担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

この講義について

作成日：October 04, 2012　Version：1.1

担当教員： 川平　友規（Kawahira, Tomoki；理学部数理学科・大学院多元数理科学研究科）

講義ウェブサイト：
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/12W-biseki.html
配布されたプリントが pdf 形式でダウンロードできます．また，毎週の進捗状況についてコメントしていきます．

本授業の目的およびねらい（全学シラバスより）： 定量的変化を記述・分析する数学の分野が解析学であり，その中心的方法は微分・積分である．これらの方法は自然科学において必須の研究手法であるが，近年はさらに社会科学などにも広く応用されている．本科目は通年講義の後半として，多変数微分積分学の基本を理解し，様々の計算に習熟して応用できるようになることを目的とする．特に多変数関数のグラフなどを通して幾何学（空間）的イメージ，線形代数と結び付いた理解を重視する．

講義日と授業内容（予定）：

10 月 4 日 10 月 11 日	**多変数関数の極限と連続性**：点列の極限, 開集合，閉集合，多変数関数の極限・連続性.
10 月 18 日 10 月 25 日 11 月 1 日 11 月 8 日	**多変数関数の微分法**：接平面，偏微分の定義, 方向微分，合成関数の偏微分, 高階偏微分，テイラーの定理. 極値問題.
11 月 15 日	中間試験
11 月 22 日	勾配ベクトル，未定乗数法.
11 月 29 日 12 月 6 日 （12 月 13 日） 12 月 20 日 1 月 17 日 1 月 24 日	**多変数関数の積分法**：重積分, 累次積分，積分の順序交換, 休講予定 変数変換とヤコビアン, 体積と面積 グリーンの定理，etc.
1 月 31 日	期末試験

自宅模擬テスト： 皆さんの理解度を確認するため,「自宅模擬テスト」を 2 回ほど実施する予定です.

教科書： 三宅敏恒『入門微分積分』培風館
授業内容と完全に一致するわけではありませんが，レポート問題および試験範囲を指定するのに用いるほか，自習書としても活用できるので，ぜひ手に入れておいてください.

成績評価の方法： 「履修取り下げ制度」を適用します.

- 中間試験および期末試験をそれぞれ 50 点満点で評価する.
- 履修取り下げ届が提出された場合，中間または期末試験を受験しなかった場合は「欠席」とする．成績評価の目安として，59 点以下を F，60 – 69 点を C，70 – 79 点を B，80 – 89 点を A，90 – 100 点を S とする.

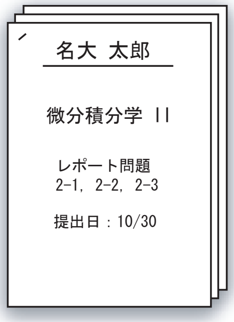
担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

- レポートを提出することにより，成績に最大 10 点を加点する．とくに中間試験の成績が芳しくない受講者には，レポートの提出を義務付ける場合がある．

レポートの締め切りと提出様式： レポート問題と提出締め切りは毎週のプリントで指定します．提出する際には，必ず **A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙**を使用し，右図のような**表紙をつけて**ください．また，必ず**左上**をホチキス等でとめてください．

受講者同士で協力し合って解答してもかまいませんが，かならず協力者の名前も明記するようにしてください.（それによって減点されることはありません.）

レポートは採点して返却します．返却が済むまで，成績への加点の対象とはしないので注意してください．



・必ずA4サイズ, 表紙をつける.
・名前は上の方に大きく書く.
・左上をホチキスで留める.
・解いた問題の番号，提出日を書く.
・裏面はなるだけ使わない.

