担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

この講義について

作成日： April 16, 2012 Version : 1.1

担当教員： 川平 友規（Kawahira, Tomoki；理学部数理学科・大学院多元数理科学研究科）

講義ウェブサイト：
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/12S-biseki.html
配布されたプリントが pdf 形式でダウンロードできます．また，毎週の進捗状況についてコメントしていきます．

本授業の目的およびねらい（全学シラバスより）： 定量的変化を記述・分析する数学の分野が解析学であり，その中心的方法は微分・積分である．これらの方法は自然科学において必須の研究手法であるが，近年はさらに社会科学などにも広く応用されている．本科目は通年講義の前半として，一変数微分積分学の基本を理解することを目的とする．特に極限の本質を理解し，対数関数・三角関数など初等関数の自在な解析学的取扱いができるようになることを重視する．

講義日と授業内容（予定）：

4 月 16 日	**数列と関数**：数列の収束・発散，実数の連続性の公理,
4 月 23 日	e，級数の収束・発散,
5 月 7 日	関数の極限値，関数の連続性，ランダウの記号,
5 月 14 日	初等関数（指数・対数・三角・逆三角）etc.
5 月 21 日	**微分**：微分の定義，逆関数の微分,
5 月 28 日	初等関数の微分
6 月 4 日	中間試験
6 月 11 日	**微分（つづき）**：平均値の定理,
6 月 18 日	n 階微分，テイラー展開，etc.
6 月 25 日	**積分**：リーマン和と区分求積法，定積分の定義,
7 月 2 日	不定積分，微積分の基本定理,
7 月 9 日	広義積分の収束と発散,
7 月 23 日	曲線の長さ，etc.
7 月 30 日	期末試験

自宅模擬テスト： 皆さんの理解度を確認するため,「自宅模擬テスト」を 2 回ほど実施する予定です．

教科書： 三宅敏恒『入門微分積分』培風館
授業内容と完全に一致するわけではありませんが，レポート問題および試験範囲を指定するのに用いるほか，自習書としても活用できるので，ぜひ手に入れておいてください．

成績評価の方法： 「履修取り下げ制度」を適用します．

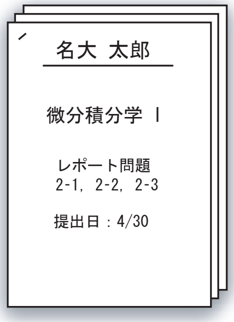
- 中間試験および期末試験をそれぞれ 50 点満点で評価する．
- 履修取り下げ届が提出された場合は「欠席」とし，それ以外は 59 点以下を F，60 – 69 点を C，70 – 79 点を B，80 – 89 点を A，90 – 100 点を S とする．
- レポートを提出することにより，成績に最大 10 点を加点する．とくに中間試験の成績が芳しくない受講者には，レポートの提出を義務付ける場合がある．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

レポートの締め切りと提出様式： レポート問題と締め切りについては講義中に指示します．提出する際には，必ず **A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙**を使用し，右図のような**表紙をつけて**ください．また，必ず**左上**をホチキス等でとめてください．

受講者同士で協力し合って解答してもかまいませんが，かならず協力者の名前も明記するようにしてください.（それによって減点されることはありません.）

レポートは採点して返却します．返却が済むまで，成績への加点の対象とはしないので注意してください．



・必ずA4サイズ, 表紙をつける.
・名前は上の方に大きく書く.
・左上をホチキスで留める.
・解いた問題の番号，提出日を書く.
・裏面はなるだけ使わない.

オフィスアワー： 授業中・授業後の質問は大歓迎です．それ以外の時間に質問したい場合は，ぜひオフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を活用してください．私のオフィスアワーは，理学部数理学科内の合同オフィスアワー「Cafe David（カフェ・ダヴィド）」の時間に設定しています．Cafe David は月曜から金曜の 12:00–13:30 にオープンし，コーヒー・紅茶を無料で提供しています．私の担当は月曜日，場所は理 1 号館 2 階のエレベーター前です．

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体	(2) $\mathbb{R}$: 実数全体	(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体	(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体	(6) $\emptyset$: 空集合

ギリシャ文字

(1) α: アルファ	(2) β: ベータ	(3) γ, Γ: ガンマ	(4) δ, Δ: デルタ	(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ	(7) η: エータ	(8) θ, Θ: シータ	(9) ι: イオタ	(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ	(12) μ: ミュー	(13) ν: ニュー	(14) ξ, Ξ: クシー	(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ	(17) ρ: ロー	(18) σ, Σ: シグマ	(19) τ: タウ	(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ	(22) χ: カイ	(23) ψ, Ψ: プサイ	(24) ω, Ω: オメガ	

その他

(1) $x \in X$ と書いたら,「x は集合 X に属する」すなわち「x は X の元 」という意味.

(2) 「$\cdots$をみたす X の元全体の集合」を $\{x \in X \mid (\ x$ に関する条件$)\}$ の形で表す．たとえば「$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ 」

(3) $X \subset Y$ と書いたら,「集合 X は集合 Y に含まれる」という意味.

(4) $A := B$ と書いたら A を B で定義する，という意味．たとえば $e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(5) （文章 1）$:\Longleftrightarrow$ (文章 2) と書いたら,（文章 1）の意味は（文章 2）であることと定義する，という意味．たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$.」

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数列の収束と実数の連続性の公理

作成日： April 23, 2011 Version： 1.2

講義 (4/16) の補足

- 数列 $\{a_n\}$ が**下に有界** $:\Longleftrightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ a_n > M.$
- 数列 $\{a_n\}$ が**有界** $:\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}$ が上に有界かつ下に有界
- 実数の連続性の公理は「単調減少かつ下に有界な数列は収束する」といっても同じこと．

演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

教科書巻末の略解は見てよいので，自分なりに「完全な解答」を作成せよ．

レポート問題 1-1. 教科書 p9 問題 1.1 の 1. を解け．

レポート問題 1-2. 教科書 p9 問題 1.1 の 2. を解け.（「有界」については上の補足を参照.）

レポート問題 1-3. 教科書 p9 問題 1.1 の 3. を解け．

レポート問題 1-4*. 次の相加相乗平均の不等式を証明しよう：

> $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を正の実数とするとき，
> $$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$$
> ただし等号が成り立つのは $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときのみ．

