

# 複素解析特論 I

タイヒミュラー空間と複素力学系への応用

川平 友規

平成 23 年 6 月 14 日

講義の概要（コースデザインより）．タイヒミュラー空間論はリーマン面（1次元複素多様体）の変形空間の理論である．変形空間は抽象的に定義された「集合」だが，数学者はこれを幾何学的な議論が可能な「空間」とみなす．この講義の目的は，大雑把に言って

- リーマン面の変形空間に幾何構造を与えるまでの（思考）過程を解説すること；そして
- （残った時間で）変形空間の幾何学的性質を複素力学系の理論に応用すること

である．

講義予定．扱うトピックは以下のとおり：

- リーマン面の基礎（基本群，普遍被覆，一意化定理，フックス群）
- リーマン面上の微分・積分（ペルトラミ微分，正則 2 次微分，リーマン・ロッホの定理）
- 擬等角写像論・幾何学的関数論の概説
- 有限型リーマン面の変形空間（モジュライ空間とタイヒミュラー空間，ベアス埋め込み）
- 1次元複素軌道体 (orbifold) の一意化と分類
- 球面上の分岐被覆力学系の剛性理論（文献 [4, 5]）

最後のトピックは「球面の自己分岐被覆による力学系」の，有理関数による実現可能性と剛性に関する理論である．80 年代にサーストンが確立したものだが，近年またじわじわと脚光を浴びている．

## 参考文献

- [1] 今吉・谷口, タイヒミュラー空間論, 日本評論社.
- [2] O.Lehto. Univalent functions and Teichmüller spaces. *Springer*.
- [3] O.Forster. Lectures on Riemann surfaces. *Springer*.
- [4] C.McMullen, Riemann surfaces, dynamics and geometry: Course Notes, <http://abel.math.harvard.edu/~ctm/home/text/class/harvard/275/rs/rs.pdf>.
- [5] A. Douady and J. H. Hubbard. A proof of Thurston's topological characterization of rational maps. *Acta Math.* **171**(1993), 263–297.
- [6] C.McMullen and D.Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III: The Teichmüller space of a holomorphic dynamical systems. *Adv. Math.*, 1998.

## はじめに

リーマン面とは，1次元複素多様体のことである．具体的には，ハウスドルフ空間  $S$ （だいたい曲面）と「地図帳」とよばれる写像の族  $A$  のペア  $(S, A)$  として定式化される．

この状況は，地球とその全体を網羅した地図帳（世界地図帳，アトラス）をイメージすればよい．たとえば，地球の表面がほぼ球面であるという事実を知らなくても，地図帳をもちいれば地球の表面積を大体計算することができる．このように，ある空間の性質をしらべるとき，地図帳という媒体にのみアクセスできる状態からスタートするのが多様体の考え方であった．とくに「1次元複素」多様

体といった場合、その地図帳は各ページが複素平面のコピーでできた、極めて上質なシロモノだと考えてよい。<sup>1</sup>このような上質な地図帳を作成したとき、数学者はわざわざ特別な言い回しで、「位相空間  $S$  に複素構造が入った」などという。

さて地図帳を作るにもいろんな方法があるだろうし、作り手や、作る時期にも依存するだろう。また、同一の地図帳が複数個作成されることだってあるだろう。ひとつの空間にたいして、異なる地図帳が無数にできあがるのである。これらをどこか、図書館のような場所に保管したいとしよう。このとき、われわれは何を基準に地図帳を分類すればよいのだろうか。人間であれば、同じ年齢であるとか、身長、血液型、DNA など、さまざまな要素で分類できるであろう。リーマン面を分類するのによく使われるのは、次のふたつの分類法である：

- 大分類：モジュライ空間による分類法
- 小分類：タイヒミュラー空間による分類法

これから解説するのは、より細かな分類法である、タイヒミュラー空間の分類法についてである。われわれは、図書館に保管された、もしくは日々届けられる無数の地図帳を、この小分類法に従って分類しなければならない。必要なときに、必要な地図帳を提供できる、そういった環境も提供したい。当然、同じ小分類ごとにまとめて、それぞれ異なる書架に納めることになるだろう。じつはその書架もまた、無限に必要となるのである。そこで、われわれは次のことを考える：無限個の書架を、図書館にどのように配置すればよいのだろうか？

じつは、モジュライ空間もタイヒミュラー空間も、「ふたつの地図を比べて、同じかどうか判定する方法」だけを与えて、同値関係によって分類を行うのである。このような分類法はどこか場当たり的で、大域的視点に欠けていないだろうか。われわれはこの図書館を、書架が整然と並べられた「空間」にしたいのだが、このままでは雑多な書架が無造作に集められた「集合」になってしまう... しかし、タイヒミュラー空間は、

- 連結かつ単連結な完備距離空間である。さらに、
- 複素多様体であり、複素バナッハ空間に埋め込むことができる。

たとえば、種数  $g$  の閉曲面のタイヒミュラー空間は、 $\mathbb{C}^{3g-3}$  の単連結部分領域として表現できる。これらの用語はともかく、われわれは書架を上手に並べることで、図書館をすばらしい特性をもった「空間」として構成できるのである。

<sup>1</sup>実際、これよりも良い性質をもつ材質は考え難い。

## 1 リーマン面

### 1.1 リーマン面の定義

リーマン面とは (連結な) 1次元複素多様体のことである。ちゃんと定義を書くと、次のようになる。

定義 (リーマン面). 集合  $S$  がリーマン面 (Riemann surface) であるとは, 以下をすべてみたすときをいう:

(RS1)  $S$  は連結なハウスドルフ空間である.

(RS2) 写像の族  $\mathcal{A} = \{\phi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{C}\}_{\lambda \in \Lambda}$  が存在し, 以下をみたす:

(a)  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は  $S$  の開被覆である. すなわち,  $U_\lambda$  はすべて開集合かつ  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = S$ .

(b)  $\phi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \phi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{C}$  は中への同相写像.

(c)  $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$  のとき,  $\phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$  は等角な (正則な) 同相写像である.

写像の族  $\mathcal{A}$  を  $S$  のアトラス (atlas, もしくは地図帳) と呼び, その元  $\phi_\lambda$  は局所座標 (local chart) と呼ばれる.

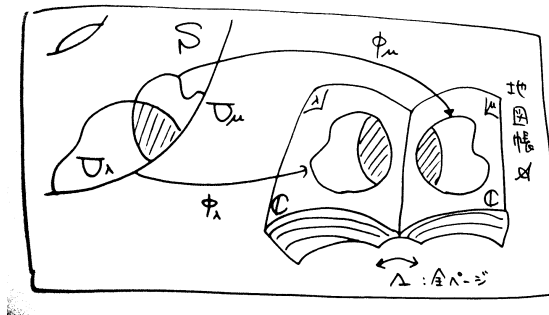


図 1: 局所座標の定義

正確にはペア  $(S, \mathcal{A})$  をリーマン面と呼ぶべきだが, 習慣的にはアトラスの存在を暗に仮定して  $S$  自身をリーマン面とよぶ.

リーマン面は位相空間ではあるが, 空間としての具体的な情報はすべてアトラスを経由してのみ観測される, と考える. たとえば月 (つき) の表面で幾何学を構成したい場合, 望遠鏡や人工衛星, 宇宙船などをつかった観測データをもとに, 「球面」としての月面を想像の中で概念として成立させるしかない. このように, われわれは位相空間 (もしくは集合)  $S$  という実体から乖離した状態で, 与えられた地図帳をもとに想像力 (創造力) を働かせ幾何学や解析学を行うことになる. これがリーマン面の理論の面白さであり, 難しさでもある.

等角性について. 等角 (conformal) な同相写像とは, 定義域上で正則 (すなわち複素微分可能) であり, かつ微分の値が 0 にならない同相写像である.<sup>2</sup> 一般に  $p \in U_\lambda \cap U_\mu$  の場合,  $\Phi := \phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1}$ :

<sup>2</sup> 「等角」という語をあえて使うのは, 微分が 0 にならないことを強調するためである. 同相写像に限って言えば, 等角性, 正則性, 双正則性 (逆写像も正則) はいずれも互いにシノニムである. したがって, 「等角な同相写像」は「正則な同相写像」とも「双正則写像 (biholomorphic map)」ともよばれる.

$\phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$  は  $z_0 = \phi_\lambda(p)$  におけるテイラー展開

$$\Phi(z) = \Phi(z_0) + \Phi'(z_0)(z - z_0) + O((z - z_0)^2)$$

をもつ． $w = \Phi(z)$ ,  $w_0 = \phi_\mu(p) = \Phi(z_0)$  とおくと，

$$w - w_0 = \Phi'(z_0)(z - z_0) + \underbrace{O((z - z_0)^2)}_{\text{誤差部分}}$$

であるから， $z = z_0$  の近傍をほぼ複素定数  $\Phi'(z_0) \neq 0$  倍し  $w = w_0$  の近傍に写すのが  $\Phi$  の局所的な作用である．とくに， $z_0$  で交差する 2 曲線は， $w_0$  で交差する 2 曲線に写るが，交角は変化しない．これが「等角」という名の由来である．<sup>3</sup>

この条件がどのくらい強い制約であるかを理解するために， $\Phi$  を実 2 次元平面での写像として捕らえなおしてみよう． $z - z_0 =: x + yi$  および  $w - w_0 =: u + vi$  をそれぞれ  $\mathbb{R}^2$  の元  $(x, y)$  および  $(u, v)$  の別名だと思つと，上の式は線形写像

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underline{\underline{r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \quad (\text{ただし, } \Phi'(z_0) = re^{i\theta})$$

の右辺に誤差部分を加えたものだと考えられる．2 重下線部分はいわゆるヤコビ行列であるが，等角性（正則性）はこの行列が回転・拡大という極めて特殊な形であることを要求する．一般の実 2 次元可微分多様体を定義する際には，ヤコビ行列が正則行列である以上にこれといった制約を加えないことを思い出しておこう．

注意．

- 任意のリーマン面は第 2 可算公理をみたま（Rado の定理）．したがって，1 の分割が存在する．
- 実は， $S$  が位相空間であるという条件を仮定しなくても， $\phi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$  が単射かつ  $\phi_\lambda(U_\lambda)$  が開集合であることだけを仮定すれば， $S$  の位相（開集合系）を定めることができる．この場合，地図帳こそが唯一の情報源である，という立場はさらに強まる．

## 1.2 リーマン面の具体例

具体例その 1（複素平面内の領域）． $S = \mathbb{C}$  とし， $A = \{\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$  とすればリーマン面（複素平面）となる．この場合，地図帳は 1 ページだけからなる「世界全図」である．

同様に， $D \subset \mathbb{C}$  を領域（連結開集合）とし， $A = \{\text{id} : D \rightarrow D\}$  とすれば， $(D, A)$  はリーマン面となる．

具体例その 2（リーマン球面）． $S = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$  とする．このとき，地図帳を次のように作成できる： $U_\pm := S - \{(0, 0, \pm 1)\}$  とし， $p = (X, Y, Z) \in U_\pm$  にたいし

$$w_+ = \phi_+(p) := \frac{X + Yi}{1 - Z}, \quad w_- = \phi_-(p) := \frac{X - Yi}{1 + Z},$$

と定義する．このとき  $\phi_\pm : U_\pm \rightarrow \mathbb{C}$  は上への同相写像であり，しかも  $A = \{\phi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{C}\}_{\lambda \in \{+, -\}}$  は（2 ページからなる）地図帳となる．このようにして定まるリーマン面をリーマン球面（Riemann sphere）と呼び， $\hat{\mathbb{C}}$  で表す．

<sup>3</sup>この性質から，リーマン面  $S$  上の 2 曲線にたいし「交角」という概念が定義できる．

レポート問題 1-1

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$  とするとき,  $\phi_+(U_+ \cap U_-) = \phi_-(U_+ \cap U_-) = \mathbb{C}^*$  を示し, さらに  $\phi_- \circ \phi_+^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  を具体的に計算せよ. また, これが正則な同相写像となることを示せ.

より一般に, 次の定理が知られている:

定理 1.1 (ガウスの定理)  $\mathbb{R}^3$  内の任意の滑らかな曲面  $S$  には地図帳が存在し, リーマン面となる.

もちろんガウスの時代, リーマン面という言葉はなかった. 彼が実際に証明したのは, 「等温座標の存在定理」で, それを現代風の言葉で表現したのが上の定理である.<sup>4</sup>

具体例その 3 (トーラスとアニュラス).  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{\infty\}$  とし,  $|\lambda| > 1$  を満たす複素定数  $\lambda$  を固定する. このとき,  $z, z' \in \mathbb{C}^*$  に同値関係

$$z \sim z' \iff \exists n \in \mathbb{Z}, z = \lambda^n z' \tag{*}$$

を定義すると, 商集合  $T := \mathbb{C}^* / \sim$  はトーラス (torus) と呼ばれるタイプのリーマン面となる.  $z \in \mathbb{C}^*$  をその同値類  $[z] \in T$  へ写す写像は「自然な射影」と呼ばれ, これを  $\pi : \mathbb{C}^* \rightarrow T$  で表すことにする.

また,  $\lambda$  が正の定数 ( $\lambda > 1$ ) のとき, 上半平面  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  に (\*) と同じ同値関係を入れた商集合  $A = \mathbb{H} / \sim$  が, アニュラス (annulus, 円環) と呼ばれるタイプのリーマン面である.

具体例その 1・その 2 ではリーマン面を「 $\mathbb{C}$  や  $\mathbb{R}^3$  のなかの部分集合」として明示的に与えたが, ここで定義した  $T$  や  $A$  はある意味, 抽象的な構成物である. どこか遠くにあって触れることができない, それこそ「月面」のような存在なのである.

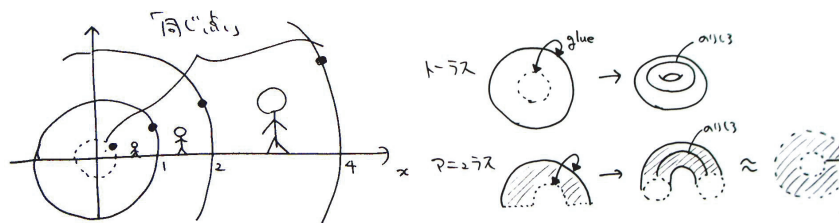


図 2: トーラスとアニュラス ( $\lambda = 2$  の場合)

さてトーラスの場合に, これがリーマン面の定義 (RS1)(RS2) を満たすことをチェックしてみよう. 話を単純にするために,  $\lambda = 2$  とする.