オフィスアワー： 授業中・授業後の質問は大歓迎です．それ以外の時間に質問したい場合は，ぜひオフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を活用してください．私のオフィスアワーは，理学部数理学科内の合同オフィスアワー「Cafe David（カフェ・ダヴィド）」の時間に設定しています．Cafe David は月曜から金曜の 12:00–13:30 にオープンし，コーヒー・紅茶を無料で提供しています．私の担当は月曜日，場所は理 1 号館 2 階のエレベーター前です．

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体	(2) $\mathbb{R}$: 実数全体	(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体	(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体	(6) $\emptyset$: 空集合

ギリシャ文字

(1) α: アルファ	(2) β: ベータ	(3) γ, Γ: ガンマ	(4) δ, Δ: デルタ	(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ	(7) η: エータ	(8) θ, Θ: シータ	(9) ι: イオタ	(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ	(12) μ: ミュー	(13) ν: ニュー	(14) ξ, Ξ: クシー	(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ	(17) ρ: ロー	(18) σ, Σ: シグマ	(19) τ: タウ	(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ	(22) χ: カイ	(23) ψ, Ψ: プサイ	(24) ω, Ω: オメガ	

その他

(1) $x \in X$ と書いたら,「x は集合 X に属する」すなわち「x は X の元」という意味.

(2) 「…をみたす X の元全体の集合」を $\{x \in X \mid (\ x$ に関する条件$)\}$ の形で表す．たとえば「$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$」

(3) $X \subset Y$ と書いたら,「集合 X は集合 Y に含まれる」という意味.

(4) $A := B$ と書いたら A を B で定義する，という意味．たとえば $e := \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

(5) （文章 1）$:\Longleftrightarrow$ (文章 2) と書いたら,（文章 1）の意味は（文章 2）であることと定義する，という意味．たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$.」

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

多変数関数の極限

作成日：October 11, 2012　Version：1.2

用語の定義（教科書と若干異なる）

- $n = 1, 2, \ldots$ にたいし，n 個の実数の組全体の集合

$$\mathbb{R}^n \ := \ \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \cdots, n\}$$

を n 次元**ユークリッド空間**とよぶ．これは n 次元（位置）ベクトルの空間だと考えられる．とくに，$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$，$\mathbb{R}^2$ は xy 平面，$\mathbb{R}^3$ は xyz 空間とみなす．

- ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の**長さ**を

$$\|\boldsymbol{x}\| \ = \ \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

で定義する．これは原点との「直線距離」．

- 以下おもに $n = 2$ の場合を考える．$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$，$\epsilon > 0$ にたいし，

$$B(\boldsymbol{a}, \epsilon) \ := \ \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \epsilon\right\}$$

を $\boldsymbol{a}$ の **ϵ-近傍**とよぶ．

- 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ にたいし，
  - $\boldsymbol{a} \in A$ が A の**内点** $:\Longleftrightarrow$ $\exists \epsilon > 0,\ B(\boldsymbol{a}, \epsilon) \subset A$.
  - $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ が A の**境界点**[1] $:\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0,\ B(\boldsymbol{a}, \epsilon)$ は A の点と A でない点を両方含む.

- A の境界点全体からなる集合を ∂A と表し，A の**境界** (boundary) とよぶ.

- A と境界 ∂A の和集合を $\overline{A}$ で表し，A の**閉包** (closure) とよぶ.

- $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が**開集合** (open set) $:\Longleftrightarrow$ すべての $\boldsymbol{a} \in A$ は A の内点.

- $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が**閉集合** (closed set) $:\Longleftrightarrow$ $A = \overline{A}$．すなわち $\partial A \subset A$.

- $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**領域** (domain)
  $:\Longleftrightarrow$ D の任意の 2 点は D 内の折れ線で結ぶことができ（「D は連結」），かつ D は開集合.

- $\mathbb{R}^2$ の部分集合 E が**閉領域** (closed domain) $:\Longleftrightarrow$ ある領域 D が存在して，$E = \overline{D}$.

演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

適宜教科書や教科書巻末の略解を参照しつつ，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません.）

提出締め切り： 来週 10 月 18 日の講義開始時．締め切り後に提出しても成績への加点はしません.

レポート問題 1-1. 教科書 p.84．問題 4.1 の 1.(1)(3)(5) を解け.

