

複素解析特論I(つづき)

タイヒミュラー空間と複素力学系への応用

川平 友規

平成 24 年 9 月 21 日

7 リーマン面の基本群・普遍被覆面

今回と次回で、「リーマン面の一意化定理」を証明する。

一口に「リーマン面」といっても、さまざまな構成方法がある。いわゆる格子トーラス $T(\omega_1, \omega_2)$ のようなものはかなり具体的に構成されたリーマン面の部類に入るほうで、たとえば「ガウスの定理」でみたような例は、曲面に複素構造を与える時点で「ベルトラミ方程式を解く」といういささか超越的(?)なプロセスを経る分、素性がよくわからない。こうした抽象性を緩和するために、与えられたリーマン面と「同等な」モデル(模型)を作るのが「一意化定理」(uniformization theorem)の役割だといってよい。大まかにその主張を述べておきたいので、まずふたつのリーマン面が「同等」であることを定義する：

定義(等角同型). ふたつのリーマン面 S と R が等角同型 (conformally isomorphic) または単に同型 (isomorphic) であるとは、ある正則(等角)な同相写像 $h: S \rightarrow R$ が存在するときをいう。

定理 7.1 (一意化定理) 任意のリーマン面は、次のような形のリーマン面 R と等角同型である：

$$R = \mathbb{X}/\Gamma$$

ただし $\mathbb{X} = \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$, もしくは \mathbb{D} であり、 Γ は $PSL(2, \mathbb{C})$ のある離散部分群。

まだ $PSL(2, \mathbb{C})$ が \mathbb{X} がどのように作用するのかが説明されていないので、現時点ではかなりあいまい主張であるが、この \mathbb{X}/Γ がモデルに相当するリーマン面である。とりあえず「任意のリーマン面は、ごくごく簡単なリーマン面を、 $PSL(2, \mathbb{C})$ という比較的素性のよくわかっている群の部分群で割ったものと同等だ」という部分に意味がある。¹ 以下ではその構成方法を概観するが、その手順はあたかも、地球から地球儀を構成するかのようである。地表をくまなく歩いて地図帳を作り、それを使い慣れた材質に写し取りながら模型を構成していく。

まずは準備段階として、定理の証明に必要な「基本群と被覆空間」の用語を復習しつつ、リーマン面の普遍被覆空間を構成する。²

7.1 基本群

いくつか基本的な用語を確認していく。いつものように、 S はリーマン面、その地図帳は $A = \{\phi: U_\phi \rightarrow \mathbb{C}\}$ で表す。さらに、記号 \mathbb{I} で閉区間 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ を表すことにする。

(ア) パス. 一般に、連続写像 $\alpha: \mathbb{I} \rightarrow S$ のことを、 S 上のパス (path, もしくは道) と呼ぶ。³ また習慣的に、像 $\alpha(\mathbb{I})$ も同じく記号 α で表す。パスは列車の走る鉄道のようなものである。時刻 $t=0$ に「始点」 $\alpha(0)$ をスタートし、時刻 $t=1$ に「終点」 $\alpha(1)$ に到着する。始点と終点は合わせて「端点」と呼ばれる。

始点と終点一致するとき、すなわち $\alpha(0) = \alpha(1)$ であるとき、パス α は閉じている (closed) と呼ばれる。閉じたパスはループ (loop) とも呼ばれる。

S 上のパス全体のなす集合を、記号 $\Pi(S)$ で表すことにする。

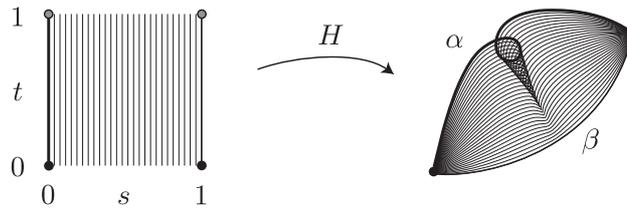
¹ なにを「同等」とみなすかは、あくまで恣意的なものである。モジュライ空間でもタイヒミュラー空間でも、分類という行為にはいつもわれわれの感覚や時代の気分が反映している。

² 参考文献として Forster の本 (p13~), 松本幸夫『トポロジー入門』, シンガー・ソープ『トポロジーと幾何学入門』(3章)をあげておく。

³ 「道」という垢抜けない訳語は、口語ではめったに使われないうように思う。

(イ) ホモトピー. 端点を共有するふたつのパスが実質的に同じであることの基準を与えるのがホモトピーの考え方である. 具体的には, 端点を固定したまま一方から一方へ連続的に変形できればよい. 数学の言葉では, 次のように表現される: パス α と β がホモトピック (homotopic) であるとは, 次を満たす連続写像 $H: \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow S$ が存在することをいう.

- 任意の「変形パラメータ」 $s \in \mathbb{I}$ について, $H(s, 0) = \alpha(0) = \beta(0)$ かつ $H(s, 1) = \alpha(1) = \beta(1)$
- さらに任意の「時間パラメータ」 $t \in \mathbb{I}$ について, $H(0, t) = \alpha(t)$ かつ $H(1, t) = \beta(t)$



最初の条件は端点が一致し, 連続変形の際にも固定されていることを表現し, ふたつ目は変形が α から β に至るものであることを表現している. パス α と β がホモトピックであるとき, $\alpha \sim \beta$ と表す.⁴また, 上のような写像 H をホモトピー写像 (homotopy map) と呼ぶ.

|| 命題 7.2 ホモトピー \sim はパスの集合 $\Pi(S)$ 内の同値関係を定める.

レポート問題 7-1

命題 7.2 を証明せよ.

パス α の同値類 $[\alpha] \in \Pi(S)/\sim$ を α のホモトピー類 (homotopy class) と呼ぶ.

(ウ) パスの演算. 鉄道における乗り継ぎ, 往路・帰路に対応する概念を定義しておく. パス $\alpha, \beta \in \Pi(S)$ が $\alpha(1) = \beta(0)$ をみたすとき, 「時刻 $t = 0$ に α の始点からスタートし, 2 倍のスピードで α を進み, 時刻 $t = 0.5$ に $\alpha(1) = \beta(0)$ で β に乗り換え. 2 倍のスピードで β を進み, 時刻 $t = 1$ に $\beta(1)$ に到着」というパスを $\beta \cdot \alpha$ もしくは単に $\beta\alpha$ で表し, α と β の積 (product) と呼ぶ.

また, 「時刻 $t = 0$ に α の終点からスタートし, 逆向きに α を進み, 時刻 $t = 1$ に $\alpha(0)$ に到着」するパスを α^{-1} と表し, α の逆元 (inverse) と呼ぶ. すなわち $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$ ($\forall t \in \mathbb{I}$).

|| 命題 7.3 (ホモトピー類の演算) パス $\alpha, \beta \in \Pi(S)$ で $\alpha(1) = \beta(0)$ を満たすものについて,

- 積: $[\beta] \cdot [\alpha] := [\beta \cdot \alpha] \in \Pi(S)/\sim$
- 逆元: $[\alpha]^{-1} := [\alpha^{-1}] \in \Pi(S)/\sim$

|| は well-defined.

レポート問題 7-2

命題 7.3 を証明せよ.

(オ) 基本群. $p_0 \in S$ を固定し, 始点と終点が p_0 となるパス (ループ) の全体を $\Pi(S, p_0)$ で表す. また, $e: \mathbb{I} \rightarrow S$ を定数写像 $e(t) \equiv p_0$ ($\forall t \in \mathbb{I}$) とする.

⁴ 「等式 (equality) $2^2 = 4$ 」という言葉遣いと同様に, 「ホモトピー (homotopy) $\alpha \sim \beta$ 」という言葉遣いができる.

命題 7.4 (基本群の定義) ホモトピー類の集合 $\Pi(S, p_0)/\sim$ は命題 7.3 の積および逆元によって, $[e]$ を単位元とする群となる. この集合を $\pi_1(S, p_0)$ であらわし, S の p_0 を基点とする基本群 (fundamental group) とよぶ.

レポート問題 7-3

命題 7.4 を証明せよ (結合律を確認すれば十分.)

空間の大局的な構造を記述する方法はそう多くないが, 基本群はまさにその「基本」となるものである.

例. たとえば $\pi_1(\mathbb{C}, 0) = \{[e]\}$. トーラスの基本群は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, アニュラスは \mathbb{Z} . 直感的には自明だが厳密な証明は意外とややこしい.

基本群の性質. リーマン面 S と任意の $p_0, p_1 \in S$ にたいし, $\pi_1(S, p_0)$ と $\pi_1(S, p_1)$ は群として同型である.⁵ また, リーマン面 S, R が同相であれば, $\pi_1(S, p_0)$ と $\pi_1(R, q_0)$ は群として同型である. ただし, $p_0 \in S, q_0 \in R$ は自由に選んでよい (すなわち, 基本群はいわゆる「位相不変量」である).

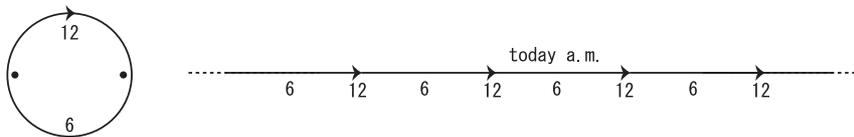
レポート問題 7-4

トーラスから一点を除いて得られるリーマン面の基本群をもとめよ.

単連結性. リーマン面 S が単連結 (simply connected) であるとは, $\pi_1(S, p_0)$ が単位元のみからなることをいう. たとえば $\mathbb{C}, \mathbb{D}, \hat{\mathbb{C}}$ は単連結であるが, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ は単連結でない.⁶

7.2 普遍被覆面

時計の短針 (時計) は半日で文字盤を一周する. その経路は, ある限られた 12 時間を表現するためだけに存在するのではない. 過去から未来への, 永遠の時の流れを表現するために存在するのである. リーマン面上のパスたちも「無限に広がる何か」を表現することができる. それが「普遍被覆」である.



まず $p_0 \in S$ を固定し, 集合

$$\tilde{S} := \{ \tilde{x} = (x, [\alpha]) : x \in S, \alpha \in \Pi(S), \alpha(0) = p_0, \alpha(1) = x \}$$

を考える. $\tilde{x} = (x, [\alpha])$ は第 1 座標が S 上の点, 第 2 座標が p_0 を出発して x に到達するパスのホモトピー類である. また, $\pi : \tilde{x} = (x, [\alpha]) \mapsto x$ で定まる $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ を射影 (projection) と呼ぶ.

⁵リーマン面には連結性が仮定されていることに注意. リーマン面は局所的に平面領域と同相であるから, この連結性は弧状連結性と同値である. したがって, p_0 と p_1 を結ぶパスが必ず存在するのがミソ.

⁶リーマン面には連結性が仮定されてるので問題ないが, 複数の連結成分を持つ一般の位相空間では, 「任意のループが 1 点 (定数関数) にホモトピック」であることを単連結性の定義とすることもあるようである.

この集合に、以下の要領で位相を入れたものを普遍被覆（空間）(universal covering (space)) とよぶ。

普遍被覆の位相. 位相を定めるには、開集合系を定めればよい。開集合系を定めるには、各点に基本近傍系を定めればよいのであった。すなわち、各点に「十分小さな開近傍」たちを定めるのである。

任意の点 $\tilde{p} = (p, [\alpha])$ にたいし、 p の近傍 $U \subset S$ で、円板と同相なもの（すなわち単連結なもの）を取ることができる。実際、 S はリーマン面であったから、 p のまわりで定義された局所座標 $\phi: U_\phi \rightarrow \mathbb{C}$ をひとつ選んで、 $\phi(p) \in \mathbb{C}$ のまわりの十分小さな円板を ϕ^{-1} で引き戻せばよい。

さてこのとき任意の $x \in U$ にたいし、 p を始点にもち x を終点とするパス η が U 内に取れる。しかも U の単連結性から、ホモトピー類 $[\eta]$ はただひとつに定まる。そのような $x, [\eta]$ をもとに、

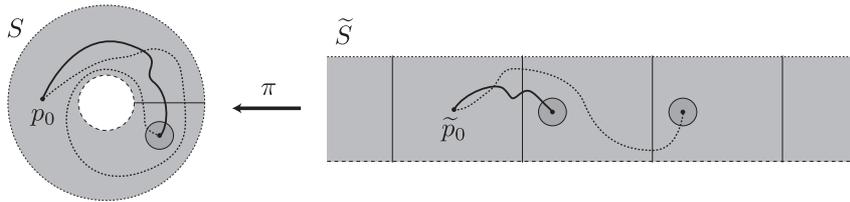
$$\tilde{U} := \left\{ (x, [\eta \cdot \alpha]) \in \tilde{S} : x \in U, \eta \in \Pi(S), \eta(0) = p, \eta(1) = x, \eta(\mathbb{I}) \subset U \right\}$$

という \tilde{S} の \tilde{p} を含む部分集合が定まる。このようにして得られる集合 \tilde{U} の全体を \tilde{p} の基本近傍系として定めると、 \tilde{S} の開集合系が生成される。以後、 \tilde{S} はこの開集合系によって位相空間とみなす。

レポート問題 7-(4.5)

\tilde{S} はハウスドルフ空間となることを示せ。また、 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ は連続写像となることを示せ。

とくに上で構成した \tilde{U} に射影を制限した $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$ が同相写像となることもすぐにわかるので、各自確かめられたい。



普遍被覆面の地図帳. つぎに、 S の地図帳 $\mathcal{A} = \{\phi: U_\phi \rightarrow \mathbb{C}\}$ をもとに、普遍被覆 \tilde{S} の地図帳を（もっとも無理のない方法で、自然に）構成する。

まず任意の点 \tilde{p} にたいし、その点を含むような局所座標 $\tilde{\phi}_{\tilde{p}}: \tilde{U}_{\tilde{p}} \rightarrow \mathbb{C}$ をひとつ構成しよう。 p の十分小さな近傍 U_p をとれば、

- ある $\phi_p \in \mathcal{A}$ が存在して、 $U_p \subset U_{\phi_p}$; かつ
- ある \tilde{p} の近傍 $\tilde{U}_{\tilde{p}}$ が存在して、 $\pi|_{\tilde{U}_{\tilde{p}}}: \tilde{U}_{\tilde{p}} \rightarrow U_p$ は同相写像

とできる。このとき、

$$\tilde{\mathcal{A}} := \left\{ \tilde{\phi}_{\tilde{p}} = \phi_p \circ \pi|_{\tilde{U}_{\tilde{p}}} \rightarrow \mathbb{C} \right\}_{\tilde{p} \in \tilde{S}}$$

と定めるのである。これがアトラスの条件 (RS2)(a)-(c) を満たすことは難しくないので、各自確認していただきたい。

次の定理で証明するように、 \tilde{S} は連結なハウスドルフ空間であるから (RS1)、リーマン面となる。これをリーマン面 S の普遍被覆面 (universal covering surface) ともいう。ちなみに、地図帳の構成方法から、 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ は正則写像となることに注意しよう。

|| 定理 7.5 \tilde{S} は単連結なリーマン面である。すなわち、基本群は単位元のみからなる。

証明. レポート問題 7-(4.5) でみたように, \tilde{S} はハウスドルフ位相空間である. また, 連結でもある:

レポート問題 7-5

\tilde{S} は連結であることを示せ. (Hint: まず \tilde{S} の連結性は弧状連結性と同値であることを確認. あとは任意の 2 点を結ぶパスが存在することを言えば十分.)