まず (RS2) を確かめよう. いま

$$V_0 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$$

$$V_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1.5 < |z| < 3\}$$

とすれば,  $\pi|_{V_0} \rightarrow T$  および  $\pi|_{V_1} \rightarrow T$  は単射であり,  $\pi(V_0 \cup V_1) = T$  を満たす. したがって,  $U_k = \pi(V_k)$ ,  $\phi_k = (\pi|_{V_k})^{-1}$  ( $k = 0, 1$ ) とすれば,  $U_0 \cup U_1 = T$  かつ  $\phi_k : U_k \rightarrow V_k \subset \mathbb{C}$  は全単射である.

<sup>4</sup>この定理にはまた後で戻ってくることになるだろう.

つぎに  $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$  が双正則写像となることを示そう.  $U_0 \cap U_1$  を分割した集合  $X, Y \subset T$  を

$$U_0 \cap U_1 = X \sqcup Y \quad (\text{disjoint union})$$

$$\phi_0(X) = \phi_1(X) = \{z : 1.5 < |z| < 2\}$$

$$\phi_0(Y) = \{z : 1 < |z| < 1.5\}, \quad \phi_1(Y) = \{z : 2 < |z| < 3\}$$

となるようにとると,  $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}|_{\phi_0(X)} : \phi_0(X) \rightarrow \phi_1(X)$  は恒等写像であり,  $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}|_{\phi_0(Y)} : \phi_0(Y) \rightarrow \phi_1(Y)$  は  $z \mapsto 2z$  となる. よって (RS2)(c) も示された.

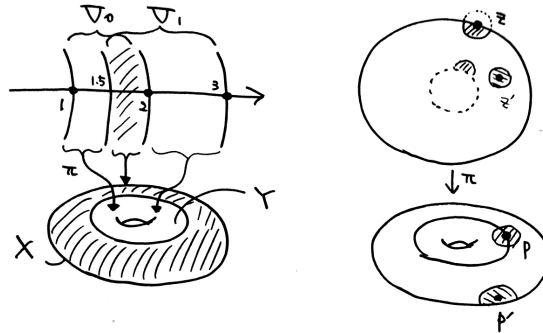


図 3: トーラス  $T$  のアトラスとハウスドルフ性

次に, (RS1) を示す. すなわち, 商集合  $T$  がハウスドルフな位相空間である, という部分である. まず位相空間としては, 一般的な商位相の定義を用いて

$$U \subset T \text{ が開集合} \iff \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^* \text{ が開集合}$$

として  $T$  の開集合系を定義すればよい.<sup>5</sup> つぎにハウスドルフ性は次のように確認できる. 任意の異なる 2 点  $p, p' \in T$  にたいし, 異なる複素数  $z, z' \in \mathbb{C}^*$  を集合  $\{z : 1 \leq |z| < 2\}$  の中から  $p = [z], p' = [z']$  となるように一意に選ぶことができる. これらを中心に十分小さな半径  $\delta$  の開円板  $\Delta, \Delta'$  を取れば, これらは互いに交わらず, かつ  $\pi|_{\Delta}$  および  $\pi|_{\Delta'}$  は単射であるようにできる. このとき,  $\pi(\Delta)$  と  $\pi(\Delta')$  は互いに交わらない  $p$  と  $p'$  の開近傍となる. したがって,  $T$  はハウスドルフ空間である.

具体例その 4 (格子によるトーラスの構成). 定数  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$  を  $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$  となるようにとる. すなわち,  $\omega_1$  と  $\omega_2$  は同一直線上にない.

このとき,  $z, z' \in \mathbb{C}$  にたいし同値関係を

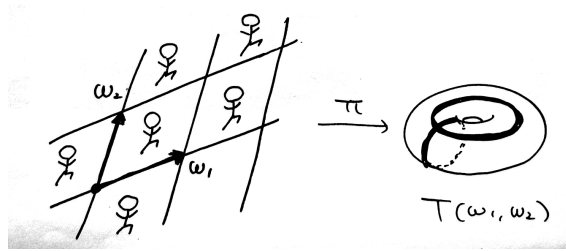
$$z \sim z' \iff \exists m, n \in \mathbb{Z}, z = z' + m\omega_1 + n\omega_2 \quad (**)$$

と定義する. この商集合  $T(\omega_1, \omega_2) := \mathbb{C}/\sim$  もまた, トーラスと呼ばれるタイプのリーマン面となる.

レポート問題 1-2

$T = T(1, i)$  とし, これがリーマン面の定義を満たすことを確認せよ. もちろん, 地図帳も具体的に構成すること. (Hint:  $\forall z \in \mathbb{C}, \pi|_{\mathbb{D}(z, 1/2)} : \mathbb{D}(z, 1/2) \rightarrow T$  は単射.)

<sup>5</sup>この定義から,  $\pi : \mathbb{C}^* \rightarrow T$  は連続写像となる. むしろ, 連続写像の定義を逆手に取った位相の導入方法だと言える.

図 4: トーラス  $T(\omega_1, \omega_2)$ .

## 2 リーマン面での微分・積分 (1)

“What is a Riemann surface? Roughly put, it is a surface on which one can define analytic functions.”——これはベアス (L. Bers) の講義ノート “Riemann surface” の冒頭にある言葉である。この一言に、リーマン面だけでなく、一般の複素多様体の存在意義が端的に表現されている。

解析的 (analytic) 関数というのは、正則 (holomorphic) 関数のシノニムであった。複素平面上の正則関数は種々のすばらしい性質をもっている。たとえば

- その導関数もまた解析的関数であり、何度でも微分できる。
- 最大値原理・一致の定理が成り立つ。
- コーシーの積分定理・積分公式、留数定理がなりたつ。

といった性質は正則関数だけがもつ特別な性質である。リーマン面もまた、このような関数が定義できる特別な場所だということである。

記号の約束。以下  $S$  をリーマン面とし、その地図帳  $\mathcal{A}$  は添え字  $\lambda \in \Lambda$  を省略して単に  $\{\phi : U_\phi \rightarrow \mathbb{C}\}$  と表す。さらに記号をすっきりさせるために、以後頻繁に登場する局所座標の像  $\phi(U_\phi) \subset \mathbb{C}$  は  $\mathbb{U}_\phi$  で表すことにする。すなわち  $\phi : U_\phi \rightarrow \mathbb{U}_\phi$  は全射かつ同相写像である。

### 2.1 リーマン面上の (正則) 関数

リーマン面を単に「集合  $S$ 」とみなすだけで、関数  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  は普通に意味をもつ。また、リーマン面は位相空間であったから、連続関数も「開集合の逆像が開集合になる関数」として定義できる。では、正則関数 (より一般に、微分可能な関数) はどのように定義すればよいだろうか? これはリーマン面の上で、関数の値の変化をどのように表現し、解析するか、という問題である。

われわれはリーマン面  $S$  という実体に直接接触することができず、地図帳に表現されるものからすべてを察するしかない。

たとえば、ホンモノの地図の世界には、地形図と呼ばれるタイプの地図がある。これは海拔高度という「地球表面上の関数」を、等高線や高さに応じた色分け (高い山は茶色、低い山は緑、深い海は青, etc.) で表現したものである。<sup>6</sup> 同様に、地図帳の局所座標  $\phi : U_\phi \rightarrow \mathbb{U}_\phi \subset \mathbb{C}$  に対応するページ ( $\phi$  ページ) を開くと、複素平面内の領域  $\mathbb{U}_\phi = \phi(U_\phi)$  で定義された

$$f_\phi := f \circ \phi^{-1} : \mathbb{U}_\phi \rightarrow \mathbb{C}$$

という複素数値関数が「等高線」で描かれているであろう。

<sup>6</sup>ここで「地表」の定義とは? とか考えてはいけない。頭の中で地球の表面に軟化作用素を施して、 $S^2$  に凹凸を加えた  $C^\infty$  曲面をイメージするのが妥当であろう。

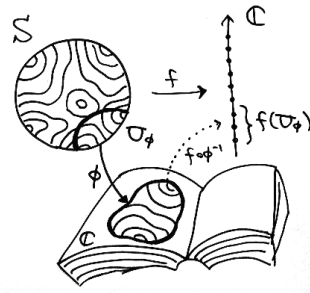


図 5: リーマン面上の関数は地図帳で等高線を考えれば理解できる.

そこで, リーマン面上の正則関数を次のように定義する:

定義 (リーマン面上の正則関数). リーマン面  $S$  上の関数  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  が正則 (holomorphic)  
 $:\Leftrightarrow$  任意の  $\phi \in \mathcal{A}$  にたいし,  $f_\phi: U_\phi \rightarrow \mathbb{C}$  が正則

すなわち, 「 $f$  は地図帳のどのページで表現しても正則関数」だということである. 「正則」の部分  
を  $C^0, C^1, \dots, C^\infty$  などに変えれば, 同様に  $C^0, C^1, \dots, C^\infty$  関数を定義できる.

座標変換に依存しないもの. 実は正則関数であることを確認するのに, すべてのページをチェック  
する必要はない. 次の命題はリーマン面の重要な性質である:

命題 2.1 (座標変換と微分可能性)  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  を関数とする. ある局所座標  $\phi \in \mathcal{A}$  が  
存在して  $f_\phi = f \circ \phi^{-1}$  が正則 (resp.  $C^0, C^1, \dots, C^\infty$ ) であれば, 任意の  $\psi \in \mathcal{A}$  で  
 $U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset$  を満たすものにたいし,  $f_\psi = f \circ \psi^{-1}: \psi(U_\phi \cap U_\psi) \rightarrow \mathbb{C}$  は正則 (resp.  
 $C^0, C^1, \dots, C^\infty$ ) である.

証明.  $f_\psi = f_\phi \circ (\phi \circ \psi^{-1})$  より,  $f_\psi$  は正則関数の合成である. よって正則. ■

標語的に言えば, 「あるページで正則関数ならば他のページでも正則関数」ということになる. これ  
を用いると, 正則性の定義は次のように言い替えられる:

系 2.2 (正則性の言い替え)  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  が正則関数  
 $\Leftrightarrow$  任意の  $p \in S$  にたいしある  $\phi \in \mathcal{A}$  が存在して,  $p \in U_\phi$  かつ  $f_\phi: U_\phi \rightarrow \mathbb{C}$  が  
正則.

#### レポート問題 2-1

命題 2.1 の「正則」を (1) 「可測」(2) 「 $L^\infty$ 」に変えて証明せよ. また, リーマン面上の可測関  
数,  $L^\infty$  関数を定義せよ.

以上の定義のもと, 次の定理を証明するのは難しくない:

定理 2.3 (正則関数の性質)  $f, g: S \rightarrow \mathbb{C}$  が正則関数であるとき, 次が成り立つ:



1. 一致の定理：ある収束列の上で  $f$  と  $g$  の値が一致すれば， $S$  全体で  $f = g$ .
2. 最大値の原理：ある  $p \in S$  で  $f$  の絶対値が最大値を取るならば， $f$  は定数である．

レポート問題 2-1.5

定理 2.3 を証明せよ．

## 2.2 接空間

リーマン面からの関数（写像）にとって，微分とは何だろうか？われわれはそれを，「速度ベクトルを変換するもの」として解釈する．まずは「リーマン面上のある点における速度ベクトル」と，その全体としての接空間 (tangent space) を定義しておこう．

$p \in S$  を固定するとき，その点での接空間  $T_p S$  は

$$T_p S := \{p \text{ における速度ベクトル全体} \}$$

のように定義される．以下では「速度ベクトル」がどう定義されるべきかを考えていこう．

複素平面上的速度ベクトル．まずは  $S = \mathbb{C}$  の場合を考える．ある点  $p \in \mathbb{C}$  を固定したとき，「 $\mathbb{C}$  の  $p$  における速度ベクトル」とは，「 $p$  を通る  $\mathbb{C}$  内の  $C^1$  曲線がとりうる速度ベクトル」のことである．たとえば，時刻  $t = 0$  で点  $p$  を通る  $C^1$  曲線  $\alpha: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{C}$  を考えたとき，その瞬間の速度ベクトル

$$v = \left. \frac{d\alpha(t)}{dt} \right|_{t=0} \in \mathbb{C}$$

が定まる．逆に，任意の  $v \in \mathbb{C}$  を選んだとき， $t = 0$  で  $\alpha(t) = p + vt + o(t)$  という展開をもつ曲線は  $v$  を速度ベクトルにもつ．したがって「 $\mathbb{C}$  の  $p$  における速度ベクトルの全体の空間」とは  $\mathbb{C}$  自身に他ならない．これをあえて記号  $T_p \mathbb{C}$  で表し，「 $\mathbb{C}$  の  $p$  における接空間」とよぶ．

一般の平面領域  $D \subset \mathbb{C}$  においても  $p \in D$  における接空間  $T_p D$  が同様に定義され，やはり  $\mathbb{C}$  と一致する．

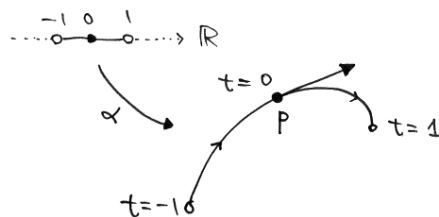


図 6: 速度ベクトル

リーマン面上の速度ベクトル．地球上で「名古屋上空をマッハ 1 で北北西に飛ぶ飛行機」を考えてみよう．まず，地図帳から名古屋が含まれるページをすべて取り出し，それぞれに飛行機の航路を記録する．こうして「各ページに」速度ベクトル（平面上の矢印）が定まるが，これらの矢印はページごとに異なる向きと長さを持つのが普通である．各ページは地表をそれぞれ異なる方法で投影しているわけだから，当然であろう．もとの飛行機が速度が変化すれば各ページに表現される速度ベクトル

ルも変化するが、まったく無秩序に変化するわけでもない。もともと飛行機と同じ速度ベクトルを表現しているのだから、何らかの関係式を相互に保ちつつけているはずである。

さて一般のリーマン面  $S$  の場合を考えよう。ある  $p$  を固定して、 $p \in U_\phi$  となる  $\phi \in \mathcal{A}$  をひとつとる。連続関数  $\alpha: (-1, 1) \rightarrow S$  は、 $\alpha(0) = p$  のとき「時刻  $t=0$  で  $p$  を通る曲線  $\alpha$ 」と呼ばれる。もし、これを  $\phi$  ページ目で観測した  $\alpha_\phi := \phi \circ \alpha$  が定義可能な範囲<sup>7</sup>で  $C^1$  であるとき、 $\alpha$  を  $C^1$  曲線と呼んでもかまわないだろう (命題 2.1)。すると、 $\mathbb{U}_\phi \subset \mathbb{C}$  上の点  $\phi(p)$  における曲線  $\alpha_\phi$  の速度ベクトル  $v \in T_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$  が自然に定まる。

