか? 各項を計算してみると,

$$\{z_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ 1, +\theta i, -\frac{\theta^2}{2!}, -\frac{\theta^3}{3!}i, +\frac{\theta^4}{4!}, -\frac{\theta^5}{5!}i, \dots \right\}$$

となる. これより有限和 $z_0 + z_1 + \cdots + z_{2m+1}$ の実部と虚部およびその $m \rightarrow \infty$ における極限は

$$1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{\theta^{2m}}{(2m)!} \rightarrow \cos \theta$$

$$\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!} \rightarrow \sin \theta$$

となる.¹したがって命題 2-1 より, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$ は極限 $\cos \theta + i \sin \theta$ をもつ. 実数の指数関数のアナロジーとして $e^z := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ と記号を定めれば, 次の公式を得る:

$$\text{オイラーの公式 (Euler's formula):} \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

¹ (実関数としての) 三角関数のテイラー展開は既知とする.

演習問題 (「練習 x-x」は試験範囲に含まれます!)

練習 2-1 (三角不等式). $z = x + yi$, $w = u + vi$ として三角不等式 $|z + w| \leq |z| + |w|$ を証明せよ. また, 等号が成り立つのはいつか? また, $||z| - |w|| \leq |z + w|$ も証明せよ. (Hint. Apply the triangle inequality for $z = -z'$ and $w = z' + w'$.)

練習 2-2 (ϵ - N 論法の練習). 公式 2-2 の (1) と (2) を ϵ - N 論法により証明せよ. ただし実数の場合に帰着させるのではなく, 三角不等式だけを用いること,

練習 2-3 (正三角形). 複素数 $0, \alpha, \beta$ が $\mathbb{C}$ 上である正三角形の 3 頂点となるための必要十分条件は, $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$ であることを証明せよ. (Hint. Make use of the conditions $|\alpha| = |\beta|$ and $\arg \alpha - \arg \beta = \pm\pi/3$: then you'll find the polar representation of α/β .)

練習 2-4 (アポロニウスの円). 複素平面上で $|z + 1| : |z - 2| = 3 : 1$ となる z の軌跡は円となることを証明せよ. (Hint. $|z - a|^2 = (z - a)(\overline{z - a}) = (z - a)(\bar{z} - \bar{a})$ を用いて展開する.)

レポート問題 2-1 (収束条件の「極表示化」). 極表示された複素数列 $\{z_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を考える (ただし, $0 \leq \theta_n < 2\pi$ とし, $z_n = 0$ のときは $r_n = 0$, $\theta_n = 0$ とせよ.) このとき, 数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列である. 以下の問いに答えよ:

(1) 任意の θ, θ' に対し,

$$|(\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta' + i \sin \theta')| \leq |\theta - \theta'|$$

であることを幾何学的に説明せよ. (Hint. 東京からサンフランシスコ, 船で行くのと, トンネルを掘って地中をまっすぐ進むのとどっちが近いかな?)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ となることを ϵ - N 論法により示せ. (Hint. $z_n - r(\cos \theta + i \sin \theta) = z_n - r(\cos \theta_n + i \sin \theta_n) + r(\cos \theta_n + i \sin \theta_n) - r(\cos \theta + i \sin \theta)$.)

(3) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数に収束すれば, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数に必ず収束するが, $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するとは限らない. なぜか? そのような例をひとつ挙げよ.

レポート問題 2-2. $z_n = \frac{i^n}{n}$ ($n \geq 1$) で定まる級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は収束することを証明せよ (Hint. 実部と虚部で分ける.)

練習問題 (4/21 配布分) の略解

練習 1-1. (1) $-1 + i$ (2) $5 - 3i$ (3) $-4 + 7i$ (4) $\frac{-8 - i}{13}$

練習 1-2. (1) $|(1 + i)^5| = |1 + i|^5 = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$.

(2) $|-2i(2 + i)(2 + 4i)(1 + i)| = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 20\sqrt{2}$.

(3) $\left| \frac{(3 + 4i)(1 - i)}{2 - i} \right| = \frac{|3 + 4i||1 - i|}{|2 - i|} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{10}$.

練習 1-3. $z = a + bi$, $w = c + di$ と置くと,

(1) $\overline{\overline{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$.

(2) 略.

$$(3) \quad \overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

(4) 略.

$$(5) \quad (\text{右边}) = \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = a = \operatorname{Re} z.$$

(6)(7) 略.

練習 1-4. $z = \alpha$ を解に持つので, $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$. 両辺の共役を取ると, a, b, c, d が実数なので,

$$\overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = \bar{0} \iff a\bar{\alpha}^3 + b\bar{\alpha}^2 + c\bar{\alpha} + d = 0.$$

よって $\bar{\alpha}$ も方程式の解となる.

練習 1-5.

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad z^2 = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$z^3 = 8 (\cos \pi + i \sin \pi), \quad z^4 = 16 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

練習 1-6.

$$(1) \quad \cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta \text{ より } \bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}.$$

$$(2) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \text{ の分子と分母に } \cos \theta - i \sin \theta \text{ を掛ければ,}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}.$$

指数関数とオイラーの公式

作成日: May 12, 2011 Version: 1.1

前回 (4/28) のまとめと補足

定理 3-1 (+ 指数関数の定義). 任意の $z \in \mathbb{C}$ にたいし, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は収束する. その値を e^z もしくは $\exp(z)$ と書き, 指数関数 (exponential function) とよぶ. とくに $z = i\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とするとき, 次のオイラーの公式がなりたつ:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

定義 (コーシー列). 数列 $\{z_n\}_{n \geq 0}$ がコーシー列 (Cauchy sequence) であるとは, 次が成り立つときをいう:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq N) \quad |z_n - z_m| < \epsilon.$$

命題 3-2 (コーシー列 = 収束列). 数列 $\{z_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ がコーシー列であることと, 収束列であることは同値である.

注意 1. 数列が収束列の定義を満たすかどうかは極限を知らないと確認できない. 一方, コーシー列は極限を知らなくても確認できるのが嬉しい.

注意 2. 実数列の場合, 命題 3-2 は「実数の完備性」といわれる. 実数を「コーシー列の同値類」と定義する流儀においては, これは実数の定義とほとんど同義である.

証明のスケッチ (命題 3-2). 実数列の場合は上の注意に述べたとおりの事情で, コーシー列と収束列は一致する. 複素数列の場合も実部と虚部に分割すれば, 実数列の場合に帰着される (その際, 三角不等式が必要). ■

定義 (絶対収束). 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が絶対収束 (absolute convergence) するとは, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ が収束することをいう.

注 3. 数列 $\{|z_0| + \cdots + |z_n|\}_{n \geq 0}$ は単調増加列であるから, 絶対収束性はこの数列の有界性と同値である.

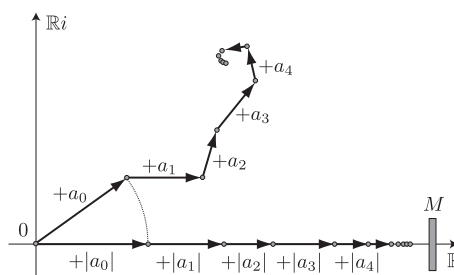
定理 3-3 (絶対収束 収束). 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が絶対収束すれば, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は収束する.

注 4. 数列 $\{|z_0| + \cdots + |z_n|\}_{n \geq 0}$ は「折れ線のトータルの長さ」を表す. したがって, これが有限であれば, もとの折れ線も発散のしようがない.

証明のスケッチ (定理 3-3). $s_n = z_1 + \cdots + z_n$, $S_n = |z_1| + \cdots + |z_n|$ とすると, $n \geq m$ のとき

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= |z_{m+1} + \cdots + z_n| \\ &\leq |z_{m+1}| + \cdots + |z_n| = S_n - S_m. \end{aligned}$$

(↑ 三角不等式)



$\{S_n\}_{n \geq 0}$ は増加列なので右端の辺は $|S_n - S_m|$ と等しい. また, 絶対収束性より S_n は収束列, すなわちコーシー列である (命題 3-2). 上の不等式から, s_n もコーシー列, すなわち収束列である (再び命題 3-2). ■

命題 3-4 (実初等関数の級数展開). 任意の実数 x にたいし, 指数関数と三角関数は次の級数展開をもつ (すなわち, 右辺の級数は収束して左辺に一致.)

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots & \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \end{aligned}$$

注 5. ここでも, 実微分積分の結果は既知とする, というスタンス. もちろん, 定理 3-3 から直接証明することもできる (→ レポート問題)

証明 (定理 3-1). 命題 3-4 で $x = |z|$ を代入すれば, $e^{|z|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right|$. よって $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

は絶対収束する. 定理 3-3 より, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は収束する. オイラーの公式は, 先週と同様に実部と虚部に分割することで正当化される. ■

定理 3-5 (指数法則). 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ にたいし,

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

とくに $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) のとき,

$$e^{x+yi} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

注 6. $e^x \neq 0$, $e^{iy} \neq 0$ であるから, $e^z \neq 0$. すなわち, 指数関数が 0 になることはない.

証明 (定理 3-5). 一般に任意の $N \in \mathbb{N}$ にたいし

$$\left(\sum_{n \leq N} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \leq N} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{n \leq N} \frac{(z+w)^n}{n!} + E_N(z, w)$$

ただし $|E_N(z, w)| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$

が成り立つ (レポート問題). よって両辺で $N \rightarrow \infty$ とした極限をとれば, 主張を得る. ■

応用 1 (べき乗と逆数). $(e^z)^n = e^z \cdots e^z = e^{z+\cdots+z} = e^{nz}$. また, $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$ より, $e^{-z} = 1/e^z$. したがって, 一般に次がなりたつ:

公式 3-6: 任意の整数 $m \in \mathbb{Z}$ にたいし, $(e^z)^m = e^{mz}$.

応用 2 (極形式とド・モアブル). $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とすると, オイラーの公式より $z = r e^{i\theta}$. これも極形式と呼ぶ.¹ さらに, m 乗 ($m \in \mathbb{Z}$) して

$$z^m = (r e^{i\theta})^m = r^m e^{im\theta} = r^m (\cos m\theta + i \sin m\theta). \quad (\text{ド・モアブルの公式})$$

¹さらに $z = e^{\log r + i\theta}$ と変形できる. これは, 複素数の対数関数を定義する上で重要なアイディアとなる.

演習問題 (「練習 x-x」は試験範囲に含まれます!)

練習 3-1 (収束列はコーシー列). 数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数 α に収束するとき, コーシー列であることを ϵ - N 論法により示せ. (Hint. $|z_m - z_n| \leq |z_m - \alpha| + |z_n - \alpha|$.)

練習 3-2 (絶対収束の応用). $p > 1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ が収束するという事実を用いて, 以下の級数が収束することを示せ. (Hint: it is enough to show that the given series converge absolutely.)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \quad (\text{Hint: } \frac{1}{(2n+1)^3} < \frac{1}{(2n)^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^3}) \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}.$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1) + (2n+1)i}{n^4}$$

練習 3-3. 次の値を求めよ.

$$(1) e^{2+\frac{\pi}{4}i} \quad (2) e^{-3+\pi i} \quad (3) e^{\log 3 - \frac{3\pi}{2}i}$$

練習 3-4 (指数関数の性質). 指数法則 (定理 3-5) を用いて, 以下の公式を示せ:

$$(1) \text{ 任意の複素数 } z \text{ と } w \text{ にたいし, } e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}.$$

$$(2) \text{ 任意の複素数 } z \text{ にたいし, } \overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}.$$

レポート問題 3-1. 任意の $N \in \mathbb{N}$ にたいし

$$\left(\sum_{n \leq N} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \leq N} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{n \leq N} \frac{(z+w)^n}{n!} + E_N(z, w)$$

ただし $|E_N(z, w)| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$

が成り立つことを示せ. (Hint: 二項定理を使う. $E_N(z, w)$ は $N+1$ 次以上の項に対応する.)

レポート問題 3-2 (定理 3-1 の別証明). 任意の複素数 z を固定したとき, 命題 3-4 を用いずに, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ が絶対収束すること (したがって収束すること) を示すことができる. 明らかに, $z \neq 0$ のときを証明すれば十分である. $n = 0, 1, 2, \dots$ にたいし, $e_n := \frac{z^n}{n!}$ と定めよう.

$$(1) n \geq 2|z| \text{ ならば } |e_{n+1}| < \frac{|e_n|}{2} \text{ とできることを示せ.}$$

$$(2) N \geq 2|z| \text{ となる自然数を固定するとき, } \sum_{n \geq N} |e_n| \text{ は有界であることを示せ.}$$

よって $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{0 \leq n < N} |e_n| + \sum_{n \geq N} |e_n|$ は有界であるから, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は絶対収束する.

練習問題 (4/28 配布) の略解

練習 2-1: 解答例 1. 同値変形を用いる.

$$\begin{aligned}
|z+w| \leq |z|+|w| &\iff |z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 && \leftarrow \text{両辺を 2 乗} \\
&\iff (x+u)^2 + (y+v)^2 \leq x^2 + y^2 + 2|z||w| + u^2 + v^2 && \leftarrow \text{実部・虚部を代入} \\
&\iff 2xu + 2yv \leq 2|z||w| \\
&\iff (xu + yv)^2 \leq (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) && \leftarrow 2 \text{ で割って 2 乗} \\
&\iff 0 \leq (xu - yv)^2 && \leftarrow \text{式を整理.}
\end{aligned}$$

最後の式は明らか. 等号成立は $xu = yv$ のとき. これはある実数 k が存在して, $z = kw$ もしくは $w = kz$ となることと同値である.

次に $z = -z'$, $w = z' + w'$ を上の三角不等式に代入すると, $|-z' + (z' + w')| \leq |z'| + |z' + w'|$. すなわち $|w'| - |z'| \leq |w' + z'|$. z', w' は任意なので, 一般に $|z| - |w| \leq |z + w|$. ■

解答例 2. 一般に $\operatorname{Re} z \leq |z|$ (等号成立は z が負でない実数のとき) であるから,

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = z\bar{z} + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + w\bar{w} \\
&\leq z\bar{z} + 2|z||w| + w\bar{w} \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

等号成立は $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$ のとき, すなわち $z\bar{w}$ が負でない実数のとき (解答例 1 の等号成立条件と同値であることを確かめてみるとよい.) ■

練習 2-2.

(1) 仮定より $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) |z_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$ かつ $|w_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2}$. このとき, 三角不等式より $|(z_n + w_n) - (\alpha + \beta)| \leq |z_n - \alpha| + |w_n - \beta|$ より $|(z_n + w_n) - (\alpha + \beta)| < \epsilon$. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = \alpha + \beta$. ■

(2) 仮定より $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) |z_n - \alpha| < \epsilon$ かつ $|w_n - \beta| < \epsilon$. いま $\epsilon \leq 1$ と仮定しても一般性を失わないから, $|w_n| < |\beta| + \epsilon \leq |\beta| + 1$ が成り立つ.² このとき, 三角不等式より $|z_n w_n - \alpha \beta| = |(z_n - \alpha)w_n + \alpha(w_n - \beta)| \leq |(z_n - \alpha)||w_n| + |\alpha||w_n - \beta| < \epsilon|w_n| + |\alpha|\epsilon = \epsilon(|w_n| + |\alpha|)$. よって $|z_n w_n - \alpha \beta| < \epsilon(|\alpha| + |\beta| + 1)$. いま α, β は定数なので, 任意の小さい $\epsilon' > 0$ にたいして (必要なら N を取り直すことで) $\epsilon(|\alpha| + |\beta| + 1) < \epsilon'$ とできる. したがって $|z_n w_n - \alpha \beta| < \epsilon'$. ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = \alpha \beta$. ■

練習 2-3. $\alpha, \beta \neq 0$ を仮定した上で同値変形を用いる: $0 \neq |\alpha| = |\beta|$ かつ $\arg \alpha - \arg \beta = \pm \frac{\pi}{3} \iff \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = 1$ かつ $\arg \frac{\alpha}{\beta} = \pm \frac{\pi}{3} \iff \frac{\alpha}{\beta} = \cos(\pm \frac{\pi}{3}) + i \sin(\pm \frac{\pi}{3}) = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. 一方, $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0 \iff (\frac{\alpha}{\beta})^2 - (\frac{\alpha}{\beta}) + 1 = 0 \iff \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. ■

練習 2-4.

$|z+1| : |z-2| = 3 : 1$ より $3|z-2| = |z+1|$. 両辺を 2 乗して $9(z-2)\overline{(z-2)} = (z+1)\overline{(z+1)}$ すなわち $8z\bar{z} - 19z - 19\bar{z} + 35 = 0$. よって $(z - \frac{19}{8})(\bar{z} - \frac{19}{8}) = (\frac{9}{8})^2 \iff |z - \frac{19}{8}| = \frac{9}{8}$. したがって z の軌跡は中心 $\frac{19}{8}$, 半径 $\frac{9}{8}$ の円となる. ■

²いま w_n は β 中心半径 ϵ の円板内にある. w_n と原点との距離を考えると, $|w_n| < |\beta| + \epsilon$ はあきらか.

