$\boxed{1}$ つぎの積分の値を計算せよ．

(1) $D=\{(x,y)\mid 0\le x+2y\le 2,\ 0\le 2x-y\le 4\}$ にたいし，

$$I_1=\iint_D (x+2y)e^{2x-y}\,dxdy.$$

(2)

$$I_2=\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 \frac{3}{1+x^3}\,dxdy.$$

解答例:(1) 変数変換 $\begin{cases} u=x+2y \\ v=2x-y \end{cases} \iff \begin{cases} x=(u+2v)/5 \\ y=(2u-v)/5 \end{cases}$ により，D と

$$E=\{(u,v)\mid 0\le u\le 2,\ 0\le v\le 4\}$$

が対応する．変換 $(u,v)\mapsto(x,y)$ のヤコビ行列は $\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$ なので，その行列式（ヤコビアン）は $-1/5$ と計算できる．よって積分を変数変換すると，

$$I_1=\iint_E ue^v\left|-\frac{1}{5}\right|dudv=\frac{1}{5}\int_0^2 udu\int_0^4 e^v dv=\cdots_{(略)}=\underline{\frac{2}{5}(e^4-1)}_{//}$$

(2) このままの積分順序では難しいので，積分順序の交換をする．

$$\begin{aligned} I_2&=\int_0^2\left(\frac{3}{1+x^3}\int_0^{x^2}dy\right)dx=\int_0^2\frac{3}{1+x^3}\Big[\ y\ \Big]_0^{x^2}dx\\ &=\int_0^2\frac{3x^2}{1+x^3}dx=\Big[\ \log(1+x^3)\ \Big]_0^2=2\log 3_{//} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1) m を実数とするとき，積分

$$I(m)=\iint_D\frac{1}{(1+x^2+y^2)^m}\,dxdy$$

を求めよ．ただし $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ とする．

(2) $I(m)$ は m の連続関数であることを示せ．

解答例：(1) 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とすると，

$$\begin{aligned} I(m)&=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{1}{(1+r^2)^m}\,r\,dr\\ &=\begin{cases} 2\pi\left[\dfrac{(1+r^2)^{-m+1}}{2(-m+1)}\right]_0^1 & (m\ne 1)\\ 2\pi\left[\dfrac{\log(1+r^2)}{2}\right]_0^1 & (m=1)\end{cases}\\ &=\begin{cases} \dfrac{\pi}{1-m}(2^{1-m}-1) & (m\ne 1)\\ \pi\log 2 & (m=1)\end{cases}. \end{aligned}$$

(2) $m=1$ のとき連続であることを示せば十分である．$m\ne 1$ のとき，

$$\begin{aligned} I(m)&=\frac{\pi}{1-m}(e^{(1-m)\log 2}-1)=\frac{\pi\log 2}{(1-m)\log 2}(e^{(1-m)\log 2}-1)\\ &\to\pi\log 2=I(1)\quad(m\to 1). \end{aligned}$$

よって $m\to 1$ のとき $I(m)\to I(1)$ であり，$m=1$ で連続． //

$\boxed{3}$ $a>0$ とするとき，円柱面 $y^2+z^2=a^2$ のうち，円柱 $x^2+y^2\le a^2$ の内部に含まれる部分の面積を求めよ．

解答例：(1) $z\ge 0$ の部分を考えて2倍すればよい．その部分の面積は

$$J=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+{f_x}^2+{f_y}^2}\,dxdy.$$

ただし $f=z=\sqrt{a^2-y^2}$. このとき，$f_x=0$，$f_y=-y/z$.（$z^2+y^2=a^2 \implies 2zz_y+2y=0$ なので.）よって

$$\begin{aligned}J&=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+0+\frac{y^2}{z^2}}\,dxdy\\&=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\frac{a}{z}\,dxdy\\&=\int_{-a}^{a}\left(\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dx\right)dy\\&=a\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}dy\Big[\,x\,\Big]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\\&=a\int_{-a}^{a}2\,dy=4a^2.\end{aligned}$$

よって $z\le 0$ の分（下半分）も合わせると，求める面積は $\underline{8a^2}$//

$\boxed{4}$ 関数 $z=x^2y^3$ の関数 $(x,y)=(1,1)$ における2次のテイラー展開を

[$h=x-1$ と $k=y-1$ の2次式] + [剰余項]

の形で求めよ．

解答例：(1) $z=x^2y^3$ より，

$$z_x=2xy^3,\quad z_y=3x^2y^2,\quad z_{xx}=2y^3,\quad z_{xy}=6xy^2,\quad z_{yy}=6x^2y,$$
$$z_{xxx}=0,\quad z_{xxy}=6y^2,\quad z_{xyy}=12xy,\quad z_{yyy}=6x^2.$$

よってテイラー展開は次のようになる：各 $(x,\ y)$ にたいしてある $0<\theta<1$ が存在して，$\tilde{x}=1+\theta h, \tilde{y}=1+\theta k$ とおくとき

$$\begin{aligned}z=&1+2h+3k+\frac{1}{2!}(2h^2+2\cdot 6hk+6k^2)\\&+\underline{\underline{\frac{1}{3!}(f_{xxx}(\tilde{x},\tilde{y})h^3+3f_{xxy}(\tilde{x},\tilde{y})h^2k+3f_{xyy}(\tilde{x},\tilde{y})hk^2+f_{yyy}(\tilde{x},\tilde{y})k^3)}}\\=&\underline{1+2h+3k+h^2+6hk+3k^2+\underline{3\tilde{y}^2h^2k+6\tilde{x}\tilde{y}hk^2+\tilde{x}^2k^3}}_{//}.\end{aligned}$$

注意． 2重下線部が剰余項であり，公式でしばしば

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(\tilde{x},\tilde{y})$$

と略記される部分である．