もし別のページ  $\psi$  (ただし  $p \in U_\psi$ ) で同じ  $\alpha$  を観測した場合、 $\alpha_\psi$  の  $\psi(p)$  における速度ベクトル  $v' \in T_{\psi(p)}\mathbb{U}_\psi$  は一般に  $v$  と異なる。ただし無関係ではなくて、座標変換  $\psi \circ \phi^{-1}$  が等角であるという事実から

$$v' = (\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) \cdot v \tag{1}$$

という関係式が定まる。ここで微分係数  $(\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) \neq 0$  は  $v$  に依存しない定数である。また、写像  $v \mapsto v'$  は  $T_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi = \mathbb{C}$  から  $T_{\psi(p)}\mathbb{U}_\psi = \mathbb{C}$  へのベクトル空間としての同型写像を与えている。

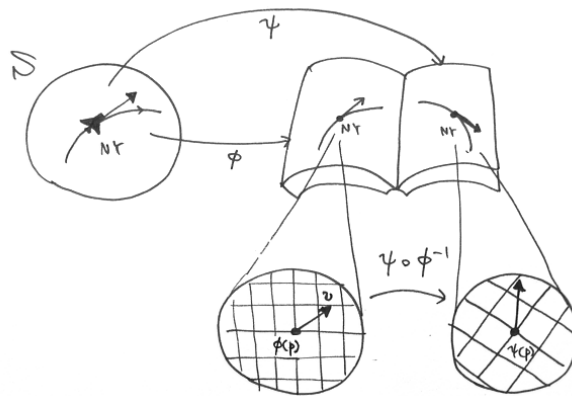


図 7: 速度ベクトル

以上を念頭において、リーマン面  $S$  上の速度ベクトルを定義しよう。 $p \in S$  にたいし、 $p \in U_\phi$  となる  $\phi \in \mathcal{A}$  の全体を  $\mathcal{A}(p)$  と表す。いま、 $p$  を通る  $C^1$  曲線たちを地図帳の  $\phi$  ページで観測したときに得られる速度ベクトルは、 $T_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi = \mathbb{C}$  の元である。こうして得られる速度ベクトルをすべてかき集めて、形式的な和集合

$$\tilde{T}_p S := \bigsqcup_{\phi \in \mathcal{A}(p)} T_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$$

を考える。具体的な集合としては、 $\mathbb{C}$  のコピーが「 $\mathcal{A}(p)$  個」集まったものである。次に、速度ベクトル  $v \in T_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$  と  $v' \in T_{\psi(p)}\mathbb{U}_\psi$  が「同じ」であることを

$$v \sim v' :\iff v' = (\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) \cdot v \tag{2}$$

と定義する。

定義 (接空間)。リーマン面  $S$  の  $p$  における接空間 (tangent space) とは、上の同値関係から得られる同値類の全体

$$T_p S := \tilde{T}_p S / \sim$$

<sup>7</sup>すなわち  $t \in \alpha^{-1}(U_\phi)$  を満たすすべての  $t$  で、 $t=0$  のある近傍が必ず含まれる。

である．またその同値類を  $S$  の  $p$  における速度ベクトル (velocity vector) もしくは習慣的に接ベクトル (tagent vector) と呼ぶ．

すなわち「 $S$  の  $p$  における速度ベクトル」とは、直接は観測できないけども、あるページ上ではベクトル  $v \in \mathbb{C}$ 、あるページ上ではベクトル  $v' \in \mathbb{C}$  と表現されるような抽象的なモノとして定義された。<sup>8</sup> もちろんこれらのベクトルは関係式 (1) によって互いに連動しあいながら、ひとつの「同値類」を一斉に表現しているのである．

接空間の位相空間としての性質は、 $T_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi = \mathbb{C}$  ( $\phi \in \mathcal{A}(p)$ ) の位相的・代数的性質から自然に定めることができる：

命題 2.4 (リーマン面の接空間) リーマン面  $S$  の  $p$  における接空間  $T_p S$  は  $\mathbb{C}$  と同型なベクトル空間となる．

レポート問題 2-2

具体的に同型写像  $\iota : T_p S \rightarrow \mathbb{C}$  を与え、上の命題を証明せよ．

### 2.3 リーマン面からリーマン面への写像と微分

標語的に言うと、写像の微分とは「ある点で像が局所的にどのような変化をしているか、その状況を記述するもの」である．まずは実 2 次元の場合で復習しておこう．

$\mathbb{R}^2$  で定義された  $C^1$  写像  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  をとる． $p \in \mathbb{R}^2$  とするとき、そこでの 1 次近似式は

$$F(p + \Delta p) = F(p) + [DF(p)]\Delta p + o(\|\Delta p\|) \quad (\|\Delta p\| \rightarrow 0)$$

のように表現される．ただし、 $[DF(p)]$  は 2 行 2 列の行列（いわゆるヤコビ行列）であり、 $o(\|\Delta p\|)$  は誤差項（2 次元のベクトル）である．この式から、 $p$  から  $\Delta p$  変化すると、 $F$  での像は  $F(p)$  から大体  $[DF(p)]\Delta p$  変化すると結論でき、習慣的にこの行列  $[DF(p)]$  を「微分」と呼ぶ．

ここで  $p$  における速度ベクトル  $v \in \mathbb{R}^2 (= T_p \mathbb{R}^2)$  を固定し、 $\Delta p = vt$  ( $t \rightarrow 0$ ) としてみると、

$$F(p + vt) = F(p) + [DF(p)]vt + o(t) \quad (t \rightarrow 0)$$

となる．この式から、 $p$  での速度ベクトル  $v$  は  $F$  で写すと  $F(p)$  での速度ベクトル  $[DF(p)]v$  となる」ことがわかる．したがって、速度ベクトルの変化を表現する線形写像

$$v \mapsto [DF(p)]v$$

を  $F$  の  $p$  における「微分」と呼んでも実質的には同じことである．

リーマン面間の写像．以上をふまえて、 $S$  ともうひとつのリーマン面  $R$  があたえられたとき、写像  $f : S \rightarrow R$  の微分可能性について考えよう． $R$  のアトラスを  $\mathcal{B} = \{\psi : V_\psi \rightarrow \mathbb{C}\}$  とし、 $\mathbb{C}$  内の領域  $\psi(V_\psi)$  を  $\mathbb{V}_\psi$  と表す．

定義 (リーマン面間の正則関数など)．リーマン面  $S$  から  $R$  への写像  $f : S \rightarrow R$  が正則 (あるいは連続、 $C^1$ 、 $C^\infty$ 、etc.) 写像であるとは、 $p \in U_\phi$ 、 $f(p) \in V_\psi$  となる任意の局所座標について、

<sup>8</sup>それは「火曜日」という抽象的な概念が「2011 年 4 月 19 日」や「2011 年 4 月 26 日」といった無数の日付によって表現されることに似ている．

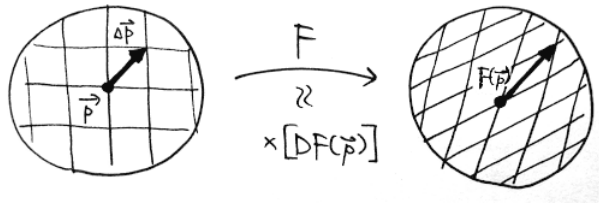


図 8: 実 2 次元平面における微分

$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  が  $\phi(p) \in U_\phi$  の十分小さな近傍で定義でき、かつ正則 (あるいは連続,  $C^1, C^\infty$ , etc.) 関数となることである。

$R = \mathbb{C}, B = \{\text{id}\}$  とした特別な場合が「リーマン面上の関数」である。また,  $R = \hat{\mathbb{C}}$  の場合,  $f$  はリーマン面上の有理形関数 (meromorphic function) と呼ばれる (ただし, 習慣的に定数関数  $f \equiv \infty$  は有理形関数から除外する。)

リーマン面間の写像微分. つぎに  $C^1$  写像  $f: S \rightarrow R$  の微分とは何か考えよう.  $p \in S, f(p) \in R$  を任意に固定するとき,  $p \in U_\phi, f(p) \in V_\psi$  となる局所座標  $\phi \in A$  および  $\psi \in B$  を選ぶことができる. このとき,  $f$  は地図帳  $A$  の  $\phi$  ページの一部分から地図帳  $B$  の  $\psi$  ページ内への写像  $F := \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  として観測される. <sup>9</sup>いま,  $[DF(p)]$  を  $F$  の  $\phi(p)$  におけるヤコビ行列とすると, 接空間  $T_{\phi(p)}U_\phi$  の元  $v$  を接空間  $T_{\psi(f(p))}V_\psi$  の元へ写す線形写像

$$v \mapsto [DF(p)] \cdot v$$

が定まる. この線形写像は次のように解釈できる:「リーマン面  $S$  内を飛ぶ飛行機が, 点  $p$  を通過

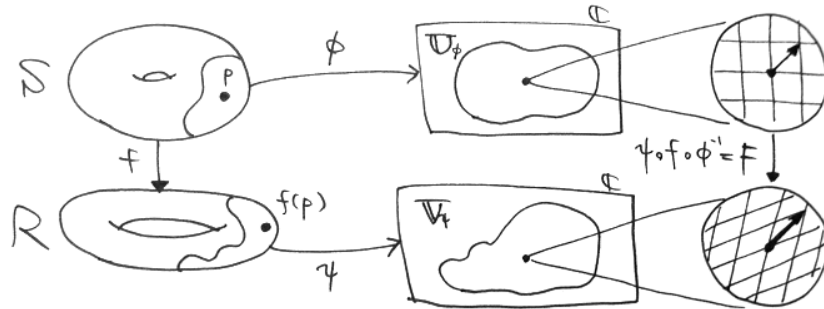


図 9: 写像が速度ベクトルの変換を定める。

した. それを  $C^1$  写像  $f: S \rightarrow R$  で「投影」すると, リーマン面  $R$  内を飛ぶ飛行機が, 点  $f(p)$  を通過しているように見える. その様子を地図帳  $A$  の  $\phi$  ページで観測すると, 点  $\phi(p) \in U_\phi$  を速度  $v$  で通過しているように見えた. このとき, 地図帳  $B$  の  $\psi$  ページでは, 点  $\psi(f(p)) \in V_\psi$  を速度  $[DF(p)]v$  で通過しているように見える。」

いま  $u := [DF(p)]v$  とおくと,  $v$  や  $u$  は元来リーマン面内を移動する飛行機の (直接は観測できない) 速度ベクトル  $[v] \in T_p S$  および  $[u] \in T_{f(p)} R$  を地図帳の上で表現していることになる。

また, 写像  $v \mapsto u = [DF(p)]v$  が定める写像  $[v] \mapsto [u]$  は「速度ベクトルを変換する写像」であるから, 写像  $f$  の微分に相当するであろう. そこで, 次のように定義する:

<sup>9</sup>一般に,  $F$  は  $\phi(p) \in U_\phi$  の十分小さな近傍でのみ定義され, そこでのヤコビ行列はつねに意味をもつ。

定義 (リーマン面間の写像の微分).  $C^1$  写像  $f: S \rightarrow R$  の  $p \in S$  における微分 (derivative) とは, 上のようにして定まる写像

$$D_p f: T_p S \rightarrow T_{f(p)} R, \quad D_p f([v]) := [u]$$

のことである.

この微分の定義が「ちゃんと定義になっている」(well-defined) ことを確かめなくてはならない.

命題 2.5 (微分は well-defined) 微分  $D_p f: T_p S \rightarrow T_{f(p)} R$  は局所座標  $\phi$  および  $\psi$  の取り方に依存せず, 写像  $f$  と  $p$  のみで決まる線形写像である.

$D_p f$  が線形写像であることは, 飛行機の例から直感的に理解できるだろう. むしろ, 局所座標に依存しないことのほうが簡単ではない. その点はレポート問題としよう:

レポート問題 2-3

別のページの局所座標  $\tilde{\phi}$  および  $\tilde{\psi}$  を用いたとき,  $G = \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}$  と  $F$  の関係式をもとめよ. また, その微分を考えることで,  $D_p f$  が局所座標によらずに定義されることを示せ.

### 3 リーマン面での微分・積分 (2)

リーマン面上での積分を定義しようとする、自然に微分形式の概念が発生する。今日の目標は、タイヒミュラー空間を定義する上で必要最低限の微分形式を定義することである。

記号。以下、いつものように  $S$  をリーマン面とし、 $\mathcal{A} = \{\phi: U_\phi \rightarrow \mathbb{C}\}$  をその地図帳とする。また、 $\phi(U_\phi) \subset \mathbb{C}$  を  $\mathbb{U}_\phi$  であらわす。

#### 3.1 リーマン面上の積分

連続関数  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  をひとつ固定する。 $\alpha: [0, 1] \rightarrow S$  を  $S$  上の (区分的に)  $C^1$  な曲線とすると、関数  $f$  の  $\alpha$  に沿った積分が定義できるか考えてみよう。今後は曲線の像  $\alpha([0, 1])$  も  $\alpha$  で表すことにする。

複素平面の場合。基本となるのは  $S = \mathbb{C}$  の場合であろう。このとき、区間  $[0, 1]$  を  $N$  等分する点に対応する  $z_i = \alpha(i/N) \in \mathbb{C}$  ( $0 \leq i \leq N$ ) を用いれば、いわゆるリーマン和の極限として次の線積分が定義されるのであった：

$$\int_\alpha f(z) dz := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i)(z_{i+1} - z_i).$$

一般のリーマン面の場合。一般の  $S$  の場合を考えてみよう。このとき、区間  $[0, 1]$  を  $N$  等分する点 (ただし  $N$  は  $2^{1000}$  のような巨大な自然数をイメージせよ) に対応するのは  $p_i = \alpha(i/N) \in S$  ( $0 \leq i \leq N$ ) である。この場合、 $f(p_i) \in \mathbb{C}$  は意味をもつが、「差分」 $p_{i+1} - p_i$  は一般に意味をもたない。いわんや「リーマン和」 $\sum f(p_i)(p_{i+1} - p_i)$  をや。複素数値をもつ積分を定義するには何らかの工夫が必要となる。

まず何より、「差分」を複素数値で表現するために、地図帳の上での積分に話を置き換えるのが自然だろう。話を簡単にするため、ある  $\phi, \psi \in \mathcal{A}$  にたいして  $\alpha$  全体が  $U_\phi \cap U_\psi$  に含まれていると仮定しよう。このとき  $\phi(\alpha) \subset \mathbb{U}_\phi \subset \mathbb{C}$  であるから、 $\phi(\alpha)$  上での  $f_\phi = f \circ \phi^{-1}$  の線積分  $\int_{\phi(\alpha)} f_\phi(z) dz$  は確かに意味をもつ。 $\psi$  についても同様に、 $U_\psi$  上での線積分  $\int_{\psi(\alpha)} f_\psi(w) dw$  が定まる。