指数関数の周期性と三角関数

作成日: May 19, 2011 Version: 1.1

中間試験を 6 月 9 日に実施します。試験範囲は来週 (5/26) までの授業内容です。配布した練習問題も含まれます。

前回 (5/12) のまとめと補足

指数関数の性質 (まとめ)。

- 定義: $\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \exp z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$.
- 指数法則: $\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad e^{z+w} = e^z e^w$. とくに $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$ のとき,

$$e^{x+yi} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$
- 整数べき乗: $\forall z \in \mathbb{C}, \forall m \in \mathbb{Z}, \quad (e^z)^m = e^{mz}$.^a

^aあとで確認するように, 一般の $w \in \mathbb{C}$ については $(e^z)^w = e^{zw}$ が成立しない。

とくに指数法則において, $w = 2\pi i$ とすると, $e^{2\pi i} = 1$ より

- 周期性: $e^{z+2\pi i} = e^z$ (周期は $2\pi i$)

を得る。すなわち, 指数関数は周期関数 (periodic function) である。

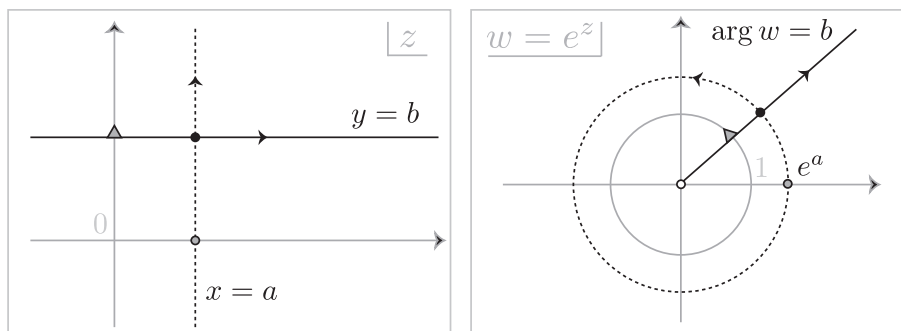
1 の N 乗根. $N \in \mathbb{N}$ とするとき, 方程式 $z^N = 1$ の解は

$$z = \exp\left(\frac{2m\pi i}{N}\right) \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

の N 個であり, これは 1 を頂点にもち単位円に内接する正 N 角形の頂点である。

証明. 話を具体的にするために, $N = 5$ の場合を考える. $z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とすると, $z^5 = r^5 e^{5i\theta}$. 一方, $1 = e^{2m\pi i}$ ($m \in \mathbb{Z}$) であるから, (←ここに指数関数の周期性が効いている) 絶対値と偏角を比較して $r^5 = 1$ かつ $5\theta = 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$). $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ という条件から, $r = 1$ かつ $\theta = \frac{2m\pi}{5}$ ($m = 0, 1, 2, 3, 4$). をえる. ■

指数関数による像. 指数関数を $w = f(z) = e^z$ とあらわし, これが z -平面をどのように w -平面に写すのか考察してみよう. 以下, $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とする.



タテ線. $x = a$ と固定したとき, $w = e^{a+yi} = e^a(\cos y + i \sin y)$ となる. この場合, 絶対値が $e^a > 0$ で固定され, 偏角 y が自由に变化するから, タテ線 $x = a$ の軌跡は原点中心半径 e^a の円. とくに, a の大小は円の大小を決定する.

ヨコ線. $y = b$ と固定したとき, $w = e^{x+bi} = e^x(\cos b + i \sin b)$ となる. この場合, 偏角 b が固定されて絶対値 e^x が正の値で变化するから, ヨコ線 $y = b$ の軌跡は偏角 b で原点から伸びる半直線. b の大小は半直線の向きを決定する. とくに, $y = b$ と $y = b + 2\pi$ の軌跡は一致する (周期性).

三角関数. $\theta \in \mathbb{R}$ のとき, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ および $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ が成立する. こらら 2 式の和と差を考えることで「公式」

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

を得る. 実数 θ を複素数 z に変えて, 複素数の三角関数を次のように定義する:

定義 (三角関数) 複素数 $z \in \mathbb{C}$ にたいし,

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

で定義される関数を三角関数 (trigonometric function) とよぶ.

例.

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} + e \right), \quad \sin i = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{e} + e \right) i.$$

ちなみに $\cos i > e/2 > 1$ であるから, 実数の三角関数のように $|\cos z| \leq 1$, $|\sin z| \leq 1$ は成り立たない (一般に, 有界ですらない. レポート問題参照.)

公式 3-1. すべての $z, w \in \mathbb{C}$ にたいし, 次がなりたつ:

- (1) 周期性: $\cos z = \cos(z + 2\pi)$, $\sin z = \sin(z + 2\pi)$
- (2) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
- (3) 加法定理: $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
 $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

注 (三角関数のゼロ点). ここで, 方程式 $\sin z = 0$ を解いてみよう. 定義式より $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff (e^{iz})^2 = 1 \iff e^{2iz} = 1 = e^{2m\pi i} \ (m \in \mathbb{Z})$. よって $2iz = 2m\pi i \iff z = m\pi \ (m \in \mathbb{Z})$ を得る. これは方程式を実変数で考えた場合の解と変わらない. $\cos z$ についても同様である.

演習問題 (「練習 x-x」は試験範囲に含まれます!)

練習 4-1 (冪根). 1 の N 乗根の求め方を参考にして, 次の方程式の解を極座標表示し, 図示せよ:

$$(1) z^4 = 16i \quad (2) z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

練習 4-2 (指数関数による像). 以下の複素平面上の集合にたいし, その指数関数 $w = f(z) = e^z$ による像もしくは逆像を図示せよ.

- (1) $f(S_1)$, $S_1 = \{x + yi \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2\}$
- (2) $f(S_2)$, $S_2 = \{x + yi \in \mathbb{C} : -\log 2 \leq x \leq \log 2, -5\pi \leq y \leq 5\pi\}$
- (3) $f^{-1}(T)$, $T = \{u + vi \in \mathbb{C} - \{0\} : 0 < u \leq 1, v = 0\}$,

練習 4-3 (三角関数). 三角関数の定義に基づき, 公式 3-1 をすべて証明せよ.

練習 4-4 (三角関数の値).

- (1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$ の値を求めよ.
- (2) 一般に $\sin(x + yi)$ (ただし $x, y \in \mathbb{R}$) の実部と虚部を x, y で表せ.

練習 4-5 (正接関数).

- (1) 方程式 $\cos z = 0$ の解は $z = \left(\frac{1}{2} + m\right)\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) であることを示せ.
- (2) $\cos z \neq 0$ となる z にたいし $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ と定義する. このとき, 次の式を証明せよ.
 - (a) $\tan(z + \pi) = \tan z$
 - (b) $i \tan i = \frac{1 - e^2}{1 + e^2}$

レポート問題 4-1 (三角関数の非有界性). 任意に大きな $M > 0$ にたいし, ある複素数 z が存在して, $|\sin z| \geq M$ かつ $|\cos z| \geq M$ とできることを示せ (したがって, 三角関数是有界ではない).

レポート問題 4-2 (三角関数の級数展開). 三角関数の定義式と指数関数の定義式をうまく使って, 任意の $z \in \mathbb{C}$ について

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

が成り立つ (すなわち, 右辺の級数は収束し, かつ左辺と一致する) ことを示せ. (Hint: $E_N(z) = \sum_{0 \leq n \leq 2N} \frac{z^n}{n!}$ とするとき, $E_N(zi) + E_N(-zi) \rightarrow e^{zi} + e^{-zi}$ ($N \rightarrow \infty$)).)

練習問題 (5/12 配布分) の略解

練習 3-1. $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するので, $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq N) \quad |z_m - \alpha| < \epsilon/2, |z_n - \alpha| < \epsilon/2$. よって $|z_m - z_n| \leq |z_m - \alpha| + |z_n - \alpha| < \epsilon$ となり, コーシー列となる. ■

練習 3-2. 絶対収束することを示せばよい.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty \text{ となり収束する.}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+n}}{n^2} = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty \text{ となり収束する.}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \text{ となり絶対収束するので, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} \text{ は収束する.}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(2n-1) + (2n+1)i}{n^4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^2+2}}{n^4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^2+2n^2}}{n^4} = \sqrt{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty \text{ となり絶対収束するので, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1) + (2n+1)i}{n^4} \text{ は収束する.}$$

練習 3-3.

$$(1) e^{2+\frac{\pi}{4}i} = e^2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = e^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right).$$

$$(2) e^{-3+\pi i} = e^{-3} (\cos \pi + i \sin \pi) = -1/e^3.$$

$$(3) e^{\log 3 - \frac{3\pi}{2}i} = 3 \left\{ \cos \left(-\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) \right\} = 3i.$$

練習 3-4.

(1) 指数法則の式 $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ ($\forall z, w \in \mathbb{C}$) において $z = z' - w', w = w'$ とおくと,
 $e^{(z'-w')+w'} = e^{z'-w'} \cdot e^{w'} \iff e^{z'} = e^{z'-w'} \cdot e^{w'}$. いま $e^{w'} \neq 0$ であるから, $e^{z'-w'} = e^{z'}/e^{w'}$. ■

(2) $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと,

$$\overline{e^z} = \overline{e^x (\cos y + i \sin y)} = e^x (\cos y - i \sin y) = e^x \{ \cos(-y) + i \sin(-y) \} = e^{x-yi} = e^{\bar{z}}. \quad \blacksquare$$

対数関数と複素冪

作成日: May 19, 2011 Version: 1.1

前回 (5/19) のまとめと補足

対数

正の数 a にたいし, 方程式 $e^x = a$ の実数解を $\log a$ と表し, これを a の対数と呼んだ.
同じことを複素数で考えよう. たとえば, 方程式 $e^z = 1 + i$ の複素数解を求めてみる.

$$e^z = 1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4} = e^{\log \sqrt{2} + (\pi/4 + 2m\pi)i} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

であるから, $z = (\log 2)/2 + (\pi/4 + 2m\pi)i$ ($m \in \mathbb{Z}$). このように, 指数関数の周期性が裏目に出て, 方程式は無限個の解をもってしまう. それでも, 習慣的に「複素数の対数」を次のように定義する:

定義 (複素対数). 複素数 $\alpha \neq 0$ にたいし, 方程式 $e^z = \alpha$ の解 (全体の集合) を α の対数 (logarithm) もしくは複素対数 (complex logarithm) とよび, $\log \alpha$ で表す.

例. 上の計算より,

$$\log(1 + i) = (\log 2)/2 + (\pi/4 + 2m\pi)i \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

一般に, $\log \alpha$ ($\alpha \neq 0$) は不特定多数の複素数を表す記号であり, 正確には「集合」と解釈されるべきものである.

ややこしい例. $\alpha = 1$ のとき, 方程式 $e^z = 1 = e^{2m\pi i}$ ($m \in \mathbb{Z}$) を解いて, $z = 2m\pi i$ ($m \in \mathbb{Z}$). すなわち $\log 1 = 2m\pi i$ ($m \in \mathbb{Z}$). 複素数の対数 $\log 1$ と実数の対数 $\log 1 = 0$ は記号の上では区別されないことに注意. 普通は文脈で判断できる.

一般化しておこう:

複素対数の公式. $z = re^{i\theta} \neq 0$ ($r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) とするとき, $r = e^{\log r}$ より

$$\begin{aligned} \log z &= \log r + (\theta + 2m\pi)i \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ &= \log |z| + (\arg z)i. \quad (\leftarrow \text{実部は一定, 虚部が変化}) \end{aligned}$$

ただし, 右辺の $\log$ は実数の対数であり, $\arg z$ は $+2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) 分の自由度を許す. $\log z$ は, 虚軸に平行な直線上に等間隔 $2\pi i$ で整然と並んでいるのである.

多価関数としての対数関数

「A さん」という人にたいし, 「A さんの友達」というと, これには不特定多数の人物が対応する. 同様に, 0 でない複素数 z にたいし, $\log z$ には無限個の複素数が対応してしまう. この (正確には集合としての) 対応 $\log: z \mapsto \log z$ を対数関数 (logarithmic function) とよぶ.¹

主値. 「一番の友達」を誰かひとりピックアップする, という場合もあるだろう. $\log z$ からは, $\log |z| + i\theta$ で $0 \leq \theta < 2\pi$ となるものを選ぶ. これを $\log z$ の主値 (principal value) とよび, $\text{Log } z$

¹ひとつの数にひとつの数を対応付けるのが普通の関数であるが, ひとつの数に複数の数を一斉に対応づける関数を一般に多価関数 (multivalued function) とよぶ. 対数関数は多価関数の典型的な例である. また, 反義語として, 普通の関数は一価関数 (single-valued function) とよばれる.

とあらわす. すなわち, $0 \leq \text{Im}(\text{Log } z) < 2\pi$ である. このとき, 関数 $z \mapsto \text{Log } z$ は普通関数である.²

積の対数は対数の和?

命題 5-1 (積の対数 vs. 対数の和). $\alpha, \beta \neq 0$ のとき,

$$\log \alpha \beta = \log \alpha + \log \beta.$$

ただし, これは次の集合に関する等式と解釈する:

$$\log \alpha \beta := \{w : e^w = \alpha \beta\}, \quad \log \alpha + \log \beta := \{w_1 + w_2 : e^{w_1} = \alpha, e^{w_2} = \beta\}$$

複素数の複素数乗

複素べき (冪). 複素数 $z \neq 0$ と複素数 α にたいし, 「 z の α 乗」 (z to the power of α) を

$$z^\alpha := e^{\alpha \log z}$$

と定義する. ただし, $\log z$ は多価 (不特定多数) であるから, $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$ も一般には多価となる.

例 1 (無限個). $(1+i)^i$ を計算してみよう. 定義より

$$\begin{aligned} (1+i)^i &= e^{i \log(1+i)} = e^{i(\frac{\log 2}{2} + (\frac{\pi}{4} + 2m\pi)i)} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ &= e^{-(\frac{1}{4} + 2m)\pi} \left\{ \cos\left(\frac{\log 2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\log 2}{2}\right) \right\} \quad (m \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

例 2 (ひとつだけ). $\alpha = N \in \mathbb{N}$, $z = re^{i\theta}$ とすると,

$$\begin{aligned} \text{複素べき: } z^N &= e^{N \log z} = e^{N(\log r + (\theta + 2m\pi)i)} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ &= e^{N \log r} \cdot e^{(N\theta + 2Nm\pi)i} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ &= r^N \cdot e^{N\theta i} = (re^{i\theta})^N \quad (\text{ド・モアブル}) \\ &= z^N : \text{普通に } z \text{ を } n \text{ 個掛けたもの} \end{aligned}$$

例 3 (有限個). 複素べき: $1^{1/2} = e^{(1/2) \cdot \log 1}$ ($\log$ は複素対数)

$$= e^{(1/2) \cdot 2m\pi i} = e^{m\pi i} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$= \pm 1 : 1 \text{ の平行根}$$

一般に, $z \neq 0$ の複素べき $z^{1/N}$ ($N \in \mathbb{N}$) は方程式 z の N 乗根すべてを与える.

一般的な注意. 一般には $(e^z)^w = e^{zw}$ は成り立たない. 左辺は複素べき, 右辺は指数関数の zw での値. ただし, $w \in \mathbb{Z}$ であれば両辺は一致する.

また, 指数関数は習慣的に e^z と書かれるが, $e = 2.71828\dots$ の z 乗 (複素べき) を表しているわけではない. 必要ならば但し書きを添えて読み手の混乱を避けのが作法である.

²主値は $-\pi \leq \text{Im}(\text{Log } z) < \pi$ の範囲で取る, という流儀もある. プログラミングの世界ではそのように設定することが多い. このとき, $\text{Log } z$ は $\log z$ の中でもっとも原点に近い.

演習問題 (「練習 x-x」は試験範囲に含まれます!)

練習 5-1. 次の対数の複素対数としての値を計算せよ. また, その主値も求めよ.

$$(1) \log(1 + \sqrt{3}i) \quad (2) \log(-2) \quad (3) \log i \quad (4) \log e$$

練習 5-2. 複素数 $z \neq 0$ にたいし, 複素対数の意味で $\log(z^2)$ と $2\log z$ は集合として一致しないことを示せ. ただし, $2\log z$ はすべての $\log z$ の元を 2 倍したものとする.

練習 5-2(複素べき). 次の複素べきとしての値をもとめよ.

$$(1) (1 + \sqrt{3}i)^i \quad (2) (-2)^{1+i} \quad (3) i^{1/3}$$

練習 5-3(複素べきの整数乗). 複素べき z^α ($z \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$) がただひとつの値を定めるのは, 指数 α が整数の場合に限ることを証明せよ.

レポート問題 5-1. 命題 5-1 を証明せよ.

レポート問題 5-2. 与えられた z にたいし, 方程式 $\tan w = z$ の解を $w = \tan^{-1} z$ と表し, 逆正接関数 (inverse tangent function) とよぶ. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\tan^{-1} 1$ をすべて求めよ (すなわち, 逆正接関数は多価.)
- (2) 逆正接関数 $\tan^{-1} z$ の定義域を求めよ (定義できない z を探す.)
- (3) $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}$ を示せ.

追加問題 (中間試験対策)

練習 6-1. 以下の関数 $f(z)$ にたいし, 定義にもとづいて微分係数 $f'(1)$ を (存在すれば) 求めよ.

$$(1) f(z) = iz + z^2 \quad (2) f(z) = 1/z^3 \quad (3) f(z) = z - 2\bar{z}$$

練習 6-2. 次の関数を微分せよ.

$$(1) iz + z^{10} \quad (2) \frac{z}{z^2 - i} \quad (3) (z^2 - i)^5$$

練習 6-3. $f(z) = \operatorname{Re} z$ とする. この関数はすべての複素数 z において微分可能で ない ことを示せ.

練習 6-4. $f(z) = \bar{z}^2$ とするとき, $f(z)$ は $z = 0$ で微分可能だが, $z \neq 0$ では微分可能でないことを示せ.