さて一番重要な単連結性を証明しよう. \tilde{p}_0 を固定し, $\tilde{e}: \mathbb{I} \rightarrow \tilde{S}$ を \tilde{p}_0 への定数写像としよう. すなわち, 基本群 $\pi_1(\tilde{S}, \tilde{p}_0)$ の単位元は $[\tilde{e}]$ と表される.

証明すべきことは, 任意のホモトピー類 $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(\tilde{S}, \tilde{p}_0)$ にたいし, $[\tilde{\alpha}] = [\tilde{e}]$ となることである. すなわち, $\Pi(\tilde{S}, \tilde{p}_0)$ の元としてホモトピー $\tilde{\alpha} \sim \tilde{e}$ が成立することを示せばよい.

$\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$, $p_0 := \pi(\tilde{p}_0)$, $e := \pi \circ \tilde{e}$ とおくと, $\tilde{p}_0 = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(1)$ であることから,

$$\tilde{p}_0 = (p_0, [\alpha]) = (p_0, [e])$$

が成り立つ.⁷ したがって, \tilde{S} としての第 2 座標が一致することから, $\alpha \sim e$ が成立しなければならない. そのホモトピー写像を $H: \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow S$ とすると,

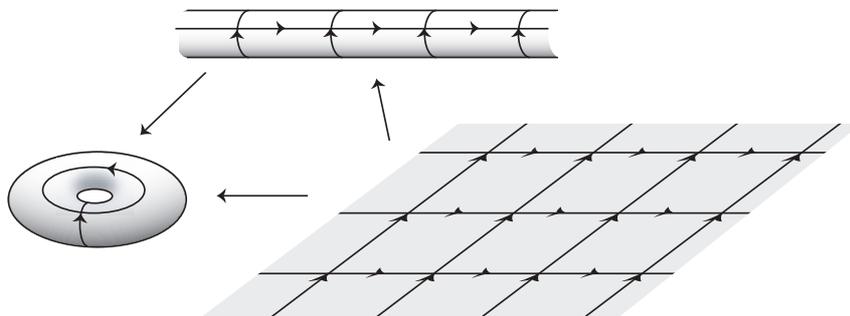
- 任意の「変形パラメータ」 $s \in \mathbb{I}$ について, $H(s, 0) = H(s, 1) = p_0$;
- さらに任意の「時間パラメータ」 $t \in \mathbb{I}$ について, $H(0, t) = \alpha(t)$ かつ $H(1, t) = e(t)$

が成立している. ここで写像 $\tilde{H}: \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \tilde{S}$ を

$$\tilde{H}(s, t) := (H(s, t), [\eta_{(s,t)}])$$

として定めよう. ただし $\eta_{(s,t)}$ は $\eta_{(s,t)}(u) := H(s, tu)$ ($\forall u \in \mathbb{I}$) として定義される, 「時刻 $u = 0$ に p_0 をスタートし, 時刻 $u = 1$ に $H(s, t)$ に到着する」ようなパスである. この \tilde{H} は $\tilde{\alpha}$ と \tilde{e} の間のホモトピー写像になっているので, 各自確認されたい. 以上で, $\tilde{\alpha} \sim \tilde{e}$ であること, すなわち \tilde{S} の基本群が単位元のみからなることが示された. ■

例 (トーラス). よく知られているように, トーラスの普遍被覆は平面と同相 (なリーマン面) となる. 下図はトーラスの基本群を平面まで「ほどいて」いく過程を表現したものである. いかなるリーマン面も, 原理的にはこのように「ほどいて」単連結なリーマン面にすることができる.



⁷ $\tilde{p}_0 = (p_0, [\alpha])$ であることを理解するには, 多少の慣れが必要かもしれない. η_t を時刻 $u = 0$ に p_0 をスタートし, α 上を進んで時刻 $u = 1$ に $\alpha(t)$ に到着するパスとする. すなわち, $\eta_t(u) = \alpha(ut)$ とおくと, $\tilde{\alpha}(t) = (\alpha(t), [\eta_t])$ がなりたつ. このことは, p_0 の近傍を \tilde{p}_0 の近傍に同相に写す π^{-1} のブランチ (枝) を「解析接続」の要領で α にそって $\alpha(t)$ までつなげることで理解される. あとは $t = 1$ とすれば, $\tilde{p}_0 = \tilde{\alpha}(1) = (\alpha(1), [\alpha]) = (p_0, [\alpha])$ を得る.

8 リーマン面の一意化定理

一意化定理の証明を終わらせよう．手順としては，

- \tilde{S} からさらに S と同型なモデル \tilde{S}/G を作る．
- \tilde{S} は $\mathbb{X} = \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$, もしくは \mathbb{D} と同型なので，モデル \tilde{S}/G の構成方法をそのまま \mathbb{X} で再現できる．そうして得られるモデルが S の一意化．

8.1 被覆変換群

「モデル作り」の要となる群を定義しよう．

定義．同相写像 $g: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ が被覆変換 (covering transformation) であるとは， $\pi \circ g = \pi$ を満たすことをいう．また， $\text{Cov}(\tilde{S}) = \text{Cov}(\tilde{S}, S, p_0)$ によって被覆変換全体の集合を表す．

- 命題 8.1 (a) 任意の被覆変換は正則な同相写像．
 (b) 被覆変換群 $\text{Cov}(\tilde{S})$ は群をなす．さらに，
 (c) $\text{Cov}(\tilde{S})$ は S の基本群 $\pi_1(S, p_0)$ と同型．

証明．(1) : $g \in \text{Cov}(\tilde{S})$ とする．任意の $\tilde{x} \in \tilde{S}$ にたいし， $g(\tilde{x})$ の近傍 \tilde{U} で $\pi|_{\tilde{U}}$ が上への同相写像 (とくに等角) となるものが存在するから， $\pi \circ g = \pi$ より $g = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1} \circ \pi$ と \tilde{x} の近傍で書ける．これは g が局所的に正則関数の合成で書けることを意味する．

(2) : $g_1, g_2 \in \text{Cov}(\tilde{S})$ とすると， $\pi \circ (g_1 \circ g_2) = \pi \circ g_2 = \pi$ より $g_1 \circ g_2 \in \text{Cov}(\tilde{S})$ ．また $\pi \circ g_1 = \pi \iff \pi = \pi \circ g_1^{-1}$ より $g_1^{-1} \in \text{Cov}(\tilde{S})$ ．あとは結合律を確認すれば十分 (略)．

(3) : $[\gamma] \in \pi_1(S, p_0)$ とすると， $g_{[\gamma]} \in \text{Cov}(\tilde{S})$ が $g_{[\gamma]}: (x, [\eta]) \mapsto (x, [\eta \cdot \gamma])$ によって定まる．このとき， $\chi: [\gamma] \mapsto g_{[\gamma]}$ で定まる写像が $\pi_1(S, p_0)$ と $\text{Cov}(\tilde{S})$ の同型を与える．残りはレポート問題としよう． ■

レポート問題 8-1

この $\chi: \pi_1(S, p_0) \rightarrow \text{Cov}(\tilde{S})$ が上への同型写像を与えることを示せ．

推移性．被覆変換群のもっとも重要な性質が，次の「推移性」(transitivity) である：

- 命題 8.2 (被覆変換群の推移性) 任意の $\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{S}$ にたいし，以下は同値：
 (a) $\pi(\tilde{p}) = \pi(\tilde{q})$
 (b) ある $g \in \text{Cov}(\tilde{S})$ が存在して， $g(\tilde{p}) = \tilde{q}$

証明．(b) \implies (a) は定義より明らか．逆を示そう．(a) より $\tilde{p} = (p, [\alpha])$ ， $\tilde{q} = (p, [\beta])$ (ただし $p \in S$, $\alpha, \beta \in \Pi(S)$) としてよい．このとき $\gamma := \alpha^{-1} \cdot \beta$ とおき，さらに $g_\gamma: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ を

$$g_\gamma: \tilde{x} = (x, [\eta]) \mapsto (x, [\eta \cdot \gamma])$$

で定義すると， $g_\gamma \in \text{Cov}(\tilde{S})$ かつ $g_\gamma(\tilde{p}) = \tilde{q}$ となることが示される． ■

下線部を正当化せよ。

8.2 商リーマン面の構成

普遍被覆 \tilde{S} も被覆変換群 $\text{Cov}(\tilde{S})$ も、リーマン面 S から生成されたものであるが、ここでは S の存在を一旦忘れて、「ある (単連結な) リーマン面 \tilde{S} に、等角な同相写像からなる群 $G := \text{Cov}(\tilde{S})$ が作用している」状況だけに着目しよう。いま群 G はリーマン面 \tilde{S} に作用しているので、その「軌道による商空間」を定義できる：

定義 (G -同値性). $\tilde{p} \sim_G \tilde{q} \iff$ ある $g \in G$ が存在して、 $g(\tilde{p}) = \tilde{q}$

命題 8.2 より、この条件は $\pi(\tilde{p}) = \pi(\tilde{q})$ と同値であった...が、われわれは S の (したがって $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ の) 存在は忘れてのことになっているので、思い出さなかったことにしておこう。

さて \sim_G が同値関係となることは少し考えればわかる。この同値類全体からなる商集合を \tilde{S}/G とおき、以下ではこれがリーマン面とみなせることを証明する。

位相. まず $\hat{\pi}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}/G$ を標準射影とする。すなわち、 $\hat{\pi}(p) = [p]_G$ である。 \tilde{S}/G の位相は商位相を入れる。すなわち、 $U \subset \tilde{S}/G$ が開集合であるとは、 $\hat{\pi}^{-1}(U) \subset \tilde{S}$ が開集合であることと定義する。

アトラス. 次にアトラスを作ろう。

補題 8.3 任意の \tilde{p} にたいしある近傍 $\tilde{U} = \tilde{U}_{\tilde{p}}$ が存在して、任意の $g \in G$ にたいし、 $G(\tilde{U}) \cap \tilde{U} = \emptyset$ 。

証明. そうでなければ、任意の \tilde{p} の近傍 \tilde{U} の中にある \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 が存在して、 $g(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_2$ をみたく。これは G の推移性より $\pi(\tilde{q}_1) = \pi(\tilde{q}_2) \in S$ を意味する。一方 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ は局所的に同相写像なので、 \tilde{U} が十分小さいとき、 $\pi|_{\tilde{U}}$ は全単射でなくてはならない。矛盾。 ■

注意. この補題では、一旦忘れたはずの S の存在が使われていることに注意。一般に群 G があるリーマン面 \tilde{S} に作用しているとき、商空間 \tilde{S}/G がリーマン面となるためにはこの補題と同等の性質が要求される。そのためには群 G にさまざまな条件を加えなければならないが、ここでは \tilde{S} , $\text{Cov}(\tilde{S})$ の出自を問うことで、そうした条件がクリアされたのである。

\tilde{S}/G は連結なハウスドルフ空間となることを示せ。

では \tilde{S}/G のアトラスを構成しよう。任意の $\tilde{p} \in \tilde{S}$ にたいし、上の補題で構成した $\tilde{U} = \tilde{U}_{\tilde{p}}$ を取れば、 $\hat{\pi}|_{\tilde{U}}$ は全単射。とくに \tilde{S}/G の位相の入れ方から、同相写像となる。このとき、 \tilde{U} を十分小さく取れば、 \tilde{S} のアトラス \tilde{A} の元 $\tilde{\phi}: \tilde{U}_{\tilde{p}} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して、 $\tilde{U} \subset \tilde{U}_{\tilde{p}}$ とできる。このことから、写像の族

$$\hat{A} := \left\{ \tilde{\phi} \circ (\hat{\pi}|_{\tilde{U}})^{-1} : \hat{\pi}(\tilde{U}) \rightarrow \mathbb{C} \right\}_{\tilde{p} \in \tilde{S}}$$

が定義されて、これが \tilde{S}/G のアトラスとなる。

以上で、 \tilde{S}/G がリーマン面となることがわかった。

命題 8.4 (オリジナル v.s. モデル) もとのリーマン面 \tilde{S} と \tilde{S}/G は等角同型.

証明. 任意の $\tilde{p} \in \tilde{S}$ にたいし, $h: \tilde{S}/G \rightarrow S$ を $h: [\tilde{p}]_G \rightarrow \pi(\tilde{p})$ によって定義する.

これが well-defined であることは G の推移性 (命題 8.2) から確認される. 単射性は, やはり推移性より $\pi(\tilde{p}) = \pi(\tilde{q}) \iff [\tilde{p}]_G = [\tilde{q}]_G$ となることからわかる. 全射性は π が全射であることからわかる. すなわち, 任意の $p \in S$ にたいし, $\pi(\tilde{p}) = p$ となる \tilde{p} をとれば $p = h([\tilde{p}]_G)$.

あとは, h が局所的に等角な同相写像であることを示せばよい. いま, $\tilde{p} \in \tilde{S}$ にたいし, 補題 8.3 にあるような近傍 \tilde{U} を取れば, $\hat{\pi}|_{\tilde{U}} \rightarrow \tilde{S}/G$ は (その位相とアトラスの作り方から) は中への等角同相写像である. 同時に, $\pi|_{\tilde{U}} \rightarrow S$ も中への等角同相写像であり, $\pi(\tilde{U}) \subset S$ 上で $h = (\hat{\pi}|_{\tilde{U}}) \circ (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}$ もなりたつ. よって h は局所的に等角な同相写像である. ■

8.3 リーマン面の一意化

これまでの議論で, S から \tilde{S} を経由して, S 自身と同型な \tilde{S}/G (ただし $G = \text{Cov}(S)$) というモデルが構成された. 抽象的な議論が続いたので, 「モデル」と言ってもあまり現実味がないかもしれないが, S の情報をもとに, われわれの手元で作り上げたリーマン面であることには違いないだろう.

次のステップでは, これらの操作をそのまま \mathbb{X} にもって行き, 現実味のあるモデルが作成できることを確かめる.

単連結リーマン面の一意化定理. まず次の定理は証明無しで用いよう:

定理 8.5 (ケーベ, ポアンカレ) 任意の単連結リーマン面 X は, $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$, もしくは \mathbb{D} と等角同型である.

証明は簡単ではない. まずコンパクトな場合 ($\hat{\mathbb{C}}$) とそうでない場合に分け, さらにグリーン関数が構成できる (\mathbb{D}) かできない (\mathbb{C}) かで区別される.

レポート問題 8-4

$\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$, および \mathbb{D} は互いに等角同型でないことを示せ.

自己同型群. リーマン面 X にたいし, 自身から自身への等角な同相写像 $g: X \rightarrow X$ を (等角) 自己同型 (conformal automorphism) とよぶ. 自己同型全体は群をなす. これを $\text{Aut}(X)$ で表し, 自己同型群 (automorphism group) と呼ぶ. たとえば, $\text{Cov}(\tilde{S})$ は $\text{Aut}(\tilde{S})$ の部分群である.