(1) 命題 n :「$b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ かつ $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$ のとき，$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq n$ 」が証明されれば，上の不等式は証明されたことになる．その理由を説明せよ．

(2) 数学的帰納法により命題 n を示そう．$n = 1$ のときは明らかなので，$n = k$ で正しいと仮定して $n = k + 1$ の場合を証明する．まず $b_1 b_2 \cdots b_{k+1} = 1$ と仮定しよう．さらに，$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{k+1}$ と仮定しても一般性を失わない．
さてこのとき，$b_1 \leq 1$ かつ $b_{k+1} \geq 1$ であることを証明せよ．

(3) k 個の正の数 $b_1 b_{k+1}$，b_2，$\ldots$，b_k に命題 k を適用して，命題 $k+1$ が正しいことを証明せよ．

(4) 以上の議論における等号成立条件を確認せよ．

レポート問題 1-5*. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$，$b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ とする．明らかに $a_n < b_n$ であることに注意しよう．

(1) 相加相乗平均の不等式を用いて，$a_{n+1}/a_n > 1$ すなわち a_n は単調増加であることを示せ．

(2) 同様にして b_n は単調減少であることを示せ．

(3) $|b_n - a_n| \leq 4/n \to 0$ $(n \to \infty)$ を示せ．

(4) 以上のことから，数列 $\{a_n\}$ と 数列 $\{b_n\}$ は同じ極限値に収束することを示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

級数の収束と指数関数の定義

作成日： May 7, 2012　Version：1.1

講義 (4/23) のまとめと補足

定義． 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束 $:\Longleftrightarrow$ 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束 $\Longleftrightarrow$ 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が上に有界

定理 2-1． 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束 $\Longrightarrow$ 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束．

注意． 上の定理の逆は成立しない．すなわち，「級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するが，絶対収束しない」例が存在する．たとえば $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2$ だが，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty$（発散）．

まめちしき． 一般に $1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots$ は $p\le 1$ のとき発散，$p>1$ のとき収束する．

定理 2-2（指数関数の定義）． 任意の実数 $x\in\mathbb{R}$ にたいし，$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$ は収束する．これを e^x もしくは $\exp(x)$ で表し，**指数関数**と呼ぶ．

たとえば，$e^{\sqrt{2}}:=1+\dfrac{\sqrt{2}}{1!}+\dfrac{(\sqrt{2})^2}{2!}+\dfrac{(\sqrt{2})^3}{3!}+\cdots=4.1132503787829\ldots$

定理 2-3． 任意の実数 $x\in\mathbb{R}$ にたいし，$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ が成り立つ．とくに $x=1$ のとき，

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

e の近似計算． $e=2.71828182845904523 54\cdots$ を数値的に求めるとき，近似値として $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を計算する方法と，$b_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ を計算する方法が考えられる．いくつかの n について有効数字 10 桁で計算させてみよう：

n	a_n	b_n
1	2.000000000	2.000000000
2	2.250000000	2.500000000
3	2.370370370	2.666666667
4	2.441406250	2.708333333
5	2.488320000	2.716666667
6	2.521626372	2.718055556
7	2.546499697	2.718253968
8	2.565784514	2.718278770
9	2.581174792	2.718281526

n	a_n	b_n
10	2.593742460	2.718281801
20	2.653297705	2.718281828
30	2.674318776	2.718281828
40	2.685063838	2.718281828
50	2.691588029	2.718281828
60	2.695970139	2.718281828
70	2.699116371	2.718281828
80	2.701484941	2.718281828
90	2.703332461	2.718281828

この表からわかるように，収束のスピードには大きな差があり，実用的なのは b_n のみだとわかる．たとえば $n=100$ のとき，真の値との誤差 $|e-b_{100}|$ は理論上 3×10^{-160} 以下である．指数関数 e^x の数値計算においても，級数の有限和で近似するのが一番早い．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定理 2-4（指数関数の性質）． すべての実数 $x, y \in \mathbb{R}$ にたいし，$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$．
とくに $y = -x$ とすれば，$e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1 \iff e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$．

演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

レポート問題 2-1． 上の**「まめちしき」**を利用して，次の級数が収束することを証明せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ 　(Hint: $p = 3/2$.)　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n(n^2+2)}$ 　(Hint: $\sqrt{n+1} \le \sqrt{2n}$.)

レポート問題 2-2*． 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ にたいし，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ は収束することを示せ．(じつはこの関数は $\sin x$ に収束する．)

レポート問題 2-3*． **定理 2-3** を $x = 1$ の場合に証明しよう．$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$，$b_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ とおく．$a_n \to e$ $(n \to \infty)$ であるから（e の定義そのもの），$|b_n - a_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ を証明すれば十分である．

(1) $\displaystyle b_n - a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \underline{\left\{1 - \left(1 - \frac{0}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right\}}$ を示せ．

(2) 下線部を c_k と置くとき，$\displaystyle c_{k+1} = \frac{k}{n} + c_k \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) \le \frac{k}{n} + c_k$ を示せ．

(3) $k \ge 2$ のとき，$\displaystyle c_k \le \frac{k(k-1)}{2n}$ を示せ．

(4) $\displaystyle b_n - a_n \le \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} \le \frac{3}{2n}$ を示せ．

$b_n \ge a_n$ より $|b_n - a_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ を得る．

レポート問題 2-4*． **定理 2-3** を一般の実数 x について証明せよ．

レポート問題 2-5*． **定理 2-4** を証明せよ．ただし，次の定理を用いてよい：[1]

定理． 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がそれぞれ絶対収束し，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \beta$ であるとき，数列 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ によって定まる級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ も絶対収束し，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \alpha\beta$．すなわち $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$．

（Hint: $a_n := x^n/n!$，$b_n := y^n/n!$ を代入し，c_n に二項定理を適用．）

[1] この定理の証明は，たとえば杉浦光夫著『解析入門 I』p48 を見よ．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