しかし、これらの線積分を比較したときに大きな問題が生じる：まず有限リーマン和を考えると、

$$\phi\text{-ページ目 } \mathbb{U}_\phi\text{内} : \sum_{i=0}^{N-1} \underline{f_\phi(\phi(p_i))} (\phi(p_{i+1}) - \phi(p_i))$$

$$\psi\text{-ページ目 } \mathbb{U}_\psi\text{内} : \sum_{i=0}^{N-1} \underline{f_\psi(\psi(p_i))} (\psi(p_{i+1}) - \psi(p_i))$$

となる。下線部はともに  $f(p_i) \in \mathbb{C}$  であって同じ値であるが、「差分」 $\phi(p_{i+1}) - \phi(p_i)$  と  $\psi(p_{i+1}) - \psi(p_i)$  がまずい。これらは  $\phi, \psi$  に強く依存し、一般には一致しない。よって両者の  $N \rightarrow \infty$  における極限である線積分も、一般には一致しない。<sup>10</sup> 一般のリーマン面では、どんなに微少な線上であっても関数の線積分値を特定できないのである。

考察。改善策を練ってみよう。いま差分  $\phi(p_{i+1}) - \phi(p_i)$  と  $\psi(p_{i+1}) - \psi(p_i)$  は、全く無関係というわけではなくて、 $\psi \circ \phi^{-1}$  の等角性により近似式

$$\psi(p_{i+1}) - \psi(p_i) \approx (\psi \circ \phi^{-1})'(p_i) \cdot (\phi(p_{i+1}) - \phi(p_i))$$

<sup>10</sup>たとえば、 $\psi(p) = 2\phi(p)$  のようなごく単純な関係が成立している場合 (トーラスの例で出てきた) ですら、線積分は一致しない。

が成立している．記号をすっきりさせるために  $p \in U_\phi \cap U_\psi$  にたいし  $z := \phi(p)$ ,  $w := \psi(p)$ , さらに  $p_i \in \alpha$  について  $z_i := \phi(p_i)$ ,  $w_i := \psi(p_i)$  とおくと,

$$w_{i+1} - w_i \approx \frac{dw}{dz}(z_i) \cdot (z_{i+1} - z_i)$$

と書くこともできる．

さてもし (関数  $f$  のことは忘れてしまって)  $U_\phi$  と  $U_\psi$  上で  $f_\phi$  と  $f_\psi$  が異なる関数として定義されており, かつ

$$f_\psi(w) \cdot \frac{dw}{dz}(z) = f_\phi(z)$$

が成立していたらどうだろうか? 先ほどの  $U_\psi$  上のリーマン和は

$$\sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{f_\psi(w_i)} \cdot (w_{i+1} - w_i) \approx \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{f_\phi(z_i)} \cdot \underbrace{\left(\frac{dw}{dz}(z_i)\right)^{-1}} \cdot \frac{dw}{dz}(z_i) \cdot (z_{i+1} - z_i)$$

となり, 微分の部分が相殺されてちょうど  $U_\phi$  上での線積分と (近似的に) 一致する.  $N \rightarrow \infty$  とした極限ではこれらは完全に一致して, 線積分は統一された複素数値をとる.

このように, 「ページごとに異なる関数を定める」のが, リーマン面上で積分を成立させるための重要なトリックなのである.

### 3.2 $(m, n)$ -微分

積分が意味をもつような「リーマン面上の関数」を定義するために, 次のように関数の概念を拡張しよう:

定義.  $m, n \in \mathbb{Z}$  にたいし, 関数の族  $\omega = \{\omega_\phi : U_\phi \rightarrow \mathbb{C}\}_{\phi \in \mathcal{A}}$  が  $(m, n)$ -微分 ( $(m, n)$ -differential) であるとは,  $U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset$  となる任意の  $\phi, \psi \in \mathcal{A}$  にたいし,  $p \in U_\phi \cap U_\psi$ ,  $z = \phi(p)$ ,  $w = \psi(p)$  とするとき次の関係式が成立することである:

$$\omega_\psi(w) \left(\frac{dw}{dz}\right)^m \left(\overline{\frac{dw}{dz}}\right)^n = \omega_\phi(z)$$

ただし,  $dw/dz$  とは  $z = \phi(p)$  での微分係数  $(\psi \circ \phi^{-1})'(z)$  の値を意味する. このような  $\omega$  を形式的に (ダミーの変数  $z$  とダミーの関数  $\omega(z)$  を用いて) 次のように表す:

$$\omega = \omega(z) dz^m \overline{dz}^n.$$

この定義に従えば, リーマン面上の関数は  $(0, 0)$ -微分ということになる. また, 上の「 $U_\phi$  ごとに定義された  $f_\phi$ 」は  $(1, 0)$ -微分となる.

さまざまな微分. 任意の  $\phi \in \mathcal{A}$  にたいし  $\omega_\phi$  が正則となるような  $(m, 0)$ -微分は正則  $m$  次微分 (holomorphic  $m$ -differential) と呼ばれる. とくに, 正則 1 次微分は第一種アーベル微分 (Abel differential of first kind) とよばれる.<sup>11</sup> さらにタイヒミュラー空間論で重要な役割を果たす  $(-1, 1)$ -微分はベルトラミ微分 (Beltrami differential) と呼ばれる. ちなみに, 正値 (すなわち  $\forall \phi \in \mathcal{A}, \omega_\phi > 0$ ) の  $(1, 1)$ -微分は等角計量 (conformal metric) と呼ばれるものと一致する.

これらの微分の物理量としての意味.  $(m, n)$ -微分の定義は人工的に見えるが, われわれは日常的にこのような量を扱っているのである. 身近な例で説明しよう.

<sup>11</sup> 正則 2 次微分は英語だと holomorphic quadratic differential とよばれる.

たとえば長さ  $\ell$  の棒切れを持って、フランスに行ったとする。フランス人に言わせると、この棒は長さ  $\ell_{FR} = 0.5$  だという。フランスはメートル法発祥の地であり、彼らは棒の長さを  $0.5(m)$  と計測したのだ。

一方、同じ棒をアメリカに持っていったとしよう。するとアメリカ人はその長さは  $\ell_{US} = 1.64$  だと言う。アメリカ人は世界的にも特殊な単位であるフィートを用いて、棒の長さを  $1.64(ft)$  と計測したのだ。

ちなみに  $1(ft) = 0.305(m)$  であるから、<sup>12</sup>

$$\ell_{US} (ft) = \ell_{US} \cdot \left(\frac{ft}{m}\right) (m) = \ell_{US} \cdot \left(\frac{0.305}{1}\right) (m)$$

がなりたつ。もとの棒の長さは変わってないのだから、アメリカに行ってメートル法を用いて計測しても、フランスでの計測値と一致するはずである。したがって、

$$\ell_{US} \cdot \left(\frac{0.305}{1}\right) = \ell_{FR}$$

が成立することになる。実際に数値を代入してみれば、これらが仏米各人の主張と矛盾しないことがわかる。

以上で重要なのは、「もとの長さ  $\ell$  という物理的な量は不変だが、数値化するときにはかならず単位が付随する」ということである。単位を変えるときには、かならず単位分の補正が必要となる。

さてもういちど、 $(m, n)$ -微分の定義式を見返していただきたい。もし式  $\omega = \omega(z) dz^m \overline{dz}^n$  が

$$\ell = \ell_{FR} (m) = \text{計測値(単位)}$$

のように見えたら、定義の心はずでに理解されている。「いかなる新しい概念も、われわれはずでに知っている」のである。

### 3.3 (1, 0)-微分の線積分

さて冒頭の目標であった「線積分の定義」を完了させよう。関数ではなく、 $(1, 0)$ -微分が線積分可能な関数(量)である。

$\omega = \{\omega_\phi\}_{\phi \in A}$  を連続な  $(1, 0)$ -微分とし、 $\alpha: [0, 1] \rightarrow S$  を区分的に  $C^1$  な  $S$  上の曲線とする。いま  $\alpha$  はコンパクトであるから、 $N$  が十分巨大な数であるとき、任意の  $i = 0, 1, \dots, N-1$  にたいしある  $\phi_i \in A$  が存在して、

$$\alpha_i := \alpha \left( \left[ \frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right] \right) \subset U_{\phi_i}$$

を満たすようにできる。このとき、

$$\int_\alpha \omega := \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\phi_i(\alpha_i)} \omega_{\phi_i}(z) dz$$

を  $\omega$  の  $\alpha$  に沿った線積分と定義できる。これが  $\alpha$  のパラメーター付けや  $\phi_i$  のとり方に依存しないことは定義よりほとんどあきらかである。詳細はレポートとしよう：

レポート問題 3-1

上の積分  $\int_\alpha \omega$  が well-defined であることを示せ。

<sup>12</sup>実際は  $1(ft) = 0.3048(m)$ 。ちなみに 1 フィートは 12 インチ。



正則 1 次微分の例．いま， $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  を正則関数としよう．あらかじめ言っておくと， $S$  がコンパクトなリーマン面の場合， $f$  は定数関数だけになってしまうので，以下の議論はほとんど意味がない．しかし， $S$  がコンパクトでない場合や， $f$  を有理形関数にまで拡張した場合を念頭に話をすすめる．

## レポート問題 3-2

コンパクトなリーマン面上の正則関数は定数関数に限ることを示せ．

さて  $U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset$  となる  $\phi, \psi \in \mathcal{A}$  をとる． $p \in U_\phi \cap U_\psi$  にたいしそれぞれの像を  $z = \phi(p)$ ， $w = \psi(p)$  とすると (正則) 関数  $f_\phi = f \circ \phi^{-1}$  および  $f_\psi = f \circ \psi^{-1}$  について

$$\frac{df_\phi}{dz} = \frac{d(f_\psi \circ (\psi \circ \phi^{-1}))}{dz} = \frac{df_\psi}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}$$

が成立する．したがって，

$$df := \left\{ \frac{df_\phi}{dz} \right\}_{\phi \in \mathcal{A}}$$

は一般に  $S$  上の正則 1 次微分を定めることがわかる．これはしばしば正則関数  $f$  の微分とよばれる．もちろん線積分も定義でき，次のコーシーの積分定理がなりたつ：

定理 3.1 (コーシーの積分定理) 区分的に滑らかな閉曲線  $\alpha$  が  $S$  上の単連結領域を囲むとする．このとき，任意の正則関数  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  にたいし  $\int_\alpha df = 0$ ．

ここで閉曲線  $\alpha$  が  $S$  上の単連結領域を囲むとは， $\alpha: [0, 1] \rightarrow S$  が定数写像とホモトピックであることとする．

## レポート問題 3-3

上の定理 3.1 を証明せよ．(Hint. 単連結領域を細分して局所座標で議論せよ．)

## レポートの提出と単位要件について

単位がほしい人は，レポート問題を 3 問以上解いて，7 月 19 日までに提出してください (A4 レポート用紙，片面のみ使用のこと)．ただし，解答する問題の，問題番号の一桁目 (「レポート問題  $m-n$ 」の  $m$ ) の集合が 3 つ以上の元を含むように解いてきてください．

例．レポート問題を全部解いてきた人：もちろん合格．

例．レポート問題 1-1, 2-1, 3-1 だけを解いてきた人：合格 ( $\{m\} = \{1, 2, 3\}$ ) ．

例．レポート問題 1-1, 1-2, 1-3 だけを解いてきた人：不合格 ( $\{m\} = \{1\}$ ) ．

例．レポート問題 2-1, 2-2, 5-1, 5-2 だけを解いてきた人：不合格 ( $\{m\} = \{2, 5\}$ ) ．

もちろん，内容がおもいきり間違っている答えは「解いた」と判定できません．解答に自信がない場合は，加えて配布した講義ノートのタイプミスや数学的なミスを指摘してください．講義作りに貢献したとみなし，その分考慮します．

レポートは返却しませんので，必要なら各自コピーをとっておいてください．

## 4 正則・有理形微分とリーマン・ロッホの定理

記号. 以下, いつものように  $S$  をリーマン面とし,  $\mathcal{A} = \{\phi: U_\phi \rightarrow \mathbb{C}\}$  をその地図帳とする. また,  $\phi(U_\phi) \subset \mathbb{C}$  を  $\mathbb{U}_\phi$  で表す.

### 4.1 正則 2 次微分の次元

今回の目標は「タイヒミュラー空間を入れる箱 (建物) を準備すること」である. すなわち, 次の定理を証明する:

定理 4.1 コンパクトなリーマン面  $S$  にたいし, その上の正則 2 次微分全体のなす集合を  $Q(S)$  で表す. このとき,  $Q(S)$  は  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間であり, その次元は次のようになる:

$$\dim Q(S) = \begin{cases} 1 & (g = 1) \\ 3g - 3 & (g \geq 2) \end{cases}$$

ただし,  $g$  は  $S$  の種数である.

### 4.2 有理形微分

定義 (有理形関数). 関数  $f: S \rightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  が有理形関数 (meromorphic function)

: $\iff$  リーマン面間の写像として正則写像であり, かつ定数関数  $f(p) \equiv \infty$  でない.

$\iff$  任意の  $\phi \in \mathcal{A}$  にたいし, 写像  $f_\phi = f \circ \phi^{-1}: \mathbb{U}_\phi \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  が有理形関数.

念のために平面領域上の有理形関数 (写像) とは何か復習しておこう.  $\mathbb{U}_\phi \subset \mathbb{C}$  上の関数  $f_\phi: \mathbb{U}_\phi \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  が有理形であるとは任意の  $z_0 \in \mathbb{U}_\phi$  にたいしある  $N \in \mathbb{Z}$  および数列  $\{a_k\}_{k \geq N} \subset \mathbb{C}$  が存在して,  $a_N \neq 0$  かつ  $z_0$  の近傍で有限ローラン展開

$$f_\phi(z) = \sum_{k \geq N} a_k (z - z_0)^k$$

をもつことである. すなわち,  $f(z_0) = \infty$  となる  $z_0$  は有限位数の極に限り, そのような点以外では正則関数 ( $N \geq 0$ ) となる.

以上を踏まえて, 正則微分を次のように拡張する.

定義 (有理形微分). 関数の族  $\{\omega_\phi: \mathbb{U}_\phi \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}_{\phi \in \mathcal{A}}$  が有理形  $m$  次微分であるとは,

- 任意の  $\phi \in \mathcal{A}$  について,  $\omega_\phi$  は有理形関数; かつ
- $U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset$  となる任意の  $\phi, \psi \in \mathcal{A}$  について,  $p \in U_\phi \cap U_\psi, z = \phi(p), w = \psi(p)$  とすれば, 関係式

$$\omega_\psi(w) \left( \frac{dw}{dz}(z) \right)^m = \omega_\phi(z)$$

が成り立つ.