練習 6-5. 指数関数 e^z が $(e^z)' = e^z$ を満たすことを既知として, 以下の公式を示せ:

$$(1) (\sin z)' = \cos z \quad (2) (\cos z)' = -\sin z$$

答. 以下, m はすべての整数をわたるものとする.

$$5-1(1) \log 2 + (1/3 + 2m)\pi i \quad (2) \log 2 + (1 + 2m)\pi i \quad (3) (1/2 + 2m)\pi i \quad (4) 1 + 2m\pi i$$

$$5-3(1) e^{-(1/3+2m)\pi} (\cos(\log 2) + i \sin(\log 2)) \quad (2) -e^{\log 2 - (2m+1)\pi} (\cos(\log 2) + i \sin(\log 2))$$

$$(3) e^{\pi i/6}, e^{5\pi i/6}, e^{3\pi i/2} \text{ もしくは } (\sqrt{3} + i)/2, (-\sqrt{3} + i)/2, -i.$$

$$6-1(1) i + 2 \quad (2) -3 \quad (3) \text{ 微分可能でない.}$$

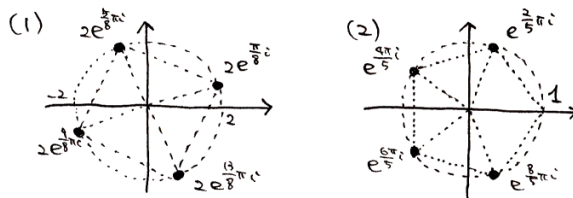
$$6-2(1) i + 10z^9 \quad (2) -(z^2 + i)/(z^2 - i)^2 \quad (3) 10z(z^2 - i)^4.$$

練習問題 (5/12 配布分) の略解

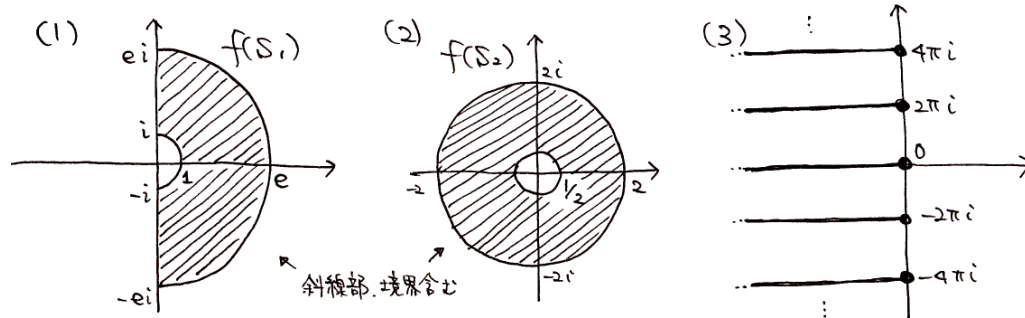
練習 4-1. (1) $z = re^{i\theta}$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと, $z^4 = r^4 e^{4i\theta}$. 一方, $16i = 16e^{i\pi/2+2m\pi i}$ ($m \in \mathbb{Z}$) を満たすから, 絶対値と偏角を比較して $r = 2, \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}m$ ($m = 0, 1, 2, 3$). したがって

$$z = 2e^{i\pi/8}, 2e^{5i\pi/8}, 2e^{9i\pi/8}, 2e^{13i\pi/8}.$$

(2) $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$. であるから, 求める解は方程式 $z^5 = 1$ の $z = 1$ 以外の解である. 前回のプリントと同様にして計算すると, $z = e^{2m\pi i/5}$ ($m = 1, 2, 3, 4$). すなわち $e^{2\pi i/5}, e^{4\pi i/5}, e^{6\pi i/5}, e^{8\pi i/5}$.



練習 4-2.



練習 4-3. (1) $\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{(z+2\pi)i} + e^{-(z+2\pi)i}}{2} = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z$. ($\sin z$ は略)

$$(2) \cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2zi} + 2 + e^{-2zi}}{4} - \frac{e^{2zi} - 2 + e^{-2zi}}{4} = 1.$$

$$(3) \cos z \cos w - \sin z \sin w = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \cdot \frac{e^{wi} + e^{-wi}}{2} - \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \cdot \frac{e^{wi} - e^{-wi}}{2i} \\ = \frac{e^{(z+w)i} + e^{(z-w)i} + e^{-(z-w)i} + e^{-(z+w)i}}{4} + \frac{e^{(z+w)i} - e^{(z-w)i} - e^{-(z-w)i} + e^{-(z+w)i}}{4} \\ = \frac{e^{(z+w)i} + e^{-(z+w)i}}{2} = \cos(z + w).$$

$\sin(z + w)$ は略.

$$\text{練習 4-4. (1) } \sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right) = \frac{e^{(\pi/4+i)i} - e^{-(\pi/4+i)i}}{2i} = \frac{1}{2i} \{e^{-1}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) - e(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})\} \\ = \frac{1}{2i} \{e^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) - e(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i)\} = \frac{(1 + e^2) - (1 - e^2)i}{2e\sqrt{2}}.$$

$$(2) \text{加法定理より } \sin(x + yi) = \sin x \cos(yi) + \cos x \sin(yi) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x.$$

$$\text{よって } \operatorname{Re} \sin(x + yi) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} \sin x, \operatorname{Im} \sin(x + yi) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x.$$

$$\text{練習 4-5. (1) } \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = 0 \iff e^{zi} = -e^{-zi} \iff e^{2zi} = -1 = e^{\pi i + 2m\pi i} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{よって } 2zi = \pi i + 2m\pi i \iff z = \left(\frac{1}{2} + m\right)\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

$$(2)(a) \tan(z + \pi) = \frac{\sin(z + \pi)}{\cos(z + \pi)} = \frac{\sin z \cos \pi + \cos z \sin \pi}{\cos z \cos \pi - \sin z \sin \pi} = \frac{\sin z}{\cos z} = \tan z.$$

$$(b) i \tan i = i \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} = \frac{1 - e^2}{1 + e^2}.$$

複素関数の微分

作成日: May 26, 2011 Version: 1.1

前回 (5/26) のまとめと補足

微分とは? 実関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるとは, 極限

$$A := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

が存在することを言うのであった. これは $\Delta x \approx 0$ (十分 0 に近い) ならば,

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \approx A \iff f(a + \Delta x) \approx f(a) + A \Delta x$$

が成り立つことを意味する. とくに右の式は, 「 $x = a$ から Δx 変化すると, $y = f(a)$ からほぼ $A \Delta x$ 変化する」という, 関数の局所的な変化の様子を記述するものである.

以下では同じことを複素数で考えたい. その前に, いくつか言葉と記号の準備をしておく.

円板. $\alpha \in \mathbb{C}$ 中心半径 $r > 0$ の (開) 円板を

$$\mathbb{D}(\alpha, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}$$

と定義する. とくに $\mathbb{D}(0, 1)$ を単位円板 (unit disk) と呼び, $\mathbb{D}$ で表す.

開集合と閉集合. 集合 $A \subset \mathbb{C}$ が開集合 (open set) であるとは, 任意の $\alpha \in A$ にたいしある十分小さな $r > 0$ が存在して, $\mathbb{D}(\alpha, r) \subset A$ とできることをいう. たとえば, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} - \{0\}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ など. また, 集合 $A \subset \mathbb{C}$ が閉集合 (closed set) であるとは, 補集合 $\mathbb{C} - A$ が開集合となるときを言う. たとえば, 一点 $\{\alpha\}$, $\mathbb{R}$ など.

開集合の連結性. 開集合 $A \subset \mathbb{C}$ が連結 (connected) であるとは, 任意の 2 点 z, z' にたいし, これらを結ぶ折れ線が A 内に存在するときを言う.¹ たとえば $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} - \{0\}$, $\mathbb{D}$ は連結だが, $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ は連結でない. $\pm i$ を結ぶ $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ 内の折れ線は存在しないからである.

連結な開集合を, とくに領域 (domain) とよぶ.

近傍. 複素数 z_0 にたいし, z_0 を含む開集合を z_0 の近傍 (neighborhood) とよぶ! 「近傍」という名前とは裏腹に, そのような開集合はどんなに大きくてもよい. たとえば集合 $\mathbb{C}$ はすべての複素数の近傍である.

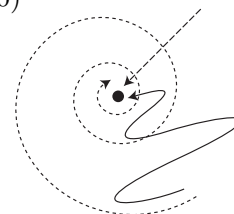
ランダウの記号. 複素数 α にたいし, f, g を α のある近傍で定義された複素数値の関数とする. もし $\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \alpha$) がなりたつとき, $f(z)$ を $o(g(z))$ ($z \rightarrow \alpha$) と書き表す. たとえば,

$$F(z) = z + 3z^2 = z + o(z) = z + o(1) \quad (z \rightarrow 0)$$

なぜなら, $z \rightarrow 0$ のとき $\left| \frac{3z^2}{z} \right| \rightarrow 0$ かつ $\left| \frac{3z^2}{1} \right| \rightarrow 0$ だからである.

注意. ここで「 $z \rightarrow \alpha$ 」というのは, 単に「 $|z - \alpha| \rightarrow 0$ 」を意味する. ただし, その近づき方はまったく自由である. まっすぐでも, 回転しながらでも, ジグザグしながらでもよい. とにかく「考えるあらゆる近づき方」を考慮しなければならない.

¹ 上記の連結性の定義は, 開集合に限って適用されることに注意しよう. 一般に開集合以外の集合についても, 連結性は定義できる. たとえば「連結な閉集合」という概念もあるにはあるが, 定義がかなり複雑になってしまう.



複素関数の微分

定義 (微分可能性) . D を領域, $\alpha \in D$ とする. 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が $z = \alpha$ で微分可能 (differentiable)

$\Leftrightarrow$ (1) ある定数 $A \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$f(z) = f(\alpha) + A(z - \alpha) + o(z - \alpha) \quad (z \rightarrow \alpha)$$

$\Leftrightarrow$ (1)' ある定数 $A \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$A = \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} + o(1) \quad (z \rightarrow \alpha)$$

$\Leftrightarrow$ (2) ある定数 $A \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$A = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

この定数 A を f の α における微分係数 (differential coefficient) とよび, $A = f'(\alpha)$ と表す.

例. $f(z) = z^2$ とし, 複素数 α を固定する. このとき

$$\frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \frac{z^2 - \alpha^2}{z - \alpha} = z + \alpha \rightarrow 2\alpha \quad (z \rightarrow \alpha)$$

であるから, 定義 (2) より, $z = \alpha$ で f は微分可能, 微分係数 $f'(\alpha)$ の値は 2α である. とくに $\alpha \in \mathbb{C}$ は任意であるから, すべての複素数で f は微分可能である.

次に同等の計算を定義 (1) に基づいてやってみよう. いま, 恒等式 $z^2 = \alpha^2 + 2\alpha(z - \alpha) + (z - \alpha)^2$ を用いると

$$f(z) = f(\alpha) + 2\alpha(z - \alpha) + o(z - \alpha) \quad (z \rightarrow \alpha).$$

よって $f'(\alpha) = 2\alpha$ が成り立つ.

定義 (1) の意味. 教科書等では習慣的に (2) の定義を採用することが多いが, 直感的に理解しやすいのは (1) の定義である. (1) の式で $z = \alpha + \Delta z$ と表せば,

$$f(\alpha + \Delta z) = f(\alpha) + A\Delta z + \underbrace{o(\Delta z)}_{\text{誤差}} \quad (\Delta z \rightarrow 0)$$

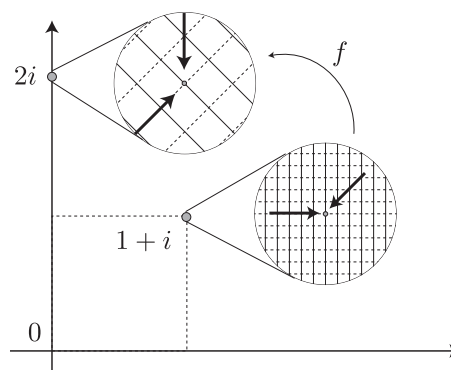
であるが, 下線部は相対的に Δz よりも小さな「誤差」に相当する. すなわち, $z = \alpha$ から Δz 変化すると, $w = f(\alpha)$ からほぼ $A\Delta z$ 変化する. とくに, $\Delta z \mapsto A\Delta z$ という対応は単なる定数倍であり, $A = re^{i\theta}$ とおけば f の局所的な作用はほぼ「 r 倍拡大と θ 回転」だとわかる.

今日の標語: f が $z = \alpha$ で微分係数 $f'(\alpha) = A$ をもつ

$\Leftrightarrow f$ は $z = \alpha$ の周囲をほぼ $|A|$ 倍拡大, $\arg A$ 回転

このことから, z の α への近づき方を A 倍したものが, ほぼ $f(z)$ の $f(\alpha)$ への近づき方になることもわかる (あとの $g(z) = \bar{z}$ と比較せよ.)

より具体的な例. $f(z) = z^2$, $\alpha = 1 + i$ としてみよう. $f(\alpha) = 2i$, $f'(\alpha) = 2(1 + i) = 2\sqrt{2}e^{\pi i/4}$ であるから, f は $1 + i$ から $2i$ へ, 周囲をほぼ「 $2\sqrt{2}$ 倍拡大と $\pi/4$ 回転」させながら写す (右図).

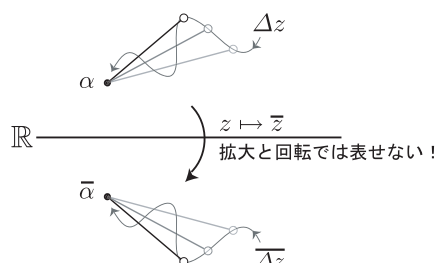


微分可能で「ない」例. $g(z) = \bar{z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ としてみよう. $\Delta z = z - \alpha = re^{i\theta}$ とすると,

$$\frac{g(z) - g(\alpha)}{z - \alpha} = \frac{\bar{z} - \bar{\alpha}}{z - \alpha} = \frac{\overline{z - \alpha}}{z - \alpha} = \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2\theta i}.$$

ここで $z \rightarrow \alpha$ すなわち $\Delta z = re^{i\theta} \rightarrow 0$ としても, 偏角 θ に応じて上の値はふらふらと変化してしまう. 定数に収束しないということは, 微分可能ではないということになる.

そもそも, 複素共役は実軸に関して鏡像を取ることに対応するのであった. $z = \alpha$ から偏角 θ の方向に変化すれば, g による像は偏角 $-\theta$ の方向に変化する. その方向を補正するには, -2θ 回転必要だが, この回転量が変化の方向 θ に依存しているのがいけない. 微分可能性は「周囲をほぼ一定量拡大・回転する」ことを要求するからである.



これまでのプリント・問題等の訂正

プリント番号 02: レポート問題 2-2. $z_n = \frac{i^n}{n}$ ($n \geq 1$) で定まる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は収束することを証明せよ (Hint. 実部と虚部で分ける.)

プリント番号 03: 証明 (定理 3-5). 一般に任意の $N \in \mathbb{N}$ にたいし

$$\left(\sum_{n \leq N} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \leq N} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{n \leq N} \frac{(z+w)^n}{n!} + E_N(z, w)$$

ただし $|E_N(z, w)| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$

が成り立つ (レポート問題). よって両辺で $N \rightarrow \infty$ とした極限をとれば, 主張を得る. ■

プリント番号 03: レポート問題 3-1. 任意の $N \in \mathbb{N}$ にたいし

$$\left(\sum_{n \leq N} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \leq N} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{n \leq N} \frac{(z+w)^n}{n!} + E_N(z, w)$$

ただし $|E_N(z, w)| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$

が成り立つことを示せ. (Hint: 二項定理を使う. $E_N(z, w)$ は $N+1$ 次以上の項すべての和に対応する. そのような項は $\frac{z^i w^{m-i}}{i!(m-i)!}$ ($m = N+1, N+2, \dots, 2N$) のような形をしており, $N(N+1)/2$ 個存在する. $K = \max\{|z|, |w|, 1\}$ とおくと, $\left| \frac{z^i w^{m-i}}{i!(m-i)!} \right| \leq \frac{m C_i K^m}{m!} \leq \frac{(2K)^m}{m!} \leq \frac{(2K)^{2N}}{(N+1)!}$ が成り立つことが示される.)

練習問題 (5/26 配布分) の略解

練習 5-1, 練習 5-3, 練習 6-2. (略)

練習 5-2. $z = re^{\theta i}$ とおくと $z^2 = r^2 e^{2\theta i}$ なので,

$$\log(z^2) = \log(r^2) + (2\theta + 2m\pi)i = 2\log r + (2\theta + 2m\pi)i \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{また } 2\log z = 2\{\log r + (\theta + 2m\pi)i\} = 2\log r + (2\theta + 4m\pi)i \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

したがって, 二式の実部は一致するが虚部が一致しないため, 集合として一致しない.

練習 5-4. $z = re^{\theta i}$ とおくと, $z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha \{\log r + (\theta + 2\pi m)i\}} = e^{\alpha \log r + \alpha \theta i} \cdot e^{2\alpha m \pi i} \quad (m \in \mathbb{Z}).$ ここで $m \in \mathbb{Z}$ に依存する部分 $e^{2\alpha m \pi i}$ を w とおき, w が m によらずひとつの値をとるための必要十分条件が $\alpha \in \mathbb{Z}$ であることを示せばよい.

(必要性): $w = e^{2\alpha m \pi i}$ に $m = 0$ および $m = 1$ を代入しても値は一致しなくてはならない. したがって $w = e^{2\alpha i \cdot 0} = e^{2\alpha i \cdot 1} \iff w = 1 = e^{2\pi i}$. ここで $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とすると, $e^{2\pi i} = e^{2\pi(a+bi)i} = e^{-2\pi b} \cdot e^{2\pi ai}$. $w = 1$ と絶対値・偏角を比較すれば, $b = 0$, $a \in \mathbb{Z}$ を得る. すなわち $\alpha \in \mathbb{Z}$ でなければならない.