さて X が $X = \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ であるときには, 自己同型群が完全に決定できる:

命題 8.6 (自己同型群) $\mathbb{X} = \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ のとき, $\text{Aut}(\mathbb{X})$ は次で与えられる:

- $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0 \right\}$
- $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{az+b : a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$
- $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 \neq 0 \right\}$
 $= \left\{ e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} : \alpha \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

とくに，これらはすべて $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ の部分群である．

注意． $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ は $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$ と同型である．

一意化定理の証明． $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ を普遍被覆とし， $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{X}$ を定理 8.5 で存在が保証されている等角同相写像とする．

いま， $g \in \text{Aut}(\tilde{S})$ にたいし $\gamma := \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{X})$ が定まることに注意しよう．対応 $g \mapsto \gamma$ は明らかに群の同型写像である．とくに部分群 $G = \text{Cov}(\tilde{S}) < \text{Aut}(\tilde{S})$ にたいしては， $\Gamma := \tilde{f} \circ G \circ \tilde{f}^{-1} < \text{Aut}(\mathbb{X})$ が同型な部分群として対応する．このとき，「 \tilde{S} に G が作用している」様子は， \tilde{f} を通すことによって「 \mathbb{X} に Γ が作用している」と観測される．よって「商リーマン面 \tilde{S}/G を構成する手順」は「商リーマン面 \mathbb{X}/Γ を構成する手順」として観測される．このことから， \tilde{S}/G と \mathbb{X}/Γ ，すなわち S と \mathbb{X}/Γ が同型であることがわかる（各自，具体的な等角写像 $f: S \rightarrow \mathbb{X}/\Gamma$ を構成してみること．） ■

9 タイヒミュラー空間の定義

今回の目標はとにかく、 \mathbb{X} 空間を定義することにある．最初に前回の補足として例外型・双曲型リーマン面について解説したあと、言葉の準備（写像の持ち上げ、リーマン面上の擬等角写像）をして、定義に取り掛かる．定義の意味については、次回に．

以下、 S, R をリーマン面とする．

9.1 例外型・双曲型リーマン面

前回示した一意化定理において、 $\mathbb{X} = \hat{\mathbb{C}}$ もしくは \mathbb{C} となるリーマン面の例はごく限られている．

定理 9.1 (いわゆる楕円型) $\tilde{S} \simeq \hat{\mathbb{C}} \iff S \simeq \hat{\mathbb{C}}$.

定理 9.2 (いわゆる放物型) S が $\tilde{S} \simeq \mathbb{C}$ を満たすことと、次のいずれかが成り立つことは同値：

- (a) 複素平面： $S \simeq \mathbb{C}$ ．すなわち $\Gamma = \{\text{id}\}$ ．
- (b) シリンダー： $S \simeq \mathbb{C}/\langle z \mapsto z + \omega \rangle$ ，ただし $\omega \neq 0$ ．
- (c) 格子トーラス： $S \simeq T(\omega_1, \omega_2)$ ，ただし $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ かつ $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ ．

証明では以下の補題が本質的な役割を演じる：

補題 9.3 任意の $g \in \text{Cov}(\tilde{S}) - \{\text{id}\}$ は固定点を持たない．

証明 (補題 9.3)． $g(\tilde{p}) = \tilde{p} \in \tilde{S}$ と仮定する．いま $p = \pi(\tilde{p})$ の近傍 U で、 $\pi^{-1}(U)$ の連結成分はそれぞれ互いに交わらず、それぞれに π を制限したものが同相写像となるようなものが存在する．とくに \tilde{p} を含む連結成分を \tilde{U} とする． $\pi \circ g = \pi$ より、 $g|_{\tilde{U}}$ は局所的に $\pi^{-1} \circ (\pi|_{\tilde{U}})$ の枝のひとつだが、 $g(\tilde{p}) = \tilde{p}$ より $g|_{\tilde{U}} = \text{id}$ でなくてはならない．さて一意化定理より、一意化写像 $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{X}$ が存在するが、 $\tilde{f}g\tilde{f}^{-1}$ は $\text{Aut}(\mathbb{X}) \subset \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ の元である．これは $\tilde{f}(\tilde{U}) \subset \mathbb{X}$ の周りで局所的に恒等写像であるが、そのような写像は一致の定理より \mathbb{X} 全体で恒等写像でなくてはならない．よって g は恒等写像． ■

証明 (定理 9.1)．任意の $\gamma \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) - \{\text{id}\}$ (複素メビウス変換) は少なくともひとつ固定点をもつ．よって上の補題から、 $\Gamma = \{\text{id}\}$ でなくてはならない．逆に $S \simeq \hat{\mathbb{C}}$ であれば、これは単連結であり $S \simeq \tilde{S} \simeq \hat{\mathbb{C}}$ ． ■

証明のスケッチ (定理 9.2)．一意化定理より、最初から $\tilde{S} = \mathbb{C}$ および $S = \mathbb{C}/\Gamma$ 、 $\Gamma = \text{Cov}(\tilde{S}) \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$ となっている場合を考えれば十分である．一般に $\text{Aut}(\mathbb{C})$ の元は $z \mapsto z + b$ の形だが、補題 9.3 より、 Γ の元は $z \mapsto z + b$ の形 (平行移動) でなくてはならない．しかも可換群となることに注意しよう．

もし $\Gamma = \{\text{id}\}$ であれば、これは (a) の場合に相当する．次にある $\omega \neq 0$ について $\Gamma = \langle z \mapsto z + \omega \rangle$ であるとき、すなわち一元生成の巡回群であるとき、これは (b) の場合に相当する．

そしてある $\omega_1, \omega_2 \neq 0, \omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$ が存在して $\Gamma = \langle z \mapsto z + \omega_1, z \mapsto z + \omega_2 \rangle$ と書けるとき、すなわち (一次独立な) 2 元生成の可換群であるとき、これが (c) の場合に相当する．

さて3元以上の平行移動で生成される $\text{Aut}(\mathbb{C})$ の部分群はどうかというと、そのような群で \mathbb{C} を割った集合はリーマン面にならないことが知られているのである。 ■

レポート 9-1

定理 9.2 の証明を完結させよ (たとえばアールフォルス「複素解析」, p286 を参照)

レポート 9-2

次を示せ:

$$(1) \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{C}/\langle z \mapsto z + \omega \rangle \simeq \mathbb{C}/\langle z \mapsto z + 1 \rangle$$

$$(2) T(\omega_1, \omega_2) \simeq T(1, \omega_2/\omega_1)$$

レポート 9-(2.5)

アニュラス $A_\lambda = \mathbb{H}/\langle z \mapsto \lambda z \rangle$. $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$, \mathbb{C}^* は同相だが互いに等角同値でないことを示せ. 中でも, A_λ と \mathbb{D}^* は単位円板を普遍被覆に持つことを示せ.

一般に, 格子トーラスと同相なリーマン面を総称して「トーラス」と呼ぶ (これは「種数 1 のコンパクトリーマン面」と同義である.) 実は, 次が成り立つ:

|| 定理 9.4 任意のトーラスは格子トーラスと等角同値である.

証明のスケッチ. S をトーラスとする. 定理 9.1 より, 普遍被覆 \tilde{S} は複素平面もしくは単位円板に同相である. 定理 9.2 より, 単位円板である方の可能性を排除すればよい. S から格子トーラスへの同相写像が存在することから, 基本群 ($\simeq \text{Cov}(\tilde{S})$) は 2 元生成の可換群である. 一般に $\text{Aut}(D)$ の可換部分群で固定点を持たないものは, 巡回群しかないことが証明知られているので (たとえば今吉・谷口の本, 補題 2.14), \tilde{S} は単位円板ではない. ■

以上の結果をまとめると.

- リーマン球面を普遍被覆にもつリーマン面はリーマン球面と同型なものに限る
- 複素平面を普遍被覆にもつリーマン面は, 複素平面, シリンダー (もしくは複素平面から一点を除いたもの), もしくはトーラスと同型なものに限る.

以上から, リーマン面 S は「ほとんどの場合」単位円板 \mathbb{D} を普遍被覆にもつことがわかる. とくに, 種数 2 以上のコンパクトリーマン面はこのタイプである. こらのリーマン面はタイヒミュラー理論の主要な対象であり, 特別に名前もついている:

定義 (フックス群). リーマン面 S の普遍被覆 \tilde{S} が単位円板 \mathbb{D} と等角同値であるとき, S を双曲型リーマン面 (hyperbolic Riemann surface) とよび, $\Gamma \subset \text{Aut}(\mathbb{D})$ をフックス群 (Fuchsian group), \mathbb{D}/Γ を S のフックス群模型 (Fuchsian model) と呼ぶ.

同様に普遍被覆がリーマン球面に同型であるとき「楕円型」, 複素平面に同型であるとき「放物型」などという (あまり使われない用語ではあるが.) これらをまとめて「例外型リーマン面」と呼ぶ.

9.2 写像の持ち上げ

前回はリーマン面 S とその普遍被覆 $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{X}$ (ただし $\mathbb{X} = \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ または \mathbb{D}) にたいし, 次の図式が可換になるような等角同相写像 (一意化写像) $f: S \rightarrow \mathbb{X}/\Gamma$ が存在することを示した.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow /\Gamma \\ S & \xrightarrow{\exists f} & \mathbb{X}/\Gamma \end{array}$$

逆に, ふたつのリーマン面 S, R と連続写像 $f: S \rightarrow R$ が与えられた場合に, 次の可換図式を満たす連続写像 $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{R}$ が構成できることを示そう.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\exists \tilde{f}} & \tilde{R} \\ \pi_S \downarrow & & \downarrow \pi_R \\ S & \xrightarrow{f} & R \end{array}$$

ただし $\pi_S: \tilde{S} \rightarrow S, \pi_R: \tilde{R} \rightarrow R$ はそれぞれ普遍被覆からの標準的射影とする.

命題 9.5 (写像の持ち上げ) $p \in S, q = f(p) \in R$ を任意に選び, さらに $\tilde{p} \in \pi_S^{-1}(p) \subset \tilde{S}, \tilde{q} \in \pi_R^{-1}(q) \subset \tilde{R}$ を任意に固定する. このとき, 上の図式を満たす連続写像 $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{R}$ で, $\tilde{f}(\tilde{p}) = \tilde{q}$ を満たすものが一意的に存在する.

このような \tilde{f} を f の持ち上げ (lift) と呼ぶ.

証明のスケッチ. $\tilde{x} \in \tilde{S}$ を変数として, $\tilde{f}(\tilde{x}) \in \tilde{R}$ を上の可換図式を満たすように定義しよう. \tilde{S} 内のパス $\tilde{\gamma}$ として, \tilde{p} を始点とし \tilde{x} を終点となるようなものとする (\tilde{S} は単連結であるから. このような $\tilde{\gamma}$ はすべて互いにホモトピックである.) すると $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ は p を始点とし $x = \pi(\tilde{x})$ を終点とする S 内のパスである. さらにこのパスを f で写すと, $q = f(p)$ を始点とし $y = f(x)$ を終点とする R 内のパス $\gamma' = f \circ \gamma$ を得る. 最後に, 解析的関数の「解析接続」の要領で, γ' を \tilde{R} のパス $\tilde{\gamma}'$ に「持ち上げる」: π_R は局所的に同相写像であることから, q の近傍を \tilde{q} の近傍へ同相に写す局所的な逆写像が存在する. これを用いて, γ' の断片を \tilde{q} を始点とするパスの断片へと写すことができる. この操作を γ に沿って繰り返すことで (パスのコンパクト性より有限回で必ず終わる), \tilde{q} を始点するパス $\tilde{\gamma}'$ で, $\pi_R \circ \tilde{\gamma}' = \gamma'$ を満たすものが存在する. その終点は, γ の取り方によらず一意的に決まるので, これを $\tilde{f}(\tilde{x})$ と定めればよい. 写像 $\tilde{x} \mapsto \tilde{f}(\tilde{x})$ は連続かつ先の図式を可換にすることは容易にわかる. ■

9.3 リーマン面間の擬等角写像の定義

以後, リーマン面 S の普遍被覆は $\hat{\mathbb{C}}$ でないと仮定する. さらに, リーマン面 S と R は共通の普遍被覆 $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ もしくは \mathbb{D} をもつと仮定する. すなわち, $\tilde{S} = \tilde{R} = \mathbb{X}$.

定義 (擬等角写像). $f: R \rightarrow S$ が K -qc (もしくは K -擬等角写像) であるとは, f は向きを保つ同相写像で, かつ f の持ち上げ $\tilde{f}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ が K -qc であることを言う.

レポート 9-3

この定義が f の持ち上げの取り方に依存しないことを示せ.

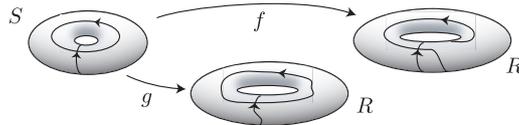
注意. 等角写像を定義したときのように, アトラス (局所座標) を用いた定義も可能である. 各自考えてみよ.

9.4 写像のホモトピー

タ空間を定義するのに必要な, 最後の用語を定義する:

定義 (写像のホモトピー). 連続写像 $f, g: S \rightarrow R$ がホモトピックであるとは, 次を満たす連続写像 $H: \mathbb{I} \times S \rightarrow R$ が存在することをいう:

1. 任意の $x \in S$ にたいし, $H(0, x) = f(x)$.
2. 任意の $x \in S$ にたいし, $H(1, x) = g(x)$.



またこのとき, $f \sim g$ とあらわす.

写像のホモトピーは S から R への写像全体に同値関係を与えることに注意しよう.

直感的な例. 図のような場合, f と g はホモトピックでない.

9.5 タイヒミュラー空間の定義

いよいよ, 「リーマン面 S のタイヒミュラー空間」を定義する. とりあえず, 形式的に定義を済ませてしまおう.

S とそのアトラス \mathcal{A} を固定する. つぎに, 別のリーマン面 R で, S からの向きを保つ擬等角写像 $f: S \rightarrow R$ が存在するようなものを考える. もう少し形式的に, そのような f と R のペアとして (R, f) の形のものを考えるのである. この写像 f をマーキング (marking) と呼び, (R, f) をマークされたリーマン面 (marked Riemann surface) と呼ぶ.

その全体の集合に, 次の同値関係を考えよう:

定義 (タイヒミュラー同値). $(R_1, f_1) \sim_T (R_2, f_2)$
 $\iff f_2 \circ f_1^{-1}: R_1 \rightarrow R_2$ とホモトピックな等角同相写像 $h: R_1 \rightarrow R_2$ が存在する.

このとき, 同値類の集合

$$T(S) = \{(R, f)\} / \sim_T$$

を S のタイヒミュラー空間 (Teichmüller space) と呼ぶ.

このように定義を与えられても, 大概の人にとっては意味不明であろう. たとえば, 次のような疑問点が生じる:

- なぜ擬等角写像の同値類なのか? 同相写像や C^∞ じゃだめなのか?
- なぜホモトピーによる同値類を考えるのか?
- そもそも, 等角同相写像が存在するということが, なぜ分類の基準とされるのか?
- 現時点では, $T(S)$ はただの「商集合」である. これがいかにして「空間」となるのか? すなわち位相は?

これらの疑問に, 納得できる答を (われわれなりに) 与えていこう.