指数・対数・（逆）三角関数

作成日：May 14, 2012　Version：1.1

レポート問題提出時の注意

- 初回に配ったシラバスに「レポートの提出様式」が書いてありますので，必ずそれにしたがってください．とくに，**A4 用紙を用いる，表紙をつける，左上をホチキスで留める**，この 3 点は守ってください．
- 5 月 28 日配布分までのレポート問題は，締め切りを **6 月 4 日（中間試験の日）**とします．
- レポート問題は 1 問ごとに加点しますので，解けた問題だけ提出してもかまいません．
- 協力者が同一クラスにいる場合は，かならずその人の名前を記入してください．それによって減点されることは一切ありません．逆に，酷似する答案がふたつ以上あり，協力者がいずれにも記入されていない場合，丸写し答案とみなして減点する場合があります．

アンケートの結果

全体の回答数は 65 名でした．集計結果と私からのコメントをまとめておきます．

- 教科書の難度は
  ………適切 52 名・難しすぎる 13 名
  ⇒ 長年使われている，スタンダードなレベルの教科書です．がんばりましょう．
- 講義で明解な説明や工夫がなされているか？
  ………なされている 49 名・どちらともいえない 14 名・なされていない 2 名
  ⇒ 上で「難しい」と答えた人はここでもポジティブでない意見を答える傾向がありました．ただ，指数関数の定義あたりは若干マニアックだった気もしますし，今後は具体例の計算量を多めにして，論理的な難易度をすこし下げてみます．
- 講義で質問しやすい雰囲気づくりがなされているか？
  ………なされている 29 名・どちらともいえない 31 名・なされていない 5 名
  ⇒ 大きな教室なので講義中に質問するのはハードルが高いかもしれません．講義直後や直前に，ぜひ質問してみてください．みなさんから質問があるのを，楽しみに待っています．オフィスアワー（月曜の昼休み）も歓迎です．
- この講義が将来自分の専門に役立つか？
  ………そう思う 39 名・分からない 25 名・そう思わない 1 名
  ⇒ いまは半分高校の復習ですが，今後の内容は絶対に役に立ちます．
- この講義の内容に興味をもてるか？
  ………そう思う 43 名・分からない 18 名・そう思わないい 4 名
  ⇒全員に興味をもってもらえる講義をめざします☆
- 板書のスピードは………適当である 48 名・速すぎる 17 名
  ⇒一定の内容を教えるノルマがあるので，板書をこれ以上減らすのは（「教科書の読み上げ」でもしない限り）難しいかもしれません．しかし，できるだけの努力はしてみます．
- 板書の文字は………見やすい 62 名・見にくい 3 名
  ⇒大きくゆっくり，を目指します．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

- 講義内容のレベルは………適当である 47.5 名・難しすぎすぎる 17.5 名
  ⇒これからは論証よりも計算が増えるので，少し楽になるかもしれませんよ．
- 講義のスピードは………適当である 48 名・速すぎる 17 名
  ⇒今後これ以上速くなることは無いでしょう．
- その他，自由記載欄には：
  ・証明が難しい・教科書の問を解説してほしい・レポート問題が難しい（2 名）・教科書を使ってほしい・色チョークをもっと使ってほしい・マイクを使ってほしい
  などがありました．できるだけ対応します……が，こちらにも長年培ってきたスタイルやポリシーがあるのですべてにお応えすることは多分できません．あしからず...

講義 (5/7) の補足: 用語や記号に関する注意．

- 実数の部分集合で $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) の形のものを**区間**とよぶ．とくに，$\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$．
- $I, J \subset \mathbb{R}$ を区間とする．関数 $f(x)$ がすべての $x\in I$ で定義されており，かつ $f(x)\in J$ であるとき，$f: I\to J$ と表し，I を**定義域**，J の部分集合 $f(I)=\{f(x)\in J \mid x\in I\}$ を**値域**という．
- 一般に関数は複数の区間の和集合で定義できる．たとえば $f(x)=1/x$ は最大でも実数全体から 0 を除いた $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ で定義される．[1] この場合はこの集合を定義域という．

演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

レポート問題 3-1. $y=\mathrm{Sin}^{-1}x$，$y=\mathrm{Cos}^{-1}x$，$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ のグラフをできるだけ正確に手描きせよ.（方法は自分なりに工夫せよ．数値の計算にパソコンや関数電卓を用いてもかまわないが，プリントアウトはダメ.）

レポート問題 3-2. 関数 $f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}(\sin x)$ のグラフを描け.（Sin^{-1} の定義域に十分注意せよ.）

レポート問題 3-3. 教科書 p.19 問題 1.3 の 1. を解け.

レポート問題 3-4. 教科書 p.19 問題 1.3 の 2. を解け.（p.17 の例題 1.3.1 を参考にせよ．）

レポート問題 3-5. 次の関数の値域をもとめよ．また，逆関数が存在すればそのグラフの概形を描け.

(1) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$　　(2) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x$

(3) $f:[\pi/2,3\pi/2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(x)$　　(4) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\exp(x^2)$

レポート問題 3-6*. 教科書 p.19 問題 1.3 の 4. を解け.

レポート問題 3-7*. I，$J\subset(-\infty,\infty)$ を区間とする．関数 $f:I\to J$ および $g:J\to\mathbb{R}$ が単調増加であるとき，$h(x):=g(f(x))$ で定まる関数 $h:I\to\mathbb{R}$ も単調増加であることを証明せよ.

[1] これは $\mathbb{R}-\{0\}$ とも表す.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

関数の極限と連続性

作成日：May 21, 2012　Version : 1.1

レポートに関するいくつかのコメント

- レポートやテストで「単増」は不可.「単調増加」と略さずに.
- 配布したプリント左上の表題に「複素関数論」と書いてあったことがありましたが，もちろん「微分積分学 I」のまちがいです．この授業では複素数やりません．ごめんなさい．
- **レポート問題 1-1（教科書 p9，問題 1.1 の 1 の）(1) について．** これを解くのに「$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \to e\ (m \to -\infty)$」という事実を使ってる人が見受けられます．この事実（高校で習ったのかもしれません）を証明するのは，問題 (1) を解くのと同じぐらい難しい問題です．これを使わずに，e の定義式「$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e\ (n \to \infty)$」だけで問題 (1) を解くようがんばってみてください．教科書 18 ページの定理 1.3.2 が参考になるでしょう．
- **レポート問題 1-1（教科書 p9，問題 1.1 の 2）について．** $\{a_n\}$ が単調増加であることを示す部分は問題ないのですが，$\{a_n\}$ が上に有界であることを示す前に，すなわち極限の存在が確定していない段階で,「$\{a_n\}$ の極限を α とおくと，$\alpha = \sqrt{\alpha+1} \iff \alpha = (1+\sqrt{5})/2$」といった議論をしている人がいます．これはいけません.「この人は極限が存在するための条件を理解してないな」という印象を与えてしまいます．たしかに授業でヒントとして