(十分性): 逆に $\alpha \in \mathbb{Z}$ であれば, $w = e^{2\alpha m \pi i} = 1$ より, ただひとつの値を定める.

$$\begin{aligned} \text{練習 6-1. (1)} \quad \lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{zi + z^2 - (i + 1)}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)i + (z + 1)(z - 1)}{z - 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \{i + (z + 1)\} = 2 + i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{z^3} - 1}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - z^3}{z^3(z - 1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-(z - 1)(z^2 + z + 1)}{z^3(z - 1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-(z^2 + z + 1)}{z^3} = -3. \end{aligned}$$

$$(3) \quad z - 1 = re^{\theta i} \quad (r \rightarrow 0, \theta: \text{任意}) \text{ とおくと, } z = re^{\theta i} + 1, \bar{z} = re^{-\theta i} + 1 \text{ より,}$$

$$\frac{f(z) - f(1)}{z - 1} = \frac{(z - 2\bar{z}) - (-1)}{z - 1} = \frac{re^{\theta i} + 1 - 2(re^{-\theta i} + 1) + 1}{re^{\theta i}} = \frac{re^{\theta i} - 2re^{-\theta i}}{re^{\theta i}} = 1 - 2e^{-2\theta i}.$$

この値は θ に依存しており, $z \rightarrow 1$ すなわち $r \rightarrow 0$ としても, 極限が一意に定まらない. したがって微分不可能である.

$$\begin{aligned} \text{練習 6-3. } z - \alpha = re^{\theta i} \quad (r \rightarrow 0, \theta: \text{任意}) \text{ とおくと, } z = re^{\theta i} + \alpha, \bar{z} = re^{-\theta i} + \bar{\alpha} \text{ より,} \\ \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \frac{\frac{z+\bar{z}}{2} - \frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}}{z - \alpha} = \frac{(z - \alpha) - (\bar{z} - \bar{\alpha})}{2(z - \alpha)} = \frac{re^{\theta i} + re^{-\theta i}}{2re^{\theta i}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\theta i}. \end{aligned}$$

この値は θ に依存しており, $z \rightarrow 1$ すなわち $r \rightarrow 0$ としても, 極限が一意に定まらない. したがって微分不可能である.

$$\begin{aligned} \text{練習 6-4. } z - \alpha = re^{\theta i} \quad (r \rightarrow 0, \theta: \text{任意}) \text{ とおくと, } \bar{z} = re^{-\theta i} + \bar{\alpha} \text{ より,} \\ \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \frac{\bar{z}^2 - \bar{\alpha}^2}{z - \alpha} = \frac{(\bar{z} - \bar{\alpha})(\bar{z} + \bar{\alpha})}{z - \alpha} = \frac{re^{-\theta i}(re^{-\theta i} + 2\bar{\alpha})}{re^{\theta i}} = e^{-2\theta i}(re^{-\theta i} + 2\bar{\alpha}). \end{aligned}$$

$\alpha = 0$ のとき, $e^{-2\theta i}(re^{-\theta i} + 0) = re^{-3\theta i} \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$) となるので, $z = 0$ において微分可能である. 一方, $\alpha \neq 0$ のとき, θ を固定すると $e^{-2\theta i}(re^{-\theta i} + 2\bar{\alpha}) \rightarrow 2e^{-2\theta i}\bar{\alpha}$ ($r \rightarrow 0$) となるが, この極限は θ に依存するので一意的な極限とはいえない. よって $z \neq 0$ において微分不可能である.

$$\text{練習 6-5 (中間試験範囲外). (1) } (\sin z)' = \left(\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \right)' = \frac{ie^{zi} + ie^{-zi}}{2i} = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z.$$

$$(2) (\cos z)' = \left(\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \right)' = \frac{ie^{zi} - ie^{-zi}}{2} = -\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = -\sin z.$$

正則性とコーシー・リーマンの方程式

作成日: June 23, 2011 Version: 1.1

前回 (6/16) のまとめと補足

微分可能性の復習. 以下, $D, D' \subset \mathbb{C}$ は領域 (= 連結開集合) を表すものとする. 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が $z = \alpha$ で微分可能であるとは, ある定数 $A \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$f(z) = f(\alpha) + A(z - \alpha) + o(z - \alpha) \quad (z \rightarrow \alpha)$$

が成り立つことをいうのであった. これは極限

$$A = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

が存在することと同値である. この定数 A を $f'(\alpha)$ で表し, f の α における微分係数とよんだ.

注意. 上の $o(z - \alpha)$ の部分は,

$$\eta(z, \alpha) := f(z) - \{f(\alpha) + A(z - \alpha)\}$$

で定義される (α に依存する) 関数であり, 「 $f(z)$ を下線部の 1 次関数で近似したときの誤差」を表す. $\eta(z, \alpha) = o(z - \alpha)$ とは $z \rightarrow \alpha$ のとき $\left| \frac{\eta(z, \alpha)}{z - \alpha} \right| \rightarrow 0$ が成り立つことを意味するが, これは視野を小さくすればするほど誤差が相対的に縮まることを意味している.

微分係数の公式. $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ が $\alpha \in D$ で微分可能であるとき,

(DF1) $h(z) := f(z) + g(z)$ も $\alpha \in D$ で微分可能で, $h'(\alpha) = f'(\alpha) + g'(\alpha)$.

(DF2) $h(z) := f(z)g(z)$ も $\alpha \in D$ で微分可能で, $h'(\alpha) = f'(\alpha)g(\alpha) + f(\alpha)g'(\alpha)$.

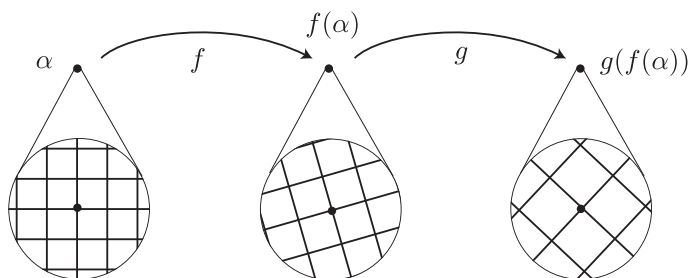
(DF3) $g(\alpha) \neq 0$ のとき $h(z) := f(z)/g(z)$ も $\alpha \in D$ で微分可能で,
 $h'(\alpha) = (f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha))/\{g(\alpha)\}^2$.

証明は実関数の場合と全く同様である. ただし, われわれの定義を用いると, 少し筋の良い証明ができる. たとえば (DF2) の証明: $f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + o(z - \alpha)$ と $g(z) = g(\alpha) + g'(\alpha)(z - \alpha) + o(z - \alpha)$ を掛けて整理すれば, $f(z)g(z) = f(\alpha)g(\alpha) + \{f(\alpha)g'(\alpha) + f'(\alpha)g(\alpha)\}(z - \alpha) + o(z - \alpha)$ を得る. おわり. いわゆる微分商を用いる証明よりもはるかに明解である.

合成関数の微分公式. ふたつの関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ および $g: D' \rightarrow \mathbb{C}$ にたいし, f が $\alpha \in D$ で微分可能かつ $f(\alpha) \in D'$ であり, さらに g が $f(\alpha) \in D'$ で微分可能とする. このとき,

$$(g \circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha)) \cdot f'(\alpha).$$

この公式も証明も実関数の場合と同様なので省略するが, その分, 意味を深く理解しておこう. 微分係数は, 関数の局所的な拡大・回転量を表すのであった. すなわち上の公式は $\alpha \xrightarrow{f} f(\alpha) \xrightarrow{g} g(f(\alpha))$ という変化において, f によって局所的にほぼ $f'(\alpha)$ 倍され, そのあと g によって局所的にほぼ $g'(f(\alpha))$ 倍されるという事実を式で表現したものになっている.



微分可能性と連続性

定義 (連続性) 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が $\alpha \in D$ で連続 (continuous) であるとは

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad |z - \alpha| < \delta \implies |f(z) - f(\alpha)| < \epsilon$$

が成り立つことをいう。また、任意の $\alpha \in D$ で f が連続であるとき、 f は D 上で連続であるという、

命題 7-1(微分可能なら連続) 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が $\alpha \in D$ で微分可能ならば、 $\alpha \in D$ で連続

証明. $A = f'(\alpha)$ とすると、 $f(z) = f(\alpha) + A(z - \alpha) + \eta(z, \alpha)$, $|\eta(z, \alpha)/(z - \alpha)| \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \alpha$). とくにある $\delta_0 > 0$ が存在して、 $|z - \alpha| < \delta_0$ のとき $|\eta(z, \alpha)/(z - \alpha)| \leq 1$ と仮定してよい。任意に小さな $\epsilon > 0$ にたいし、 $\delta = \min\{\delta_0, \epsilon/(|A| + 1)\}$ とおくと、 $|z - \alpha| < \delta$ のとき

$$|f(z) - f(\alpha)| = |z - \alpha| \left| A + \frac{\eta(z, \alpha)}{z - \alpha} \right| \leq |z - \alpha|(|A| + 1) < \frac{\epsilon}{|A| + 1} \cdot (|A| + 1) < \epsilon.$$

ただし中央の「 $\leq$ 」では三角不等式をもちいた。 ■

注意 1. f, g が定義域上で連続であれば、定義できる範囲で $f + g$, fg , f/g , $f \circ g$ も連続である。証明はやはり、実関数の場合と同じである。

注意 2. 命題 7-1 の逆はもちろん成立しない。たとえば $f(z) = \bar{z}$ は $\mathbb{C}$ 上で連続だが微分可能でない。

正則性

定義 (正則性) 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が (D 上で) 正則 (holomorphic) であるとは、 f が任意の $\alpha \in D$ で微分可能であるときをいう。このとき D 上で定まる関数 $f': z \mapsto f'(z)$ を f の導関数 (derivative) とよぶ。

例 (中間試験の問題 5). $f(z) = z^3$ は任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ で微分係数 $f'(\alpha) = 3\alpha^2$ を持つので、 $\mathbb{C}$ 上正則。導関数はもちろん $f'(z) = 3z^2$ 。一方、 $g(z) = \bar{z}^3$ は原点 0 でのみ微分可能なので、 $\mathbb{C}$ のいかなる領域上でも正則ではない。

注意. 正則性はある領域上でくまなく微分可能であることを要求する。いなければならない。また命題 7-1 より、 D 上正則な関数は連続関数である。

2次元写像としての正則関数. 複素数を定義する際、 $z = x + yi \in \mathbb{C}$ は実 2次元ベクトル $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の別名だとした。このとき、複素関数 $f: z \mapsto w = u + vi$ はベクトル間の写像

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

の別名だと思える。たとえば $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $w = f(z) = z^2$ で定義するとき、これは

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

であたえられる写像 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の別名ということになる。表現 (名前) は違っても、平面の点を平面に写す、その実体は同じなのである。そこで、次のような問題を考える：

問題: $f(z)$ が正則であることを, 実関数 $u(x, y)$ および $v(x, y)$ の言葉で表現できないか? とくに, 正則性を与える $u(x, y)$ と $v(x, y)$ の十分条件は?

正則性の必要条件. まず, 「 $f(z)$ が正則 $\implies u(x, y)$ と $v(x, y)$ は _____ を満たす」という形の条件を求めてみよう. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とする. すなわち, 任意の $\alpha \in D$ を固定するとき, $A = f'(\alpha)$ とすると $f(z) = f(\alpha) + A(z - \alpha) + \eta(z, \alpha)$, $\eta = \eta(z, \alpha) = o(z - \alpha)$ ($z \rightarrow \alpha$) が成り立つ. これを実 2 次元写像の言葉に置き換えよう. 固定された値については,

$$\alpha =: a + bi \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad f(\alpha) =: c + di \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(a, b) \\ v(a, b) \end{pmatrix}$$

とおく. 次に微分係数の部分については, $A =: p + qi$, $z - \alpha =: \Delta x + \Delta yi = \Delta z$ とすれば,

$$A(z - \alpha) = (p\Delta x - q\Delta y) + (p\Delta y + q\Delta x)i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} p\Delta x - q\Delta y \\ p\Delta y + q\Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

となる. したがって, 次のような対応を得る:

$$\begin{aligned} f(z) &= \underline{f(\alpha)} + \underline{A(z - \alpha)} + \eta(z, \alpha) \\ \longleftrightarrow \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} &= \underline{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}} + \underline{\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \eta(z, \alpha) \\ \operatorname{Im} \eta(z, \alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このとき, $u(x, y)$, $v(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で偏微分可能であることを確認しよう: $u(x, y) = c + p\Delta x - q\Delta y + \operatorname{Re} \eta$ より,

$$\frac{u(a + \Delta x, b) - u(a, b)}{\Delta x} = \frac{(c + p\Delta x - q \cdot 0 + \operatorname{Re} \eta) - c}{\Delta x} = p + \frac{\operatorname{Re} \eta}{\Delta x}.$$

ここで $\Delta z = \Delta x + i \cdot 0 \rightarrow 0$ と考えれば, $\left| \frac{\operatorname{Re} \eta}{\Delta x} \right| = \left| \frac{\operatorname{Re} \eta}{\Delta z} \right| \leq \left| \frac{\eta}{\Delta z} \right| \rightarrow 0$. したがって $u_x(a, b) = p$ を得る. 同様に他の偏微分も計算できる. とくに, $A = p + qi = re^{i\theta}$ とおくと, 写像 $(x, y) \mapsto (u, v)$ の $(x, y) = (a, b)$ におけるヤコビ行列は次のように計算できる:

$$\begin{pmatrix} u_x(a, b) & u_y(a, b) \\ v_x(a, b) & v_y(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}: \text{拡大} \cdot \text{回転!}$$

すなわち, 正則性は「ヤコビ行列が存在して, しかも回転・拡大という特殊な形になっている」ことを要求するのである.

定理 7-2 (正則性の必要条件) 領域 D 上で定義された関数 $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ が複素変数 $z = x + yi$ の関数として正則であれば, 定義域上で偏導関数 u_x, u_y, v_x, v_y が存在して, $f'(z) = p + qi = re^{i\theta}$ とするとき

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

が成り立つ. とくに, 定義域上で次のコーシー・リーマンの (微分) 方程式 (the Cauchy-Riemann (differential) equation) が成り立つ:

$$\begin{cases} u_x = v_y & (= p) \\ v_x = -u_y & (= q) \end{cases}$$

この定理の逆は正しくない。すなわち、偏導関数が存在してコーシー・リーマンの方程式が成立しても、正則でないことはありうる。しかし、この定理は正則で「ない」ことの判定条件（十分条件）として応用できる：

系 7-3 (非正則性の判定) 領域 D 上で定義された関数 $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ がコーシー・リーマンの方程式を満たさなければ、 f は複素変数 $z = x + yi$ の関数として正則でない。

演習問題 (「練習 x-x」は試験範囲に含まれます！)

練習 7-1. 以下の正則関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ について $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ とするとき、定義域上でコーシー・リーマンの方程式が成立することを確認せよ。

- | | |
|--|--|
| (1) $D = \mathbb{C}, f(z) = z^2$ | (2) $D = \mathbb{C} - \{0\}, f(z) = 1/z$ |
| (3) $D = \mathbb{C} - \{0\}, f(z) = e^{1/z}$ | (4) $D = \mathbb{C}, f(z) = \sin z$ |

練習 7-2 (非正則性の判定). 系 7-3 を用いて、以下の実 2 次元関数 $F: (x, y) \mapsto (u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ を用いて定義される複素関数 $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ は正則関数でないことを示せ。

- | | |
|---|--|
| (1) $F: (x, y) \mapsto (u, v) = (x, -y)$ | (2) $F: (x, y) \mapsto (u, v) = (x, 2y)$ |
| (3) $F: (x, y) \mapsto (u, v) = (x^2 + y^2, 2xy)$ | (4) $F: (x, y) \mapsto (u, v) = (x, 0)$ |

練習 7-3 (非正則性の判定, その 2). 次の関数が正則でないことを示せ。

- | | | |
|-----------------------------|--------------------|------------------------------|
| (1) $f(z) = \overline{e^z}$ | (2) $f(z) = z ^2$ | (3) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2$ |
|-----------------------------|--------------------|------------------------------|

レポート問題 7-1 (コーシー・リーマンの複素形). $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数とする。 $z = x + yi \in D$, $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ とするとき、 f の「 x および y 偏微分」を

$$f_x(z) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f((x + \Delta x) + yi) - f(z)}{\Delta x}, \quad f_y(z) := \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x + (y + \Delta y)i) - f(z)}{\Delta y}$$

と定義する。このとき、コーシー・リーマンの方程式は

$$f_y = if_x$$

と同値であることを示せ (その幾何学的な意味も考察してみよ。)

レポート問題 7-2 (極形式のコーシー・リーマン). 複素関数 $f: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z) = u + vi$ は正則であるとする。 $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ にたいし $z = re^{i\theta}$ において、 $f(re^{i\theta}) = w(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ とする。

- (1) 偏導関数 $u_r, u_\theta, v_r, v_\theta$ が存在することを示せ。
- (2) さらに、次の形の「コーシー・リーマンの方程式」が成り立つことを示せ：

$$u_r = \frac{v_\theta}{r}, \quad v_r = -\frac{u_\theta}{r}.$$

- (3) (2) のふたつの式は次の形の式と同値であることを示せ：

$$w_\theta = ir w_r.$$

コーシー・リーマン方程式の応用

作成日: June 30, 2011 Version: 1.1

前回 (6/23) のまとめと補足

正則性の十分条件

定義 (再) 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が (D 上で) 正則 (holomorphic) であるとは, f が任意の $\alpha \in D$ で微分可能であるときをいう. このとき D 上で定まる関数 $f': z \mapsto f'(z)$ を f の導関数 (derivative) とよぶ.

今回は複素関数 $w = f(z)$ を $f(x+yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ (ただし $x, y, u, v \in \mathbb{R}$) と表したとき, 『 f が正則であれば $u(x, y)$ と $v(x, y)$ は _____ を満たす』という形の定理 (正則性の必要条件) を証明した. 今回は, 『 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が _____ を満たせば, $f(z)$ は正則』という形の定理 (正則性の十分条件) を示そう. その前に, 実 2 変数関数の微積分で学習した言葉を復習しておく.