10 タイヒミュラー空間とモジュライ空間

今回の目標は次の2点である：

- モジュライ空間を定義し、タイヒミュラー空間との関係を明らかにすること。
- これらの空間の具体例として、トーラスのタ空間とモ空間について概説すること。

タイヒミュラー空間論の源流は「リーマンのモジュライの問題」にあるらしい。リーマンは、2変数の代数方程式（たとえば $\sum_{ij} a_{ij} z^i w^j = 0$ といった形）が定める（コンパクト）リーマン面の複素構造が、その係数にどのように依存するかを考察した。「これらの複素構造の全体は、係数に複素解析的に依存する有限次元の空間であろう」、というのがリーマンの結論（予想）であったが、それを正当化するのがタ空間の理論なのである。

タイヒミュラー空間（復習）。前回の定義を繰り返しておく。以下、リーマン面 S とそのアトラス A_0 を固定し、リーマン面 R への擬等角写像の全体

$$\text{Def}(S) := \{(R, f) : f : S \rightarrow R \text{ は qc}\}$$

を考える。これは「 S の擬等角変形の全体」という意味合いで、 Def というのは「変形」の deformation を意味する。

さらに $\text{Def}(S)$ 内に「タイヒミュラー同値」を

$$\begin{aligned} (R_1, f_1) &\sim_T (R_2, f_2) \\ &:\iff f_2 \circ f_1^{-1} : R_1 \rightarrow R_2 \text{ とホモトピックな等角同相写像 } h : R_1 \rightarrow R_2 \text{ が存在する。} \end{aligned}$$

で定義し、

$$T(S) := \text{Def}(S) / \sim_T$$

を S の「タイヒミュラー空間」と呼んだ。

よくわからない定義に出くわしたとき、

- 無批判的に記憶して、その先はすべて論理で処理する人
- その意味を自分なりに咀嚼し終わるまで、立ち止まって考えつづける人

のふたつのタイプの人がある。ただしこれらは極端な例であって、ほとんどの人は両者の中間である。講義をするのにも同様の選択を迫られるわけだが、この講義はどちらかという、後者よりの姿勢をとっている。そのために、偉大なるリーマンの純然たる数学的問題に、いささか卑近な言葉遣いで感情移入することをお許しいただきたい。

S の服を着た人々。まずは $\text{Def}(S)$ の元 (R, f) とは何か、考えてみよう。これは要するに、擬等角写像 $f : S \rightarrow R$ のことである。固定されたリーマン面 S は「基準として参照すべき面」といった意味合いで、英語だと reference surface などと呼ばれる。 S はスパイダーマンさながらに全身を覆う服（コスチューム）を着た人物（ S 氏）だと考えていただきたい。さらに擬等角写像 f は、その服を別の人物・ R 氏に着せる行為だと考えていただきたい。もちろんサイズは合わないだろうが、ストレッチ素材で作られているので、多少の伸び縮みではものともしない。

ペア (R, f) は、第1座標がリーマン面（人物）、第2座標が擬等角写像（服の着せ方）である。この第2座標 f を「マーキング」と呼ぶのであった。「マーキング」が異なれば、服の着せ方が違う、と考える。すなわち、タ空間は「 S の服を着せられた人々」を、着こなしの違いまで区別して集めた集合なのである。

なぜ擬等角写像？ではなぜ「マーキング」は擬等角写像なのだろうか？それには、つぎのふたつの事実が関係しているように思われる：

事実 1. S がコンパクトのとき、任意の同相写像 $f: S \rightarrow R$ はある擬等角写像 $g: S \rightarrow R$ にホモトピック。

すなわち、 S がコンパクトであれば、どんなにひどい服の着せ方をしていても、皺（しわ）を伸ばしてあげれば「擬等角的な」服の着せ方に出来るのである。

事実 2. 擬等角写像は、単位円板 \mathbb{D} と複素平面 \mathbb{C} を区別する。すなわち、 \mathbb{D} から \mathbb{C} への擬等角写像は存在しない。

たとえば、 \mathbb{C} から \mathbb{D} への可微分同相写像は存在することに注意しよう。可微分多様体の範疇では、これらを区別することができないのである。したがって「トーラスの普遍被覆は単位円板ですよ」という人がいても、あながち否定はできない。トポロジカルには正しいからである。

一方、われわれは複素構造の変形を問題にしているのに、リーマン面として解析的にあまりに異なる性質をもった複素平面と単位円板を同一視するのはいかなものか。そもそも、 \mathbb{D} 氏の着ている服を \mathbb{C} 氏に着せるには、無限にストレッチさせなければならないではないか、そんな服の素材はないよ、というのがわれわれの立場なのである。⁸

レポート問題 10-1

事実 2 を証明せよ（証明はいろんな本に書いてある。）

なぜホモトピー？ 同値な $(R_1, f_1), (R_2, f_2) \in \text{Def}(S)$ が与えられたとき、写像 $f_2 \circ f_1^{-1}: R_1 \rightarrow R_2$ はある等角写像 $h: R_1 \rightarrow R_2$ とホモトピックである。このホモトピーは、さしずめ「服の皺（しわ）やたるみを直す」ぐらいのイメージではないだろうか。 $f_2 \circ f_1^{-1}$ は、 R_1 に着せた S の服を R_2 に着せる行為を表す。その際に出来た服の皺やたるみを直せるだけ直して、もし等角写像 h にまできれば、晴れて同値だと定義しているのである。

「等角写像にまで直せる」ということの意味は、このあとモジュライ空間のところで解釈しよう。

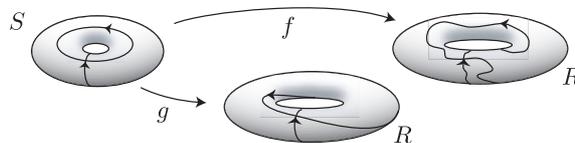


図 1: ホモトピーで皺を伸ばす

10.1 モジュライ空間

ペア $(R, f) \in \text{Def}(S)$ をもっと理解するために、リーマンの考えたおおもとの空間・「モジュライ空間」を定義しよう。話を単純にするために、以後 S はコンパクトと仮定しておく。

⁸ここでいう「無限にストレッチ」とは、縦の伸びと横の伸びの比率（最大歪曲度）が無限大になる、ということを比喻している。無限に「広げる」こと自体は問題ない。たとえば単位円板 \mathbb{D} から非有界な上半平面 \mathbb{H} への等角写像は存在する。

S と同相なリーマン面の全体を $\mathcal{M}(S)$ で表す．このとき， $\mathcal{M}(S)$ の元が「等角同値」もしくは「同型」であることを

$$R_1 \simeq R_2 \quad :\iff \quad \text{ある等角同相写像 } h : R_1 \rightarrow R_2 \text{ が存在}$$

と定義する．その商集合

$$M(S) := \mathcal{M}(S) / \simeq$$

を S のモジュライ空間 (moduli space) とよぶ⁹．

同値関係 \simeq はリーマン面を「同じ」と思うひとつの基準を与えている．私とあなたは，生物種という基準では「同じ」である．しかしヒトの中では「同じ」でない．「同じ」とみなす基準はつねに便宜的なのである．¹⁰ 「等角同値」も，そういった便宜的な基準にすぎない．したがって，われわれもなにか便宜的な解釈を与えよう．先ほどリーマン面は「人物」とみなしたが，ここはひとつ，「等角同値」をわれわれの世界でいう「同一人物」に置き換えてはどうだろう．われわれが「2人の人物を同一人物と認識する」とことと「2つのリーマン面に等角写像が存在すること」に対応付けるのである．すなわちモジュライ空間 $M(S)$ は， S 氏と形を同じくする「人物」の全体だということになる．¹¹

以上を踏まえて，タイヒミュラー同値を見直してみよう． $\text{Def}(S)$ において，

$$\begin{aligned} (R_1, f_1) &\underset{T}{\sim} (R_2, f_2) \\ \implies &\text{等角写像 } h : R_1 \rightarrow R_2 \text{ が存在する} \\ \implies &R_1 \simeq R_2 \end{aligned}$$

であるから，

$$\lceil (R_1, f_1) \text{ と } (R_2, f_2) \text{ がタイヒミュラー同値であれば，} R_1 \text{ と } R_2 \text{ は同一人物} \rceil$$

ということがわかる．数学的な言葉で言えば，ペア (R, f) の同値類 $[R, f] \in T(S)$ の第1座標は，モジュライ空間 $M(S)$ の元を定める．このとき，写像

$$pr : T(S) \rightarrow M(S), \quad pr([R, f]) := [R]$$

をタ空間からモジュライ空間への射影と呼ぶ．いわば R 氏の服の着方 (マーキング) f を忘れてしまっただけで，裸になってしまうようなものである．

10.2 モジュラー群，あるいは写像類群

では同一のリーマン面にかんするタ空間の元 $[R, f_1]$ と $[R, f_2]$ において，マーキングの違いは何を意味するのであろうか？それは「服の着方の違い」ではあろうが，もうすこし数学的に記述してみよう．

⁹文献によっては「リーマン空間」ともよんでいる．

¹⁰普遍性が要求されるのは唯一，「判断基準が区別する側の主観に依存しない」という点のみにおいてである．

¹¹人間同士は簡単に区別できるのに，動物園にいるニホンザルはほとんど区別できないのはなぜか？それは，生物学的もしくは認知心理学的な事情で，人間とサルに対して異なる区別方法をとっているからではないだろうか．たとえば人間だと「等角写像が存在すれば同一視」サルだと「猿は同相写像が存在すれば同一視」といった具合である．人間のほうが同一視により厳しい条件を課しているために，より多くの個体を認識できることになる．

たとえば直立している私と座っている私．これらを同じ私だと認識したあなたは，脳内で性質のよい同相写像を構成し，その結果として，二人の人物を同一人物だと認識した．

もしあなたが人間を視覚的に区別できる人工知能を作る立場だったなら，どのようなクラスの同相写像を用いるのが適当だと考えるだろうか？

いま S から S 自身への擬等角写像の全体 $\{h : S \rightarrow S\}$ を考え、さらにホモトピー \sim による同値関係で割った集合

$$\text{Mod}(S) := \{h : S \rightarrow S\} / \sim$$

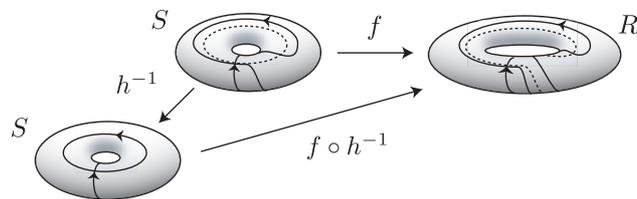
を S のモジュラー群 (modular group) もしくは写像類群 (mapping class group) と呼ぶ (群であることを確認するのは、難しくないだろう.)

この群は、いわば S 自身の「服の着直し」を与えている。ホモトピーは皺を伸ばしヨレを直すといった程度の意味合いである。このような操作を施しても実質的には「同じ服の着方」と考えて、区別しない。¹²

モジュラー群の元 (ホモトピー類) $[h] \in \text{Mod}(S)$ はタ空間 $T(S)$ に次のように作用する:

$$[h] : T(S) \rightarrow T(S), \quad [h] \cdot [R, f] := [R, f \circ h^{-1}]$$

S が服を着直すとき、タ空間の「服着た人物」たち全員に向けて「お前たちもオレに合わせて服を着なおせ」と要求するのである。



|| 定理 10.1 モジュライ空間 $M(S)$ は、商集合 $T(S)/\text{Mod}(S)$ と同一視できる。

証明 (定理 10.1). まず商集合 $T(S)/\text{Mod}(S)$ の元とは、ある $\tau = [R, f] \in T(S)$ の $\text{Mod}(S)$ による軌道

$$\text{Mod}(S) \cdot \tau := \{[h] \cdot \tau = [R, f \circ h^{-1}] : [h] \in \text{Mod}(S)\}$$

と同一視される。このとき $\text{Mod}(S) \cdot \tau$ にその射影 $pr : T(S) \rightarrow M(S)$ による像 $pr(\text{Mod}(S) \cdot \tau) = [R]$ を対応付ける写像を χ としよう。 $\text{Mod}(S)$ の作用は $T(S)$ の元の第一座標を変えないから、写像 $\chi : T(S)/\text{Mod}(S) \rightarrow M(S)$ は well-defined である。あとは、この χ が全単射であることを示せば十分である。

任意の $R \in M(S)$ にたいし、先に述べた「事実 1」よりある擬等角写像 $f : S \rightarrow R$ が存在する。よって $\tau = [R, f]$ とすれば、 $\chi(\text{Mod}(S) \cdot \tau) = pr([R, f]) = [R]$ となる。したがって χ は全射である。

つぎに $T(S)$ のふたつの元 $\tau_1 = [R_1, f_1]$ および $\tau_2 = [R_2, f_2]$ について $\chi(\text{Mod}(S) \cdot \tau_1) = \chi(\text{Mod}(S) \cdot \tau_2)$ と仮定する。定義よりこれは $[R_1] = [R_2]$ すなわち $R_1 \simeq R_2$ と同値であるから、等角写像 $g : R_1 \rightarrow R_2$ が存在する。いま $h = f_2^{-1} \circ g \circ f_1 : S \rightarrow S$ とおくと、 $g = f_2 \circ (f_1 \circ h^{-1})^{-1}$ が等角であることから $[R_1, f_1 \circ h^{-1}] = [R_2, f_2] \in T(S)$ 。すなわち $[h] \cdot \tau_1 = \tau_2$ であるから、 τ_1 と τ_2 は $\text{Mod}(S)$ の作用によって同じ軌道を定める。ゆえに χ は単射である。 ■

普遍被覆面とのアナロジー。モジュライ空間とタ空間の間には、リーマン面とその普遍被覆に似た関係が成立していることに注意しよう。すなわち、次のような「辞書」が成立する:

¹² どんなにだらしない服の着方をしても気にしない。これが数学者の寛容というものである。

リーマン面 S	モジュライ空間 $M(S)$
普遍被覆 \tilde{S}	タ空間 $T(S)$
被覆変換群 $\text{Cov}(\tilde{S})$	モジュラー群 $\text{Mod}(S)$
射影 $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$	射影 $pr : T(S) \rightarrow M(S)$
普遍被覆の元 $(p, [\eta])$	タ空間の元 $[R, f]$
リ面の元 p	モ空間の元 $[R]$
同型 $S \simeq \tilde{S}/\text{Cov}(\tilde{S})$	同型 $M(S) \simeq T(S)/\text{Mod}(S)$

最下部右の \simeq は、あとで考える $T(S)$ の複素構造から $T(S)/\text{Mod}(S)$ にも複素構造が入るので、全単射によって $M(S)$ の複素構造とみなす、という意味である。

さらに、以下のような辞書項目も成立することが知られている：

\tilde{S} は単連結リーマン面	$T(S)$ は単連結複素多様体
\tilde{S} は完備距離空間	$T(S)$ は完備距離空間
$\text{Cov}(\tilde{S}) < \text{Aut}(\tilde{S})$	$\text{Mod}(S) < \text{Aut}(T(S))$
$\text{Cov}(\tilde{S})$ は真性不連続に作用	$\text{Mod}(S)$ は真性不連続に作用

他にも列挙できないこともないが、この程度で留めておくのが無難かもしれない。実は、「共通でない」性質も同じぐらい列挙できるからである。たとえば $\text{Cov}(\tilde{S}) - \{\text{id}\}$ の元は固定点をもたないが $\text{Mod}(S) - [\text{id}]$ の中には固定点をもつものがある。 S には「角」がないが、 $M(S)$ には角がある、等々。

13

10.3 アトラスの分類とタイヒミュラー空間

アトラス（地図帳）の分類という観点から、タ空間やモジュライ空間を眺めておこう。当初、「地図帳を分類しよう」と目標を掲げた手前、そのような解釈に触れないわけにもいかないだろうから。

リーマン面 S を単に位相空間とみなしてしまおう。たとえばガウスの例のように、 \mathbb{R}^3 に浮かぶ滑らかな曲面、といった具合である。一方で、 S のアトラス \mathcal{A}_0 をひとつ固定しておく。