  (ア) $\{a_n\}$ の極限 α が**存在するならば**，$\alpha = \sqrt{\alpha+1} \iff \alpha = (1+\sqrt{5})/2$ を満たすはず

  (イ) $\{a_n\}$ は単調増加なので，$\alpha \geq a_n$ を満たすはず

  よって数学的帰納法で $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \geq a_n$ を示すべし，と述べました．しかしこの (ア) と (イ) の部分はあくまで**推論**です．したがって，解答に書く必要はないのです．わたしだったら，いきなり「$\alpha = \sqrt{\alpha+1}$ を満たす $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ について，$\alpha \geq a_n$ がすべての n で成り立つことを示す.」と書いて帰納法をスタートします．この点に関しては甘めに採点してきましたが．中間試験ではそうはいかないので，ぜひとも注意してください．
- **レポート問題 2-1，2-2 について．** これも細かいことですが，数学的・論理的センスを鍛える訓練だと思ってつきあってください．

  いま自然数 n にたいし $n < 2n$ は明らかですから，

  $$1+2+3+\cdots < 2+4+6+\cdots$$

  と書いた人がいたとします．みなさんはこれに，違和感を感じませんか？左辺も右辺も，あきらかに発散しています．だからといって $\infty < \infty$ と書き直すのもはばかられます．

  そもそも**不等号で大小関係を比較してよいのは，原則として実数のみ**です．[1] 上の不等式では，左辺は $\lim_{n\to\infty}(1+2+\cdots+n)$，右辺は $\lim_{n\to\infty}(2+4+\cdots+2n)$ であり，いずれも極限値が実数として確定しません．不等式で比較すること自体がおかしいのです．日本の自動販売機に，見知らぬ外国のコインを 2 枚つっこむようなものです．

  同じことを（授業でやった）$\dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^2}$ で考えて見ましょう．

  $$\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots < \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

[1] ∞ は便宜的に数字のように扱うこともありますが，具体的な量をあつかう計算では不等号とともに使うことはできません．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

と書いていいでしょうか？結論としては，この式は $1.0766\ldots < \pi^2/6 = 1.64493\ldots$ という具体的な値に関する不等式と同値になります．すなわち，両辺はそれぞれ収束し極限が存在するので，値を比較できるのです．そういう意味では，間違いはありません．

ではもし，これが「級数 $\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots$ は収束するか判定せよ」という問題だったらどうでしょうか？この級数は発散する可能性がある「見知らぬコイン」です．(錆びて真っ黒のコイン．どの国のコインかまだわかっていない.）たとえ $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ が収束すると分かっていたとしても，みなさんが不等式の左辺に

$$(*):\qquad \frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

と書いた時点で，不等式のルールを破ったことになります．実数かどうかわかっていないものを，不等式に入れてはいけないのです.「日本のコイン」なのかわからない正体不明のものを，無自覚のまま自販機に入れてしまっているのです．

われわれ数学の専門家は，このようなルール違反にとても敏感です．そういうルールをきっちりと守らないと，数学の美徳ともいえる「科学全般を支えられるだけの堅牢さ」が維持できないことを経験的に知っているからです．

ただし現実には，$(*)$ のような不等式を収束性を判定する根拠として書くことも多々あります．[2]したがって，みなさんのレポートの中にこのような不等式があっても，減点の対象とはしていません．

さてもし，上の問題を正確に議論したければ，次のようにするのをお勧めします：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束し極限 $\pi^2/6$ をもつ事実を使ってよい場合，$S_n := \dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+1}$ とおくと，

$$S_n \le \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{\pi^2}{6}.$$

よって S_n は上に有界．S_n は明らかに単調増加なので，収束する． ■

この議論には「日本のコイン」と分かっているものだけが使われていることに注意してください．

講義 (5/14) のポイント．

- **重要な極限：** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$
- **連続性の定義．** 関数 $y=f(x)$ が**連続関数**であるとは，f が定義されているすべての $x=a$ で，$f(x)\to f(a)\ \ (x\to a)$ がなりたつときをいう．
- **連続関数を作るには：** 連続関数の和・差・積・商（四則），合成，逆関数は定義可能な範囲ですべて連続．

連続性：微妙な例１． $f:[-1,1]\to[0,1]$ を $f(0):=0$，$x\neq 0$ のとき $f(x):=\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{|x|}\right]}$ と定義する．ただし，$[y]$ は y を超えない最大の整数．このとき，f は $1/x$ がちょうど整数でないかぎり連続．とくに $x=0$ でも連続である！

[2] 式自体は間違っていないし，証明のアイディアは十分に伝わるので．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

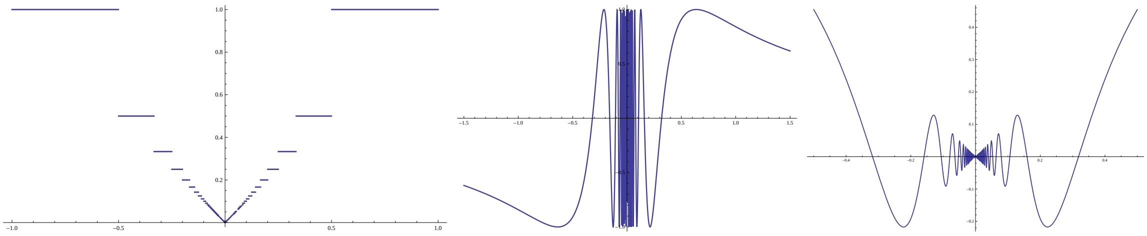


図 1: 左から，f，g，h のグラフ．

連続性：微妙な例２． $g:\mathbb{R}\to[0,1]$ を $g(0):=0$，$x\neq 0$ のとき $g(x):=\sin\dfrac{1}{x}$ で定める．このとき，g は $x\neq 0$ のとき連続だが，$x=0$ で連続ではない．

一方，$h(x):=xg(x)=x\sin(1/x)$ とすると，$x=0$ でも連続となる．

演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

教科書巻末の略解を参考にしてよいので，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を作成せよ．

レポート問題 4-1． 教科書 p.14 問題 1.2 の 1. を解け．

レポート問題 4-2． 教科書 p.14 問題 1.2 の 2. を解け．

レポート問題 4-3． 教科書 p.14 問題 1.2 の 3. を解け．

レポート問題 4-4． 教科書 p.14 問題 1.2 の 4. を解け．

レポート問題 4-5*． $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=0$ を示そう．もちろん教科書 p18 の例題 1.3.2 にも解答があるが，われわれの指数関数の定義 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$ を用いて直接証明しよう．

(1) まず $0<x<1$ と仮定する．$a_n=\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ とするとき，$a_n\leq x^2$ を示せ．(Hint: $1/n!\leq 1/2^{n-1}$.)