レポート問題 1-2. 教科書 p.84．問題 4.1 の 2 を解け.（グラフを図示すること.）

[1] $\boldsymbol{a} \in A$ とは限らない！

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

多変数関数の連続性

作成日： October 18, 2012　Version： 1.1

講義 (10/11) のまとめ

定義（関数の連続性）. $z = f(x, y)$ が (a, b) で**連続**であるとは，$(x, y) \to (a, b)$ のとき，（その近づき方に依存せず） $f(x, y) \to f(a, b)$ となることをいう．また D を $f(x, y)$ の定義域に含まれる集合とし，$f(x, y)$ がすべての $(a, b) \in D$ で連続であるとき，$f(x, y)$ は D **上で連続**という．

（接）平面の方程式の基本形. 以下 xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ で考える．一般に z 軸に並行でない平面の方程式は一次関数 $z = C + Ax + By$ の形をしているが，接平面を考えるにあたっては，次のような「基本形」を覚えておくほうがよい．

- $A, B \in \mathbb{R}$ とする．$y = 0$ かつ $z = Ax$ をみたす xz 平面内の直線と $x = 0$ かつ $z = By$ をみたす yz 平面内の直線を同時にふくむ平面 Π_0 の方程式は，

$$z \;=\; Ax + By$$

で表される．

- 平面 Π_0 を原点が (a, b, c) に移るように平行移動させて得られる平面 Π の方程式は

$$z - x \;=\; A(x-a) + B(y-b) \iff \underline{z = c + A(x-a) + B(y-b)}$$

で表される．下線の式が，接平面の方程式の基本形である．

演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

適宜教科書や教科書巻末の略解を参照しつつ，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません.）

提出締め切り： <u>来週 10 月 25 日の講義開始時</u>．締め切り後に提出しても成績への加点はしません．

レポート問題 2-1（連続性）.　教科書 p.84．問題 4.1 の 3.(1)(2) を解け．

レポート問題 2-2（偏導関数）.　教科書 p.84．問題 4.1 の 4.(1)(3)(5)(7)(9) を解け．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

多変数関数の偏微分

作成日：October 25, 2012　Version：1.1

講義 (10/18) のまとめ

定義（関数の偏微分）. $z = f(x, y)$ と $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ について，極限

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} \qquad B = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$$

が存在するとき，A, B を (a, b) における f の**偏微分係数**とよび，それぞれ

$$A = f_x(a, b) \qquad B = f_y(a, b)$$

と表す．また，これらの極限が**ともに**存在するとき，$f(x, y)$ は (a, b) で**偏微分可能**という．

さらに，与えられた点 (a, b) にたいし $f_x(a, b)$ を対応させる関数を $z = f(x, y)$ の**偏導関数**とよび，$f_x(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\partial_x f(x, y)$, z_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ などと表す．関数 $f_y(x, y)$ も同様に定義され，やはり**偏導関数**と呼ばれる．

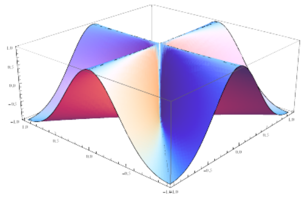
定理 3-1（接平面の存在条件.） $z = f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$，$f_x(x, y)$ が (a, b) のまわりで定義され，かつ連続であるとき，$z = f(x, y)$ のグラフには接平面が存在する．その方程式は，

$$z = c + A(x - a) + B(y - b),$$

ただし $c = f(a, b)$，$A = f_x(a, b)$，$B = f_y(a, b)$.