いま別のリーマン面 R がアトラス $\mathcal{A} = \{\phi : U_\phi \rightarrow \mathbb{C}\}$ をもつとする。さらに擬等角写像 $f : (S, \mathcal{A}_0) \rightarrow (R, \mathcal{A})$ が存在すると仮定すると、¹⁴ $f^* \mathcal{A} := \{\phi \circ f : f^{-1}(U_\phi) \rightarrow \mathbb{C}\}$ は S の新しいアトラスであり、 $(S, f^*(\mathcal{A}))$ と (S, \mathcal{A}_0) はリーマン面として互いに別モノだとみなす。さらに $f : (S, f^*(\mathcal{A})) \rightarrow (R, \mathcal{A})$ は等角同相写像であるから、 $(S, f^*(\mathcal{A})) \simeq (R, \mathcal{A})$ 、すなわち「同一人物」である。

このように、 $\text{Def}(S)$ の元はすべて、リーマン面 S のアトラスを定める。 $T(S)$ は $\text{Def}(S)$ の分類だと考えられるから、同時に S のアトラスの分類と解釈可能である。 $M(S)$ は $T(S)$ よりもさらに大雑把な分類であるから（服を脱がせて人物だけを区別する）、標語的に

- モジュライ空間： S の地図帳の大分類
- タイヒミュラー空間： S の地図帳の小分類

といえるわけである。

¹³シニカルに考えると、このような辞書の存在は「共通点を探したくなる」われわれ人間の性行を反映しているだけなのかもしれない。人間は理論を構築する過程で、帰納的類推に頼ってしまう。この際過去の事例を参照してしまうために、理論の定式化がワンパターンになってしまうのである。すなわち、過去の成功例との「共通点」が見つかる場合、その理論が成功する確率が上がる。新しいものを生み出す必要がないからである。

¹⁴擬等角性が意味をもつように、 S のアトラスを固定しておく必要がある。

10.4 トーラスのタイヒミュラー空間

タ空間の具体例として、トーラスのそれが上半平面

$$\mathbb{H} := \{x + yi \in \mathbb{C} : y > 0\}$$

と同一視できることについて概説しよう。¹⁵

トーラスの正規化. 前回の定理 9.4 でみたように、任意のトーラス S はある格子トーラス $T(\omega_1, \omega_2)$ と同型だから、格子トーラスのタ空間およびモジュライ空間を考えれば十分である。さらに、必要なら ω_2 を $-\omega_2$ に変えて、 $\tau_0 = \omega_2/\omega_1 \in \mathbb{H}$ と仮定してよい。前回のレポート問題のように、 S は格子トーラス $T(1, \tau_0)$ ($\tau_0 \in \mathbb{H}$) と考えられる。これを「正規化されたトーラス」などという。

以後記号を簡略化して、格子トーラスの被覆変換群 $\langle z \mapsto z + \omega_1, z \mapsto z + \omega_2 \rangle < \text{Aut}(\mathbb{C})$ は単に $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ と表すことにする。

トーラス間の写像の正規化. トーラス間の任意の写像は、次の意味で「原点を原点に写す」ように正規化できる。¹⁶

補題 10.2 (トーラス間の写像の正規化) トーラス間の同相写像 $f : R = T(1, \tau) \rightarrow R' = T(1, \tau')$ (ただし $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$) が任意に与えられているとする。このとき、恒等写像とホモトピックな等角写像 $h : R' \rightarrow R'$ が存在して、 $h \circ f([0]_R) = [0]_{R'}$ を満たす。ただし、 $[0]_R \in R$ は普遍被覆

$$\pi_R : \tilde{R} = \mathbb{C} \rightarrow R = T(1, \tau)$$

によって $[0]_R = \pi_R(0)$ で与えられる点である。 $[0]_{R'}$ も同様。

証明(補題 10.2). まず $f([0]_R) = p \in R'$ としよう。このとき、 $\tilde{R}' = \mathbb{C}$ 上に $\pi_{R'}(\tilde{p}) = p$ をみたす \tilde{p} が定まる。いま $0 \leq t \leq 1$ にたいし、 $\tilde{H}_t : z \mapsto z - t\tilde{p}$ としよう。 $\tilde{H}_t : \tilde{R}' \rightarrow \tilde{R}'$ とみなせるが、これは被覆変換群 $\text{Cov}(\tilde{R}') = \langle 1, \tau' \rangle$ と可換であるから、 $H_t \circ \pi_{R'} = \pi_{R'} \circ \tilde{H}_t$ をみたす等角同相写像 $H_t : R' \rightarrow R'$ が存在する。 $h = H_1$ とすれば、 h は $H_0 = \text{id}$ とホモトピックであり、 $h(p) = [0]_{R'}$ をみたす。よって $h \circ f([0]_R) = [0]_{R'}$ 。 ■

トーラスのモジュライ空間. トーラスの場合、例外的にモジュライ空間を記述するほうが格段にやさしい：

定理 10.3 (「同一人物」であること) $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ とするとき、
 $R_1 = T(1, \tau_1) \simeq R_2 = T(1, \tau_2) \iff \tau_2 = \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

ただし、

$$\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

である。この定理から、

$$M(S) = \mathbb{H}/\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$$

¹⁵ただし、トーラスというのはコンパクトながら双曲型で無いという点で少々特殊である。そのため次回以降に述べるペアスの理論は適用できない。

¹⁶このような正規化は、トーラス独自の性質である。たとえば種数が 2 以上のリーマン面では、恒等写像とホモトピックな等角写像は恒等写像に限ることが知られている。

と思える．この商空間は指数 $(2, 3, \infty)$ の双曲的軌道体と呼ばれているもので、「角をもったリーマン面」などとも言われる空間である（しかも後でみるように、 $T(S) = \mathbb{H}$, $\text{Mod}(S) = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ とみなせる．）

証明のまえに、次の有名な補題を確認しておこう：

補題 10.4 $\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2 \in \mathbb{C}^*$, $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{H}$, $\omega'_2/\omega'_1 \in \mathbb{H}$ とするとき、 $\text{Aut}(\mathbb{C})$ の部分群 $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ と $\langle \omega'_1, \omega'_2 \rangle$ が一致することと、次は同値：

$$\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}), \quad \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

レポート問題 10-2

上の補題を証明せよ．

証明のスケッチ（定理 10.3）等角同相写像 $f : R_1 = T(1, \tau_1) \simeq R_2 = T(1, \tau_2)$ が存在したと仮定すると、補題 10.2 により正規化して $f([0]_{R_1}) = [0]_{R_2}$ と仮定してよい．さらにその持ち上げ $\tilde{f} : \tilde{R}_1 = \mathbb{C} \rightarrow \tilde{R}_2 = \mathbb{C}$ は $\tilde{f}(0) = 0$ を満たすとしてよい．これは $\text{Aut}(\mathbb{C})$ の元であるから、 $\tilde{f}(z) = \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$) の形でなくてはならない．

いま、 $\text{Cov}(\tilde{R}_1) = \text{Cov}(\mathbb{C}, R_1, [0]_{R_1})$ の生成元 $z \mapsto z + 1$, $z \mapsto z + \tau_1$ に対応する基本群の元の代表元（閉じたパス）を $\alpha, \beta \in \Pi(R_1, [0]_{R_1})$ とすると、これを同相写像 f で写した $f(\alpha), f(\beta)$ は $\text{Cov}(\tilde{R}_2) = \text{Cov}(\mathbb{C}, R_2, [0]_{R_2})$ の元 $z \mapsto z + \tilde{f}(1), z \mapsto z + \tilde{f}(\tau_1)$ をさだめる（命題 8.1 参照）．これらは $\text{Cov}(\tilde{R}_2)$ を生成しなくてはならないから、

$$\langle 1, \tau_2 \rangle = \langle \tilde{f}(1), \tilde{f}(\tau_1) \rangle = \langle \lambda, \lambda \tau_1 \rangle.$$

補題 10.4 より、ある $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して

$$\begin{pmatrix} \tau_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \tau_1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

上下の成分の比をとれば定理中の τ_1, τ_2 の関係式を得る．

逆に τ_1, τ_2 が定理中の関係式をみたすとき、 $\tilde{f} : \tilde{R}_1 = \mathbb{C} \rightarrow \tilde{R}_2 = \mathbb{C}$ を $\tilde{f}(z) = (c\tau_1 + d)z$ とおくことで $\pi_{R_2} \circ \tilde{f} = f \circ \pi_{R_1}$ をみたす等角写像 $f : R_1 \rightarrow R_2$ が得られる． ■

トーラスのタイヒミュラー空間．次に夕空間を考えよう．「擬等角変形」 $\text{Def}(S)$ とは、「正規化されたトーラスたち」への服を着せたものを考えればよい．すなわち $R = T(1, \tau)$ ($\tau \in \mathbb{H}$) として、擬等角写像 $f : S = T(1, \tau_0) \rightarrow T(1, \tau)$ のタイヒミュラー同値類を集めたものが $T(S)$ となる：

レポート問題 10-3

$R \simeq R'$ であるとき、任意の $(R, f) \in \text{Def}(S)$ にたいし、ある $(R', f') \in \text{Def}(S)$ が存在して、 $(R, f) \sim_T (R', f')$ とできることを示せ．

定理 10.5 (トーラスの夕空間) $T(S)$ は上半平面 \mathbb{H} と同一視できる．すなわち全単射が存在する．

系 10.6 トーラスのタ空間は単連結な 1 次元複素多様体とみなせる．上半平面の双曲距離 $d_{\mathbb{H}}(\cdot, \cdot)$ をタ空間の距離とみなすことで，完備距離空間となる．

ここでいう双曲距離とは \mathbb{H} 上の（負定曲率）計量 $(dx^2 + dy^2)/y^2$ によって定まる距離のことをいう．この距離は，後に定義する「タイヒミュラー距離」と（定数倍の差を除いて）一致することが知られている．

証明のスケッチ（定理 10.5）． $t = [R, f] \in T(S)$ とする．補題 10.2 より，適当な等角写像を施すことでこの代表元は擬等角写像 $f : S = T(1, \tau_0) \simeq R = T(1, \tau)$ かつ $f([0]_S) = [0]_R$ と仮定してよい．さらにその持ち上げ $\tilde{f} : \tilde{S} = \mathbb{C} \rightarrow \tilde{R} = \mathbb{C}$ は $\tilde{f}(0) = 0$ を満たすようにとることができる．

さていま， $\pi_1(S, [0]_S) (\simeq \text{Cov}(\tilde{S}))$ の生成元で $z \mapsto z + 1, z \mapsto z + \tau_0$ に対応するものを代表するパス $\alpha, \beta \in \Pi(S, [0]_S)$ をとる．このとき $f \circ \alpha, f \circ \beta \in \Pi(R, [0]_R)$ は $\pi_1(R, [0]_R) (\simeq \text{Cov}(\tilde{R}))$ を生成する．また $f \circ \alpha, f \circ \beta$ の 0 を始点とする持ち上げの終点は $\tilde{f}(1), \tilde{f}(\tau_0)$ であるが，これらは $\pi_R^{-1}([0]_R)$ の元，すなわち $m + n\tau$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) の形であり， $\langle 1, \tau \rangle = \langle \tilde{f}(1), \tilde{f}(\tau_0) \rangle$ なくてはならない．したがって，ある $PSL(2, \mathbb{Z})$ の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して，それぞれ $\tilde{f}(1) = c\tau + d, \tilde{f}(\tau_0) = a\tau + b$ をみたく．その比を用いて

$$\tilde{\chi}(t) = \tilde{\chi}([R, f]) := \frac{\tilde{f}(\tau_0)}{\tilde{f}(1)} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

と定めれば ($\tau \in \mathbb{H}, ad - bc = 1 > 0$ より) 写像 $\tilde{\chi} : T(S) \rightarrow \mathbb{H}$ が定まる．これが t の代表元によらず well-defined であり，全単射であることを示そう．

Well-defined. $(R_1, f_1) \underset{T}{\sim} (R_2, f_2)$ とする．このとき適当な等角写像 $h : R_1 \rightarrow R_2$ が存在して， f_2 は $h \circ f_1$ とホモトピックである．さらに補題 10.2 より，ある等角写像で恒等写像とホモトピックな $g : R_2 \rightarrow R_2$ が存在して， $g \circ h([0]_{R_1}) = [0]_{R_2}$ を満たすとしてよい．とくにこの持ち上げ $\widetilde{g \circ h}$ は $z \mapsto \lambda z$ の形だと仮定してよい．いま， $F_1 := g \circ h \circ f_1 : S \rightarrow R_2$ は $F_1([0]_S) = [0]_{R_2}$ を満たし， $f_2 \sim F_1$ （ホモトピック）であるから， $f_2 \circ \alpha, f_2 \circ \beta$ のペアと $F_1 \circ \alpha, F_1 \circ \beta$ のペアは同じ $\pi_1(R_2, [0]_{R_2}) (\simeq \text{Cov}(\tilde{R}))$ の生成元となる． F_1 の持ち上げで原点を固定するものを \tilde{F}_1 とおくと，

$$\frac{\tilde{f}_2(\tau_0)}{\tilde{f}_2(1)} = \frac{\tilde{F}_1(\tau_0)}{\tilde{F}_1(1)} = \frac{\lambda \tilde{f}_1(\tau_0)}{\lambda \tilde{f}_1(1)} = \frac{\tilde{f}_1(\tau_0)}{\tilde{f}_1(1)}.$$

よって $\tilde{\chi}$ の構成法から， $t = [R_1, f_1] = [R_2, f_2]$ は同一の $\tilde{\chi}(t) \in \mathbb{H}$ を定める．

単射性. $\tilde{\chi}(t_1) = \tilde{\chi}(t_2), t_i = [R_i, f_i]$ と仮定する．これまでの議論と同様に補題 10.2 を適用して， $R_i = T(1, \tau_i)$ ($\tau_i \in \mathbb{H}$) の形であり， f_i は正規化のされた（0 を固定する）持ち上げ $\tilde{f}_i : \tilde{S} = \mathbb{C} \rightarrow \tilde{R}_i = \mathbb{C}$ を持つと仮定してよい．仮定より $\tilde{f}_1(\tau_0)/\tilde{f}_1(1) = \tilde{f}_2(\tau_0)/\tilde{f}_2(1)$ であるが，これより $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $\tilde{f}_2(\tau_0) = \lambda \tilde{f}_1(\tau_0)$ かつ $\tilde{f}_2(1) = \lambda \tilde{f}_1(1)$ が成り立つ．そこで， $\tilde{h}(z) = \lambda z, \tilde{F}_1 = \tilde{h} \circ \tilde{f}_1$ と置けば， $\langle \tilde{f}_2(\tau_0), \tilde{f}_2(1) \rangle = \langle \tilde{F}_1(\tau_0), \tilde{F}_1(1) \rangle = \text{Cov}(\tilde{R}_2)$ が成り立つ．したがって擬等角写像 $F_1 : S \rightarrow R_2$ が \tilde{F}_1 から定まり，さらに f_2 と F_1 が定める $\pi_1(S, [0]_S)$ から $\pi_1(R_2, [0]_{R_2})$ への同型は同じものである．このとき， f_2 と F_1 はホモトピックとなることが知られている（実際にホモトピーを構成できる．たとえば Lehto の本，p147） $h := F_1 \circ f_1^{-1} : R_1 \rightarrow R_2$ は \tilde{h} を持ち上げにもつ等角写像であるから， $t_1 = t_2$ を得る．

全射性. 任意の $\tau \in \mathbb{H}$ を固定する． \mathbb{C} 上で群 $\langle 1, \tau_0 \rangle$ から群 $\langle 1, \tau \rangle$ への共役を与える実アフィン写像

$$\tilde{f}_\tau(z) = \frac{(\tau - \bar{\tau}_0)z + (\tau - \tau_0)\bar{z}}{\tau_0 - \bar{\tau}_0}$$

を用いれば，トーラス間の擬等角写像 $S = T(1, \tau_0)$ から $R_\tau = T(1, \tau)$ への写像 $f_\tau : S \rightarrow R_\tau$ が定まる．これは $\tilde{f}_\tau(1) = 1, \tilde{f}_\tau(\tau_0) = \tau$ を満たすので， $\tilde{\chi}([R_\tau, f_\tau]) = \tau$ ． ■

11 フックス群のタ空間とタ距離

- 目標は二つ: フックス群のタ空間を定義し, それが通常のタ空間と同一視できることを見ること.
- タ距離を定義すること. これで位相をいれる.