(2) e^x の定義より，$e^x-(1+x)=\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$ である．よって $0<x<1$ のとき，$|e^x-(1+x)|\leq x^2$ がなりたつ．このことから，$\lim_{x\to+0}\dfrac{e^x-1}{x}=0$ を示せ．

(3) つぎに $x<0$ の場合を考える．$y=-x$ とおくことで，$\lim_{x\to-0}\dfrac{e^x-1}{x}=0$ を示せ．ただし指数関数 e^x が連続であり，$e^x\to 1$ $(x\to 0)$ となる事実は用いてよい．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

微分可能性

作成日： May 28, 2012　Version： 1.1

二分法と中間値の定理

連続関数 $y = f(x)$ にたいし，方程式 $f(x) = 0$ の解 α を数値的に求めることを考えよう．この手の方程式の数値計算でもっとも初歩的な方法が**二分法**と呼ばれるつぎのアルゴリズムである：

(1) $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ となるペア a_1, b_1 を見つける．必要であれば $f(x)$ のかわりに $-f(x)$ を考えることで，$a_1 < b_1$ と仮定してよい．

(2) ペア $a_n < b_n$ が与えられているとき，

- $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (\frac{a_n+b_n}{2}, b_n)$.
- $f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (a_n, \frac{a_n+b_n}{2})$.
- $f(\frac{a_n+b_n}{2}) = 0$ ならば $\alpha := \frac{a_n+b_n}{2}$，計算終了．

この (2) を繰り返すと，$\{a_n\}$ は単調増加かつ $a_n < b_1$ （上に有界），$\{b_n\}$ は単調減少かつ $a_1 < b_n$ （下に有界）より，それぞれある実数に収束する．$\alpha = \lim a_n$ とすると，$|b_n - a_n| = |b_1 - a_1|/2^{n-1} \to 0$ より $b_n = (b_n - a_n) + a_n \to 0 + \alpha = \alpha$ $(n \to \infty)$．f は連続であったから，$f(\alpha) = \lim f(a_n) \le 0$ かつ $f(\alpha) = \lim f(b_n) \ge 0$．よって $f(\alpha) = 0$ となる．したがって，十分大きな n にたいし a_n もしくは b_n を α の近似値として用いることができる．

具体例（$\sqrt{2}$ の計算）． 実際に $f(x) = x^2 - 2$, $(a_1, b_1) = (1.0, 2.0)$ として計算したのが下の表である．a_n，b_n と真の値 $\sqrt{2}$ との誤差は $1/2^{n-1}$ 以下である．

n	a_n	b_n
1	1	2.
2	1	1.5
3	1.25	1.5
4	1.375	1.5
5	1.375	1.4375
6	1.40625	1.4375
7	1.40625	1.42188
8	1.41406	1.42188

n	a_n	b_n
9	1.41406	1.41797
10	1.41406	1.41602
11	1.41406	1.41504
12	1.41406	1.41455
13	1.41406	1.41431
14	1.41418	1.41431
15	1.41418	1.41425
16	1.41418	1.41422

n	a_n	b_n
17	1.4142	1.41422
18	1.41421	1.41422
19	1.41421	1.41422
20	1.41421	1.41422
21	1.41421	1.41421
22	1.41421	1.41421
23	1.41421	1.41421
24	1.41421	1.41421

理論面での応用． 二分法は方程式の数値解法としてはあまり有用なほうではない．そのうち紹介するニュートン法など，もっと優秀なアルゴリズムが存在するからである．しかし，二分法はつぎの**中間値の定理**の実質的な証明を与えるという点で，理論面での存在価値は大きい：

> **中間値の定理．** 連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が $f(a) \ne f(b)$ を満たすとき，任意の $f(a)$ と $f(b)$ の間の実数 ℓ にたいし，ある $c \in [a, b]$ が存在して，$f(c) = \ell$ を満たす．

演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

> **今回までのレポート問題（番号が 1.x 〜6.x）の締め切りは来週 6 月 4 日です．**

教科書巻末の略解を参考にしてよいので，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

レポート問題 5-1. 教科書 p.14 問題 1.2 の 5. を解け.

レポート問題 5-2. 教科書 p.14 問題 1.2 の 6. を解け.

レポート問題 5-3*. 二分法のアルゴリズムを参考にして，中間値の定理を証明せよ.（Hint. $g(x) = f(x) - \ell$ に二分法を適用.）

レポート問題 5-4*（前回のプリント「連続性：微妙な例１」）. $f : [-1,1] \to [0,1]$ を $f(0) := 0$, $x \neq 0$ のとき $f(x) := \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{|x|}\right]}$ と定義する．ただし，$[y]$ は y を超えない最大の整数である．このとき，f は $1/x$ がちょうど整数でない限り連続であることを示せ．とくに $x = 0$ でも連続であることも証明すること.

中間試験対策：追加の演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

レポート問題 6-1. 教科書 p.31 問題 2.1 の 1. (1)〜(15) を解け.

レポート問題 6-2. 関数の定義域に注意しつつ，以下を証明せよ．ただし $a > 0$ とする．：

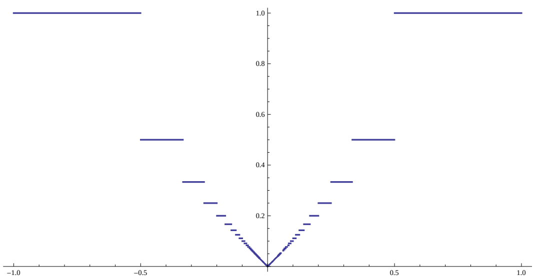
(1) $\{\tan x\}' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$　　(2) $\{a^x\}' = a^x \log a$

(3) $\{\mathrm{Cos}^{-1} x\}' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(4) $\{\mathrm{Tan}^{-1} x\}' = \dfrac{1}{1+x^2}$

レポート問題 6-3. 教科書 p.31 問題 2.1 の 2. を解け.