接平面の存在は,「全微分可能性」として改めて定式化する．

ややこしい例（全平面で偏微分可能だが全微分可能でない）. $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき $f(x, y) := \dfrac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}$，$f(0, 0) := 1$ と定義する．この関数は $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $(r > 0)$ とすると $f(x, y) = \cos 4\theta$ をみたす．したがって連続ではないが，すべての $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ で偏微分可能である．しかし，原点で接平面をもたない．すなわち，全微分可能ではない．



演習問題（* つき問題は試験範囲外です）

適宜教科書や教科書巻末の略解を参照しつつ，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません.）

提出締め切り： 来週 11 月 1 日の講義開始時．締め切り後に提出しても成績への加点はしません．

レポート問題 3-1（連続性 etc.）. 教科書 p.90．問題 4.2 の 1 を解け．

レポート問題 3-2（接平面）. 教科書 p.90．問題 4.2 の 3 を解け.（法線の方程式は求めなくてもよいが，法線ベクトルは必ず求めること.）

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

全微分

作成日： November 1, 2012　Version : 1.1

講義 (10/25) のまとめと補足

定義（全微分）. $z=f(x,y)$ と $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ について，ある定数 A，B が存在して $(x,y)\to(a,b)$ ならば

$$f(x,y)=\underline{f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)}+o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})$$

が成りたつとき，f は (a,b) において**全微分可能**であるという.（とくに，下線の式で表される平面を接平面とよぶ.）
このとき，f は偏微分可能で，$A=f_x(a,b)$，$B=f_y(a,b)$ を満たす.（講義中の命題 4-1.）

定理 4-2（全微分可能性の十分条件.） 『$z=f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_x(x,y)$ が (a,b) のまわりで定義され，かつ連続』 $\Longrightarrow$ 『$z=f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能.』

証明. $\Delta x:=x-a$, $\Delta y=y-b$, $A=f_x(a,b)$，$B=f_y(a,b)$ とおく．仮定のもと，$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ ならば

$$K(x,y)\ :=\ \frac{|f(x,y)-\{f(a,b)+A\Delta x+B\Delta y\}|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\ \to\ 0$$

であることを示せばよい．y を固定して平均値の定理を用いると，

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(a,b)\ &=\ \underline{f(x,y)-f(a,y)}+\underline{\underline{f(a,y)-f(a,b)}}\\ &=\ \underline{f_x(c_1,y)(x-a)}+\underline{\underline{f_y(a,c_2)(y-b)}}\\ &=\ f_x(c_1,y)\Delta x+f_y(a,c_2)\Delta y\end{aligned}$$

がなりたつ（ただし c_1 は x と a の間の実数，c_2 は y と b の間の実数）ので，

$$\begin{aligned}K(x,y)\ &=\ \frac{|(f_x(c_1,y)-A)\Delta x+(f_y(a,c_2)-B)\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\\ &\le\ |f_x(c_1,y)-A|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+|f_y(a,c_2)-B|\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\\ &\le\ |f_x(c_1,y)-f_x(a,b)|\cdot 1+|f_y(a,c_2)-f_y(a,b)|\cdot 1\ \to\ 0.\qquad((x,y)\to(a,b))\end{aligned}$$

ただし，最後に偏導関数の連続性と $(x,y)\to(a,b)$ のとき $(c_1,c_2)\to(a,b)$ を用いた.

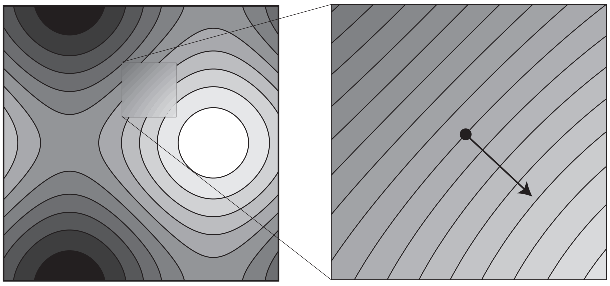
定義. $z=f(x,y)$ が C^1 **級**であるとは，定義域上で偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_x(x,y)$ がそれぞれ存在し連続であることをいう．上の定理より，

$$z=f(x,y)\text{ が }C^1\text{級}\ \Longrightarrow\ \text{全微分可能}\ (\ \Longleftrightarrow\ \text{接平面が存在})$$