11.1 単位円板 vs. 上半平面.

上半平面から単位円板への等角写像として, たとえば

$$u : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

が考えられる. $\text{Aut}(\mathbb{H})$ は次のような性質をもつ:

命題 11.1 (1) $\text{Aut}(\mathbb{H}) = u^{-1}\text{Aut}(\mathbb{D})u = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc=1 \right\} \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

(2) 任意の $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ と $z \in \mathbb{H}$ にたいし,

$$\frac{|\gamma'(z)|}{\text{Im} \gamma(z)} = \frac{1}{\text{Im} z}$$

(3) $\bar{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とするとき, 任意の $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ は $\bar{\mathbb{H}}$ から $\bar{\mathbb{H}}$ への同相写像を与える.

(4) 異なる 3 点 $\{a, b, c\} \subset \hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が正の向きに並んでいるとは, $\{u(a), u(b), u(c)\} \subset \partial\mathbb{D}$ がこの順で左回りに並んでいることとする. そのような任意の $\{a, b, c\}$ にたいし, ある $h \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ が存在して $h(a) = 0$, $h(b) = 1$, $h(c) = \infty$ とできる.

レポート 11-1

命題 11.1(1)–(4) のうち少なくとも 2 つを証明せよ.

双曲計量. $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \left(\frac{|dz|}{\text{Im} z} \right)^2$ は上半平面 \mathbb{H} の双曲計量 (hyperbolic metric) を定める.

¹⁷(2) より, 任意の $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ と $z, w = \gamma(z) \in \mathbb{H}$ について

$$\frac{|dw|}{\text{Im} w} = \frac{|\gamma'(z)||dz|}{\text{Im} \gamma(z)} = \frac{|dz|}{\text{Im} z}$$

が成立する. すなわち, $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ は \mathbb{H} への (向きを保つ) 等距離同型 (isometry) として作用する. これは (向きを保つ) 合同変換であって, \mathbb{C} でいうと回転 + 平行移動に対応する作用だといえる.

¹⁷ポアンカレ計量とも呼ばれる.

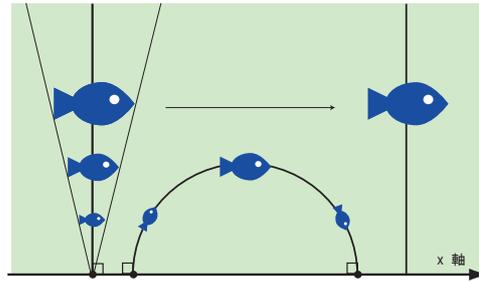
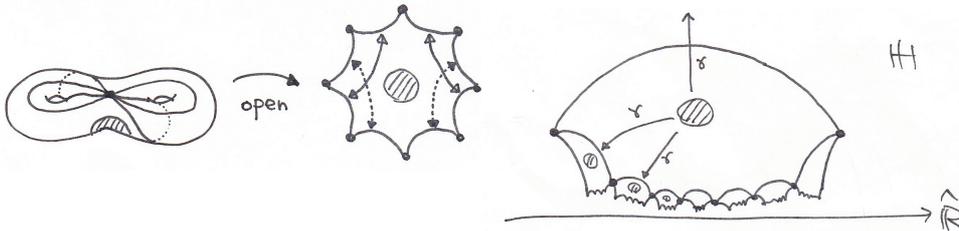


図 2: 魚はすべて同じ大きさ．たとえば水平方向の移動は双曲計量を保存する．上半平面の測地線は実軸に直交する半円もしくは直線である．

11.2 フックス群の変形．

以後 S はコンパクトリーマン面とし、 $\tilde{S} = \mathbb{D}$ とする．このとき、種数 $g = g(S)$ は 2 以上となる． $\mathbb{H} \simeq \mathbb{D}$ であったから、最初から $\tilde{S} = \mathbb{H}$ 、 $S = \mathbb{H}/\Gamma$ 、 $\Gamma < \text{Aut}(\mathbb{H})$ と仮定してよい．

例 (種数 2 のリーマン面)．種数 2 のリーマン面に「はさみ」を図のように入れると、8 角形が出来る．これに対応する \mathbb{H} 内の領域がいわゆる \mathbb{H}/Γ の基本領域である．基本領域を群 Γ の作用によって「ばら撒く」と、きれいなタイル張りを形成する．トーラスのとき、複素平面が合同な平行四辺形によって「タイル張り」されたのと全く同じ原理である．¹⁸



命題 11.2 (極限集合の定義) 任意の $z \in \mathbb{H}$ にたいしその軌道を

$$\Gamma z := \{\gamma(z) : \gamma \in \Gamma\}$$

で定義する．その集積点全体の集合を $\Lambda(\Gamma)$ とすると、 $\Lambda(\Gamma) = \hat{\mathbb{R}}$ であり、これは z の取り方に依存しない．これを Γ の極限集合 (limit set) とよぶ．

証明は省略する．

注意．一般に S がコンパクトでない場合は $\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{R}$ である．たとえば $\Gamma = \langle z \mapsto \lambda z \rangle (\lambda > 1)$ の場合、リーマン面はアニュラス $A_r = \mathbb{H}/\Gamma$ であり、 $L(\Gamma) = \{0, \infty\}$ となる．

定義 (フックス群の擬等角変形)．擬等角写像 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ が $0, 1, \infty$ をそれぞれ固定し、さらに任意の $\gamma \in \Gamma$ について $g = f\gamma f^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ を満たすと仮定する．

¹⁸双曲計量のせいで実軸に近いほうはタイルが小さくなっているように見えるが、それは双曲平面を無理矢理ユークリッド平面内に埋め込んだことで生じる「錯覚」であって、本来タイルはすべて合同である．

このとき定まる中への同型写像

$$\theta_f : \Gamma \mapsto \text{Aut}(\mathbb{H}), \quad \gamma \mapsto f\gamma f^{-1}$$

を f によるフックス群 Γ の擬等角変形 (qc deformation) とよび, 上のような変形を与える f 全体を $\text{Def}(\Gamma)$ で表す.

11.3 フックス群で不変なベルトラミ微分

命題 11.3 任意の $f \in \text{Def}(\Gamma)$ および $\gamma \in \Gamma$ にたいし, a.e. $z \in \mathbb{H}$ で次がなりたつ:

$$\mu_f(\gamma(z)) \frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \mu_f(z) \quad (\text{a.e. } z \in \mathbb{H})$$

ただし $\mu_f = f_{\bar{z}}/f_z$ は f のベルトラミ係数である.

レポート問題 11-2

上の命題を証明せよ.

注意. 平面領域なのでベルトラミ係数とベルトラミ微分は同一視される.

定義 (不変ベルトラミ微分). 可測函数 $\mu : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ が任意の $\gamma \in \Gamma$ にたいし a.e. $z \in \mathbb{H}$ について $\mu(\gamma(z)) \left(\overline{\gamma'(z)}/\gamma'(z) \right) = \mu(z)$ をみたすとき, これを Γ -不変ベルトラミ微分 (Γ -invariant Beltrami differential) という. 以後は $\|\mu\|_\infty < 1$ を仮定し, そのような Γ -不変ベルトラミ微分の全体を $B(\Gamma)$ であらわす.

定理 11.4 フックス群 Γ について, $\text{Def}(\Gamma)$ と $B(\Gamma)$ は同一視できる.

証明のスケッチ. : 明らかに $f \in \text{Def}(\Gamma)$ は $\mu_f \in B(\Gamma)$ を定める. ベルトラミ方程式の標準解の一意性より, 対応 $f \mapsto \mu_f$ は単射である. 逆に任意の $\mu \in B(\Gamma)$ にたいし,

$$\bar{\mu}(z) := \begin{cases} \mu(z) & z \in \mathbb{H} \\ 0 & z \in \mathbb{R} \\ \overline{\mu(\bar{z})} & z \in -\mathbb{H} \end{cases}$$

と定めることでその標準解 $f^\mu : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が定まる. これはフックス群の同型 θ_{f^μ} を定めることがわかるので (下のレポート問題も参照), $f^\mu \in \text{Def}(\Gamma)$ が成り立つ. ■

レポート問題 11-2

$f^\mu(z) = \overline{f^\mu(\bar{z})}$ が成り立つことを示せ. これより $f^\mu(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ が導かれる.

11.4 フックス群のタ空間

$\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とする. $\text{Def}(\Gamma)$ の元 (これは $B(\Gamma)$ とみなせる) にたいし, 次の同値関係を入れる:

定義 (フックス群の同値な変形). $f_1, f_2 \in \text{Def}(\Gamma)$ にたいし,
 $f_1 \underset{\Gamma}{\sim} f_2 := \iff f_1 = f_2$ が $\hat{\mathbb{R}}$ 上なりたつ.

商空間 $T(\Gamma) := \text{Def}(\Gamma) / \underset{\Gamma}{\sim}$ をフックス群 Γ のタイヒミュラー空間と呼ぶ.

定理 11.5 $S = \mathbb{H}/\Gamma$ にたいし, $T(S)$ と $T(\Gamma)$ は同一視できる.

証明には次の補題を用いる:

補題 11.6 任意の $[R, f] \in T(S)$ にたいし, 代表元として持ち上げ $\tilde{f}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ が $0, 1, \infty$ を固定するものが存在する. とくに, $\tilde{f} \in \text{Def}(\Gamma)$.

このような代表元を正規化された代表元とよぶ.

補題の証明. 任意の代表元 (R, f) をとると, 擬等角写像 $f: S \rightarrow R$ の持ち上げ $\tilde{f}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ は境界まで同相に拡張できて, $\tilde{f}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ となるが, 一般に $0, 1, \infty$ を固定しない. それでも命題 11.1 の意味での「正の向き」は保つので, 適当な $\tilde{h} \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ を取ることで $\tilde{f}' := \tilde{h} \circ \tilde{f}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ は $0, 1, \infty$ を固定する. また, 写像 $\tilde{h}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ はリーマン面間の等角写像 $h: R \rightarrow R'$ で $\pi_{R'} \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ \pi_R$ を満たすものを導く. $f' = h' \circ f$ とすれば, タ空間の元として $[R, f] = [R', f']$ であり, $0, 1, \infty$ を固定する. また $f'\Gamma(f')^{-1}$ は R' の被覆変換群を定めるので, $\tilde{f}' \in \text{Def}(\Gamma)$. ■

命題 11.7 正規化された代表元 (R_i, f_i) について, 以下は同値:

$$(R_1, f_1) \underset{T}{\sim} (R_2, f_2) \iff \theta_{\tilde{f}_1} = \theta_{\tilde{f}_2} \iff \tilde{f}_1 \underset{\Gamma}{\sim} \tilde{f}_2$$

レポート問題 11-4

命題 11.7 のふたつの \iff のうち, 少なくともひとつを証明せよ (参考文献をみよ.)

11.5 タイヒミュラー距離

$\tau_i := [R_i, f_i] \in T(S)$ ($i = 1, 2$) とする. これらの元の距離を次のように定める:

定義 (タイヒミュラー距離).

$$d(\tau_1, \tau_2) := \inf \{ \log K(g) : g: R_1 \rightarrow R_2, g \text{ は qc かつ } f_2 \circ f_1^{-1} \text{ とホモトピック} \}$$

で定まる距離を $T(S)$ のタイヒミュラー距離 (Teichmüller distance) とよぶ. 定理 11.5 によって, $T(\Gamma)$ にもこの距離によって位相をいれる.

たとえば 1-qc は等角写像であるから, $(R_1, f_1) \sim_T (R_2, f_2)$ であれば, $d(\tau_1, \tau_2) = 0$ である.

レポート問題 11-5

$d(\tau_1, \tau_2)$ の値は代表元によらずに定まることを示せ.

|| 定理 11.8 $(T(S), d)$ は完備距離空間.

証明のスケッチ. まず距離であることを確かめなくてはならない:

- $d(\cdot, \cdot) \geq 0$: これは $K(g) \geq 1$ からわかる.
- $d(\tau_1, \tau_2) = d(\tau_2, \tau_1)$: これは $K(g) = K(g^{-1})$ からわかる.
- 三角不等式: これは $K(g_1 \circ g_2) \leq K(g_1)K(g_2)$ からわかる.
- $d(\tau_1, \tau_2) = 0 \implies \tau_1 = \tau_2$: これは定義に \inf が含まれている分, 自明ではない. もし qc の列 $g_n : R_1 \rightarrow R_2$ が存在して $K(g_n) \rightarrow 1$ (すなわち $\|\mu_{g_n}\|_\infty \rightarrow 0$) かつ $g_n \sim f_2 \circ f_1^{-1}$ であると仮定する. f_1, f_2, g_n の正規化された $(0, 1, \infty$ を固定する) 持ち上げ $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{g}_n : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ を考えると, $g_n \circ f_1 \sim f_2$ より $\theta_{\tilde{g}_n \circ \tilde{f}_1} = \theta_{f_2}$. また, コンパクト集合上 $\tilde{g}_n \rightarrow \text{id}$ であるから, $\theta_{\tilde{f}_1} = \theta_{\tilde{f}_2}$. これは $\tau_1 = \tau_2$ を意味する.

つぎに完備性(「コーシー列は収束列」)を確認しよう. 点列 $\tau_n = [R_n, f_n] \in T(S)$ が $d(\tau_m, \tau_n) \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) を満たしたと仮定する. これが収束列であることを示すには, 適当な部分列をとってそれが収束することを示せば十分である.

いま, 擬等角写像の列 $g_n : R_n \rightarrow R_{n+1}$ で, $K(g_n) = 1 + O(2^{-n})$ かつ $g_n \sim f_{n+1} \circ f_n^{-1}$ なものが存在するとしてよい. ある N を固定したとき,

$$K(g_{N+j} \circ \cdots \circ g_N \circ f_N) < \infty$$

である. $K(\cdot)$ の中の写像を $F_j : S \rightarrow R_{N+j}$ とおくと, その正規化された持ち上げ $\tilde{F}_j : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ について $\mu_{\tilde{F}_j} \in B(\Gamma)$ かつ $\|\mu_{\tilde{F}_{j+1}} - \mu_{\tilde{F}_j}\|_\infty = O(2^{-j})$ がなりたつ. $B(\Gamma)$ は完備なバナッハ空間であるから, 極限 $\mu = \lim_j \mu_{\tilde{F}_j}$ が存在する. このとき $f^\mu \in \text{Def}(\Gamma)$ であり, $[f^\mu] \in T(\Gamma)$ はある $\tau \in T(S)$ に対応する. これが $\tau_n \rightarrow \tau$ を満たしていることを確認するのは, 難しくない. ■

注意. タイヒミュラー空間の完備性の根源が, Γ 不変ベルトラミ微分の空間 $B(\Gamma)$ バナッハ空間としての完備性にあることに注意. 小難しい擬等角写像も, いたずらに導入したわけではないのである.