(ア) 全微分. 関数 $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ が $(x, y) = (a, b) \in D$ において全微分可能 (totally differentiable, もしくは単に differentiable) であるとは, ある定数 $P, Q \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$\begin{cases} u(x, y) = u(a, b) + P(x-a) + Q(y-b) + \eta(x, y) \\ (x, y) \rightarrow (a, b) \text{ のとき } \frac{\eta(x, y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \rightarrow 0 \end{cases}$$

が成り立つことをいうのであった. さらにこのとき,

- $(x, y) = (a, b)$ において関数 u は連続; かつ
- 偏微分係数が存在して, $P = u_x(a, b)$, $Q = u_y(a, b)$.

が成り立つのであった (忘れていた人は必ず復習すること!)

(イ) C^1 -級関数. D を $\mathbb{R}^2$ 内の領域とする. 関数 $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 -級関数 (C^1 -function) であるとは, 定義域上で偏導関数 $(x, y) \mapsto u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ が存在し, しかも連続であることをいう. 次の性質も記憶に値する:

命題 8-1. 関数 $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 -級関数であれば, 定義域上の任意の点で全微分可能.

注意. 『定義域上の任意の点で全微分可能だが偏導関数が C^1 -級でない関数』が存在するので, この命題の逆は成り立たない.

定理 8-2 (正則性の十分条件) 複素平面内のある領域 D で定義された関数 $f(x+yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ が, 次の (a) と (b) を満たすとする:

- (a) D 上 u, v は C^1 級.
- (b) D 上の各点でコーシー・リーマンの方程式を満たす:
$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases} \quad \text{--- (CR)}$$

このとき f は D 上正則である. さらに導関数 $f'(z)$ は

$$f'(x+yi) = u_x + v_x i.$$

で与えられ, これは D 上連続.

注意. 細かいことだが, 前回・今回でみた定理はいずれも正則性の「必要十分条件」だとは主張していない. 必要十分条件は, 次のように書くことができる: 定理 8-2 の記号のもとで

(A): D 上 u, v は全微分可能 .

という条件を考えると ,

(正則性の必要十分条件): f が D 上正則 $\iff u, v$ は (A) と (b) を満たす .

しかし (A) にいう全微分可能性を確認するのは面倒なので , 実用的には (a) の「 C^1 級」のみを確認するのが手っ取り早いのである .¹ とにかく次のように覚えておけば , 間違いはない :

- f が正則 $\implies u, v$ には偏導関数が存在して (CR) をみたす .
とくに , u, v が (CR) を満たしてなければ正則でない (非正則性を保証)
- u, v が C^1 -関数 , かつ (CR) をみたす $\implies f$ は正則 (正則性を保証)

証明 (定理 8-2) . 任意の $\alpha = a + bi \in D$ を固定する . $f(\alpha) = u(a, b) + v(a, b) = c + di$ とおき , さらに $\Delta x = x - a, \Delta y = y - b$ とする (このとき , $\Delta z = z - \alpha = \Delta x + i\Delta y$ となる .)

いま (b) より ,

$$\begin{aligned} p &:= u_x(a, b) = v_y(a, b) \\ q &:= v_x(a, b) = -u_y(a, b) \end{aligned}$$

が成り立つ . (a) と命題 8-1 より u, v は全微分可能であるから ,

$$\begin{cases} u(x, y) = c + p\Delta x - q\Delta y + \eta_1(x, y) \\ v(x, y) = d + q\Delta x + p\Delta y + \eta_2(x, y) \\ (x, y) \rightarrow (a, b) \text{ のとき } \frac{\eta_i(x, y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

この式をベクトルとして書き直すと

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}}_{\text{行列}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

であり , さらにこれを複素数として表せば (2 重下線部には前回と同様の計算を適用して)

$$\begin{aligned} u + vi &= (c + di) + \underline{(p + qi)(\Delta x + i\Delta y)} + (\eta_1 + \eta_2 i) \\ \iff f(z) &= f(\alpha) + \underline{(p + qi)(z - \alpha)} + (\eta_1 + \eta_2 i). \end{aligned}$$

$\eta(z) = \eta(x + yi) := \eta_1(x, y) + \eta_2(x, y)i$ とおくと , $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき , すなわち $z \rightarrow \alpha$ のとき ,

$$\frac{|\eta(z)|}{|z - \alpha|} = \frac{|\eta_1(x, y) + \eta_2(x, y)i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leq \frac{|\eta_1(x, y)| + |\eta_2(x, y)|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0.$$

である . よって f は $z = \alpha$ で微分可能 . とくに α は任意なので , f は D 上正則となる . また , $f'(\alpha) = p + qi = u_x(a, b) + v_x(a, b)i$ であり , (a) の仮定から $f'(\alpha)$ は $\alpha = a + bi$ に関して連続である . ■

応用. 定理 8-2 を用いて , 次の公式を証明しよう :

公式 . 指数・三角関数は複素平面上で正則であり ,
 $(e^z)' = e^z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$

¹ しかも , 次のような問題もある . 一般に全微分可能だからといって偏導関数が連続とは限らない . そのため , (A) と (b) から f の導関数 f' が存在することがいえても , それが連続かどうかはわからない . そこで , 多くの本では正則性の定義に「導関数 f' は連続」という付加的な条件を加えて , (a) と (b) をもって正則性の「必要十分条件」としているようである .

証明. まず指数関数 $f(z) = e^z$ の正則性を確認しよう. $f(x + yi) = e^x(\cos y + i \sin y)$ より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$
ヤコビ行列を計算すると $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$ となり, それぞれの成分は連続. したがって u, v は C^1 級である. しかもコーシー・リーマン (CR) をみたすので, 定理 8-2 より f は正則. とくに, $f(x + yi) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$. 三角関数は指数関数を用いて $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ などと書き表されるので, 正則. 導関数は合成関数の公式より得られる. ■

演習問題 (「練習 x-x」は試験範囲に含まれます!)

練習 8-1 (微分の計算). 次の関数の微分を計算せよ.

- (1) $e^z \sin z$ (2) ze^{z^2} (3) $\tan z$ (4) $\cos(z + z^2)$

練習 8-2 (正則性の判定). 以下で定義される複素関数 $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ は正則関数であることを示し, 導関数を求めよ.

- (1) $f(x + yi) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ (2) $f(x + yi) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$

練習 8-3 (正則関数の生成). 複素関数 $f(x + yi) = (x^3 - 3xy^2) + v(x, y)i$ が正則関数であるとき, $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C$ (C は複素数の定数) となることを示せ.

練習 8-4 (定数関数となる条件). ある領域 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された正則関数 $f(z)$ にたいし, 以下のいずれかを満たせば $f(z)$ は定数関数となることを示せ.

- (1) $\operatorname{Re} f(z)$ が定数関数. (2) $\operatorname{Im} f(z)$ が定数関数.
(3) $|f(z)|$ が定数関数. (4) 任意の $z \in D$ で $f'(z) = 0$.

レポート問題 8-1. $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$, $f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$ とする.

- (1) z が実軸もしくは虚軸上にあるとき, $f(z) = z$ となることを示せ.
(2) u, v は $(x, y) = (0, 0)$ において偏微分係数をもち, コーシー・リーマンの方程式を満たすが, $z = 0$ において複素関数の意味で微分可能ではないことを示せ.

レポート問題 8-2 (Loomann の例). 複素関数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定める:

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-z^{-4}) & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$$

- (1) 実軸もしくは虚軸に沿って $z \rightarrow 0$ とするとき, $f(z) \rightarrow 0$ となることを示せ.
(2) 同様に, 適当な直線に沿って $z \rightarrow 0$ とするとき, $f(z) \rightarrow +\infty$ (正の無限大) とできることを示せ. (すなわち, f は $z = 0$ で連続でない. したがって $\mathbb{C}$ 全体で正則というわけではない.)
(3) にもかかわらず, f は $\mathbb{C}$ 全体で偏導関数をもち, それらはコーシー・リーマンの方程式を満たすことを示せ.

練習問題 (6/23 配布分) の略解

練習 7-1. (1) $z = x + yi$ とすると, $f(z) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$ とすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$.

よって $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ なのでコーシー・リーマンの方程式が成立.

(2) $z = x + yi$ とすると, $f(z) = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$. $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ とすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$. よって

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ なのでコーシー・リーマンの方程式が成立.

(3) $z = x + yi$ とすると, $f(z) = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$. $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$ とすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$. よって $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ なのでコーシー・リーマンの方程式が成立.

練習 7-2. (1) $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. よって $u_x \neq v_y$ なのでコーシー・リーマンの方程式を満たさない. したがって系 7-3 より正則でない.

(2) $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. よって $u_x \neq v_y$ なのでコーシー・リーマンの方程式を満たさない. したがって系 7-3 より正則でない.

(3) $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$. よって $u_y \neq -v_x$ なのでコーシー・リーマンの方程式を満たさない. したがって系 7-3 より正則でない.

(4) $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. よって $u_x \neq v_y$ なのでコーシー・リーマンの方程式を満たさない. したがって系 7-3 より正則でない.

練習 7-3.

(1) $z = x + yi$ とすると, $f(z) = e^{x-yi} = e^x(\cos y - i \sin y)$. $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = -e^x \sin y$ とすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ -e^x \sin y \end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ -e^x \sin y & -e^x \cos y \end{pmatrix}$. よってコーシー・リーマンの方程式を満たさないの, 系 7-3 より $f(z)$ は正則でない.

(2) $z = x + yi$ とすると, $f(z) = |x + yi|^2 = x^2 + y^2$. $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$ とすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. コーシー・リーマンの方程式は $(x, y) = (0, 0)$ 以外で成立しない. よって $f(z)$ は (少なくとも) $z = 0$ 以外で微分不可能. したがって, $f(z)$ は複素平面内の任意の領域で正則でない.

(3) $z = x + yi$ とすると, $f(z) = (x + yi)^2 + (x - yi)^2 = 2(x^2 - y^2)$. $u(x, y) = 2(x^2 - y^2)$, $v(x, y) = 0$ とすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x^2 - y^2) \\ 0 \end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & -4y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. コーシー・リーマンの方程式は $(x, y) = (0, 0)$ 以外で成立しない. よって $f(z)$ は (少なくとも) $z = 0$ 以外で微分不可能. したがって, $f(z)$ は複素平面内の任意の領域上で正則でない.

複素線積分

作成日: July 7, 2011 Version: 1.1

前回 (6/30) のまとめ

曲線 $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ (閉区間) 上で定義された連続関数 $t \mapsto x(t), y(t) \in \mathbb{R}$ を用いて.

$$C : z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (t \in [a, b])$$

とパラメーター表示できる集合を $\mathbb{C}$ 内の曲線 (curve) という. とくに断らないかぎり, C には t の増加方向にあわせた向き (orientation) をあわせて考える. また x, y がともに t について C^1 であるとき, C は C^1 曲線もしくは滑らかな曲線とよばれる. このとき, $t \in (a, b)$ において t に関する微分

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \in \mathbb{C}$$

が存在して, 連続関数となっていることに注意. C が有限個の C^1 曲線 $C_1, C_2, \dots, C_N$ をつなぎ合わせてものになっているとき, C は区分的に C^1 な曲線 (piecewise- C^1 curve) もしくは区分的に滑らかな曲線と呼ばれる. このとき, $C = C_1 + \dots + C_N$ と表す.

C の始点と終点一致するとき, すなわち $z(a) = z(b)$ であるとき, C は閉曲線 (closed curve) と呼ばれる. また, C が自己交差しないとき, すなわち $t \mapsto z(t)$ が単射であるとき, C は単純閉曲線 (simple closed curve, 略して s.c.c.) と呼ばれる.

以下, 「曲線」といえば「区分的に滑らか」と仮定する.

曲線の分割と長さ. 曲線 $C : z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (t \in [a, b])$ の分割 (partition) とは, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$ となる有限個の $\{t_k\}_{k=0}^N$ を選んで得られる C 上の有限集合 $\Delta = \{z_k = z(t_k)\}_{k=0}^N$ のことをいう.

$\delta(\Delta) := \max\{|z_k - z_{k-1}| : 1 \leq k \leq N\}$ とおく. いま $\epsilon > 0$ にたいし, $\delta(\Delta) \leq \epsilon$ となる分割 Δ すべてにわたって考えた上限

$$\ell_\epsilon(C) := \sup_{\Delta} \sum_{k=1}^N |z_k - z_{k-1}|$$

をとり, $\ell(C) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_\epsilon(C)$ を C の長さ (length) と呼ぶ. 区分的に C^1 な曲線にたいしては, 長さはつねに確定することが知られている.

複素線積分. $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を曲線 C 上で定義された連続関数とする. C の分割 $\Delta = \{z_k = z(t_k)\}_{k=0}^N$ の各 k にたいし, $t_{k-1} \leq s_k \leq t_k$ となる s_k を選び, $\zeta_k := z(s_k)$ として積 $f(\zeta_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$ を考える (「仮想短冊の面積」). このとき, 和

$$\Sigma(f, \Delta) := \sum_{k=1}^N f(\zeta_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$$

を分割 Δ に関するリーマン和 (Riemann sum) とよぶ. 次のような複素数 I が ($\{\zeta_k\}$ の取り方に依存せずに) 存在するとき, 「 f の曲線 C に沿った積分値が定まる」という:

任意の $\epsilon > 0$ にたいし $\delta_0 > 0$ が存在して $\delta(\Delta) < \delta_0$ ならば $|\Sigma(f, \Delta) - I| < \epsilon$

このとき $I = \int_C f(z) dz$ と表す.

複素線積分の計算. 複素線積分の計算には, 次の公式を用いる:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt$$

演習問題 (試験前特別号: 「練習 x-x」は試験範囲に含まれます!)

数値目標: 最低 20 個は積分値を計算すること!

練習 9-1 (復習: 実数の線積分). 以下の積分の C に曲線 $C_1: \mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = (t, 0) (t \in [-1, 1])$, $C_2: \mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = (t^2, t) (t \in [0, 1])$, $C_3: \mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = (\cos t, \sin t) (t \in [0, 2\pi])$ を代入して, 積分値を計算せよ.

$$(1) \int_C dx + dy \quad (2) \int_C x dx - y dy \quad (3) \int_C (x^2 - y^2) dx - 2xy dy$$

練習 9-1 (線積分). 以下の積分の C に曲線 $C_1: z = z(t) = (1 + i)t (t \in [0, 1])$ および $C_2: z = z(t) = t + it^2 (t \in [0, 1])$ を代入して, 積分値を計算せよ.

$$(1) \int_C z^2 dz \quad (2) \int_C (z - 1) dz \quad (3) \int_C (\bar{z} - 1) dz \quad (4) \int_C \operatorname{Re} z dz \quad (5) \int_C \bar{z}^2 dz$$

練習 9-3 (周回積分). $C(\alpha, r) = \{z(t) = \alpha + re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ とおき, 向きは t の増加方向 (左回り) とする. 次の積分を計算せよ.

$$(1) \int_C z^m dz \text{ ただし } C = C(0, r), r > 0 \text{ は任意, } m \text{ は整数.}$$

$$(2) \int_C \bar{z}^m dz \text{ ただし } C = C(0, r), r > 0 \text{ は任意, } m \text{ は整数.}$$

$$(3) \int_C \left\{ (z - 8)^4 + 8(z - 8)^4 + \frac{4}{z - 8} + \frac{8}{(z - 8)^4} \right\} dz \text{ ただし } C = C(8, 4), r > 0 \text{ は任意.}$$

レポート問題 9-1. 曲線 $C = \{z(t) : t \in [a, b]\}$ が $\alpha = z(a)$, $\beta = z(b) \in \mathbb{C}$ を満たすとき,

$$\int_C dz = \int_C 1 \cdot dz = \beta - \alpha$$

となることを 複素線積分の定義に基づいて 証明せよ.

まだまだ問題が続きます!

練習 10-1 (いろんな経路の積分). $z = -1$ から $z = 1$ を結ぶ経路を以下のように複数定める:

$$C_1: z = z(t) = e^{(\pi-t)i} \quad (t \in [0, \pi])$$

$$C_2: z = z(t) = t \quad (t \in [-1, 1])$$

$$C_3: z = z(t) = e^{ti} \quad (t \in [-\pi, 0])$$

$$C_4: z = z(t) = t + (|t| - 1)i \quad (t \in [-1, 1])$$

$$C_5: z = z(t) = t + (1 - |t|)i \quad (t \in [-1, 1])$$

ただし曲線の向きは t の増加方向に対応させる. すべての C_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) およびすべての負でない整数 m にたいし, $\int z^m dz$ および $\int_C \bar{z}^m dz$ を求めよ (コーシーの積分定理およびその系は用いてはならない.)

練習 10-2 (コーシーの積分定理). 曲線 C は単位円を左側向きにまわる曲線とする. このとき, 以下の積分値は 0 である. なぜか?

- (1) $\int_C e^z dz$ (2) $\int_C (\sin z + 3 \cos z) dz$ (3) $\int_C p(z) dz$ ($p(z)$ は z の多項式)
 (4) $\int_C \frac{1}{z-5} dz$ (5) $\int_C \frac{e^z}{z^2-8} dz$ (6) $\int_C \frac{1}{\sin(z+3i)} dz$

練習 10-3 (コーシーの定理の応用). 曲線 C は単位円を左側向きにまわる曲線とする. このとき, 以下の積分値を計算せよ.

- (1) $\int_C \frac{1}{z(z-2i)} dz$ (2) $\int_C \frac{1}{4z^2+1} dz$ (3) $\int_C \frac{1}{2z^2+3z-2} dz$

練習 10-4 (コーシーの定理の応用 2). 以下の曲線 C について, 積分

$$\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$$

を計算せよ. ただし $C(\alpha, r) = \{z(t) = \alpha + re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ とする.