有理形微分も形式的に  $\omega = \omega(z) dz^m$  のように表す.

とくに正則  $m$  次微分は有理形  $m$  次微分でもある．また，有理形関数は「有理形 0 次微分」に他ならない．

有理形微分は一般に，次の性質を満たす：

**命題 4.2**  $\omega = \{\omega_\phi(z)\}_{\phi \in \mathcal{A}}$  を有理形  $m$  次微分とする．

(1)  $\eta = \{\eta_\phi(z)\}_{\phi \in \mathcal{A}}$  も有理形  $m$  次微分とするととき，任意の複素数  $\alpha, \beta$  について  $\alpha\omega + \beta\eta = \{\alpha\omega_\phi(z) + \beta\eta_\phi(z)\}_{\phi \in \mathcal{A}}$  も有理形  $m$  次微分．とくに， $S$  上の有理形  $m$  次微分全体は  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間となる．

(2)  $\eta = \{\eta_\phi(z)\}_{\phi \in \mathcal{A}}$  を有理形  $n$  次微分とするととき， $\omega\eta = \{\omega_\phi(z)\eta_\phi(z)\}_{\phi \in \mathcal{A}}$  は有理形  $(m+n)$  次微分．

(3) さらに， $\eta$  が恒等的にゼロでないとき， $\frac{\omega}{\eta} = \left\{ \frac{\omega_\phi(z)}{\eta_\phi(z)} \right\}_{\phi \in \mathcal{A}}$  は有理形  $(m-n)$  次微分．

証明は難しくないので練習問題としよう（それぞれ  $\omega_\phi: \mathbb{U}_\phi \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  などが局所的にローラン級数の形で書けることからわかる．）(1) と同様にして，最初に掲げた正則 2 次微分の全体の集合  $Q(S)$  がベクトル空間となることがわかる．また，正則 1 次微分全体の集合を  $A(S)$  と表すと，これも  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間となる．実は次の（重要な，奥深い）事実が知られている：

**定理 4.3 (種数の定義)**  $S$  がコンパクトなリーマン面であるとき， $0 \leq \dim A(S) < \infty$ ．この値を  $g = g(S)$  で表し， $S$  の種数 (genus) とよぶ．



図 10: 種数は面の穴の数と等しい．じつは同相写像で不変な量（位相不変量）である．

有理形微分の位数．さてコンパクトとは限らないリーマン面  $S$  上の有理形  $m$  次微分  $\omega = \{\omega_\phi(z)\}_{\phi \in \mathcal{A}}$  と  $p_0 \in S$  を固定する．

このとき，次が成り立つ：

**命題 4.4 (位数の不変性)**  $p_0 \in U_\phi \cap U_\psi$  かつ  $z_0 = \phi(p_0)$ ， $w_0 = \psi(p_0)$  とする．それぞれのローラン展開が

$$\omega_\phi(z) = \sum_{k \geq M} a_k (z - z_0)^k \quad (a_M \neq 0)$$

$$\omega_\psi(w) = \sum_{k \geq N} b_k (w - w_0)^k \quad (b_N \neq 0)$$

と表されるとき， $M = N$  が成り立つ．すなわち，最低次の項の次数は局所座標によらない．

この整数  $M$  を有理形微分  $\omega$  の  $p = p_0$  における位数 (order) と呼び、 $\text{ord}(\omega, p)$  と表すことにする。<sup>13</sup> とくに、 $M \geq 1$  のとき  $p_0$  は  $\omega$  の零点 (zero) と呼ばれ、 $M \leq -1$  のとき  $p_0$  は  $\omega$  の極 (pole) と呼ばれる。

証明. いま  $w = \psi \circ \phi^{-1}(z)$ ,  $A := (\psi \circ \phi^{-1})'(z_0) \neq 0$  とすると,

$$w - w_0 = A(z - z_0) + O((z - z_0)^2)$$

$$\frac{dw}{dz}(z) = A + O(z - z_0)$$

が成り立つ. これで  $\omega_\psi$  の  $k$  次の項を書き換えると,

$$b_k(w - w_0)^k = b_k A^k (z - z_0)^k \{1 + O(z - z_0)\}^k = b_k A^k (z - z_0)^k \{1 + O(z - z_0)\}$$

であるから, この部分には  $(z - z_0)$  の  $k$  次以上の項しか現れない. この事実注意到しつつ,  $\omega$  が満たす関係式

$$\omega_\phi(z) = \omega_\psi(w) \left( \frac{dw}{dz}(z) \right)^m = \left( \sum_{k \geq N} b_k A^k (z - z_0)^k \{1 + O(z - z_0)\} \right) \left( A + O(z - z_0) \right)^m$$

において  $(z - z_0)^N$  の項の係数を比較すると, 関係式

$$a_N = b_N A^N \cdot A^m \neq 0$$

を得る. したがって  $N \geq M$ . 同様に  $M \geq N$  を得る. ■

注意 (留数). もし  $m = 1$ ,  $M = N = -1$  とすると,  $a_{-1} = b_{-1}$  がなりたつ. すなわち,  $\omega_\phi$  が有理形 1 次微分であるとき, そのローラン展開の  $-1$  次の係数は局所座標によらずに決まる. この数を  $\omega = \omega(z)dz$  の  $p_0$  における留数 (residue) と呼び、 $\text{Res}(\omega, p_0)$  と表す.

ちなみに, 複素平面上では局所座標が恒等写像ひとつしかないので, 有理形関数も有理形 1 次微分も区別がつかない. そのため, 複素平面では「有理形関数の留数」が意味を持つのである.

#### レポート問題 4-0

留数定理: 『区分的に滑らかな閉曲線  $\alpha$  が  $S$  上の単連結領域を囲むとする. 有理形 1 次微分  $\omega = \omega(z)dz$  にたいし, その内側に含まれる極を  $p_1, \dots, p_n$  とすると,  $\int_\alpha \omega = 2\pi i \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Res}(\omega, p_i)$ .』これを示せ.

### 4.3 因子

コンパクトリーマン面  $S$  上の任意の  $m$  次微分  $\omega$  にたいし, 点  $p \in S$  にそこでの位数を対応付ける写像

$$[\omega] : S \rightarrow \mathbb{Z}, \quad p \mapsto \text{ord}(\omega, p)$$

が定まる. この写像を一般化するものとして, 次のような概念を導入する:

定義 (因子). リーマン面  $S$  上の写像  $D : S \rightarrow \mathbb{Z}$  が因子 (divisor) であるとは,  $D(p) \neq 0$  となる  $p$  が高々有限個しか存在しないことをいう.

<sup>13</sup> 普通は極も零点も位数が正になるように符号を調整するが, この講義では調整せず, 単に「ローラン級数の最低次数」として定義する.

## レポート問題 4-1

上で定義した  $[\omega]$  は  $S$  上の因子であることを示せ (Hint. 零点と極が有限個であることを示せば十分.)

因子の和. 因子にはいろいろな演算が定義できる. たとえば,  $D_1, D_2$  が因子であるとき, その和  $(D_1 + D_2) : S \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$(D_1 + D_2)(p) := D_1(p) + D_2(p)$$

によって定義できる. また「逆元」を  $(-D_1) : S \rightarrow \mathbb{Z}$  を  $(-D_1)(p) := -D_1(p)$  と定義すれば, 零因子 (zero divisor)  $0(p) = 0$  ( $\forall p \in S$ ) とあわせて加群の構造が入る. 要するに, 足し算引き算が自由にできる.

因子の大小. また, ある種の大小関係も考えることができる:  $D_1 \geq D_2$  であるとは, 任意の元  $p \in S$  について  $D_1(p) \geq D_2(p)$  がなりたつこと, とするのである. いわゆる半順序というもの, 実数のように任意のふたつの元に大小・等号関係が定まるわけではないが, 以後の議論では重要な役割を果たすことになる.

因子の次数. 因子  $D : S \rightarrow \mathbb{Z}$  にたいし, その次数 (degree) を  $\sum_{p \in S} D(p)$  と定義し,  $\deg D$  で表す.

因子の定義から, この和は見かけに反して有限和であり, 整数値を定める. 一般に  $\deg(D_1 + D_2) = \deg D_1 + \deg D_2$  となることにも注意しよう.

たとえば, 上の  $\omega$  が  $\{p_i\}_i$  で零点 (重複なし) をもち,  $\{q_j\}_j$  を極 (こちらも) をもてば, 具体的に

$$\deg[\omega] = \sum_i \text{ord}(\omega, p_i) + \sum_j \text{ord}(\omega, q_j)$$

と和の形で書ける.

さてここで, 有理形関数  $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  は有理形 0 次微分であることを思い出そう. その次数は, 次のように一定値 0 をとる:

|| 命題 4.5  $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  を有理形関数とする. このとき, 因子  $[f]$  は  $\deg[f] = 0$  をみたす.

証明のスケッチ. 写像  $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  を  $S - \{\text{分岐値の逆像}\}$  に制限したものは  $\hat{\mathbb{C}} - \{\text{分岐値}\}$  の被覆面となる. 分岐被覆面の一般論により, 任意の  $q \in \hat{\mathbb{C}}$  にたいし,  $\#f^{-1}(\{q\})$  は一定の値をとる.<sup>14</sup>したがって上の記号の意味で,

$$\deg[f] = \sum_{f(p)=0} \text{ord}(f, p) + \sum_{f(p)=\infty} \text{ord}(f, p) = \#f^{-1}(\{0\}) - \#f^{-1}(\{\infty\}) = 0.$$

■

一般の有理形  $m$  次微分  $\omega = \omega(z)dz^m$  にたいしても, 気分的には  $\deg[\omega] = \#\omega^{-1}(\{0\}) - \#\omega^{-1}(\{\infty\})$  といった感じである. ちなみにこの値も, 「 $m$  次微分」というだけで決定されてしまう:

|| 系 4.6  $\omega_1, \omega_2$  を有理形  $m$  次微分とするとき,  $\deg[\omega_1] = \deg[\omega_2]$ .

<sup>14</sup>いわゆる  $f$  の次数だが, 因子の次数と紛らわしいのであえてそう呼ばない.

証明. 命題 4.2 より,  $\omega_1/\omega_2$  は 0 微分すなわち有理形関数である. したがって

$$\deg[\omega_1] - \deg[\omega_2] = \deg[\omega_1/\omega_2] = 0.$$

■

最初の等号では, 以下のレポート問題 (追加問題) の結果を用いた:

レポート問題 4-(1.5)

有理形  $m$  微分  $\omega$  と有理形  $n$  微分  $\eta$  にたいし, 以下を示せ (Hint. ローラン展開を考えよ).

1.  $[\omega\eta] = [\omega] + [\eta]$  かつ  $\deg[\omega\eta] = \deg[\omega] + \deg[\eta]$ .
2.  $\eta \neq 0$  のとき,  $[\omega/\eta] = [\omega] - [\eta]$  かつ  $\deg[\omega/\eta] = \deg[\omega] - \deg[\eta]$ .

#### 4.4 リーマン・ロッホの定理とその応用

さてやや唐突だが, 因子  $D: S \rightarrow \mathbb{Z}$  にたいし,

$$\mathcal{F}(D) := \{f: S \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \text{ 有理形関数} : [f] \geq D\} \sqcup \{f \equiv 0\}$$

と定義する. ちょっと分かり辛いので, ごく簡単な例を挙げておこう. もし  $D = 0$  (零因子) とした場合, 有理形関数  $f$  が  $f \geq D = 0$  を満たすとは,  $\text{ord}(f, p) \geq 0$  が任意の  $p \in S$  で成り立つことに他ならない. これは  $f$  が極をもたず, 正則であることを意味するが,  $S$  のコンパクト性からそのような関数は定数関数しかない. したがって,  $\mathcal{F}(0)$  は定数関数の自由度分である複素 1 次元の空間だ, ということになる. また  $\mathbb{C}$  と同型な 1 次元ベクトル空間にもなっている. この事実は一般化できて,

命題 4.7 (因子の次元の定義) 任意の因子  $D$  にたいし,  $\mathcal{F}(D)$  は  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間である. その次元  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(D)$  を因子  $D$  の次元とよび,  $\dim D$  で表す.

レポート問題 4-2

上の命題を証明せよ.

正則微分の次元. おもしろいことに, 因子の次元を用いると正則 1 次微分のなす空間  $A(S)$ , 正則 2 次微分のなす空間  $Q(S)$  の次元を表現できる.

いま, 恒等的に 0 でない有理形 1 次微分  $\alpha$  を任意に固定する. さらに  $\omega \in A(S)$  とすると, その正則性は  $[\omega] \geq 0$  と同値である. ここで  $f_\omega := \omega/\alpha$  は有理形関数であるから,

$$[f_\omega] = [\omega] - [\alpha] \geq -[\alpha]$$

が成り立つ. すなわち,  $\omega \in A(S)$  と  $f_\omega \in \mathcal{F}(-[\alpha])$  は同値であり, また写像  $\omega \mapsto f_\omega$  は  $A(S)$  から  $\mathcal{F}(-[\alpha])$  へ, ベクトル空間として同型写像を与えるから,

$$\dim(-[\alpha]) = \dim A(S) = g \text{ (種数)}$$

がわかる．同様に，恒等的に 0 でない有理形 2 次微分  $q$  を任意に固定すると，<sup>15</sup>

$$\dim(-[q]) = \dim Q(S)$$

がわかる．左辺を計算できれば，目標の定理 4.1 は証明されるであろう．

リーマン・ロッホの定理．コンパクトリーマン面の理論で最も重要な定理のひとつが，次の定理である：

定理 4.8 (Riemann-Roch Theorem, RRT) コンパクトリーマン面  $S$  の種数を  $g = g(S)$  とし，恒等的に 0 でない有理形 1 次微分  $\alpha$  を任意に固定する．このとき，任意の因子  $D$  について，以下の等式が成り立つ：

$$\dim D = \dim(-D - [\alpha]) - \deg D - g + 1.$$

有名かつ有用な定理ではあるが，来週以降使う予定がないので証明は割愛する．驚くべきは，この一見不可解な定理から  $\dim Q(S)$  がさらりと計算できてしまうことである．まずは，その計算に必要な数値を系の形で述べておこう：

系 4.9

- 任意の恒等的に 0 でない有理形 1 次微分  $\alpha$  にたいし， $\deg[\alpha] = 2g - 2$  .
- 任意の恒等的に 0 でない有理形 2 次微分  $q$  にたいし， $\deg[q] = 4g - 4$  .