タイヒミュラー距離に関するその他の性質. まず何より, 次の系は重要である:

|| 系 11.9 モジュラー群 $\text{Mod}(S)$ の $T(S)$ への作用は, タイヒミュラー距離に関して等距離同相.

証明. モジュラー群の元 $[h]$ の作用を思い出しておこう. $h : S \rightarrow S$ は擬等角写像であり, $[h] \cdot [R, f] = [R, f \circ h^{-1}]$ のように作用する. したがってタ距離の定義より, $d(\tau_1, \tau_2) = d([h] \circ \tau_1, [h] \circ \tau_2)$ が成立する. ■

さらに、次のロイデン (Royden) の定理も知られている：

|| 定理 11.10 (ロイデン) タイヒミュラー距離は小林擬距離と一致する．すなわち、タイヒミュラー空間は小林双曲的である．

小林擬距離、小林双曲性の定義については今吉・谷口などを参照せよ．

12 ベアス埋め込み

今回の目標は次を概説することである：

- タ空間が複素 $3g - 3$ 次元空間の有界領域内に埋め込めること (ベアス埋め込み)
- タ空間に複素構造が入ること

12.1 ベアスの同時一意化

複素共役なリーマン面. 以下, コンパクトな双曲型リーマン面 $S = \mathbb{H}/\Gamma$ (種数 2 以上) を固定する. このとき, フックス群 Γ は下半平面 (lower half plane) $\mathbb{H}^* = -\mathbb{H}$ にも作用して, その商リーマン面として $S^* := \mathbb{H}^*/\Gamma$ を得る. これらの局所座標がどのように得られるかを考えれば, S と S^* が互いに「複素共役」だと呼ぶのは自然であろう. より幾何学的には, 互いに鏡像の関係にあると考えてよい.¹⁹

さて Γ 不変ベルトラミ微分の空間

$$B(\Gamma) = \{ \mu : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} \text{ 可測} : \|\mu\|_\infty < 1, \forall \gamma \in \Gamma, (\mu \circ \gamma) \overline{\gamma'} / \gamma' = \mu \text{ a.e.} \}$$

の元 μ をひとつとる. そしてこれを, 次の二通りの方法でリーマン球面全体に拡張する:

$$\bar{\mu}(z) = \begin{cases} \mu(z) & (z \in \mathbb{H}) \\ 0 & (z \in \hat{\mathbb{R}}) \\ \overline{\mu(\bar{z})} & (z \in \mathbb{H}^*) \end{cases} \quad \underline{\mu}(z) = \begin{cases} \mu(z) & (z \in \mathbb{H}) \\ 0 & (z \in \hat{\mathbb{R}} \cup \mathbb{H}^*) \end{cases}$$

それぞれのベルトラミ方程式を解き, 標準解をそれぞれ f^μ, f_μ と表すことにする. このとき, $\begin{cases} f^\mu(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \\ f^\mu(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}} \\ f^\mu(\mathbb{H}^*) = \mathbb{H}^* \end{cases}$ が成り立つのであった. 同じことは f_μ では成り立たないので $\begin{cases} f_\mu(\mathbb{H}) =: H_\mu \\ f_\mu(\mathbb{H}^*) =: H_\mu^* \end{cases}$ とおく.

さてこれらの擬等角写像を用いて, $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ への中への同型写像

$$\begin{aligned} \theta_{f^\mu} &= \theta^\mu : \Gamma \longrightarrow f^\mu \Gamma (f^\mu)^{-1} =: \Gamma^\mu \\ \theta_{f_\mu} &= \theta_\mu : \Gamma \longrightarrow f_\mu \Gamma (f_\mu)^{-1} =: \Gamma_\mu \end{aligned}$$

が定まる. 像である群 Γ^μ, Γ_μ は $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, すなわち $PSL(2, \mathbb{C})$ の部分群であり, 次が成り立つ:

1. Γ^μ はフックス群. とくに, $S^\mu := \mathbb{H}/\Gamma^\mu$ と $(S^\mu)^* := \mathbb{H}^*/\Gamma^\mu$ は互いに鏡像 (複素共役) 関係にあるリーマン面.
2. Γ_μ は一般にフックス群ではないが, リーマン面 $S_\mu := H_\mu/\Gamma_\mu$ および $S_\mu^* := H_\mu^*/\Gamma_\mu$ が定まる.
3. $S_\mu \simeq S^\mu$ かつ $S_\mu^* \simeq S^* = \mathbb{H}^*/\Gamma$.

レポート問題 12-1

上の 3 を示せ. ヒント: $f_\mu \circ (f_\mu|_{\mathbb{H}})^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow H_\mu$ および $f_\mu : \mathbb{H}^* \rightarrow H_\mu^*$ は等角.

¹⁹極言すればこれらのリーマン面は同じリーマン面を異なる方法で眺めているだけだとも考えられるので, しばしば同一視される.

「下つき μ 」の群 Γ_μ は $H_\mu \cup H_\mu^*$ に作用することにより、二つのリーマン面 S_μ と S^* を同時に生成する。逆に言えば、 S_μ と S^* を同時に一意化する。これをベアスの同時一意化 (simultaneous uniformization) と呼ぶ。 Γ_μ 自身はもともとフックス群を変形したものであるから、擬フックス群 (quasi-Fuchsian group) と呼ばれる。

$T(\Gamma)$ と「下つき μ 」の f_μ 。フックス群の夕空間 $T(\Gamma)$ の代表元として $\text{Def}(\Gamma)$ の元 f^μ がとれるが、ベルトラミ方程式の解の一意性より、これと「下つき μ の解」 f_μ が 1 対 1 に対応する。

「上つき μ の解」 f^μ が代表する夕空間の元は、その $\hat{\mathbb{R}}$ 上での値 (作用) で定まる同値類であった。これと同等の同値類が「下つき μ の解」 f_μ にも存在する：

命題 12.1 Γ 不変ベルトラミ微分 $\mu_1, \mu_2 \in B(\Gamma)$ に関して、次は同値：

- (1) $\theta^{\mu_1} = \theta^{\mu_2}$
- (2) $f^{\mu_1} = f^{\mu_2}$ が $\hat{\mathbb{R}}$ 上成立 ($\iff f^{\mu_1} \underset{\Gamma}{\sim} f^{\mu_2}$)
- (3) $f_{\mu_1} = f_{\mu_2}$ が \mathbb{H}^* 上成立

とくに (3) は \mathbb{H}^* 上の等角写像に関する性質であることに注意しておこう。

12.2 シュワルツ微分とベアス埋め込み

$D \subset \hat{\mathbb{C}}$ を単連結領域とし、 $f: D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を等角写像としよう。このとき、

$$Sf(z) := \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = u'(z) - \frac{1}{2} \{u(z)\}^2$$

(ただし $u = f''/f'$) を f のシュワルツ微分 (Schwarzian derivative) とよぶ。

命題 12.2 (シュワルツ微分の基本性質) シュワルツ微分は次を満たす：

1. D 上で $Sf \equiv 0 \iff \exists \gamma \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}), f = \gamma|_D$
2. $g: f(D) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を等角写像とすると、 $S(g \circ f)(z) = Sg(f(z)) \{f'(z)\}^2 + Sf(z)$.

レポート 12-2

上の命題を証明せよ。

「下つき μ 」の f_μ が定めるシュワルツ微分いま $\mu \in B(\Gamma)$ にたいし、 $f_\mu: \mathbb{H}^* \rightarrow H_\mu^*$ は等角写像である。そこで

$$q_\mu(z) := Sf_\mu(z) \quad (z \in \mathbb{H}^*)$$

と定める。シュワルツ微分の定義よりこれは \mathbb{H}^* 上の正則関数である (f_μ の等角性より $f'_\mu \neq 0$ 、よって q_μ に極はない。) また、命題 12.1 の意味で μ と同値な $B(\Gamma)$ の元にたいし、この正則関数は共通に定まる。すなわち、夕空間の元 $[f^\mu]$ にたいし定まる。

命題 12.3 正則関数 q_μ は次の性質を持つことが知られている：

$$\left\| \begin{array}{l} \text{(a) } \forall \gamma \in \Gamma, q_\mu(\gamma(z))\{\gamma'(z)\}^2 = q_\mu(z) \\ \text{(b) } \|q_\mu\| := \sup_{z \in \mathbb{H}} (\text{Im } z)^2 |q_\mu(z)| < \frac{3}{2} \text{ (クラウス・ネハリの定理)}. \end{array} \right.$$

$\gamma \in \Gamma$ はリーマン面 $S^* = \mathbb{H}^*/\Gamma$ の被覆変換群であったから, (a) より, q_μ はある $Q(S^*)$ の元を定める. より一般に, 次が成り立つ:

命題 12.4 命題 12.3 の (a) をみたく \mathbb{H}^* 上の正則関数全体を $Q(\Gamma)^*$ で表すとき, ベクトル空間意味で以下はすべて同型:

$$Q(\Gamma)^* \simeq Q(S^*) \simeq Q(S) \simeq \mathbb{C}^{3g-3}.$$

定義 (ベアス射影とベアス埋め込み). 以上の議論から, 次の写像が定義される:

$$\begin{aligned} \tilde{b}: B(\Gamma) &\rightarrow Q(\Gamma)^*, & \mu &\mapsto q_\mu \\ b: T(\Gamma) &\rightarrow Q(\Gamma)^*, & [f^\mu] &\mapsto q_\mu \end{aligned}$$

\tilde{b} をベアス射影 (Bers projection), b をベアス埋め込み (Bers embedding) と呼ぶ.

定理 12.5 (ベアス埋め込みの性質) ベアス埋め込み $b: T(\Gamma) \rightarrow Q(\Gamma)^*$ は次の性質をもつ:

1. b は単射かつ連続 (埋め込みになっている).
2. (アールフォルス・ヴェイル): $q \in Q(\Gamma)^*$ が $\|q\| < 1/2$ をみたくとき,
 - $\mu_q(z) := -2(\text{Im } z)^2 q(\bar{z})$ は $B(\Gamma)$ の元であり,
 - $\tilde{b}(\mu_q) = S f_{\mu_q} = q$.

とくに $Q(\Gamma)^*$ のノルム $\|\cdot\|$ に関して, 夕空間の像 $b(T(\Gamma))$ は原点中心半径 $1/2$ の球をふくみ, かつ原点中心半径 $3/2$ の球に含まれる. また, 原点 $\mathbf{0} \in b(T(\Gamma))$ は内点である.

$\|q\| < 1/2$ のときに定まる写像 $\sigma: q \mapsto \mu_q$ は $\tilde{b} \circ \sigma = \text{id}$ を満たす. この σ はアールフォルス・ヴェイル切断 (Ahlfors-Weill section) と呼ばれる.

12.3 夕空間の複素構造

いま夕空間の元 $[f^\mu] \in T(\Gamma)$ をとり, 固定する. このとき,

$$[f^\mu]: T(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma^\mu), \quad [f] \mapsto [f \circ (f^\mu)^{-1}]$$

で定まる $T(\Gamma)$ から $T(\Gamma^\mu)$ の上への同相写像 (これを確認するのは簡単) を基点の取替えとよぶ.

$b_\mu: T(\Gamma^\mu) \rightarrow Q(\Gamma^\mu)^*$ を (Γ^μ に関する) ベアス埋め込みとすると,

$$\begin{aligned} V_\mu &:= \{q \in Q(\Gamma^\mu)^* : \|q\| < 1/2\} \\ U_\mu &:= (b_\mu \circ [f^\mu]|_{V_\mu})^{-1}(V_\mu) \subset T(\Gamma) \end{aligned}$$

はそれぞれ $Q(\Gamma^\mu)^*$ の原点および $[f^\mu] \in T(\Gamma)$ の近傍である．次の定理によって， $T(\Gamma)$ に複素構造が入る：

定理 12.6 (夕空間の複素構造) 写像の族

$$\{\Phi_\mu := b_\mu \circ [f^\mu] : U_\mu \rightarrow V_\mu\}_{\mu \in B(\Gamma)}$$

は $T(\Gamma)$ のアトラスを与え， $T(\Gamma)$ は $3g - 3$ 次元複素多様体となる．

$T(\Gamma)$ と $T(S)$ の同一視のもと，オリジナルの夕空間も複素多様体となることがわかる．証明には複素多様体の知識が少しだけ必要になるので割愛する．鍵となるのは，次の定理である：

定理 12.7 (アールフォルス・ベアス) 単位円板 \mathbb{D} からの写像 $\mathbb{D} \ni t \mapsto \mu_t \in B(\Gamma)$ が正則であるとき，すなわち任意の $t \in \mathbb{D}$ について Γ 不変な可測関数

$$\nu_t(z) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu_{t+\Delta t}(z) - \mu_t(z)}{\Delta t}$$

が a.e. $z \in \hat{\mathbb{C}}$ で定まるとき (ただし $\|\nu\|_\infty < 1$ とは限らない)，任意の $z \in \hat{\mathbb{C}}$ にたいし， $t \mapsto f_{\mu_t}(z) \in \hat{\mathbb{C}}$ も正則写像．

13 正則 2 次微分とタイヒミュラーの定理

一応の最終回です．今回の目標は：

- リーマン面上の正則 2 次微分がそのリーマン面にある種の「幾何」を定めること．
- タイヒミュラーの定理の主張を述べること（証明は割愛）

以下， S は種数 $g = g(S)$ が 2 以上の閉リーマン面とし，そのアトラスを $\mathcal{A} = \{\phi : U_\phi \rightarrow \mathbb{U}_\phi \subset \mathbb{C}\}$ とする．また， $Q(S)$ を S 上の正則 2 次微分全体のなすベクトル空間とする．

13.1 正則 2 次微分が定める幾何

正則 2 次微分の零点（復習）． $q = q(z)dz^2 \in Q(S) - \{0\}$ とする．その実体は，局所座標上の正則関数の族

$$q = \{q_\phi : \mathbb{U}_\phi \rightarrow \mathbb{C}\}_{\phi \in \mathcal{A}}$$

であった．ただし， $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ かつ $w = \psi \circ \phi^{-1}(z)$ が定義できるとき，

$$q_\psi(w) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = q_\phi(z)$$

が成立する．

リーマン・ロッホの定理より， $\deg q = 4g - 4$ であった． q は正則である（すなわち極はない）から， q の零点は重複度込みで $4g - 4$ 個となる．ただし零点の「重複度」とは零点の「位数」のことであり，次のようにして「測定」できる： $p_0 \in S$ が零点であるとき， $p_0 \in U_\phi$ となる $\phi \in \mathcal{A}$ を取り， $z_0 = \phi(p_0)$ の周りで $q_\phi(z) = a_m(z - z_0)^m + \dots$ ($a_m \neq 0$) であればもとも p_0 の位数は m である．しかもこの値は，局所座標 $\phi \in \mathcal{A}$ の取り方によらず決まるのであった．

q の定める幾何．以下，先ほどと同様に， $p_0 \in U_\phi$ ， $z = \phi(p)$ ， $z_0 = \phi(p_0) \in \mathbb{U}_\phi$ とする．

p_0 が零点でないとき．このとき $a_0 := q_\phi(z_0) \neq 0$ とおくと， $z \approx z_0$ のとき

$$q_\phi(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

の形である．このことから， z_0 の近傍である正則関数 α_ϕ が存在して， $\alpha_\phi(z)^2 = q_\phi(z)$ を満たす．

このことはアルフォルス教科書にも載っている程度のことだが，大雑把におさらいしておこう．まず

$$q_\phi(z)/a_0 = 1 + \frac{a_1}{a_0}(z - z_0) + \dots = (1 + b_1(z - z_0) + \dots)^2$$

を満たす正則関数 $u_\phi(z) = 1 + b_1(z - z_0) + \dots$ が z_0 のまわりで一意的に存在する．さらに $a_0 = b_0^2$ となる b_0 が二通り（互いに -1 倍で写りあう）存在するが，そのうちのひとつを固定することで， $\alpha_\phi(z) = b_0 u_\phi(z)$ が定まる．いずれにせよ，高々 -1 倍の差を除いて決まってしまうことに注意しておこう．

さてこのような $\alpha_\phi(z)$ のひとつを $\sqrt{q_\phi(z)}$ で表す．もし $p_0 \in U_\psi$ でもあったとしよう．すると，同様に $\alpha_\psi(z) = \sqrt{q_\psi(z)}$ が定まる．このとき $w = \psi \circ \phi^{-1}(z)$ が z_0 のある近傍で定まるが，必要なら -1 倍して調整することで

$$\alpha_\psi(w) \frac{dw}{dz} = \alpha_\phi(z)$$

が成立する．すなわち，「局所的な正則 1 次微分」 $\alpha = \sqrt{q} = \{\alpha_\phi\}$ が p の近傍で定まることになる．この講義の最初のほうでみたように，正則な 1 次微分にたいしては線積分が意味をもつのであった．

しかも, $\alpha = \sqrt{q}$ の定義域は解析接続の要領で (q の零点にぶつからない限り) ぐんぐんと広げることができる.