- (1) $C = C(i, 1)$ (2) $C = C(-i, 1)$ (3) $C = C(0, 2)$ (4) $C = C(1, 1)$

練習 10-5 (コーシーの定理の応用 3). 正の数 a, b にたいし, 楕円 $E = \{z(t) = a \cos t + ib \sin t : t \in [0, 2\pi]\}$ を考える. ただし, 向きは左回りとする.

- (1) $\int_E \frac{1}{z} dz$ を求めよ.
 (2) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx = \frac{2\pi}{ab}$ を証明せよ.

レポート問題 10-1. $H(r) = \{z(t) = re^{it} : t \in [0, \pi]\}$ とし, 向きは t の増加方向とする.

- (1) $0 < r < R$ とするとき, 次が成り立つことを示せ:

$$\int_{H(r)} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{H(R)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

- (2) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$ を証明せよ.

練習問題 (6/30 配布分) の略解

練習 8-1. (1) $(e^z \sin z)' = e^z \cos z + e^z \sin z = e^z (\sin z + \cos z)$

(2) $(ze^{z^2})' = e^{z^2} + ze^{z^2} \cdot 2z = e^{z^2} (1 + 2z^2)$

(3) $(\tan z)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)' = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$

(4) $(\cos(z+z^2))' = -\sin(z+z^2) \cdot (z+z^2)' = -(1+2z)\sin(z+z^2)$

練習 8-2. (1) $f(x+yi) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix}$.

よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$. となり, 各成分は連続. したがって u, v は C^1 級. またコーシー・リーマンの方程式を満たすので, 定理 8-2 より $f(x+yi)$ は正則であり, $f'(z) = u_x + v_x i = 3(x^2 - y^2) + 6xyi$. (実は $f(z) = z^3$, $f'(z) = 3z^2$.)

(2) $f(x+yi) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-y} \cos x \\ e^{-y} \sin x \end{pmatrix}$. よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-y} \sin x & -e^{-y} \cos x \\ e^{-y} \cos x & -e^{-y} \sin x \end{pmatrix}$. となり, 各成分は連続. したがって u, v は C^1 級. またコーシー・リーマンの方程式を満たすので, 定理 8-2 より $f(x+yi)$ は正則であり, $f'(z) = u_x + v_x i = -e^{-y}(\sin x - i \cos x)$. (実は $f(z) = e^{iz}$, $f'(z) = ie^{iz}$.)

練習 8-3. $f(x+yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ とおく. $f(x+yi)$ が正則なので f はコーシー・リーマンの方程式を満たす. よって $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy \\ 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$. v_y を y で積分すると $\int v_y dy = 3x^2y - y^3 + g(x) = v$ と書ける. これを x で微分すると $v_x = 6xy + \frac{dg}{dx} = 6xy$ となるので $g(x)$ は定数関数 C である. よって $f(x+yi) = u + vi = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3 + C)i$ となり, $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C$ (C は定数) である.

練習 8-4. $z = x + yi$, $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ とする. $f'(z)$ が正則より, f はコーシー・リーマンの方程式を満たす.

(1) u が定数ならば, D 上で $u_x = u_y = 0$. コーシー・リーマンの方程式より $u_y = -v_x = 0$, $u_x = v_y = 0$. よって u, v は定数関数であり, $f(z)$ も定数関数.

(2) v が定数ならば, D 上で $v_x = v_y = 0$. コーシー・リーマンの方程式より $v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$. よって u, v は定数関数であり, $f(z)$ も定数関数.

(3) $|f(z)| = c$ (定数) とすると $|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = c^2$. $c = 0$ のとき, $f(z) = 0$ (定数関数) であるから, $c \neq 0$ と仮定してよい. 等式 $u^2 + v^2 = c^2$ 右側の等式を x, y でそれぞれ偏微分すると $\begin{pmatrix} 2uu_x + 2vv_x \\ 2uu_y + 2vv_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. コーシー・リーマンの方程式より $\begin{pmatrix} 2uu_x + 2vv_x \\ 2vu_x - 2uv_x \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $u^2 + v^2 = c^2 \neq 0$ より中央の行列は常に逆行列をもつから, $u_x = v_x = 0$. コーシー・リーマンの方程式より D 上で $u_y = -v_x = 0$, $v_y = u_x = 0$. よって u, v は定数関数であり, $f(z)$ も定数関数.

(4) $f'(z) = 0$ ならば, 定理 8-2 より $f'(z) = u_x + v_x i = 0$. すなわち D 上で $u_x = 0$, $v_x = 0$. これは (3) と同じなので $f(z)$ は定数関数.

コーシーの積分定理

作成日: July 14, 2011 Version: 1.1

前回 (7/7) のまとめ

以下 D は $\mathbb{C}$ 内の領域 (連結開集合) とし, 「曲線」といったらすべて区分的に滑らか (C^1) なものとする.

いま D 内の曲線 $C = \{z(t) \in D : t \in [a, b]\}$ と連続関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられているとき, f の C に沿った積分は公式

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt$$

を用いて計算できる. 左辺は抽象的に「仮想短冊の和の極限」として定義されているので, 意味は明解に伝わってくるが計算できる気がしない. 一方右辺は実区間上の積分なので計算できる可能性が増える. この公式の正当化は後回しにして, 計算の具体例をもう少しやっておこう.

具体例. $\alpha \in \mathbb{C}, r > 0$ にたいし,

$$C(\alpha, r) := \{z(t) = \alpha + re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$$

と定める. 向きは反時計回り (左回り, t の増加方向) である. このとき, 次の公式を示そう:

複素積分の基本公式. $m \in \mathbb{Z}, C = C(\alpha, r)$ とするとき, $r > 0$ の値によらず 次が成り立つ:

$$\int_C (z - \alpha)^m dz = \begin{cases} 0 & (m \neq -1) \\ 2\pi i & (m = -1) \end{cases}$$

この計算には, 次の「公式」を用いると便利である: $p \in \mathbb{R}$ とするとき,

$$(i) \quad z(t) = e^{ipt} \implies z'(t) = ipe^{ipt}.$$

$$(ii) \quad p \neq 0 \text{ のとき } \int_a^b e^{ipt} dt = \left[\frac{1}{ip} e^{ipt} \right]_a^b = \frac{1}{ip} (e^{ipb} - e^{ipa}).$$

「公式」の証明: (i) の概略. 写像 $t \mapsto ipt = w \mapsto e^w = z$ を考えると, $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dw} \frac{dw}{dt} = e^w \cdot (ip)$ を得る. 正確には微分の定義に基づき $\Delta z = e^w \Delta w + o(\Delta w)$, $\Delta w = ip\Delta t + o(\Delta t)$ を合成して $\Delta z = e^w(ip\Delta t) + o(\Delta t)$ と計算する. (ii) これは素直に実部と虚部に分けて計算する:

$$\int_a^b e^{ipt} dt = \int_a^b (\cos pt + i \sin pt) dt = \left[\frac{1}{p} (\sin pt - i \cos pt) \right]_a^b = \left[\frac{1}{ip} e^{ipt} \right]_a^b.$$

■

複素積分の基本公式の証明. $z(t) = \alpha + re^{it}$ より $z'(t) = ire^{it}$. よって

$$\begin{aligned} \int_C (z - \alpha)^m dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^m \cdot (ire^{it}) dt = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt \\ &= \begin{cases} ir^{m+1} \left[\frac{1}{(m+1)i} e^{i(m+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0 & (m \neq -1) \\ i \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi i & (m = -1). \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

基本公式の応用. 下の「複素積分の性質 (1)」を用いれば, $C = C(0, r)$ のとき

$$\int_C (z^{2011} + z^7 + 7 + \frac{3}{z}) dz = \int_C \frac{3}{z} dz = 3 \cdot 2\pi i = 6\pi i.$$

複素積分の性質. f, g が曲線 C 上で連続な複素関数であるとき, 次が成り立つ:

$$(1) \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ にたいし, } \int_C (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz.$$

$$(2) C = C_1 + C_2 \text{ のとき } \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

$$(3) -C \text{ を } C \text{ を逆方向へ進む曲線とすると } \int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$$

$$(4) \ell(C) \text{ を } C \text{ の長さ, } C \text{ 上で } |f(z)| \leq M \text{ のとき, } \left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \ell(C).$$

証明のスケッチ. (1) から (3) は積分の定義よりほとんど明らか. (4) の証明: C の任意の分割 $\Delta = \{z_k\}$ とその中間の点 $\{\zeta_k\}$ にたいし, そのリーマン和の絶対値について

$$|\Sigma(f, \Delta)| = \left| \sum_k f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_k |f(\zeta_k)| |z_k - z_{k-1}| \leq M \sum_k |z_k - z_{k-1}| \leq M \ell(C)$$

が成り立つ (ここで, 最初の不等号では三角不等式を用いた. また右端の不等号は, 分割で C を折れ線近似したその長さと C の長さを比較したもの.) 上の評価式はすべての分割について成立するので, $\delta(\Delta) \rightarrow 0$ とした極限をとって (4) を得る. ■

コーシーの積分定理

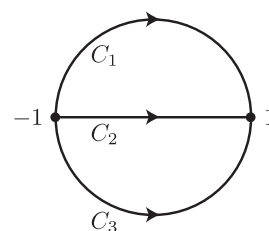
積分の経路と積分値: z^m vs. $\bar{z}^m$. 複素線積分の値は, 当然ながら経路に依存する. たとえば $z = -1$ から $z = 1$ に進む曲線 C_i をいくつか考えて, 積分 $\int_C z^m dz$ と $\int_C \bar{z}^m dz$ が曲線にどのように依存するか計算してみよう. 話を簡単にするために, m は負でない整数とする (練習問題 10-1 はまさにこの計算である.)

たとえば $f(z) = z^m$ について, 次の曲線に沿った積分を考える:

$$C_1 : z = z(t) = e^{(\pi-t)i} \quad (t \in [0, \pi])$$

$$C_2 : z = z(t) = t \quad (t \in [-1, 1])$$

$$C_3 : z = z(t) = e^{ti} \quad (t \in [-\pi, 0])$$



(ただし曲線の向きは t の増加方向). 練習問題 10-1 の解答のように積分値を計算すると, 結果は次のように一致してしまう:

$$\int_{C_1} z^m dz = \int_{C_2} z^m dz = \int_{C_3} z^m dz = \begin{cases} \frac{2}{m+1} & (m \text{ は偶数}) \\ 0 & (m \text{ は奇数}) \end{cases}.$$

個々の積分は「仮想短冊」の和の極限であったから, これらの積分が一致する根拠は見当たらない.

¹一方で, この結果と「複素積分の性質 (1)」から, 任意の多項式 $P(z) = a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0$

¹ちなみに $\int_{C_3+(-C_1)} = \int_{C(0,1)} = 0$ より, $\int_{C_3} = -\int_{-C_1} = \int_{C_1}$ となる.

について $\int_{C_1} P(z) dz = \int_{C_2} P(z) dz = \int_{C_3} P(z) dz$ が成立してしまうのだから, 偶然の一致とは考えがたい. ちなみに $g(z) = \bar{z}^m$ の場合は

$$\int_{C_1} \bar{z}^m dz = \int_{C_3} \bar{z}^m dz \neq \int_{C_2} \bar{z}^m dz$$

となってしまうから, どんな関数でも成り立つ現象ではないようだ. これを説明するのが, 複素関数論のクライマックスとも言える, 次の定理である:

コーシーの積分定理 (Cauchy's Integral Theorem): D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし, C を D 内の 単純閉曲線 とする. このとき, 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が正則であれば,

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

単連結領域. 先走って定理を述べてしまったので, 下線部の用語を定義しておこう. いま単純閉曲線 (simple closed curve, 略して s.c.c.) とは, 自己交差しない閉曲線のことであった. $\mathbb{C}$ 上に単純閉曲線 C が与えられたとき, $\mathbb{C} - C$ はふたつの領域からなる (「Jordan の曲線定理」²). そのうち有界なほうを C の内部 (interior) とよび, 有界でないほうを C の外部 (exterior) とよぶ. いま, 領域 $D \subset \mathbb{C}$ が単連結 (simply connected) であるとは, D に含まれる任意の単純閉曲線 C について, その内部が D に含まれることをいう. 端的に言えば, D に穴があいてないことをいう.



左は文句なしに単連結, 中央は単連結でない, しかし右のように切り込み (スリット) を入れたものは単連結.

コーシーの積分定理の応用例. 多項式 $P(z)$ を任意にとれば, これは $D = \mathbb{C}$ (明らかに単連結) において正則な関数である. 先ほどの曲線 C_1 と C_2 にたいし $C = C_2 + (-C_1)$ とすれば, これは $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線である. コーシーの積分定理より,

$$\int_{C_2+(-C_1)} = \int_C = 0 \iff \int_{C_2} = -\int_{-C_1} = \int_{C_1}$$

となり, 先ほどの不思議な一致現象が説明される. この結果を一般化したものが, 次の定理である:

コーシーの積分定理の系 (積分路の変形): D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし, 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とする. このとき, 任意の $\alpha, \beta \in D$ および任意の α から β への曲線 $C_1, C_2 \subset D$ にたいし,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

これは『単連結領域 上の正則関数の線積分は端点だけで値が決定される』, もしくは『端点を固定していれば積分路は自由に変形してよい』, という強烈な結果である.³ ここで 単連結領域 と下線を引いて強調しているのは, この性質がコーシーの定理にとって本質的だからである. たとえば $D = \mathbb{C} - \{0\}$ とすると, これは単連結ではない領域である. D 上で正則な $f(z) = 1/z$ と

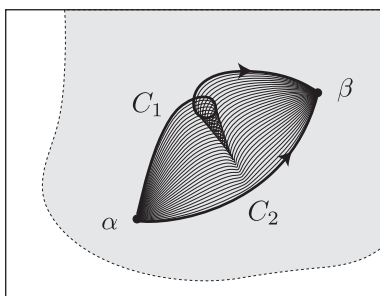
²これは自明 (あたりまえ) ではなく, ちゃんと証明がつけられている. ちなみにドーナツの表面 T の場合, うまく単純閉曲線 C をとると $T - C$ がふたつに分割されないようにできる.

³変形というのは, 連続的に変形させることを意味する. ちなみに, この系における C_1 たちは自己交差してもよい.

いう関数は, その上の単純閉曲線である単位円 $C = C(0, 1)$ について $\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$ となり, コーシーの積分定理が成立しない. まだ, 先ほど (練習 10-1 の) の C_1, C_3 について,

$$\int_{C_3+(-C_1)} = 2\pi i \iff \int_{C_3} = \int_{C_1} + 2\pi i \neq \int_{C_1}$$

となり, 端点が同じでも積分路に応じて積分値が変化してしまう.⁴



D の中にあれば, 積分路を C_1 から C_2 へ図のように連続的に変化させても積分の値は変わらない. むしろ, このような連続的な変形が存在することが証明の鍵になる.

練習問題 (7/7 配布分) の略解

練習 9-1. $C_1: (x(t), y(t)) = (t, 0)$ より $(x'(t), y'(t)) = (1, 0)$. よって $dx = 1 \cdot dt, dy = 0 \cdot dt$.

$C_2: (x(t), y(t)) = (t^2, t)$ より, $(x'(t), y'(t)) = (2t, 1)$. よって $dx = 2t \cdot dt, dy = 1 \cdot dt$.

$C_3: (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ より, $(x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t)$. よって $dx = -\sin t \cdot dt, dy = \cos t \cdot dt$.

$$(1) \int_{C_1} dx + dy = \int_{-1}^1 (1 \cdot dt + 0 \cdot t) = \int_{-1}^1 dt = 2.$$

$$\int_{C_2} dx + dy = \int_0^1 (2t \cdot dt + 1 \cdot dt) = \int_0^1 (2t + 1) dt = 2.$$

$$\int_{C_3} dx + dy = \int_0^{2\pi} (-\sin t \cdot dt + \cos t \cdot dt) = \int_0^{2\pi} (-\sin t + \cos t) dt = 0.$$

$$(2) \int_{C_1} x dx - y dy = \int_{-1}^1 (t \cdot dt + 0 \cdot dt) = \int_{-1}^1 t dt = 0.$$

$$\int_{C_2} x dx - y dy = \int_0^1 (t^2 \cdot 2t dt - t \cdot dt) = \int_0^1 (2t^3 - t) dt = 0.$$

$$\int_{C_3} x dx - y dy = \int_0^{2\pi} (\cos t \cdot (-\sin t) dt - \sin t \cdot \cos t \cdot dt) = - \int_0^{2\pi} \sin 2t dt = 0.$$

$$(3) \int_{C_1} (x^2 - y^2) dx - 2xy dy = \int_{-1}^1 (t^2 \cdot dt - 0 \cdot dt) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

$$\int_{C_2} (x^2 - y^2) dx - 2xy dy = \int_0^1 ((t^4 - t^2) \cdot 2t dt - 2t^3 \cdot dt) = \int_0^1 (2t^5 - 4t^3) dt = -\frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int_{C_3} (x^2 - y^2) dx - 2xy dy &= \int_0^{2\pi} \{(\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot (-\sin t) dt - 2 \cos t \sin t \cdot \cos t dt\} \\ &= - \int_0^{2\pi} (\cos 2t \sin t + \sin 2t \cos t) dt = - \int_0^{2\pi} \sin 3t dt = 0. \end{aligned}$$

練習 9-2. $C_1: z = z(t) = (1+i)t$ より, $dz = (1+i) dt$.