等高線と勾配ベクトル

2 変数関数のグラフを描くかわりに，地図のように等高線を用いて関数の変化を理解することができる．たとえば次の図のように，地図を拡大すれば等高線はほぼ等間隔に並ぶであろう．この方向を定めるのが勾配ベクトルである.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp



定義． C^1 級関数 $z = f(x, y)$ およびその定義域内の点 (a, b) にたいし，そこでの**勾配ベクトル**を $(A, B) := (f_x(a, b), f_y(a, b))$ で定義する．このとき，全微分の式から

$$\Delta z \;=\; A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \;\approx\; \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

すなわち，関数の増分 Δz は差分ベクトル $(\Delta x, \Delta y)$ と勾配ベクトル (A, B) の内積で近似される．とくに勾配ベクトルはその点での等高線と直交し，関数がもっとも増加する方向を向いている．

合成関数の微分公式．

曲線 $(x, y) = (x(t), y(t))$ $(t \in \mathbb{R})$ はそれぞれの成分が t について C^1 関数であるとする．また，$(a, b) := (x(t_0), y(t_0))$ とおき，そこでの速度ベクトルを $(v_1, v_2) := \left(\dfrac{dx}{dt}(t_0), \dfrac{dy}{dt}(t_0)\right)$ とおく．このとき，C^1 級関数 $z = f(x, y)$ との合成関数 $z(t) = f(x(t), y(t))$ の $t = t_0$ における微分は

$$\frac{dz}{dt}(t_0) \;=\; \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \;=\; Av_1 + Bv_2$$

で与えられる．すなわち，関数の勾配ベクトル (A, B) と曲線の速度ベクトル (v_1, v_2) との内積である．この関係式は次のように表現される：

合成関数の微分公式． $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

演習問題

適宜教科書や教科書巻末の略解を参照しつつ，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません．）

提出締め切り： 来週 11 月 8 日の講義開始時．締め切り後に提出しても成績への加点はしません．

レポート問題 4-1（曲線との合成関数の微分）． 教科書 p.90．問題 4.2 の 4 を解け．

レポート問題 4-2（変数変換と偏微分）． 教科書 p.90．問題 4.2 の 5 を解け．ただし，与えられた変数変換 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ にたいし，それぞれのヤコビ行列とヤコビアン（ヤコビ行列式）も求めること．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

変数変換とヤコビ行列

作成日： November 8, 2012　Version： 1.1

講義 (11/1) のまとめと補足

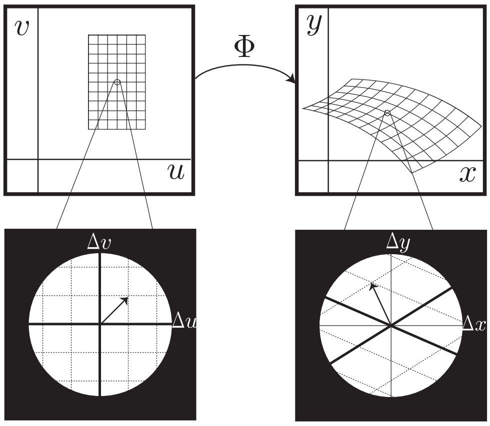
定義（変数変換）． uv 平面内の領域 E 上でふたつの C^1 関数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ が定義されているとき，ベクトルにベクトルを対応させる写像

$$\Phi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

が定まる．これを**変数変換**とよぶ．

例． $\Phi : \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ は (x, y) の**極座標変換**と呼ばれる．たとえば $E := \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi\}$ のとき，$\Phi(E) = D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$.