レポート問題 6-4*. 教科書 p.31 問題 2.1 の 4. を解け.

レポート問題 6-5*（前回のプリント「連続性：微妙な例１」）. 上のレポート問題 5-4 の関数 $f : [-1,1] \to [0,1]$ を用いて，$g(x) = \{f(x)\}^2$ と定義する．このとき，f は $1/x$ がちょうど整数でない限り微分可能であることを示せ．とくに $x = 0$ でも微分可能であることも証明すること.



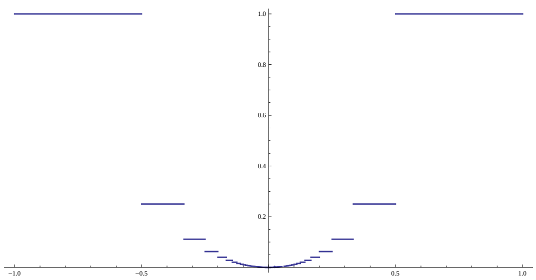


図 1: f （左）と g （右）のグラフ.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

微分の計算

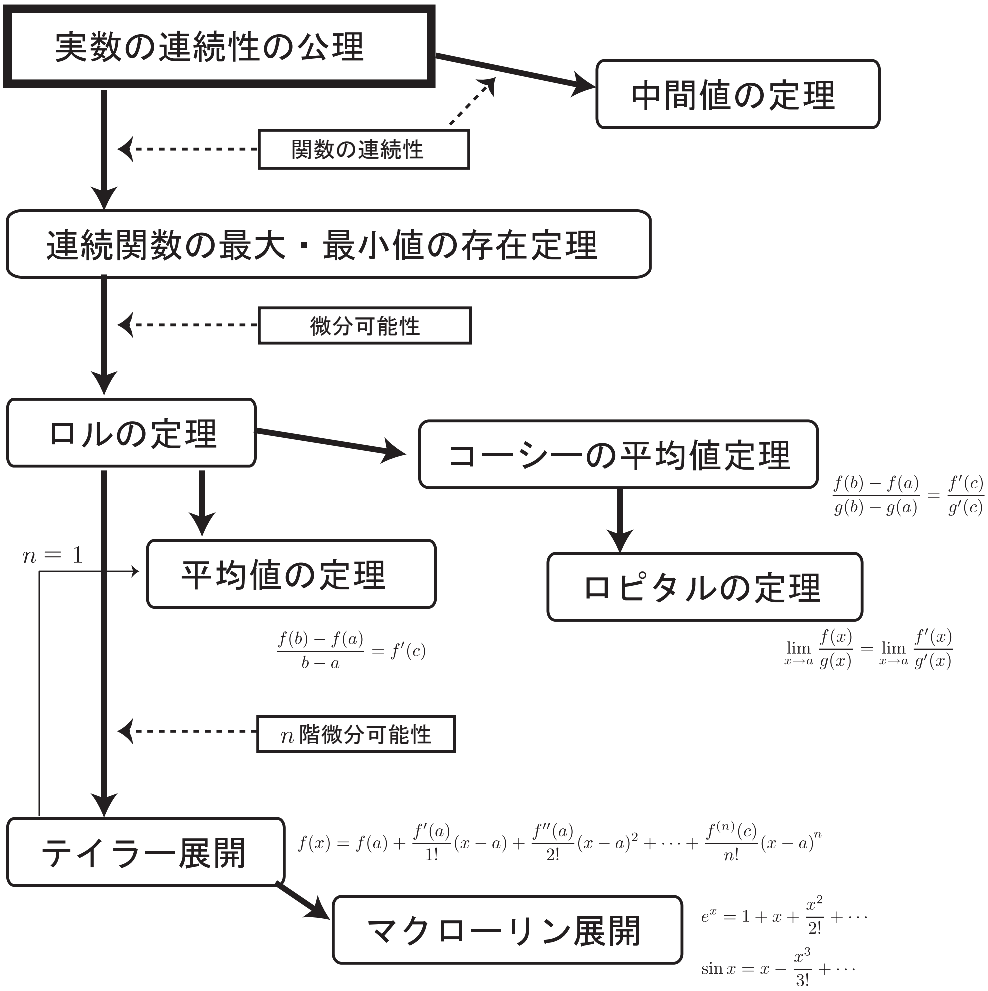
作成日：June 11, 2012　Version：1.1

接線の方程式と関数の 1 次近似

微分係数の定義式から，$x \approx a$ のとき $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \approx f'(a)$ を得る．これを $f(x) \approx f'(a)(x-a)+f(a)$ と変形すれば，「x が a に十分近いとき，関数は接線の方程式で近似される」ということを示唆している．ちょっとだけ具体例を計算しよう：

例. $\sin 47^\circ = 0.7313537\cdots$ を近似計算してみよう．$47^\circ = 45^\circ + 2^\circ = \pi/4 + \pi/90$ より，$f(x) = \sin x$ の $x = \pi/4$ における接線で近似すれば $f(x) \approx f'(\pi/4)(x-\pi/4) + f(\pi/4) = \cos(\pi/4)(x-\pi/4)+\sin(\pi/4)$. これに $x = 47^\circ = \pi/4+\pi/90$ を代入すれば，$\sin 47^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{90}+1) \approx 0.73179\cdots$. この値は真の値と比べて約 0.06% ほど誤差がある．すなわち，10m にたいして 6mm, 1 万円にたいして 6 円程度の誤差である．このぐらいの精度で十分，という場面も多いだろう．

テイラー展開への道のり



今週の演習・レポート問題はお休みです．

平均値の定理

作成日： June 18, 2012　Version： 1.1

ロピタルの定理に関する注意

ロピタルの定理． 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $x=a$ の近くで定義されており，微分可能とする．さらに，$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$；かつ $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するとき，