$C_2: z = z(t) = t + t^2 i$ より, $dz = (1 + 2ti) dt$.

$$(1) \int_{C_1} z^2 dz = \int_0^1 \{(1+i)t\}^2 \cdot (1+i) dt = (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

$$\int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 (t + t^2 i)^2 \cdot (1 + 2ti) dt = \int_0^1 (t^2 + 4t^3 i - 5t^4 - 2t^5 i) dt = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

⁴領域 D には $z = 0$ という穴があいているために, C_1 から C_3 へ, 端点を固定したまま積分路を連続的に変形できない. じつはこのことが, コーシーの定理の成立を阻害するのである.

$$(2) \int_{C_1} (z-1) dz = \int_0^1 \{(1+i)t-1\} \cdot (1+i) dt = \int_0^1 (2it-i-1) dt = -1.$$

$$\int_{C_2} (z-1) dz = \int_0^1 (t+t^2i-1) \cdot (1+2ti) dt = \int_0^1 (-2t^3+3t^2i-2ti+t-1) dt = -1.$$

注意. $z^2, z-1$ は複素平面全体で正則なので, 積分値は積分路の始点と終点だけで定まる. また, 不定積分 $z^3/3, z^2/2 - z$ を用いた計算 $\int_{C_1} = \int_{C_2} = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3}, \int_{C_1} = \int_{C_2} = \left[\frac{z^2}{2} - z \right]_0^{1+i} = -1$ も意味をもつ.

$$(3) \int_{C_1} (\bar{z}-1) dz = \int_0^1 \{(1-i)t-1\} \cdot (1+i) dt = \int_0^1 (2t-1-i) dt = -i.$$

$$\int_{C_2} (\bar{z}-1) dz = \int_0^1 (t-t^2i-1) \cdot (1+2ti) dt = \int_0^1 (2t^3+t^2i-2ti+t-1) dt = -\frac{2}{3}i.$$

$$(4) \int_{C_1} \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t \cdot (1+i) dt = \frac{1+i}{2}.$$

$$\int_{C_2} \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t \cdot (1+2ti) dt = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i.$$

$$(5) \int_{C_1} \bar{z}^2 dz = \int_0^1 \{(1-i)t\}^2 \cdot (1+i) dt = (1-i)^2(1+i) \int_0^1 t^2 dt = \frac{2-2i}{3}.$$

$$\int_{C_2} \bar{z}^2 dz = \int_0^1 (t-t^2i)^2 \cdot (1+2ti) dt = \int_0^1 (t^2+3t^4-2t^5i) dt = \frac{14}{15} - \frac{1}{3}i.$$

練習 9-3. $C = C(0, r) = \{z(t) = re^{ti} : t \in [0, 2\pi]\}$ より, $dz = rie^{ti} dt$.

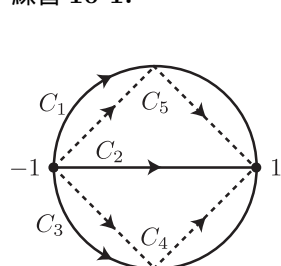
$$(1) \int_C z^m dz = \int_0^{2\pi} (re^{ti})^m \cdot rie^{ti} dt = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{t(m+1)i} dt = \begin{cases} ir^{m+1} \left[\frac{e^{t(m+1)i}}{(m+1)i} \right]_0^{2\pi} = 0 & (m \neq -1) \\ i \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi i. & (m = -1) \end{cases}$$

$$(2) \int_C \bar{z}^m dz = \int_0^{2\pi} (re^{-ti})^m \cdot rie^{ti} dt = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{t(1-m)i} dt = \begin{cases} ir^{m+1} \left[\frac{e^{t(1-m)i}}{(1-m)i} \right]_0^{2\pi} = 0 & (m \neq 1) \\ ir^2 \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi r^2 i. & (m = 1) \end{cases}$$

(3) $C = C(8, 4) = \{z(t) = 8 + 4e^{ti}; t \in [0, 2\pi]\}$. $z-8 = \zeta$ とすると,

(与式) $= \int_{C(0,4)} (\zeta^4 + 8\zeta^4 + \frac{4}{\zeta} + \frac{8}{\zeta^4}) d\zeta = 4 \int_{C(0,4)} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 8\pi i$. ただし, (1) の結果を用いた (公式 1 を直接用いてもよい.)

練習 10-1.



$C_1 : z = z(t) = e^{(\pi-t)i} = -e^{-ti}$ より, $dz = ie^{-ti} dt$.

$C_2 : z = z(t) = t$ より, $dz = 1 \cdot dt = dt$.

$C_3 : z = z(t) = e^{ti}$ より, $dz = ie^{ti} dt$.

C_4 (左図点線): $z = z(t) = t + (|t|-1)i$ より,

$-1 \leq t \leq 0$ のとき $z = t + (-t-1)i, dz = (1-i) dt$,

$0 \leq t \leq 1$ のとき $z = t + (t-1)i, dz = (1+i) dt$.

C_5 (左図点線): $z = z(t) = t + (1-|t|)i$ より,

$-1 \leq t \leq 0$ のとき $z = t + (t+1)i, dz = (1+i) dt$,

$0 \leq t \leq 1$ のとき $z = t + (-t+1)i, dz = (1-i) dt$.

$$(1) \int_{C_1} z^m dz = \int_0^\pi (-e^{-ti})^m \cdot ie^{-ti} dt = (-1)^m i \int_0^\pi e^{-(m+1)ti} dt = (-1)^m i \left[\frac{e^{-(m+1)ti}}{-(m+1)i} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} \{e^{-(m+1)\pi i} - 1\} = \begin{cases} \frac{2}{m+1} & (m \text{ は偶数}) \\ 0 & (m \text{ は奇数}) \end{cases}.$$

$$\int_{C_2} z^m dz = \int_{-1}^1 t^m \cdot dt = \left[\frac{1}{m+1} t^{m+1} \right]_{-1}^1 = \begin{cases} \frac{2}{m+1} & (m \text{ は偶数}) \\ 0 & (m \text{ は奇数}) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}\int_{C_3} z^m dz &= \int_{-\pi}^0 (e^{ti})^m \cdot i e^{ti} dt = \left[\frac{1}{m+1} e^{(m+1)ti} \right]_{-\pi}^0 = \begin{cases} \frac{2}{m+1} & (m \text{ は偶数}) \\ 0 & (m \text{ は奇数}) \end{cases} . \\ \int_{C_4} z^m dz &= \int_{-1}^0 \{t - (t+1)i\}^m \cdot (1-i) dt + \int_0^1 \{t + (t-1)i\}^m \cdot (1+i) dt \\ &= \int_{-1}^0 \{(1-i)t-i\}^m \cdot (1-i) dt + \int_0^1 \{(1+i)t-i\}^m \cdot (1+i) dt = \left[\frac{\{(1-i)t-i\}^{m+1}}{m+1} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{\{(1+i)t-i\}^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{m+1} \{(-i)^{m+1} - (-1)^{m+1}\} + \frac{1}{m+1} \{1^{m+1} - (-i)^{m+1}\} = \begin{cases} \frac{2}{m+1} & (m \text{ は偶数}) \\ 0 & (m \text{ は奇数}) \end{cases} .\end{aligned}$$

C_4 の場合と同様にして,

$$\begin{aligned}\int_{C_5} z^m dz &= \int_{-1}^0 \{t + (t+1)i\}^m \cdot (1+i) dt + \int_0^1 \{t + (1-t)i\}^m \cdot (1-i) dt \\ &= \frac{1}{m+1} \{1 - (-1)^{m+1}\} = \begin{cases} \frac{2}{m+1} & (m \text{ は偶数}) \\ 0 & (m \text{ は奇数}) \end{cases} . \\ (2) \int_{C_1} \bar{z}^m dz &= \int_0^\pi (-e^{ti})^m \cdot i e^{-ti} dt = (-1)^m i \int_0^\pi e^{(m-1)ti} dt. \text{ この値を } I_1 \text{ とおくと,} \\ m \neq 1 \text{ のとき, } I_1 &= \left[\frac{(-1)^m}{m-1} e^{(m-1)ti} \right]_0^\pi = \begin{cases} \frac{2}{1-m} & (m \text{ は偶数}) \\ 0 & (m \text{ は奇数, } m \neq 1) \end{cases} . \\ m = 1 \text{ のとき, } I_1 &= -i \int_0^\pi 1 \cdot dt = -\pi i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \bar{z}^m dz &= \int_{-1}^1 t^m \cdot dt = \left[\frac{1}{m+1} t^{m+1} \right]_{-1}^1 = \begin{cases} \frac{2}{m+1} & (m \text{ は偶数}) \\ 0 & (m \text{ は奇数, } m \neq 1) \end{cases} . \\ \int_{C_3} \bar{z}^m dz &= \int_{-\pi}^0 (e^{-ti})^m \cdot i e^{ti} dt = \int_{-\pi}^0 i e^{t(1-m)i} dt. \text{ この値を } I_3 \text{ とおくと,} \\ m \neq 1 \text{ のとき, } I_3 &= \left[\frac{1}{1-m} e^{(1-m)ti} \right]_{-\pi}^0 = \begin{cases} \frac{2}{1-m} & (m \text{ は偶数}) \\ 0 & (m \text{ は奇数, } m \neq 1) \end{cases} . \\ m \neq 1 \text{ のとき, } I_3 &= \int_{-\pi}^0 i dt = \pi i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_4} \bar{z}^m dz &= \int_{-1}^0 \{t + (t+1)i\}^m \cdot (1-i) dt + \int_0^1 \{t - (t-1)i\}^m \cdot (1+i) dt \\ &= \int_{-1}^0 \{(1+i)t+i\}^m \cdot (1-i) dt + \int_0^1 \{(1-i)t+i\}^m \cdot (1+i) dt \\ &= \left[\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{\{(1+i)t+i\}^{m+1}}{m+1} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{\{(1-i)t+i\}^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 = \frac{-i}{m+1} \{i^{m+1} - (-1)^{m+1}\} + \frac{i}{m+1} \{1 - i^{m+1}\} \\ &= \frac{i}{m+1} \{1 + (-1)^{m+1} - 2i^{m+1}\} = \begin{cases} \frac{2}{m+1} & (m = 0, 4, 8, \dots) \\ \frac{4i}{m+1} & (m = 1, 5, 9, \dots) \\ \frac{-2}{m+1} & (m = 2, 6, 10, \dots) \\ 0 & (m = 3, 7, 11, \dots) \end{cases} .\end{aligned}$$

C_4 の場合と同様にして

$$\begin{aligned}\int_{C_5} \bar{z}^m dz &= \int_{-1}^0 \{t - (t+1)i\}^m \cdot (1-i) dt + \int_0^1 \{t + (t-1)i\}^m \cdot (1+i) dt \\ &= \frac{1}{m+1} \{-1 - (-1)^{m+1} + 2(-i)^{m+1}\} = \begin{cases} \frac{2}{m+1} & (m \equiv 0 \pmod{4}) \\ \frac{-4i}{m+1} & (m \equiv 1 \pmod{4}) \\ \frac{-2}{m+1} & (m \equiv 2 \pmod{4}) \\ 0 & (m \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases} .\end{aligned}$$

練習 10-2.

- (1) e^z は複素平面全体で正則. とくに C は単純閉曲線なので, コーシーの積分定理より $\int_C e^z dz = 0$.
- (2) $\sin z + 3 \cos z$ は複素平面全体で正則. (1) と同じ理由で $\int_C (\sin z + 3 \cos z) dz = 0$.
- (3) $p(z)$ は z の多項式なので複素平面全体で正則. (1) と同じ理由で $\int_C p(z) dz = 0$.
- (4) $\frac{1}{z-5}$ は $z=5$ 以外で正則. とくに C 上および C の囲む単位円板内で正則なので, コーシーの積分定

理より $\int_C \frac{1}{z-5} dz = 0$.

(5) $\frac{e^z}{z^2-8}$ は $z = \pm 2\sqrt{2}$ 以外で正則. とくに $z = \pm 2\sqrt{2}$ は C 及び C の内部に含まれない. よってコーシーの積分定理より $\int_C \frac{e^z}{z^2-8} dz = 0$.

(6) $\frac{1}{\sin(z+3i)}$ は $\sin(z+3i) = 0$ をみたま z 以外で正則. $\sin w = 0 \iff w = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) より $z = n\pi - 3i$. $z = n\pi - 3i$ は C 及び C の内部に含まれないので, コーシーの積分定理より $\int_C \frac{e^z}{z^2-8} dz = 0$.

基本公式その 2. 以下の問題では次の基本公式を用いる (「複素積分の基本公式」に似ているが違いをちゃんと認識すること):

$$C \text{ を単純閉曲線とするととき, } \int_C \frac{1}{z-\alpha} dz = \begin{cases} 2\pi i & (\alpha \text{ が } C \text{ の内部にあるとき}) \\ 0 & (\alpha \text{ が } C \text{ の外部にあるとき}) \end{cases}$$

ちなみに α が C 上にある場合, 積分自体が定義できない.

練習 10-3.

(1) $\int_C \frac{1}{z(z-2i)} dz = \int_C \frac{1}{-2i} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-2i} \right) dz = \frac{i}{2} \left\{ \int_C \frac{1}{z} dz - \int_C \frac{1}{z-2i} dz \right\}$. $z=0$ は C の内部, $z=2i$ は C の外部にあるので, (求める積分) $= \frac{i}{2} (2\pi i - 0) = -\pi$.

(2) $\int_C \frac{1}{4z^2+1} dz = \int_C \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{z-\frac{i}{2}} - \frac{1}{z+\frac{i}{2}} \right) dz$. $z = \pm i/2$ は共に C の内部にあるので,

(求める積分) $= \frac{1}{4i} (2\pi i - 2\pi i) = 0$.

(3) $\int_C \frac{1}{2z^2+3z-2} dz = \int_C \frac{1}{5} \left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}} - \frac{1}{z+2} \right) dz$. $z = \frac{1}{2}$ は C の内部にあり, $z = -2$ は C の外部にあるので, (求める積分) $= \frac{1}{5} (2\pi i - 0) = \frac{2}{5}\pi i$.

練習 10-4.

$$\int_C \frac{1}{z^2+1} dz = \int_C \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz.$$

(1) $C = C(i, 1)$ のとき, $z = i$ は C の内部, $z = -i$ は C の外部にあるので,

$$\int_C \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i} (2\pi i - 0) = \pi.$$

(2) $C = C(-i, 1)$ のとき, $z = -i$ は C の内部, $z = i$ は C の外部にあるので,

$$\int_C \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i} (0 - 2\pi i) = -\pi.$$

(3) $C = C(0, 2)$ のとき, $z = \pm i$ はともに C の内部にあるので,

$$\int_C \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i} (2\pi i - 2\pi i) = 0.$$

(4) $C = C(1, 1)$ のとき, $z = \pm i$ はともに C の外部にあるので,

$$\int_C \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i} (0 - 0) = 0.$$

練習 10-5.

(1) $\frac{1}{z}$ は $z=0$ 以外で正則. $z=0$ は E の内部にあるので $\int_E \frac{1}{z} dz = 2\pi i$.

(2) 一方, $\int_E \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin t + ib \cos t}{a \cos t + ib \sin t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{(-a^2 + b^2) \sin t \cos t}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt + abi \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$

なので, (1) の結果と虚部を比較して $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab}$.

コーシーの積分定理 (2)

作成日: July 21, 2011 Version: 1.1

- ・レポートの返却期間は7月25日~29日とします。研究室まで取りにきてください。留守にしている場合もありますので、メール等で事前に確認することをお勧めします。
- ・レポートを通算で10問以上(1-1, 1-2を解けば2問と計算)解いた人は、上記期間中に自己申告してください。これまで配布したプリントのカラー版を差し上げます。
- ・確実に研究室にいる時間帯: 26日 15~18時・いない時間帯: 27日 13~18時

前回 (7/14) のまとめと補足

以下 D は $\mathbb{C}$ 内の領域 (連結開集合) とし, 「曲線」といったらすべて区分的に滑らか (C^1) なものとする。

A. コーシーの積分定理 (Cauchy's Integral Theorem): D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし, C を D 内の 単純閉曲線 とする。このとき, 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が 正則 であれば,

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

B. 系 (積分路の変形): D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし, 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は 正則 とする。このとき, 任意の $\alpha, \beta \in D$ および任意の α から β への曲線 $C_1, C_2 \subset D$ にたいし,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

A $\implies$ B の証明 (スケッチ). C_i を交差点 (自己交差する点も含む) で分割すれば, 結局は $C_1 + (-C_2)$ が単連結領域を囲む場合に帰着される。このとき, 積分定理 A より $\int_{C_1 + (-C_2)} = 0 \iff \int_{C_1} = - \int_{-C_2} = \int_{C_2}$.

系 B の補足. 系 B の仮定のもと, $\alpha \in D$ を固定し $z \in D$ を変数とすると, α から z へいたる D 内の任意の曲線 C_z を選ぶことで, 関数

$$F(z) := \int_{C_z} f(\zeta) d\zeta$$

が定まる。この積分値は C_z に依存せずに端点だけで決定されるので, そのような場合に限り, $F(z) = \int_{\alpha}^z f(\zeta) d\zeta$ のように書くことも許される。また, $F(z)$ は $F(\alpha) = 0$ かつ $F'(z) = f(z)$ をみたす D 上の正則関数であることも証明できる。

一般に, 関数 $f(z)$ にたいし, $G'(z) = f(z)$ をみたす関数 G を f の原始関数 (primitive function) とよぶ。上の $F(z)$ を用いれば, 原始関数は常に $G(z) = F(z) + (\text{定数})$ の形であることがわかる。とくに

$$\int_{\alpha}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(\alpha) = G(z) - G(\alpha)$$

が成り立つから, 積分の計算にも応用できる。たとえば $2z+1$ は (単連結である) 複素平面上で正則かつ z^2+z を原始関数にもつから, C を 0 から i へいたる任意の曲線 (好きなだけ回り道してよい) とするとき,

$$\int_C (2z+1) dz = \int_0^i (2z+1) dz = \left[z^2 + z \right]_0^i = -1 + i$$

といった計算が成立する。あくまで 単連結領域上の正則関数 に限って, の話だが。

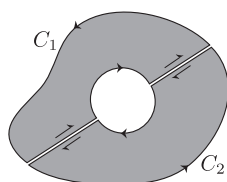
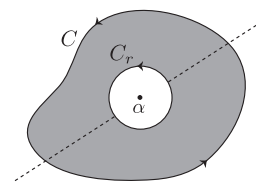
A の応用.