証明．まず RRT 中の有理形 1 次微分  $\alpha$  にたいし，さらに  $D = [-\alpha]$  とおいてみよう．すると

$$\dim(-[\alpha]) = \dim(\mathbf{0}) - \deg(-[\alpha]) - g + 1.$$

となる．これまでの議論で  $\dim(-[\alpha]) = \dim A(S) = g$ ， $\dim(\mathbf{0}) = \dim \mathcal{F}(\mathbf{0}) = 1$  であることを見てきたから， $\deg([\alpha]) = -\deg(-[\alpha]) = 2g - 2$  と計算される．系 4.6 で示したように，この値はすべての有理形 1 次微分に共通である．

つぎに任意の恒等的に 0 でない有理形 2 次微分  $q$  を固定すると， $q/\alpha$  は有理形 1 次微分である．したがって，

$$\deg[q] = \deg[q/\alpha] + \deg[\alpha] = (2g - 2) + (2g - 2) = 4g - 4.$$

■

定理 4.1 の証明．まず  $g = 1$  の場合．あとで正当化するが，この場合  $S = T(\omega_1, \omega_2)$  の形のトーラスとすることができる．いわゆる「写像の持ち上げ」をもちいると， $\omega \in Q(S)$  は  $\mathbb{C}$  上の正則関数  $\tilde{\omega} : S \rightarrow \mathbb{C}$  にもちあがり，さらに  $S$  のコンパクト性から  $\tilde{\omega}$  は有界である．そのような関数は定数しかないので，ちょうど 1 次元分の自由度が生じて， $\dim Q(S) = 1$  をえる．

つぎに  $g > 1$  の場合．任意の恒等的に 0 でない有理形 2 次微分  $q$  を固定して， $-[q]$  を RRT に代入してみる：

$$\dim(-[q]) = \dim([q] - [\alpha]) - \deg(-[q]) - g + 1.$$

<sup>15</sup>そのような  $q$  が存在することは自明ではない．いま  $\dim A(S) = g > 1$  なので，恒等的に 0 でない有理形 1 次微分  $\omega$  が存在する．このとき， $q = \omega^2 (= \omega\omega)$  とすればよい．

左辺は求めたい  $\dim Q(S)$  と一致するのだから，右辺を計算しよう．まず， $f \in \mathcal{F}([q] - [\alpha])$  が恒等的に 0 でないとしよう．定義より  $[f] \geq [q] - [\alpha]$  であるから，両辺の次数をとって

$$\deg[f] \geq \deg[q] - \deg[\alpha] = (4g - 4) - (2g - 2) = 2g - 2$$

が成り立つ．しかし，左辺は命題 4.5 より 0 であり，右辺は  $g > 1$  より正である．矛盾．これは  $f \equiv 0$  を意味する．よって  $\dim([q] - [\alpha]) = 0$  が示された．最後に， $-\deg(-[q]) = \deg[q] = 4g - 4$  であるから， $\dim Q(S) = 0 + (4g - 4) - g + 1 = 3g - 3$  となる． ■



## 5 ベルトラミ方程式とベルトラミ微分

今回は正則 2 次微分とやらんでタイヒミュラー空間論のもっとも重要な要素である，ベルトラミ微分について考える．具体的な目標は，次のふたつである：

- なぜベルトラミ微分（方程式）を考えるのか，その事情を説明すること．
- リーマン面間の  $C^1$  写像に付随するベルトラミ微分を定義すること．

### 5.1 準備

いくつか，記号の準備をしておこう． $D \subset \mathbb{C}$  を領域とし， $C^1$  関数  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  を考える．変数を  $z = x + yi$ ， $w = f(z)$  のように表すと， $z_0 = x_0 + y_0i \in D$  にたいし全微分の式

$$f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(z - z_0)$$

が成り立つのであった．<sup>16</sup>いまここで

$$f_z(z_0) := \frac{1}{2}\{f_x(z_0) - if_y(z_0)\}, \quad f_{\bar{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\{f_x(z_0) + if_y(z_0)\},$$

とおき，便宜的に  $z$  および  $\bar{z}$  に関する「偏微分」と括弧つきで呼ぶことにしよう．すると上の式は

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)(\overline{z - z_0}) + o(z - z_0)$$

のように変形される．<sup>17</sup>あたかも， $z$  と  $\bar{z}$  が独立変数で，それらに関して全微分の式が成立するかのようである．この式も，便宜的に  $z$  および  $\bar{z}$  に関する「全微分」と呼ぶことにしよう．この表現の利点は，この式から即座に

$$f \text{ が } D \text{ 上正則} \iff \bar{z} \text{ に関する「偏微分」} f_{\bar{z}} \text{ が } D \text{ 上で恒等的に } 0$$

が結論できることである．

### 5.2 ベルトラミ方程式と等温座標

さて以下ではまず，ベルトラミ微分とベルトラミ方程式がいかに数学史上に登場したか，ということ（われわれの文脈に勝手に改変して）紹介しよう．リーマン計量に関する基礎知識は既知とするので，わかり辛いと感じる人もあるかもしれない．実際のところ，今後の内容とあまり関係がないので，読み飛ばしても差し支えないだろう．

等角地図帳．いま，ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  に向き付け可能で滑らかな曲面  $S$  があったとする．このとき，次の問題を考えてみる：

問題 1.  $S$  に地図帳を作成して，リーマン面とみなすことはできるだろうか？

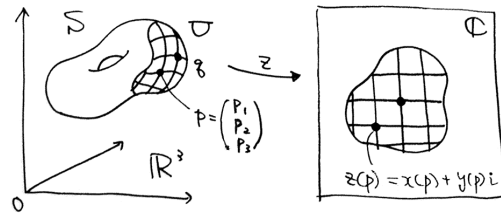
リーマン面とみなすためには，地図帳の各ページの関係が互いに等角写像によって与えられなければならない．たとえば，あるページで直交するふたつの道路が描かれているとき，別のページでもそれらの道路の交差点は直交していなければならない．本屋で売られている普通の世界地図帳は，多くの場合このような「等角性」をもっていない．リーマン面の地図帳は，特殊な「等角地図帳」なのである．

<sup>16</sup>この講義ではちゃんと定義していないが，微分形式の意味で  $df = f_x dx + f_y dy$  と書かれるものと同等である．

<sup>17</sup>微分形式としては， $dz = dx + dyi$ ， $d\bar{z} = dx - dyi$  において  $df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}$  もしくは  $w = f(z)$  として  $dw = w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}$  のように書ける．

添え字は  $z$  でなく  $\bar{z}$

ガウスの考察. ガウスはまず, この問題を下に述べる問題 2 に帰着させた (正確にはガウスのアイデアを, われわれの文脈に無理矢理あわせて記述している.)



まず一般的な仮定として, 曲面  $S$  上の各点  $q = (q_1, q_2, q_3)$  にたいし, ある近傍  $U = U_q \subset S$  とそこでの曲面のパラメーター付け

$$z = z_q : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad p = (p_1, p_2, p_3) \in U, \quad z = z(p) = x(p) + y(p)i \in \mathbb{C}$$

が存在しているものとしよう.<sup>18</sup>滑らかな曲線であるから, 登場する関数はすべて滑らかなものと考えてよい.

さて  $\mathbb{R}^3$  のユークリッド計量を  $ds^2$  とする. このとき, 曲面  $S$  の上にもその計量が (いわゆるリーマン計量として) 自然に導入され, 先ほどの  $U$  におけるパラメーター  $x = x(p), y = y(p)$  を用いると

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

のように表現される. ただし  $E = E(z) = E(x, y), F = \dots, etc.$  は滑らかな関数であり,  $E, G > 0$  かつ  $EG - F^2 > 0$  を満たす. このとき, 次の問題は問題 1 への解答を与える:

問題 2. さらに別の座標変換  $w : z(U) \rightarrow \mathbb{C}, w = w(z) = u + vi$  で,

$$ds^2 = \tilde{E}(du^2 + dv^2) = \tilde{E}|dw|^2$$

を満たすものを求めよ.

なぜなら, 次のような命題が成り立つからである.

命題 5.1 (地図帳の存在定理) 任意の  $q \in S$  について, その近傍  $U = U_q$  で定義されたパラメーター付け  $z = z_q : U \rightarrow \mathbb{C}, z = z(p) = x + yi$  が存在して,

$$ds^2 = E(dx^2 + dy^2) = E|dz|^2$$

を満たすとする. このとき,  $A = \{z_q : U_q \rightarrow \mathbb{C}\}_{q \in S}$  は地図帳となる. すなわち,  $(S, A)$  はリーマン面となる.

この命題にあるようなパラメーター付けを等温座標 (isothermal coordinate) とよぶ. すなわち問題 2 が解決すれば,  $p \mapsto z \mapsto w$  と經由することで上の命題のような等温座標を得て, 晴れて  $S$  はリーマン面の仲間入りを果たすことになる.

証明. 与えられた  $q \in S$  にたいし, 等温座標  $z : U \rightarrow \mathbb{C}, z = x + yi$  および  $w : V \rightarrow \mathbb{C}, w = u + vi$  で  $q \in U \cap V$  となるものが存在したとする. すなわち, 適当な正値の関数  $E = E(z), \tilde{E} = \tilde{E}(w)$  が存在して,

$$ds^2 = E|dz|^2 = \tilde{E}|dw|^2$$

<sup>18</sup>本来は  $z = x + yi$  が  $S$  上の点を  $p = (p_1(x, y), p_2(x, y), p_3(x, y))$  のようにパラメータ付けする, と (Mathematica の ParametricPlot3D の要領で) 考えるべきかもしれない. いずれにしろ, 同相であることは仮定する.

が成り立っている．いま関係式  $dw = w_z dz + w_{\bar{z}} \bar{d}z$  が成り立っているから，

$$E|dz|^2 = \tilde{E}|dw|^2 = \tilde{E}|w_z dz + w_{\bar{z}} \bar{d}z|^2 = \tilde{E}|w_z|^2 \left| dz + \frac{w_{\bar{z}}}{w_z} \bar{d}z \right|^2.$$

すなわち， $z(U \cap V)$  上で  $E(z) = \tilde{E}(w)|w_z(z)|^2 > 0$  かつ  $w_{\bar{z}}(z) = 0$  が成り立たないといけない．これは  $w \circ z^{-1}$  が正則（よって等角）であることを意味する． ■

ベルトラミ方程式．問題 2 を解くには，さらに次のような式変形が必要となる．改めて， $dz = dx + dyi$ ， $\bar{d}z = dx - dyi$  とおいたとき，次がなりたつ：

命題 5.2

$$\begin{aligned} ds^2 &= E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = \lambda |dz + \mu \bar{d}z|^2 \\ \text{ただし } \lambda &= \frac{(E+G) + 2\sqrt{EG-F^2}}{4} \\ \text{かつ } \mu &= \frac{(E-G) + 2Fi}{(E+G) + 2\sqrt{EG-F^2}} \end{aligned}$$

とくに， $\lambda = \lambda(z) > 0$ ， $|\mu| = |\mu(z)| < 1$  が  $z(U)$  上で成り立つ．

レポート問題 5-1

上の命題 5.2 を証明せよ．

さて上の  $\mu = \mu(z)$  にたいし，連続微分可能な（中への）同相写像  $w : z(U) \rightarrow \mathbb{C}$ ， $w = w(z) = u + vi$  が存在し，関係式

$$(*) \quad w_{\bar{z}}(z) = \mu(z)w_z(z)$$

を満たしたと仮定しよう．この方程式は，ベルトラミ方程式 (Beltrami equation) と呼ばれる．<sup>19</sup> このとき

$$|dw|^2 = |w_z dz + w_{\bar{z}} \bar{d}z|^2 = |w_z|^2 |dz + \mu \bar{d}z|^2 = \frac{|w_z|^2}{\lambda} ds^2.$$

であるから， $\tilde{E}(w) := \lambda(z)/|w_z(z)|^2$  を満たす関数  $\tilde{E}$  をとることで

$$ds^2 = \tilde{E}(du^2 + dv^2) = \tilde{E}|dw|^2$$

となり，等温座標が得られる．したがって問題 2，問題 1 は解決する．

実際，この方程式 (\*) は解くことができ（ガウスは  $S$  が実解析的曲面の場合に上の方程式を本当に解いた），次の定理が得られる．

定理 5.3 (ガウスの定理 (再))  $S \subset \mathbb{R}^3$  を向き付け可能かつ滑らかな曲面とする．このとき， $S$  の各点の近傍には等温座標が存在する．すなわち地図帳  $\mathcal{A}$  が存在して， $S$  はリーマン面となる．

<sup>19</sup>方程式といっても，偏微分方程式である．実は  $w_x$  と  $w_y$  の方程式に書き直せば，偏微分方程式としての形が若干分かりやすくなるかもしれない．

### 5.3 ベルトラミ微分

先ほどのガウスの例のように、曲面に地図帳を作成する（複素構造を入れる）とき、ベルトラミ方程式が自然と顔をだす。この方程式をもう少し一般的な枠組みで扱うために、「ベルトラミ微分」と呼ばれる  $(-1, 1)$  微分を導入しよう。もっとも一般的な定義は次回与えることにして、今回はその直感的な意義を理解することを第一目標としよう。

ベルトラミ係数と歪曲度。  $U \subset \mathbb{C}$  を領域とし、  $F : U \rightarrow F(U) \subset \mathbb{C}$  を  $C^1$ -同相写像とする。このとき、全微分の式

$$F(z + \Delta z) = F(z) + F_z(z) \Delta z + \overline{F_z(z)} \overline{\Delta z} + o(\Delta z) \quad (\Delta z \rightarrow 0)$$

添え字は  $\bar{z}$ ,  $z$  の複素共役

が成り立つのであった。ここで (連続) 関数

$$\mu_F(z) := \frac{F_z(z)}{\overline{F_z(z)}}$$

分子分母が逆

を  $F$  の  $z$  におけるベルトラミ係数 (Beltrami coefficient) と呼ぶ。

命題 5.4 (1) 点  $z \in U$  を固定する。このとき、 $F$  の微分  $D_z F : T_z U \rightarrow T_{F(z)} F(U)$  は次のように表される：

$$D_z F : v \mapsto F_z(z)v + \overline{F_z(z)}\bar{v} \quad (v \in T_z U = \mathbb{C})$$

(2)  $F$  が向きを保つことと、 $U$  上  $|F_z(z)| > |\overline{F_z(z)}|$ 、すなわち  $|\mu_F(z)| < 1$  が成り立つことは同値。

レポート問題 5-2

上の命題 5.4 を証明せよ。(Hint.(1) は全微分の式からストレート。(2) ではまずヤコビ行列式が  $|F_z|^2 - |\overline{F_z}|^2$  で与えられることを証明する。これが正、というのが「向きを保つ」の定義。)