ヤコビ行列． 「変数変換は局所的に線形写像で近似される」ことを確かめよう.（これは関数のグラフが局所的に接線や接平面で近似できるという事実に対応している.）



いま $(p, q) \in E$ を固定して，

$$\begin{cases} \Delta u := u - p \\ \Delta v := v - q \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x := x(u, v) - x(p, q) \\ \Delta y := y(u, v) - y(p, q) \end{cases}$$

とおく．関数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ は C^1 級（よって全微分可能）であるから，ある実数 P_1, Q_1, P_2, Q_2 が存在して，$(u, v) \to (p, q)$ のとき

$$\begin{cases} \Delta x = P_1 \Delta u + Q_1 \Delta v + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}) \\ \Delta y = P_2 \Delta u + Q_2 \Delta v + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

が成り立つ．すなわち，差分 $\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$（＝ベクトル $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ からのずれ）に行列をかけたものがほぼ増分 $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$（＝ベクトル $\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} x(p, q) \\ y(p, q) \end{pmatrix}$ からのずれ）になっているわけである．

ここに現れる行列は全微分の式より

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u(p, q) & x_v(p, q) \\ y_u(p, q) & y_v(p, q) \end{pmatrix}$$

であり，これを Φ の (p,q) における**ヤコビ行列**もしくは単に**微分**とよび，$D\Phi = D\Phi(p,q)$ などとも表される．その行列式 $\det D\Phi = x_u y_v - x_v y_u$ は**ヤコビアン**と呼ばれ，あとで積分の変数変換のときに大活躍する．

例（極座標変換）． $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ の (r_0,θ_0) におけるヤコビ行列は $\begin{pmatrix} x_r(r_0,\theta_0) & x_\theta(r_0,\theta_0) \\ y_r(r_0,\theta_0) & y_\theta(r_0,\theta_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -r_0\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & r_0\cos\theta_0 \end{pmatrix}$ であり，ヤコビアンは r_0 となる．[1] たとえば $(2,\pi/2)$ では $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ といった具合である．

合成関数の微分公式（やや直感的な説明）． 与えられた C^1 級関数 $z = f(x,y)$ を上の変数変換を通して $z = f(x(u,v), y(u,v))$ のように (u,v) の関数として表してみる．このとき，z の変数 (x,y) に関する勾配ベクトルと変数 (u,v) に関する勾配ベクトルの関係を求めよう．

$(p,q) \in E$ と対応する $(a,b) := (x(p,q), y(p,q))$ を固定し，関数の増分を $\Delta z = f(x,y) - f(a,b)$ と表す．いま $f(x,y)$ の (a,b) における勾配ベクトルを $(A,B) = (z_x(a,b), z_y(a,b))$ と置くと，全微分の式より

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

が成り立つ．同様に，z を (u,v) の関数と考えた場合も，勾配ベクトル $(A',B') = (z_u(p,q), z_v(p,q))$ が存在して

$$\Delta z = A'\Delta u + B'\Delta v + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}) \approx \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

が成り立つであろう．上述のヤコビアンを用いれば，

$$\Delta z \approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = (A\ \ B)\underline{\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}} \approx (A\ \ B)\underline{\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}} = (AP_1 + BP_2\ \ AQ_1 + BQ_2)\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

より，次の公式を得る：

$$\begin{cases} A' = AP_1 + BP_2 \\ B' = AQ_1 + BQ_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

演習問題

適宜教科書や教科書巻末の略解を参照しつつ，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数をあげません．）

提出締め切り： 来週 11 月 15 日の試験開始前．締め切り後に提出しても成績への加点はしません．

レポート問題 5-1（極値の判定）． 教科書 p.99．問題 4.3 の 6 を解け．

レポート問題 5-2（極値を求める）． 教科書 p.99．問題 4.3 の 7 を解け．

[1] ふつうはこのような冗長な書き方はせず，「極座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ のヤコビ行列は $\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ です」と関数の形で表現される．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

2 次導関数と極値の判定

配布日：November 8, 2012　Version：1.1

講義 (11/8) のまとめと補足

以下，$z = f(x, y)$ は領域 D 上で定義された C^1 関数とする．すなわち，偏導関数 f_x，f_y が存在して，それぞれ連続である．これらの導関数を **1 次導関数**と呼ぶことにする．