複素積分の基本公式 2 任意の単純閉曲線 C にたいし、次が成り立つ:

$$\int_C \frac{1}{z - \alpha} dz = \begin{cases} 2\pi i & (\alpha \text{ が } C \text{ の内部にあるとき}) \\ 0 & (\alpha \text{ が } C \text{ の外部にあるとき}) \end{cases}$$

ちなみに α が C 上にあるときは、積分自体が定義できない。

基本公式 2 の証明. α が C の内部にあるとき: 十分小さな $r > 0$ を固定すると $C_r := C(\alpha, r)$ は C の内部にあるとしてよい. また「複素積分の基本公式」(前回のプリント)より, $\int_{C_r} \frac{1}{z - \alpha} dz = 2\pi i$.



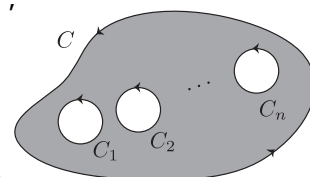
いま, 図のように C の内部を分割して, 単純閉曲線 C_1 と C_2 を考えよう. 各 C_i ($i = 1, 2$) について, C_i の内部を少し膨らませた単連結領域 D_i をとれば, $\frac{1}{z - \alpha}$ は D_i 上正則かつ $C_i \subset D_i$ とできる. よって A (積分定理) より $\int_{C_1} = \int_{C_2} = 0$. また切り込みをいれた部分の積分は相殺されるから,

$$0 = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_C + \int_{-C_r} \iff \int_C = \int_{C_r} = 2\pi i.$$

α が C の外部にあるときは, C と C の内部を含む単連結領域上にたいして A (積分定理) が適用できる. ■

注意. 一般に単純閉曲線 C と $C_1, \dots, C_n$ が右図のように与えられているとき, 影のついた部分で正則な関数の積分は

$$\int_C = \int_{C_1} + \dots + \int_{C_n}$$



をみたら. 証明は単純で, 上の応用例のように全体を一刀両断する切り込みを入れればよい.

基本公式 2 の応用. $C = C(i, 1)$ (左回り) とするとき,

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 2} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

が成り立つことを示そう. 被積分関数を $\frac{1}{z^2 + 2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}i} \left(\frac{1}{z - \sqrt{2}i} - \frac{1}{z + \sqrt{2}i} \right) \text{ のように変形すれば,}$$

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 2} dz = \frac{1}{2\sqrt{2}i} \left(\int_C \frac{1}{z - \sqrt{2}i} dz - \int_C \frac{1}{z + \sqrt{2}i} dz \right).$$

$\sqrt{2}i$ は C の内部, $-\sqrt{2}i$ は C の外部にあるので, 基本公式 2 より求める積分は $\frac{1}{2\sqrt{2}i} (2\pi i - 0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

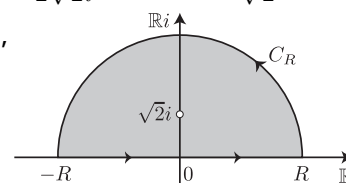
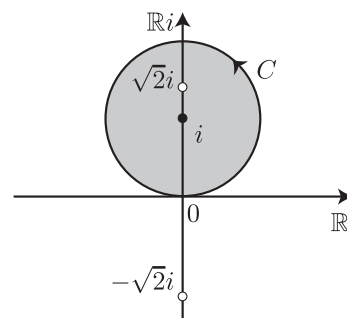
発展: 「基本公式 2 の応用」のさらなる応用. 実 1 変数の広義積分に応用して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

が成り立つことを示そう.

$R > \sqrt{2}$ とし $I_R = \int_{-R}^R \frac{1}{x^2 + 2} dx$ とおく. さらに, $C_R := \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$ (半円) とおく. このとき, 上と同様の議論によって

$$\int_{C_R} \frac{1}{z^2 + 2} dz + I_R = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$



が成り立つ．いま $R > \sqrt{2}$ より, $z \in C_R$ のとき

$$\left| \frac{1}{z^2 + 2} \right| \leq \frac{1}{|z|^2 - 2} = \frac{1}{R^2 - 2} > 0$$

であるから, 前回のプリント・複素積分の性質 (4) より,

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{z^2 + 2} dz \right| \leq \frac{1}{R^2 - 2} \cdot \ell(C_R) = \frac{\pi R}{R^2 - 2} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

が成り立つ．したがって $I_R \rightarrow \pi/\sqrt{2}$.

A. 積分定理の証明. $\mathbb{R}^2$ 上の線積分については既知として話を進める．あとに続く「平面ベクトル解析に関する補遺」も参照のこと．証明は 3 ステップ (ア～ウ) に分かれる:

(ア) $\mathbb{C}$ から $\mathbb{R}^2$ へ.

命題 1. 曲線 C 上で定義された連続関数 $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ にたいし, 次が成り立つ:

$$\int_C f(z) dz = \left(\int_C u dx - v dy \right) + i \left(\int_C v dx + u dy \right).$$

括弧内の積分はそれぞれ実の線積分である.

証明. 曲線 Δ の分割 $\{z_k\}$ にたいし, リーマン和 $\sum_k f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$ を考える. ただし, ζ_k は C 上で z_{k-1} と z_k の間にある点である. いま $f(\zeta_k) = u_k + v_k i$ および $z_k = x_k + y_k i$ のように実部と虚部に分けると,

$$\sum_k f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_k (u_k + v_k i) \{ (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) \}$$

が成立する. さらに $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ とおくと, この式は

$$\sum_k (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_k (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k)$$

となる. ここで $\delta(\Delta) \rightarrow 0$ とすると, $\max \{|\Delta x_k|, |\Delta y_k|\} \rightarrow 0$ であるから, 線積分の定義より

$$\sum_k (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) \rightarrow \int_C u dx - v dy$$

が成り立つ. 虚部についても同様に線積分に収束し, 命題の等式を得る. ■

注意. 変数変換の公式 $\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt$ も, 線積分の変数変換公式 $\int_C u(x, y) dx = \int_a^b u(x(t), y(t)) \cdot x'(t) dt$ などを用いて正当化される.

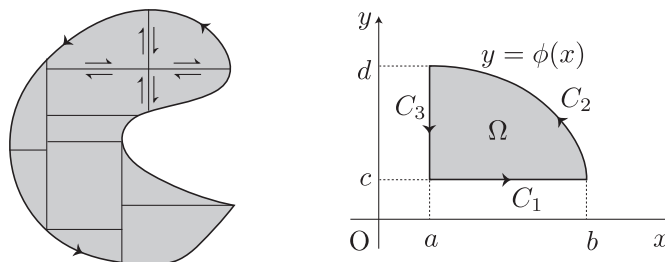
(イ) グリーンの定理.

グリーンの定理 (Green's Theorem) C を $\mathbb{R}^2$ 内の単純閉曲線とし, その内部を Ω と表す. 関数 $P(x, y)$ は $Q(x, y)$ 上で C^1 であるとき, 次が成り立つ:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_{\Omega} (-P_y + Q_x) dx dy$$

この定理もコーシーの定理と同様の不思議に満ちている. 左辺は線積分は曲線上だけを歩いて計算できる積分値である. それが右辺の, 定義上は曲線の内部の領域をくまなく測量しなければ得られないはずの面積分の値と一致してしまうのである.

証明. 必要なタテ・ヨコの線分で分割して, 図の右側のような領域 ($C = C_1 + C_2 + C_3$) について定理を証明すればよい. なぜなら, 分割線上の積分は相殺されるし, 領域を分割したら面積分も分割されるからである.



図のような領域は縦線集合であり横線集合でもあるから、積分の計算と相性がよい。いま、 C_2 のグラフは $y = \phi(x)$ と表されるとしよう。このとき、たとえば $P(x, y)$ の場合、

$$\begin{aligned}
 \int_C P dx &= \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx + \int_{C_3} P dx \\
 &= \int_a^b P(x, c) dx + \int_b^a P(x, \phi(x)) dx + \int_a^a P(a, y) dy \\
 &= - \int_a^b \{P(x, \phi(x)) - P(x, c)\} dx + 0 \\
 &= - \int_a^b \left\{ \int_c^{\phi(x)} P_y(x, y) dy \right\} dx \\
 &= - \iint_{\Omega} P_y dx dy
 \end{aligned}$$

となる。下線部では x を固定して、いわゆる微積分の基本定理を用いた。同様の計算で

$$\int_C Q dy = \iint_{\Omega} Q_x dx dy$$

も得るから、グリーンの定理が成り立つ。 ■

(ウ) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{C}$ へ: A の証明。いま単連結領域 D 上で正則な関数 f を $f(x+yi) = u(x, y) + iv(x, y)$ と実部・虚部に分ける。このとき u, v は C^1 関数となることが知られているから、¹ グリーンの定理が適用できる。 C を D 内の任意の単純閉曲線とし Ω を C の内部とすると、グリーンの定理に $(P, Q) = (u, -v)$ もしくは (v, u) と代入して

$$\begin{aligned}
 \int_C u dx - v dy &= \iint_{\Omega} (-u_y - v_x) dx dy \\
 \int_C v dx + u dy &= \iint_{\Omega} (-v_y + u_x) dx dy
 \end{aligned}$$

を得る。 f は正則であったから、 D 上でコーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y, v_x = -u_y$ が成り立つ。これを代入すれば、上の積分値はともに 0 となることがわかる。したがって命題 1 より、複素積分 $\int_C f(z) dz$ は 0。 ■

ベクトル解析に関する補遺

ベクトル場と線積分。線積分で登場する $\int_C u(x, y) dx$ といった形の積分は、2 変数なのに積分は一方のみで、不自然な感じがする。しかしその由来を知れば、これもアリかな、という気持ちになるものである。

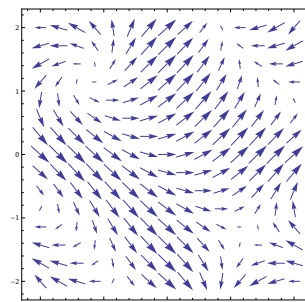
¹ 正則性の定義では導関数の存在だけを要求し、その連続性は気にしていないことに注意。グルサ (Goursat) の定理によれば、正則関数の導関数の連続性を仮定しなくても、コーシーの積分定理・積分公式が成り立つ。このことから、正則関数の実部・虚部の偏微分が連続であることが帰着されるのである。

いま, $V = V(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ で与えられる $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場を考える. ベクトル場の数学的表現は連続写像 $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ なのだが, 直感的には風速 (風の向きと強さ) を表現する矢印の場 (field) である. ちょうど, 麦畑 (field) の麦が風になびくように, ベクトル場では矢印が何らかの力によってなびいている. 曲線 $C = \left\{ p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} : t \in [a, b] \right\}$ があるとき, 複素線積分のときと同様にして分割 $\Delta = \{p_k\}_k$ が考えられる. さらに $\Delta p_k := p_k - p_{k-1}$ とおくことで, リーマン和

$$\Sigma(V, \Delta) = \sum_k V(p_{k-1}) \cdot \Delta p_k \quad (\text{内積の和})$$

が考えられる (短冊の面積のかわりに, ベクトルの内積を使うのがミソ.) さらに $V(p_{k-1}) = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$, $\Delta p_k = \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix}$ とおけば,

$$\Sigma(V, \Delta) = \sum_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix} = \sum_k (u_k \Delta x_k + v_k \Delta y_k)$$



$$V(x, y) = (\cos xy, \sin(x+y))$$

で与えられるベクトル場.

を得る. ここで分割 Δ を無限に細かくした (すなわち $\delta(\Delta) := \max_k \|\Delta p_k\| \rightarrow 0$ とした) 極限が, ベクトル場 V の曲線 C に沿った積分

$$\int_C V \cdot dp = \int_C u(x, y) dx + v(x, y) dy$$

なのである. となると, 単独で $\int_C u(x, y) dx$ という積分が現れるのは不自然ではないか? 相棒の $\int_C v(x, y) dy$ はどこ? ということになるわけだが, いや, たまたま C 上 $v(x, y) \equiv 0$ で, $\int_C u(x, y) dx + 0 \cdot dy$ なんですよ, と答えればその場は収まるのである.

勾配ベクトル. $f = f(p) = f(x, y)$ で与えられる $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 関数を考える. $f \in \mathbb{R}$ は 1 次元ベクトルだ, と強引に考えればこれもある種のベクトル場であるが, 一般に各点に実数に対応するものはスカラー場 (scalar field) と呼ばれる. 気温や気圧の分布, 地図に描かれた海拔高度などをイメージするのが分かりやすい.

さてスカラー場からベクトル場を生成する方法をひとつ紹介しよう. いま C^1 を仮定したから f は任意の $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で全微分可能であり,

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + a \Delta x + b \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

(ただし $a = f_x(x, y)$, $b = f_y(x, y)$. これらは定数) と書けるのであった. ここで $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ おけば, この式はベクトルの内積を用いて

$$f(p + \Delta p) = f(p) + V \cdot \Delta p + o(\|\Delta p\|)$$

のように書ける. いま V は偏微分係数によって決まる固定されたベクトルだが, Δp は p からの変化分として, 好きな方向を選ぶことができる. では f が最も増加するのはどの方向かというと, それは Δp と V が同じ方向を向いているときである (内積の幾何学的な意味を考えよ.) 逆に最も減少するのは Δp が $-V$ の向きを向いているときである. ベクトル V は点 p において f が最も変化する方向を表現するのである. これを関数 f の p における勾配ベクトル (gradient vector) と呼び, $V = \text{grad } f(p)$ と表す. すなわち,

$$\text{grad } f(p) := (f_x(x, y), f_y(x, y)).$$

f が気圧を表すスカラー場であれば, 風は $-\text{grad } f$ の向きに流れる. 麦畑は, $-\text{grad } f$ 側にそよぐであろう. h が海拔高度を表すスカラー場であれば, p においたボールは $-\text{grad } h$ の向きに転げ落ちる. 麦畑に降り注いだ雨もまた, $-\text{grad } h$ の方向に流れるであろう.

回転. つぎに, ベクトル場からスカラー場を構成する方法をふたつ紹介する. 各成分が C^1 級なベクトル場 $V = V(p) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ にたいし,

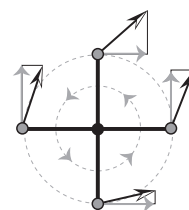
$$\text{rot } V(p) := -u_y(x, y) + v_x(x, y) \in \mathbb{R}$$

で定まる関数 (スカラー場) を V の回転 (rotation) とよぶ.²

この量の直感的な意味は, 次のように説明される: V が風速をあらわすとしよう. 点 p においた図のような十字型の風車 (直径 2ϵ) を置くと, その端点における風で風車の回転に寄与する分の合計は (左回りを正の向きと考えると)

$$v(x + \epsilon, y) - u(x, y + \epsilon) - v(x - \epsilon, y) + u(x, y - \epsilon)$$

と計算される. この値が $2 \text{rot } V(p) \epsilon + o(\epsilon)$ と表されるのである.



実際, u, v は C^1 関数であり全微分可能なので, 上の式に $u(x, y + \epsilon) = u(x, y) + u_y(x, y)\epsilon + o(\epsilon)$ などを代入して整理すると, $2\{-u_y(x, y) + v_x(x, y)\}\epsilon + o(\epsilon) = 2 \text{rot } V(p) \epsilon + o(\epsilon)$ となる.

グリーンの定理再訪. C を単純閉曲線, Ω をその内部とすると, ベクトル場 V にたいして,

$$\int_C V \cdot dp = \iint_D \text{rot } V \, dx \, dy$$

が成り立つ. V の成分として $(P(x, y), Q(x, y))$ を代入すれば, これが「(イ) グリーンの定理」そのものだということがわかる.

発散. ベクトル場からスカラー場を構成する方法を紹介する. 上と同じベクトル場 V にたいし,

$$\text{div } V(p) := u_x(x, y) + v_y(x, y) \in \mathbb{R}$$

で定まる関数 (スカラー場) を V の発散 (divergence) とよぶ. p の周りに一辺が $\epsilon > 0$ の正方形をおき, そこでの風の「流出量 - 流入量」を計算すると, $\text{div } V(p) \epsilon^2 + o(\epsilon^2)$ になる.

ガウスの発散定理. $C = \{p(t) = (x(t), y(t)) : t \in [a, b]\}$ を滑らかな単純閉曲線とし, Ω をその内部とする. 与えられた C^1 級ベクトル場 $V = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ にたいし, $V^* = \begin{pmatrix} -v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix}$ とするとき, $\text{div } V = \text{rot } V^*$ が成り立つ. よってグリーンの定理より,

$$\int_C V^* \cdot dp = \iint_D \text{div } V \, dx \, dy.$$

一般にガウスの発散定理は次のように解釈 (表現) される: $p(t)$ における C の外向き法線ベクトル $p^*(t) = (y'(t), -x'(t))$ を考えると,

$$\int_C V^* \cdot dp = \int_a^b V^*(p(t)) \cdot p'(t) \, dt = \int_a^b V(p(t)) \cdot p^*(t) \, dt$$

が成立する. これは左辺がベクトル場の曲線 C にそった流出量であることを意味しており, 右辺の積分 (流出量の合計) の意味と合致する.

²3次元ベクトル場の回転はベクトル場となる. 3次元の場合, 回転軸の方向を表現する必要があるからである.