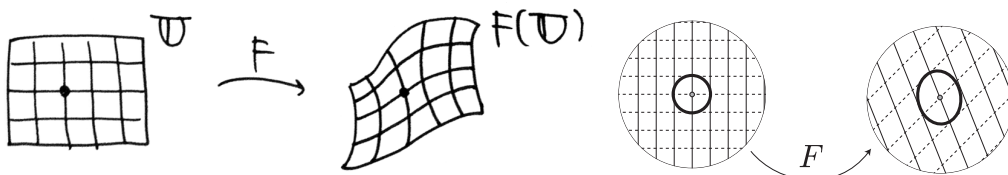


図 11: 左が全体図, 右は局所的に拡大した図。  $D_z F$  は線形写像であり、接空間の円を接空間の楕円に写す。これは、  $F$  が  $z$  のまわりの無限小円を  $F(z)$  のまわりの無限小楕円に写している、と解釈できる。

さていま  $v \in T_z U = \mathbb{C}$  とし、  $v$  の長さが一定値であるとき、  $D_z F(v)$  の長さが最大もしくは最小となるような  $v$  の方向を求めてみよう。これは  $|\Delta z|$  が十分小さな一定値のとき、  $F(z + \Delta z) - F(z)$  が最大および最小となる方向を求める問題を「無限小レベルで」考えた問題だといえる。

ベルトラミ係数を  $\mu := \mu_F(z)$  と書くと、命題 5.4 より  $|D_z F(v)| = |F_z(z)| |v + \mu \bar{v}|$  であるから、  $|v + \mu \bar{v}|$  が最大・最小となる方向をもとめればよいことがわかる。  $|\mu| < 1$  および  $|\bar{v}/v| = 1$  より

$$|v|(1 - |\mu|) \leq |v + \mu \bar{v}| = |v| \left| 1 + \mu \cdot \frac{\bar{v}}{v} \right| \leq |v|(1 + |\mu|)$$

が成り立ち、等号成立条件より

- 最大：  $\arg v = \arg \mu \bar{v}$  すなわち  $\arg(\pm v) = \frac{\arg \mu}{2}$  のとき、長さ  $|F_z(z)||v|(1 + |\mu|)$
- 最小：  $\arg v = \arg \mu \bar{v} + \pi$  すなわち  $\arg(\pm v) = \frac{\arg \mu + \pi}{2}$  のとき、長さ  $|F_z(z)||v|(1 - |\mu|)$

を得る。  $D_z F$  は線形写像であり、接空間の円を接空間の楕円に写すのだから、これらは像の楕円の長径と短径だといえる。ところで、これらの比

$$\frac{\text{長径}}{\text{短径}} = \frac{|F_z(z)||v|(1 + |\mu|)}{|F_z(z)||v|(1 - |\mu|)} = \frac{1 + |\mu_F(z)|}{1 - |\mu_F(z)|} \geq 1$$

は  $v$  の長さに依存せず、  $F$  と  $z$  だけで決まる。この値を  $F$  の  $z$  における歪曲度 (dilatation) とよぶ。さらに上限をとった

$$K_F := \sup_{z \in \mathbb{U}} \frac{1 + |\mu_F(z)|}{1 - |\mu_F(z)|} \geq 1$$

を  $F$  の最大歪曲度 (maximal dilatation) とよぶ。

具体例 (その1)。  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  として、  $F(x + yi) = x + 2yi$  を考える。これは  $F(z) = (3z - \bar{z})/2$  と書けるから、簡単な計算で  $\mu_F(z)$  は  $-1/3$  で一定、  $K_F = 2$  を得る。平面を虚軸方向に2倍にストレッチしているだけだから、最大歪曲度  $K_F$  が2になるのは自然であろう。

レポート問題 5-(2.5)

具体例 (その2)。同相写像  $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  を  $F(z) = z/(1 - |z|^2)$  で定める。このとき  $\mu_F(z)$  を求め、  $K_F = \infty$  を示せ。

注意。一般に向きを保つ  $C^1$  写像  $F$  は、像の側にサイズが特定されない楕円による場、いわば「無限小楕円場」 (a field of infinitesimal ellipses) を定める。個々の「無限小楕円」は長径・短径の方向と比によって一意的に定まり、とくに長径と短径の比はベルトラミ係数  $\mu_F(z)$  によって表現されるのである。

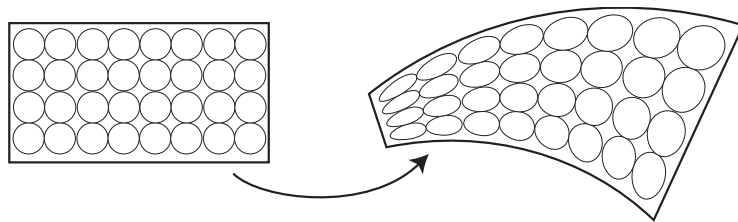


図 12:  $F$  が像の各点で生成する「無限小楕円場」のイメージ。

リーマン面間の写像の場合。さて以上の概念をリーマン面上で定式化しよう。  $S$  と  $R$  をリーマン面とし、それぞれの地図帳を  $A = \{\phi: U_\phi \rightarrow \mathbb{C}\}$ ,  $B = \{\psi: V_\psi \rightarrow \mathbb{C}\}$  とする。また、  $\phi(U_\phi) = \mathbb{U}_\phi$ ,  $\psi(V_\psi) = \mathbb{V}_\psi$  と表す。さらに、ある向きを保つ  $C^1$ -同相写像  $f: S \rightarrow R$  が存在すると仮定する。

ベルトラミ係数を定義するには、やはり地図帳を経由するしかない。いま  $p \in U_\phi$  とし、  $f(p) \in V_\psi$  と仮定しよう。このとき、写像  $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  のベルトラミ係数が点  $\phi(p)$  の周りで局所的に定義できる。

まず、次の事実を証明しよう：

命題 5.5 ある別の  $\tilde{\psi} \in \mathcal{B}$  が  $f(p) \in V_{\tilde{\psi}}$  を満たすとき,  $\psi(p) \in U_{\phi}$  の近傍で定義された  $\tilde{F} := \tilde{\psi} \circ f \circ \phi^{-1}$  について,

$$\mu_{\tilde{F}}(z) = \mu_F(z)$$

が成り立つ. すなわち, ベルトラミ係数は  $R$  側の局所座標には依存しない.

証明. いま  $\Psi := \tilde{\psi} \circ \psi$  とおくと,  $\tilde{F} = \Psi \circ F$  が  $\phi(p)$  の近傍で局所的になりたつ. よって  $w = F(z)$  とおいて  $\tilde{F}$  の「偏微分」を計算すると,  $\Psi$  の正則性 ( $\Psi_{\bar{z}} \equiv 0$ ) より

$$\tilde{F}_z(z) = \Psi_w(w) \cdot w_z(z) + \Psi_{\bar{w}}(w) \cdot \bar{w}_z(z) = \Psi_w(w) \cdot w_z(z)$$

$$\tilde{F}_{\bar{z}}(z) = \Psi_w(w) \cdot w_{\bar{z}}(z) + \Psi_{\bar{w}}(w) \cdot \bar{w}_{\bar{z}}(z) = \Psi_w(w) \cdot w_{\bar{z}}(z)$$

が成り立つ.<sup>20</sup> これらの式の比をとって,  $\mu_{\tilde{F}}(z) = \mu_F(z)$  を得る. ■

ベルトラミ微分の定義. 以上の議論から, 任意の  $\phi \in \mathcal{A}$  および任意の  $z \in U_{\phi}$  にたいし関数

$$\mu_{\phi}(z) := \mu_F(z) = \mu_{\psi \circ f \circ \phi}(z)$$

は,  $R$  側の  $f(z) \in V_{\psi}$  をみたく局所座標  $\psi$  に依存せずに決まる. さらに, 以下が成り立つ:

命題 5.6 関数の族  $\mu = \{\mu_{\phi} : U_{\phi} \rightarrow \mathbb{D}\}_{\phi \in \mathcal{A}}$  は  $(-1, 1)$ -微分. すなわち, 任意の  $\phi, \psi \in \mathcal{A}$  にたいし,  $p \in U_{\phi} \cap U_{\psi}$  とすれば,  $z = \phi(p)$ ,  $w = \psi(p)$  について

$$\mu_{\psi}(w) \left( \frac{dw}{dz}(z) \right)^{-1} \overline{\left( \frac{dw}{dz}(z) \right)} = \mu_{\phi}(z).$$

さらに,  $|\mu| = \{|\mu_{\phi}(z)|\}_{\phi \in \mathcal{A}}$  で定まる (連続) 関数の族は  $(0, 0)$ -微分. すなわち, リーマン面  $S$  上の (連続) 関数である.

レポート問題 5-3

上の命題 5.6 を証明せよ.

定義. 向きを保つ  $C^1$ -同相写像  $f : S \rightarrow R$  にたいし, 以上のようにして定まる  $(-1, 1)$ -微分  $\mu = \mu_f = \mu_f(z) \frac{dz}{dz}$  を  $f : S \rightarrow R$  のベルトラミ微分とよぶ. また, 関数  $|\mu_f| : S \rightarrow [0, 1)$  によって定まる値

$$K_f := \sup_{p \in S} \frac{1 + |\mu_f|(p)}{1 - |\mu_f|(p)} \geq 1$$

を  $f$  の最大歪曲度と呼ぶ.

例.  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を先ほどの  $F(x + yi) \mapsto x + 2yi$  とする. いまトーラス  $S = T(1, i)$  および  $R = T(1, 2i)$  にたいし, 標準射影をそれぞれ  $\pi_S : \mathbb{C} \rightarrow S$ ,  $\pi_R : \mathbb{C} \rightarrow R$  とすれば,  $C^1$ -写像  $f : S \rightarrow R$  で  $f \circ \pi_S = \pi_R \circ F$  をみたくものが存在する. このとき,  $\mu_f = \mu_f(z) \overline{dz}/dz$  は事実上  $\mu_F(z) \equiv -1/3$  によって与えられ,  $K_f = 2$  である.

<sup>20</sup>このあたかも合成関数の偏微分のような計算が,  $z$  および  $\bar{z}$  による「偏微分」について成立することは自明ではない. しかし「全微分」の式を用いれば, 比較的簡単に正当化できる.

## 6 擬等角写像とベルトラミ方程式

### 6.1 前回の復習と補足

前回導入した平面領域のベルトラミ微分（係数）について簡単に復習しておこう．

$U, V \subset \mathbb{C}$  を領域とし、 $F: U \rightarrow V$  を向きを保つ上への  $C^1$  同相写像とする． $z \in U$  にたいし、 $z$  および  $\bar{z}$  に関する「偏微分」を

$$F_z(z) := \frac{1}{2}\{F_x(z) - iF_y(z)\}, \quad F_{\bar{z}}(z) := \frac{1}{2}\{F_x(z) + iF_y(z)\},$$

と定義する．また  $\Delta z \rightarrow 0$  のとき「全微分」

$$F(z + \Delta z) = F(z) + F_z(z)\Delta z + F_{\bar{z}}(z)\overline{\Delta z} + o(\Delta z)$$

が成立するのであった．さらに  $\mu_F(z) := F_{\bar{z}}(z)/F_z(z)$  をベルトラミ微分とよぶ．<sup>21</sup>前回のレポート問題で記したように、 $F$  の実 2 次元写像としてのヤコビ行列式は  $|F_z(z)|^2 - |F_{\bar{z}}(z)|^2$  であり、 $F$  が向きを保つという性質は  $|F_z(z)| > |F_{\bar{z}}(z)|$  すなわち  $|\mu_F(z)| < 1$  が  $U$  上成り立つことと同値である．

さらに  $K_F := \sup_{z \in U} \frac{1 + |\mu_F(z)|}{1 - |\mu_F(z)|} \geq 1$  を最大歪曲度と呼んだ．この値は、 $F$  が「無限小円」を「無限小楕円」に写すときの、その長径と短径の比の上限を意味する．いま  $K_F$  の定義より  $U$  上

$$|\mu_F(z)| \leq \frac{K_F - 1}{K_F + 1} =: k_F < 1$$

が成り立つ．とくに  $K_F = 1$  のとき、 $U$  上

$$\mu_F \equiv 0 \iff F_{\bar{z}} \equiv 0 \iff F \text{ は正則 (等角)}$$

となる．正則関数は「無限小円」を「無限小円」に写すから、「 $K_F$  が 1 に近いほど、 $F$  は等角写像に近い」ということがわかる．

今回の目標． $\mu_F$  や  $K_F$  が考えられる同相写像のクラスを  $C^1$  から拡張し、擬等角写像とよばれるクラスを導入する．また、ある比較的広範なクラスのベルトラミ方程式について、擬等角写像解の存在定理を与える．

### 6.2 言葉の準備 (三つ)

(ア) 絶対連続性．ベルトラミ微分は  $z$  および  $\bar{z}$  に関する「偏微分」の比であるから、それらの存在が一定保証されなければならない．具体的には、「ほとんどいたるところ」(a.e. = almost everywhere) でその存在を保証するような条件を与えよう．

定義 (絶対連続)．閉区間  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  上で定義された関数  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が絶対連続 (absolutely continuous) であるとは、任意に小さい  $\epsilon > 0$  にたいし、次を満たす十分小さな  $\delta > 0$  が存在することをいう：有限個の数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  および  $b_1, b_2, \dots, b_n$  が

- $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b$  かつ

<sup>21</sup>前回はこれをベルトラミ「係数」と呼んだが、これをベルトラミ「微分」と呼ぶ正当な理由がある：領域  $U, V$  をリーマン面とみなした場合、局所座標が自明な恒等写像ひとつしかないことから、任意の  $(m, n)$ -微分は単一の関数となる．この意味で、本来  $(-1, 1)$ -微分であるベルトラミ微分もベルトラミ係数と区別がつかないのである．

$$\bullet \sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$$

を満たすとき,  $\sum_{k=1}^n |u(b_k) - u(a_k)| < \epsilon$ .

明らかに, 絶対連続ならば連続関数となる. さらに, 次の重要な性質がある<sup>22</sup>:

**命題 6.1 (絶対連続関数の性質)** 関数  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が絶対連続のとき, a.e.  $x_0 \in [a, b]$  で微分  $u_x(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$  が存在する. また, 微積分の基本定理

$$u(x_0) - u(a) = \int_a^{x_0} u_x(t) dt$$

がすべての  $x_0 \in [a, b]$  で成り立つ (右辺の積分はもちろんルベーグ積分.)

注意. 導関数  $u_x$  は区間  $[a, b]$  内のある零集合上で定義されていない. しかし, そこでの  $u_x$  の値を任意に定めて得られる関数  $u_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は可測関数であって, その積分は上の関係式を満たす, というのがこの命題の正確な主張である.