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ちなみにこの定理を証明したのは（ヨハン・）ベルヌーイ (Johann Bernoulli, 1667-1748) であったが，その教え子にあたるロピタル（Guillaume de l'Hôpital, 1661-1704）が自著に載せたことで，「ロピタルの定理」として定着してしまった．

バリエーション． この定理は $\lim_{x\to a} f(x) = \pm \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ の場合でも成り立つ．ただし，複号は自由に選んで，いずれかが成り立てばよい．さらに，定理中すべての $\lim_{x\to a}$ を $\lim_{x\to\infty}$，$\lim_{x\to -\infty}$，$\lim_{x\to a+0}$，$\lim_{x\to a-0}$ のいずれかに置き換えてもよい．

証明のスケッチ（教科書参照）． まず，次の定理を用いる：

コーシーの平均値定理． 関数 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続かつ (a,b) で微分可能とする．さらに $g(a) \neq g(b)$ かつ (a,b) 上で $g'(x) \neq 0$ が成り立てば,，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

を満たす $c \in (a,b)$ が（少なくともひとつ）存在する．

この定理自体は関数 $F(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$ のロルの定理を適用することで得られる．

ではロピタルの定理のセッティングに戻ろう．いま $f(a) = g(a) = 0$ とおけば，関数 f, g は $x=a$ においても連続と仮定してよい．また，$g(x)$ は $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するという仮定から，$x=a$ のまわりで定数関数 $g(x) \equiv 0$ となることはできない．このことから，a に十分近い x についてコーシーの平均値定理が適用できて，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が x と a の間に存在する．$x \to a$ のとき $c \to a$ であるから，上の式の極限をとれば定理の式を得る． ■

ロピタルの定理に関する警告． $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x$ にたいして $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ を計算したいとしよう．ロピタルの定理を適用すると，$\lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1+\cos x}{1}$ となってしまい極限が存在しないが，すなおに

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

とやれば計算ができる．

次に，$f(x)=\cos x$, $g(x)=1+x$ にたいして $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を計算したいとしよう．ロピタルの定理を適用すると，$\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{1}=0$ だが，すなおに計算すると

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+x}=1\neq\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

このふたつの例について，どこがおかしいか気がつかないようであれば，ロピタルの定理は使わないほうがよい．変数変換やテイラー展開によって，多くの極限は問題なく求められるからである．

演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

教科書巻末の略解を参考にしてよいので，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません．）

レポート問題 7-1.　教科書 p.39．問題 2.2 の 1.(1) と (3) を解け．

レポート問題 7-2.　教科書 p.39．問題 2.2 の 2. を解け．

レポート問題 7-3.　教科書 p.39．問題 2.2 の 3. を解け．

レポート問題 7-4.　教科書 p.39．問題 2.2 の 4.(2)(4)(6)(8)(10)（偶数番号の問題）を解け．ただし，ロピタルの定理を用いる際には，ロピタルの定理が適用可能な条件を満たしていることを説明すること．

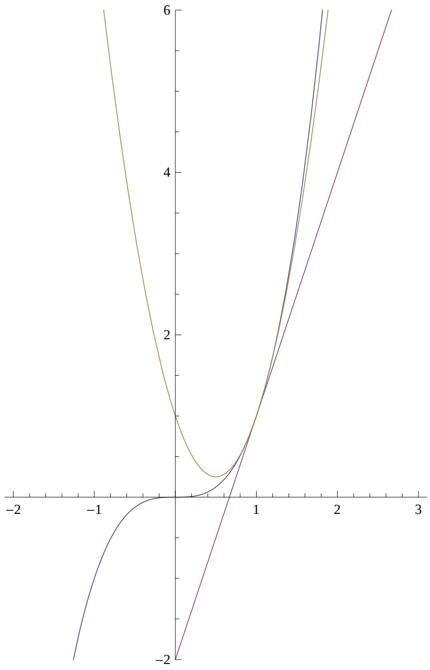


図 1: オマケ（$f(x)=x^3$ のテイラー多項式による近似.）.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

テイラー展開

作成日：June 25, 2012　Version：1.1

お知らせ. 中間試験の採点がおわりました．点数を知りたい人は，下記の要領で私にメールを書いてください．

- 件名は「微分積分学中間」，本文に名前と学籍番号を記入する．
- gmail, yahoo などの webmail は不可．携帯もあまりオススメしません．できるだけ全学のメール（mbox.nagoya-u.ac.jp で終わるアドレス）を用いること．

テイラー展開

テイラー展開. 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は n 回微分可能であるとする．$a \in I$ を定数とするとき，すべての $x \in I$ にたいして

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

を満たす（正体不明の） c が a と x の間に存在する．

上の式を $f(x)$ の $x = a$ における（有限）**テイラー展開**とよぶ．とくに $a = 0$ のとき,（有限）**マクローリン展開**とも呼ばれる．

演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

教科書巻末の略解を参考にしてよいので，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません.）

レポート問題 8-1. 教科書 p.46．問題 2.3 の 1.(1)(3)(4)(6) を解け．

レポート問題 8-2. 教科書 p.53．問題 2.4 の 1. を解け．

レポート問題 8-3. 教科書 p.53．問題 2.4 の 2. を解け．

レポート問題 8-4*. 教科書 p.53．問題 2.4 の 6. を解け．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

テイラー展開の応用

作成日： July 2, 2012　Version : 1.1

漸近展開

漸近展開． $x = a$ のまわりで定義された C^n 級関数 f について，$x \to a$ のとき以下の式がなりたつ：

$$f(x) \ = \ f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

上の式を $f(x)$ の $x = a$ における**漸近展開** (asymptotic expansion) とよぶ.

演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

教科書巻末の略解を参考にしてよいので，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません.）

レポート問題 9-1.　教科書 p.53．問題 2.4 の 3. を解け.

レポート問題 9-2.　教科書 p.53．問題 2.4 の 4. を解け.

レポート問題 9-3*.　教科書 p.53．問題 2.4 の 7. を解け.

レポート問題 9-4*.　テイラー展開を用いて，任意の $\alpha > 0$ にたいし $\dfrac{x^\alpha}{e^x} \to 0 \ (x \to \infty)$ を示せ.