たとえば V_0 を p_0 の単連結近傍とし, q は V_0 上零点を持たないとしよう. このとき, 解析接続の一意性より, V_0 上で α は一価正則な一次微分として定まる. さらに線積分の一意性 (コーシーの積分定理からすぐにわかる) より, 関数 $\zeta: V_0 \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$\zeta(p) := \int_{p_0}^p \alpha = \int_{p_0}^p \sqrt{q}$$

によって定義される. これを便宜的に「 V_0 上の q -座標 ζ 」と呼ぶことにしよう.

次に, q -座標を解析接続の要領で拡張してみよう. たとえば p_0 と通るループ (閉じたパス) γ で, 自明でないもの (一点とホモトピックでないもの) をとる. γ 上の各点 $p_t = \gamma(t)$ それぞれで十分小さな単連結近傍 V_t をとり, q -座標 $\zeta_t(p)$ を p_0, V_0 のときと同様の手順で定めることができる. t を十分小さく固定し $V_0 \cap V_t \neq \emptyset$ もまた連結かつ単連結にとれるとき, $p \in V_0 \cap V_t$ にたいし V_0 上の q -座標 $\zeta_0: V_0 \rightarrow \mathbb{C}$ と V_t 上の q -座標 $\zeta_t: V_t \rightarrow \mathbb{C}$ の差は,

$$\zeta_0(p) - \zeta_t(p) = \int_{p_0}^p \sqrt{q} - \int_{p_t}^p \sqrt{q} = \int_{p_0}^{p_t} \sqrt{q} = \zeta_0(p_t)$$

となる. この値は p_t によって一意的に定まる定数である. 以上を念頭に, ζ_0 を γ に沿って解析接続して行って, $p_1 = p_0$ まで戻ってきた場合を考えてみる. 十分大きなパラメーターの分割点 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ をとり, V_{t_i} と $V_{t_{i+1}}$ で上のような議論を繰り返せば, 最初の ζ_0 と戻ってきたときの ζ_1 の差は任意の (p_0 に十分近い) $p \in V_0 \cap V_1$ にたいし

$$\zeta_0(p) - \zeta_1(p) = \int_{\gamma} \sqrt{q}$$

となる. 右辺は γ のホモトピー類のみで定まる積分値 (複素定数) であり, 一般に 0 とはならない. すなわち, 同一の点 p にたいし, ひとつの 2 次微分 q から異なる q -座標が得られることになる. 一般に局所的に定義された q -座標を解析接続していても, 大域的に一価な値を定めることは不可能であり, 上の例のように定数分の差 (自由度) をもった多価関数になってしまう. これは最初の \sqrt{q} の -1 倍分の自由度とは別に生じる多価性である.

こうも多価性があると, q -座標というのはなんとともつかみ所がないな, 感じてしまうかもしれない. 実はこの多価性がもたらす自由度をすべて忘れてしまったあとに残るものが, 意外なほど面白いのである.

\mathcal{F} -構造. 正則 2 次微分 q の零点全体を $q^{-1}(\{0\})$ と表すことにする. 任意の $p_0 \in S^\times := S - q^{-1}(\{0\})$ にたいし, 単連結近傍 $V_{p_0} \subset S^\times$ で, そこでの q -座標 $\zeta_{p_0}: V_{p_0} \rightarrow \mathbb{C}$ が中への同相写像になっているものが取れる. いま $V_{p_0} \cap V_{p_1} \neq \emptyset$ が連結であると仮定すると, p_0 と p_1 のみに依存する定数 $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して, $\zeta_{p_1}(p) = \pm \zeta_{p_0}(p) + \alpha$ が $p \in V_{p_0} \cap V_{p_1}$ にたいし成り立つ (もちろん α や \pm の選び方は q -座標の多価性に由来する.) このような性質をみたく「アトラス」 $\{\zeta_p: V_p \rightarrow \mathbb{C}\}_{p \in S^\times}$ を, 正則 2 次微分 q が定める S の \mathcal{F} -構造 (\mathcal{F} -structure) と呼ぶ.²⁰

\mathcal{F} -構造は次のように, 葉層 (foliation) を定める: ζ -平面のヨコ線 (実軸との平行線) 全体と, タテ線 (虚軸との平行線) 全体は定数を足しても, -1 倍しても不変である. したがって, 「ヨコ線」もしくは「タテ線」という概念は「アトラス」で不変な概念である. すなわち ζ -平面のヨコ線の束を引き戻すことで, S^\times 上に張り巡らされた「ヨコ線の束」が構成できる. これが q が定める S 上の水平葉層 (horizontal foliation) と呼ばれるものである. さらに, q -座標間ではユークリッド距離 $|d\zeta_p|$ も不変であるから, 平坦な (flat, 曲率 0 の) 計量が S^\times に定まる. この計量により, 「ヨコ線の束」

²⁰逆に \mathcal{F} -構造を定めるような写像の族 (「アトラス」) があれば, それは正則 2 次微分を定めることもわかる.

の「厚さ」も考えることが出来る。「タテ線」についても同様に垂直葉層 (vertical foliation) が定義できる。

S 上の「ヨコ線」のひとつに着目し、これが S 上でどのような経路をとるのか、考えてみるのも面白い。実際、ループを描いていることもあるし、途中で q の零点にぶつかって、2 本以上に分岐してしまうこともある (下記参照)。 S 上を稠密になるように巻きつくようなものも存在する。

リーマン面全体でこれらの葉層構造を眺めてみるのもまた面白い。ちょっと気持ち悪いが、「ヨコ線」を動物の筋肉の繊維に見立てると、人間の皮膚をはがし、筋肉だけを描いた解剖図のような感じになる。

このように正則 2 次微分から定まる「平坦な幾何」は、幾何学と力学系の新たな交差点として近年にわかに注目を浴びている。

p_0 が零点のとき。このとき p_0 の位数を $m \in \mathbb{N}$ とすると、 $z \approx z_0$ のとき

$$q_\phi(z) = a_m(z - z_0)^m + \dots \quad (a_m \neq 0)$$

の形である。さらに適当な正則座標変換 $w = \Psi(z)$ を施すと新しい局所座標 $\psi = \Psi \circ \phi$ について

$$q_\psi(w) = w^m$$

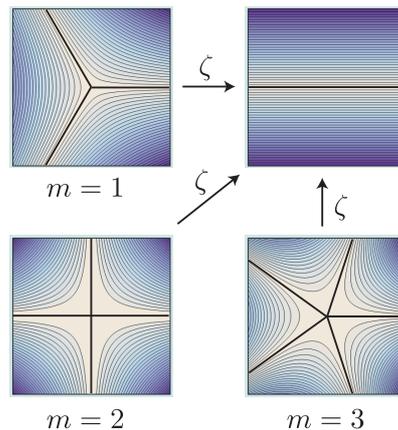
が成立する (このような座標変換の見つけ方もアールフォルスの教科書に載っている。)

このとき (若干形式的に)

$$\zeta(p) := \int_{p_0}^p \sqrt{q} = \int_0^{\psi(p)} w^{m/2} dw = \frac{2}{m+2} w^{\frac{m+2}{2}}$$

が成り立つ。この積分の正確な意味は、ちゃんと積分路を明確にしないと表現できない。 $w^{m/2}$ は $u^2 = w^m$ をみたす u のひとつを表し、それは $w = 0$ の周りを一周する経路で解析接続すると -1 倍される。それをさらに線積分するのだから、結果として得られる q -座標は $v^2 = \frac{2^2}{(m+2)^2} w^{m+2}$ を満たす v もしくは $-v$ となる。その符号は、積分路が原点の周りを何周したかで決まる。

符号や定数分の差があっても、上と同様の理由付けによって「ヨコ線・タテ線」は矛盾なく定まる。零点のまわりでの「ヨコ線」(もしくは「タテ線」)は、位数に応じて下記の図のように分布する。零点では「ヨコ線の束」が分岐してしまうので、零点は葉層構造の特異点 (singularity) とも呼ばれる。



13.2 アフィン・ストレッチ

定数 k を $0 < k < 1$ となるように固定し、 $K = (1+k)/(1-k)$ とする。いま q -座標 ζ において、

$$L_k: \zeta \mapsto \zeta + k\bar{\zeta} =: \xi$$

という写像を考える．これを $\zeta = x + yi$ として書きなおすと，

$$\zeta = x + yi \mapsto (1+k)x + (1-k)yi = (1-k)(Kx + yi)$$

となる．すなわち，ヨコ方向に $1+k$ 倍に伸ばし，タテ方向に $1-k$ 倍に縮めるような作用である．この変形は -1 倍しても定数を足しても同じであるから， q -座標特有の多価性について気にしなくてもよい．また，「ヨコ線の束」と「タテ線の束」(葉層構造)をそれぞれ保存する．

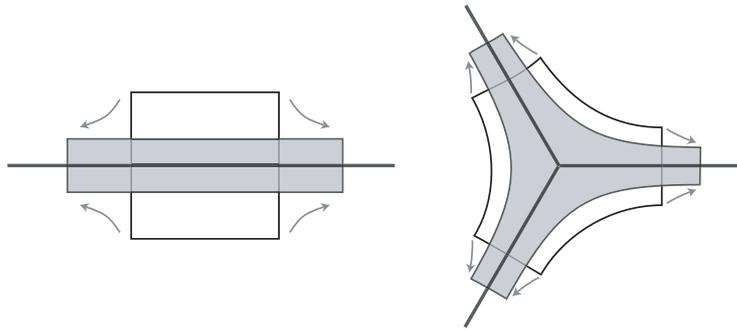


図 3: ヨコ・タテへの伸縮．位数 1 の零点の周りでは右図のようになる．

この変形を用いると，リーマン面 (S, \mathcal{A}) の変形を与えることが出来る．直感的にはリーマン面全体を「ヨコ線」方向に一樣に引き伸ばし，「タテ線」方向に一樣に縮めるわけだから，これまた筋肉の伸縮によく似たものがイメージできる．

さていま， $L_k \circ \zeta : S - q^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathbb{C}$ という写像が定まるから，これを適当に制限したものを局所座標だと思ふことで S 上に新しいアトラス $\mathcal{A}(q, k)$ が構成できる(各自考えてみよ．零点の周りについても，この局所座標は自然に，しかも一意的に拡張できる．)このとき，恒等写像 $\text{id} : (S, \mathcal{A}) \rightarrow (S, \mathcal{A}(q, k))$ は擬等角写像となる．実際，ベルトラミ微分は

$$\mu = \frac{\xi_{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}}{\xi_{\zeta} d\zeta} = k \frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta} = k \frac{\overline{\sqrt{q(z)}} dz}{\sqrt{q(z)} dz} = k \frac{\overline{q(z)} dz}{|q(z)| dz}$$

であり，このとき $|\mu| = \|\mu\|_{\infty} = k$ が成り立つ．ちなみに右端の項について， $\bar{q} = \overline{q(z)} dz^2$ は $(0, 2)$ -微分， $|q| = |q(z)| dz d\bar{z} = |q(z)| |dz|^2$ は $(1, 1)$ -微分であり，これらの商として $(-1, 1)$ -微分となっている．

一般に，擬等角写像 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ がタイヒミュラー写像 (Teichmüller map) であるとは，適当な $0 < k < 1$ と $q \in Q(S) - \{0\}$ が存在して

$$\mu_f = k \frac{\overline{q(z)} dz}{|q(z)| dz}$$

が成り立つことをいう．ちなみに q を正数倍したものに置き換えてもおなじタ写像が得られることに注意しておく．

この種の擬等角写像が，ある種の極値性 (extremity) をもつことを示したのが，以下のタイヒミュラーの定理である：

定理 13.1 (タイヒミュラーの極値性定理) タイヒミュラー写像は次の性質をもつ：
 (1) 存在：任意の $[R, f] \in T(S)$ にたいし，あるタイヒミュラー写像 $f_0 : S \rightarrow R$ が存在して， $(R, f_0) \underset{T}{\sim} (R, f)$.

|| (2) 極値性と一意性：さらにこの f_0 は次を満たす： $(R, f_0) \xrightarrow{T} (R, f)$, $f_0 \neq f$ のとき, $\|\mu_{f_0}\|_\infty < \|\mu_f\|_\infty$.

少し考えれば, (R, f) とタイヒミュラー同値な (R, g) で, 最大歪曲度 $\|\mu_g\|$ がいくらでも 1 に近いものを構成できることがわかる. しかし, このような操作はリーマン面を無駄に抓(つま)む変形となる. タイヒミュラー同値類はホモトピー分の自由度があるから, 皺(しわ)を伸ばすことが出来る. ではどのくらい皺を伸ばし, 最大歪曲度を小さく出来るのか. その答えが, タイヒミュラー写像によって与えられるのである.

タ空間の表現. タイヒミュラー写像を用いて, タイヒミュラー空間を表現することも出来る. ベクトル空間 $Q(S)$ の L_1 -ノルムを

$$\|q\|_1 := \iint_S |q(z)| dx dy$$

によって定める. ただし, 右辺の積分は S を細かく分割し適当な局所座標 $z = \phi(p)$ について $|q_\phi(z)|$ を面積素について積分し和を取ったもの, と解釈する.²¹ $Q(S)$ のこのノルムに関する単位球を

$$Q(S)_1 := \{q \in Q(S) : \|q\|_1 < 1\}$$

と表す. 次の大局的な結果も, タイヒミュラーの定理として知られている:

定理 13.2 (タイヒミュラーの定理) 任意の $q \in Q(S)_1$ にたいしベルトラミ微分が

$$\mu_f = \|q\|_1 \frac{\overline{q(z)} dz}{|q(z)| dz}$$

となる擬等角写像 $f_q : S \rightarrow f_q(S)$ が存在し, 写像

$$T : Q(S)_1 \rightarrow T(S), \quad q \mapsto [f_q, f_q(S)]$$

は上への同相写像となる.

²¹ $w = \psi \circ \phi^{-1}(z)$ のとき, $|q_\psi(w)||w_z(z)|^2 = |q_\phi(z)|$ より, 面積素による積分が意味をもつ.