> **C^n 級関数・高次導関数の帰納的な定義．** $n = 1, 2, \cdots$ とする．$z = f(x, y)$ が領域 D 上で C^n 級であり，f の n 次導関数が C^1 級であるとき，f **は C^{n+1} 級**であるという．また，n 次導関数の偏導関数を $(n+1)$ 次導関数とよぶ．

たとえば f が C^1 級かつ f_x と f_y が C^1 級（すなわち偏導関数 $(f_x)_x$，$(f_x)_y$，$(f_y)_x$，$(f_y)_y$，がすべて連続）であるとき，f は C^2 級とよばれるのである．ここで，$(f_x)_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ は簡単に

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

などと書かれる．さらに f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} がすべて C^1 であるとき，f は C^3 級となる．

> **定理 6-1（偏微分の順序交換：ヤングの定理）** 関数 $z = f(x, y)$ が定義域上で C^2 級であれば，$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ が成り立つ．

証明． $(a, b) \in D$ を任意に選んで固定する．また $(x, y) \in D$ にたいし，$\Delta x := x - a$, $\Delta y = y - b$ とおく．
　さて天下り的だが，

$$(*) \qquad \{f(x,y) - f(x,b)\} - \{f(a,y) - f(a,b)\} \ = \ \{f(x,y) - f(a,y)\} - \{f(x,b) - f(a,b)\}$$

という量を考えてみよう．$K(x, y) := f(x, y) - f(x, b)$ とおくと $(*)$ の左辺は $K(x, y) - K(a, y)$ であり，平均値の定理より適当な a' が x と a の間に存在して

$$K(x,y) - K(a,y) \ = \ K_x(a', y)\Delta x \ = \ \{f_x(a', y) - f_x(a', b)\}\Delta x$$

と書ける．さらに $y \mapsto f_x(a', y)$ に平均値の定理を適用すると，

$$f_x(a', y) - f_x(a', b) \ = \ f_{xy}(a', b')\Delta y$$

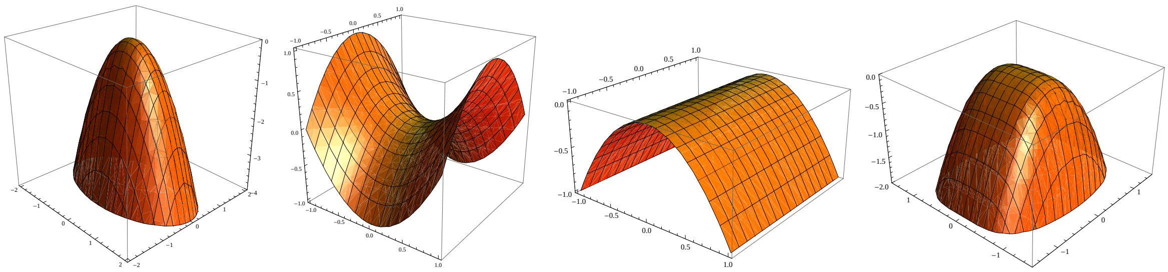
となる b' が y と b の間に存在するから，結果として $(*)$ の左辺は $f_{xy}(a', b')\Delta y \Delta x$ と表される．
　つぎに $L(x, y) := f(x, y) - f(a, y)$ とおいて同様の議論を行えば，適当な a'' と b'' がそれぞれ x と a の間と y と b の間に存在して，$(*)$ の右辺は $f_{yx}(a'', b'')\Delta x \Delta y$ と書けることがわかる．いま $\Delta x, \Delta y \neq 0$ を満たしつつ $(x, y) \to (a, b)$ とすれば，$\underline{f_{xy} \text{ および } f_{yx} \text{ の連続性}}$ および (a', b')，$(a'', b'') \to (a, b)$ より，$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ を得る． ■