補足 1：ランダウの記号（大きな O）

$x = a$ のまわりで定義された関数 $f(x), g(x)$ にたいし,『ある定数 $M > 0$ が存在して，$x \approx a$ のとき[1] $|f(x)| \le M|g(x)|$ が成り立つ』とき,

$$f(x) \ = \ O(g(x)) \quad (x \to a)$$

と表す．この O も**ランダウの記号**（ラージ･オー）と呼ばれる．たとえば，$\sin x = x - x^3/6 + o(x^3) = x + O(x^3)$ が成り立つ.

補足：ニュートン法

与えられた関数 $y = f(x)$ にたいし，$f(\alpha) = 0$ となる α を数値的に求めたいとしよう．すなわち，方程式 $f(x) = 0$ の解を数値的に，できれば任意の精度で求めたい.

たとえば，以前に紹介した「二分法」(区間縮小法）は典型的なアルゴリズムである．ここではもっと高速に解の近似値を得られる「ニュートン法」を紹介しよう.

ニュートン法のアルゴリズム.

(1) 関数のグラフ $y = f(x)$ を描き，グラフの x 軸との交点を見つけて解の位置に見当をつける.

(2) 解 α （まだ正確な値はわからない）から**ある程度近い数** x_0 を選ぶ.

[1] すなわち，適当な $\delta > 0$ が存在して，$|x - a| \le \delta$ のとき.

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

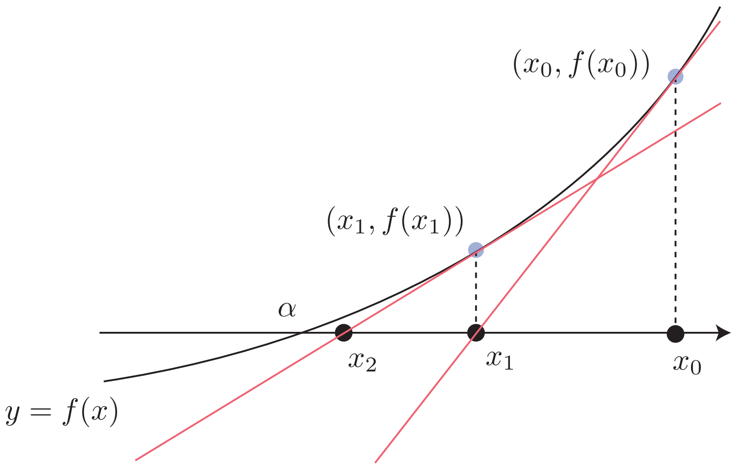
(3) $n \geq 0$ にたいし，グラフ上の点 $(x_n, f(x_n))$ から接線を引き，x 軸との交点を $(x_{n+1}, 0)$ とする．これを繰り返す．

定理（ニュートン法.） 上のような方法で与えられる数列 x_n $(n = 0, 1, \ldots)$ は，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

を満たす．さらに，方程式 $f(x) = 0$ の解 α にたいし，ある $\delta = \delta(f, \alpha) > 0$ が存在して，初期値 x_0 が $|x_0 - \alpha| \leq \delta$ を満たせば x_n は α に収束する．

教科書の定理 2.3.3 も参照せよ．



具体例

ここでは具体例として，方程式 $f(x) = x^2 - 2 = 0$ に対し上記のアルゴリズムを適用してみよう．たとえば $x_0 = 2$ としてみる．公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

より，x_6 までを数値的に求めたものが以下の表である．

ステップ	x_n	x_n と $\sqrt{2}$ の誤差
0	2.0000000000000000000	0.586
1	1.5000000000000000000	0.0858
2	1.4166666666666666667	0.00245
3	1.4142156862745098039	2.12×10^{-6}
4	1.4142135623746899106	1.59×10^{-12}
5	1.4142135623730950488	8.99×10^{-25}
6	1.4142135623730950488	2.86×10^{-49}

このように，1 ステップごとに有効数字が 2 倍程度増える非常に早いアルゴリズムであることが分かる．一般に，α が重根でなければ $|x_{n+1} - \alpha| = O(|x_n - \alpha|^2)$ となる定数 C が存在することが証明できる．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定積分と不定積分

作成日： July 9, 2012　Version： 1.1

レポート問題は今回が最終回です．締め切りは**7 月 23 日月曜日**とします．30 日の期末試験のときに返却するのでかならず受け取ってください．受け取られなかったレポートに関しては加点しませんので注意してください．

演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

教科書巻末の略解を参考にしてよいので，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません.）

レポート問題 10-1.　教科書 p.61．問題 3.1 の 1. の奇数番号の問題（計 6 問）を解け.

レポート問題 10-2.　教科書 p.61．問題 3.1 の 2. を解け.

レポート問題 10-3.　教科書 p.61．問題 3.1 の 3. を解け.

レポート問題 10-4.　教科書 p.66．問題 3.2 の 1.〜3．の奇数番号の問題（計 8 問）を解け.

試験範囲について． レポート問題にはしませんが教科書の下記の問題も一応試験範囲とします．期末試験の積分問題は計算問題が中心です．いまのうちから，早めに練習をしておきましょう．

- 教科書 p.66．問題 3.2 の 4．および 6.
- 教科書 p.72．問題 3.3 の 1.
- 教科書 p.78．問題 3.4 の 1.〜 3.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

自宅模擬試験 その 2

作成日： July 23, 2012　Version： 1.1

自宅模擬試験

これまでに授業でやった問題や練習問題をベースにした問題ですので，解答例はつけません．あしからず．

問題 1.　次の関数の与えられた点におけるテイラー展開を，3 次テイラー多項式＋剰余項の形で求めよ．

(1) $x^4 \quad (x = 1)$　　(2) $e^x \quad (x = 0)$　　(3) $x \sin x \quad (x = \pi/2)$

問題 2.　次の極限を漸近展開（剰余項に当たる部分がランダウ記号 $o((x-a)^n)$ になったバージョンのテイラー展開）を用いて求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log x - x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\sin x - x\cos x}{x^2}$

問題 3.　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^4+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Sin}^{-1}\, x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$

（Hint: (1) は置換積分，(2) は部分積分，(3) は $\tan(x/2)$ を使って置換.）

問題 4.　定積分を用いて，半径 r の円周の長さが $2\pi r$ であることを証明せよ．

問題 5.　優関数を用いて，次の広義積分が存在することを証明せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin x\,dx$$

(Hint: $|x| > 1$ のとき $x^2 > |x|$．)