(イ) ACL 性. さて上の絶対連続性は, 複素数値の関数  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  についても全く同様の定義が適用できる. このとき  $\operatorname{Re} u(x)$ ,  $\operatorname{Im} u(x)$  はそれぞれ実関数の意味で絶対連続であるから, 命題 6.1 より, a.e.  $x_0 \in [a, b]$  において  $x$  微分をもつ. したがって, 複素数値の  $x$  微分  $u_x(x_0) = (\operatorname{Re} u)_x(x_0) + i(\operatorname{Im} u)_x(x_0)$  も a.e.  $x_0 \in [a, b]$  で存在し, 可測関数となることに注意しよう.

**定義 (ACL).** 領域  $U$  上で定義された関数  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  が ACL (absolutely continuous on lines) であるとは,  $U$  に含まれる任意の長方形

$$Q = \{x + yi \in \mathbb{C} : x \in [a, b], y \in [c, d]\} \subset U$$

にたいし,  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c, d]$  を変数とすると

- 関数  $x \mapsto f(x, y_0)$  は a.e.  $y_0 \in [c, d]$  について絶対連続; かつ
- 関数  $y \mapsto f(x_0, y)$  が a.e.  $x_0 \in [a, b]$  について絶対連続

となることをいう.

命題 6.1 およびゲーリングとレヒトの結果から, 次がわかる:

**命題 6.2 (ACL 同相写像の性質, とくにベルトラミ微分の存在)** 関数  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  が ACL な同相写像であれば, a.e.  $z_0 \in U$  で「偏微分」

$$f_z(z_0) = \frac{1}{2}\{f_x(z_0) - if_y(z_0)\}, \quad f_{\bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\{f_x(z_0) + if_y(z_0)\}$$

が存在する. さらに, a.e.  $z_0 \in U$  で「全微分」の式

$$f(z + \Delta z) = f(z) + f_z(z)\Delta z + f_{\bar{z}}(z)\overline{\Delta z} + o(\Delta z) \quad (\Delta z \rightarrow 0)$$

<sup>22</sup>実はこの命題の逆も成り立つ. すなわち, 絶対連続性は微積分の基本定理が成り立つことの必要十分条件なのである. たとえば伊藤清三の「ルベーグ積分入門」p139 を見よ.



|| が成り立ち、ベルトラミ微分  $\mu_f(z) = f_{\bar{z}}(z)/f_z(z)$  も意味をもつ。

注意.  $z_0 \in U$  で「全微分」の式が存在すれば、ヤコビ行列(式)も意味をもつ。したがって、 $f$  が向きを保てば、ベルトラミ微分は  $|\mu_f(z_0)| < 1$  をみたす。

(ウ) 最大歪曲度(と  $L^\infty$  ノルム). さて  $U \subset \mathbb{C}$  を領域,  $\mu : U \rightarrow \mathbb{D}$  を可測関数とする. 定数  $0 \leq \ell < 1$  にたいし,

$$A(\mu, \ell) := \text{Area}\{z \in U : \ell \leq |\mu(z)| < 1\}$$

とおく. ただし, Area は 2次元ルベグ測度とする. このとき,  $\mu$  の  $L^\infty$  ノルムを

$$\|\mu\|_\infty := \inf_{0 \leq \ell < 1} \{\ell : A(\mu, \ell) = 0\}$$

と定める.<sup>23</sup>

さて  $f : U \rightarrow V$  が向きを保つ上への同相写像で、さらに ACL だとする. このとき、そのベルトラミ微分は  $\mu_f : U \rightarrow V$  がルベグ測度 0 の集合を除いて定義される可測関数であるから、ノルム  $\|\mu_f\|_\infty \leq 1$  が意味をもつ. このとき

$$K_f := \frac{1 + \|\mu_f\|_\infty}{1 - \|\mu_f\|_\infty} \in [1, \infty]$$

を  $f$  の最大歪曲度とよぶ.

以上で言葉の準備が終了した.

### 6.3 擬等角写像

定義(擬等角写像).  $1 \leq K < \infty$  を定数とする. 向きを保つ上への同相写像  $f : U \rightarrow V$  が  $K$ -擬等角写像 ( $K$ -quasiconformal map, 略して  $K$ -qc) であるとは,

(q1)  $f$  は ACL ; かつ

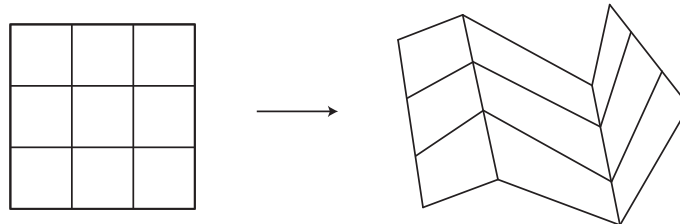
(q2)  $K_f \leq K$

を満たすことをいう.

注意.  $K$ -qc は ACL 性から a.e. で全微分性が保証されている. すなわち、前回でいうところの像の側での「無限小楕円場」が a.e. で存在しており、これらの楕円の歪曲度(長径と短径の比)は一様に  $K_f \leq K < \infty$  で抑えられる.  $K$  が特定されず、 $K_f$  の有界性のみが分かっている場合、 $f$  は単に「擬等角写像」と呼ばれる.

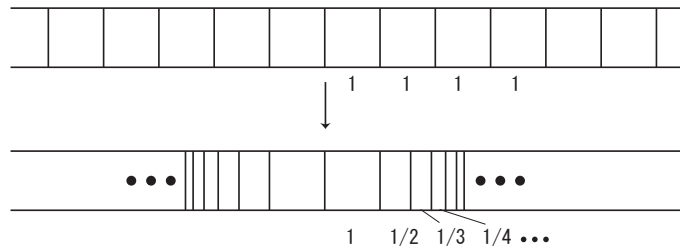
具体例 1.  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を  $f(x + yi) = x + 2yi$  で定めたものは 2-qc である.

具体例 2. 直感的な例をひとつ. 下図のように、簡単な写像を「切り貼り」しても擬等角写像が得られる. とろとろ  $\mu$  が定義できないが、面積 0 なので問題ない.



<sup>23</sup>  $\|\mu\|_\infty := \text{ess. sup}_{z \in U} |\mu(z)|$  とも書かれる.

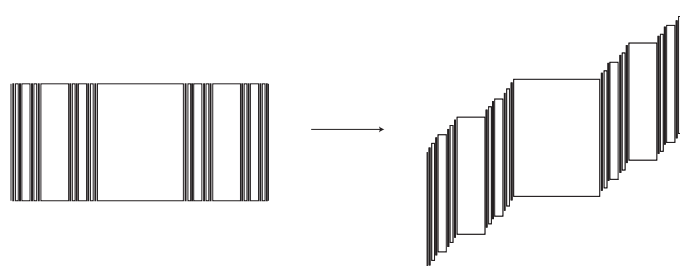
擬等角写像でない例 1. これも直感的な例. 帯状領域  $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < 1\}$  にたいし  $f: U \rightarrow U$  を下図のように定めると, 最大歪曲度  $K_f$  が無限大となり, (q2) に反する.



擬等角写像でない例 2. 同様に, 上への微分同相写像  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z/(1-|z|^2)$  もやはり  $K_f = \infty$  となってしまう.

擬等角写像でない例 3. この例がいちばん厄介である. まず「悪魔の階段関数」(devil's staircase) を思い出しておこう.<sup>24</sup>  $\Lambda \subset [0, 1]$  を 3 進カントール集合とすると, 「悪魔の階段関数」  $s: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  は上への非減少連続関数であり,  $\Lambda$  以外の点で微分が 0, すなわち平坦なグラフをもつ. この関数は, ほとんどいたるところ微分可能だが絶対連続でない, という特徴をもつ. 実際, 関数が増加している場所は  $\Lambda$  のみだが, 集合  $\Lambda$  はルベーグ測度 0 である. すなわちどんなに小さな長さ  $\delta$  の線分であっても, 細かく刻んで  $\Lambda$  を覆うようにできる. そこでの増分はちょうど 1 であるから, 絶対連続性の定義に反する.

さてこのとき,  $U = \{x + yi : x, y \in [0, 1]\}$  上で定義された関数  $f: U \rightarrow f(U), x + yi \mapsto x + (y + s(x))i$  は向きを保つ同相写像であるが, ACL ではない. よって擬等角写像ではない.



ややこしいことに, この写像はほとんどいたるところ全微分可能であり, しかも  $\mu_f(z) = 0$ , すなわち  $K_f = 1$  なのである. じつは, 擬等角写像に ACL 性が要求される理由は, 「全微分」を a.e. で保証するためだけではない. さらに強く, 命題 6.1 でいう「微積分の基本定理」が成り立つことが本質的なのである. 興味のある皆さんはぜひ, 参考文献を当たって考えていただきたい.

擬等角写像の性質. 擬等角写像は定義が複雑なわりに, きわめて「直感的に妥当な」性質を持っている. いくつかピックアップしてみよう.  $f: U \rightarrow V$  を  $K$ -qc とすると,

(QC1)  $f$  はほとんどいたるところで「全微分」可能であり,  $\mu_f$  が定義できる.

(QC2) ワイルの補題: 1-qc は正則 (等角) 写像.

(QC3)  $f^{-1}$  も  $K$ -qc.

(QC4)  $g: V \rightarrow W$  が  $K'$ -qc のとき,  $g \circ f$  は  $K'K$ -qc.

(QC5)  $f$  は零集合を零集合を写す.

<sup>24</sup>Cantor 関数とも呼ばれる. Wikipedia の記事は良くまとまっている.

(QC6)  $f$  は  $(1/K)$ -ヘルダー連続.

(QC7)  $g: V \rightarrow W$  が等角写像のとき,  $\mu_{g \circ f} = \mu_f$ .

などなど. 証明にはいずれもデリケートな議論を必要とし, 残念ながらこの講義で扱う時間的余裕はない.

## 6.4 ベルトラミ方程式

いま  $U \subset \mathbb{C}$  を領域とし, 可測関数  $\mu: U \rightarrow \mathbb{D}$  をとる. このとき「偏微分」方程式

$$f_{\bar{z}}(z) = \mu(z)f_z(z)$$

をベルトラミ方程式 (Beltrami equation) と呼ぶ. 前回は  $\mu$  が連続関数の場合のみを考えたが, 今回は可測関数である. 滑らかさや粗さを表現するのにレギュラリティー (regularity) という言葉があるが, 可測関数は解析学がギリギリ成立する最低限のレギュラリティーである.<sup>25</sup> にもかかわらず, この方程式は一定条件下で解を持つことが知られている. とくに  $\|\mu\|_{\infty} = k < 1$  の場合が重要で, このとき解は擬等角写像となっていへん使い勝手がよい.

以下, 解の存在, 一意性, そして解の ( $\mu$  にたいする) 連続性について3つの定理を述べる. ただし,  $z \in \mathbb{C} - U$  では  $\mu(z) = 0$  とおくことにして, 可測関数  $\mu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  に関するベルトラミ方程式について記述する.

定理 6.3 (解の存在)  $\mu$  が  $\|\mu\|_{\infty} = k < 1$  を満たすと仮定する. このとき  $K = (1+k)/(1-k)$  とおくと, ある  $K$ -擬等角写像  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  が存在して, a.e.  $z \in \mathbb{C}$  で  $f_{\bar{z}}(z) = \mu(z)f_z(z)$  が成り立つ. すなわち, a.e.  $z \in \mathbb{C}$  で  $\mu_f(z) = \mu(z)$  が成り立つ.

次に解の一意性を述べるが, その前に次のレポート問題を考えてほしい:

レポート問題 6-0

複素平面  $\mathbb{C}$  から自分自身への等角自己同型 (等角な同相写像) は, 複素アフィン写像  $T(z) = az + b$  ( $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ) に限ることを示せ.

定理 6.4 (解の一意性) ふたつの  $K$ -擬等角写像  $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  が a.e.  $z \in \mathbb{C}$  で  $\mu_f(z) = \mu_g(z) = \mu(z)$  をみたすとき,  $f \circ g^{-1}$  は  $\mathbb{C}$  の等角自己同型, すなわち複素アフィン写像である. とくに  $f$  と  $g$  が  $0, 1$  を固定するならば,  $f = g$ .

したがってベルトラミ方程式  $f_{\bar{z}} = \mu f_z$  の解で  $0$  と  $1$  を固定するものは一意に定まる. これを  $\mu$  の標準解 (canonical solution) とよぶ.

証明には, 次の補題を用いる:

補題 6.5  $\zeta = g(z)$  とするとき,  $\mu_{f \circ g^{-1}}$  は a.e.  $\zeta \in \mathbb{C}$  で存在し,

$$\mu_{f \circ g^{-1}}(\zeta) = \left( \frac{g_z(z)}{g_{\bar{z}}(z)} \right) \cdot \frac{\mu_f(z) - \mu_g(z)}{1 - \mu_f(z)\overline{\mu_g(z)}}.$$

<sup>25</sup>可測でなければ積分ができない!

## レポート問題 6-1

上の補題 6.5 を示せ (難しければ  $f, g$  が  $C^1$  と仮定してよい.)

証明. (定理 6.4)  $\mu_f = \mu_g$  a.e. と仮定すると, 補題 6.5 より  $\mu_{f \circ g^{-1}} = 0$  a.e. になりつつ, よって  $f \circ g^{-1}$  は 1-qc だが, 擬等角写像の性質 (QC2) より,  $f \circ g^{-1}$  は  $\mathbb{C}$  の等角自己同型. ここで  $f \circ g^{-1}(\zeta) = a\zeta + b$  とおくと,  $f(0) = g(0) = 0$  かつ  $f(1) = g(1) = 1$  のとき,  $a = 1, b = 0$ . すなわち  $f \circ g^{-1}(\zeta) = \zeta$ . ■

定理 6.6 (解の連続的依存性)  $\mu, \mu_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を可測関数とし,

- $\|\mu\|_\infty, \|\mu_n\|_\infty \leq k < 1$  かつ
- $\mu_n(z) \rightarrow \mu(z)$  a.e.  $z \in \mathbb{C}$

と仮定する. このとき,  $\mu_n$  の標準解  $f_n$  は  $\mu$  の標準解  $f$  にコンパクト一様収束する.

注意. 定理 6.6 の逆は成立しない. すなわち,  $f_n \rightarrow f$  がコンパクト一様収束していても,  $\mu_n \rightarrow \mu$  とは限らない.

参考.  $\|\mu\|_\infty = 1$  となる場合は非常に難しい. たとえばある定数  $a > 0$  にたいし  $A(\mu, 1-\epsilon) = O(e^{-a/\epsilon})$  であれば ACL な同相写像の解が存在する (ダヴィッドの定理). 解は存在しても, 一意性がない, 同相写像でない, といった状況もありうる.