2 変数の極大と極小

> 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で**極大（極小）**
> $:\Longleftrightarrow$ (a, b) の十分近くでは，$(x, y) \neq (a, b)$ のとき $f(a, b) > f(x, y)$（$f(a, b) < f(x, y)$）．

例． 「極値かどうか」は，関数のグラフの局所的な形状を調べないと判定できない：

(1) $z = -(x^2 + 3y^2)$　(2) $z = x^2 - y^2$　(3) $z = -x^2$　(4) $z = -(x^2 + y^4)$



極大・極小の判定

(a,b) が極値を取る点であれば，その点で $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ 出なくてはならない．後で学ぶ 2 変数のテイラー展開によれば，このとき

$$f(x,y)-f(a,b) \approx A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2$$

と近似される．ただし $A=f_{xx}(a,b)$, $B=f_{xy}(a,b)$, $C=f_{yy}(a,b)$ である．したがって，たとえば $A>0$ かつ $AC-B^2>0$ であるとき，

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = A\left(\Delta x + \frac{B\Delta y}{A}\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A}\Delta y^2 > 0$$

が $(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$ のとき成り立つ．これは (a,b) で f が極小値をとることを示唆している．このような議論を精密に行うことで，次の定理が示される：

定理 6-4（極値の判定法）． f は C^2 級かつ $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ と仮定する．このとき，判別式

$$D(a,b) \ := \ AC-B^2 \ = \ f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$$

の値に応じて，次のことがわかる：

(i) $D>0$ かつ $f_{xx}(a,b)<0 \implies f$ は $(x,y)=(a,b)$ で**極大**

(ii) $D>0$ かつ $f_{xx}(a,b)>0 \implies f$ は $(x,y)=(a,b)$ で**極小**

(iii) $D<0 \implies f$ は $(x,y)=(a,b)$ で**極値にならない（鞍点）**

(iv) $D=0 \implies$ さらに調べないと分からない．

例． 上にあげた 4 つのグラフのうち，(1) は (i) の例，(2) は (iii) の例，(3) は (iv) かつ極値でない例，(4) は (iv) かつ極大値をとる例，

参考． ちなみに $D=AC-B^2$ は行列 $\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}$ の行列式である．これを**ヘッシアン**と呼ぶ．3 変数以上の場合もこれに対応する行列を詳しく調べることで，極値を探すことができる．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

2 変数のテイラー展開

配布日： November 29, 2012　Version： 1.1

講義 (11/22) のまとめと補足

以下，$z = f(x, y)$ は領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^n 級関数とする．

2 変数のテイラー展開． $(a, b) \in D$, $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ を $t \in [0, 1]$ のとき $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in D$ が成り立つようにとる．このときある $\theta \in (0, 1)$ が存在して，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + \frac{1}{1!}(h\partial_x + k\partial_y) f(a,b) + \frac{1}{2!}(h\partial_x + k\partial_y)^2 f(a,b) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}(h\partial_x + k\partial_y)^{n-1} f(a,b) \\ &\quad + \underline{\frac{1}{n!}(h\partial_x + k\partial_y)^n f(a+\theta h, b+\theta k)} \end{aligned}$$

ただし $\partial_x := \dfrac{\partial}{\partial x}, \partial_y := \dfrac{\partial}{\partial y}$ であり，$(h\partial_x + k\partial_y)^j$ の部分は

$$\begin{aligned} (h\partial_x + k\partial_y)^2 f(a,b) &= (h^2\partial_x^2 + 2hk\partial_x\partial_y + k^2\partial_y^2) f(a,b) \\ &= h^2 f_{xx}(a,b) + 2hk f_{xy}(a,b) + k^2 f_{xx}(a,b) \end{aligned}$$

のように計算する．

注．$(a, b) = (0, 0)$ のとき，**マクローリン展開**という．

2 変数の漸近展開． $(a, b) \in D$ かつ，$(h, k) \to (0, 0)$ のとき，

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + \frac{1}{1!}(h\partial_x + k\partial_y) f(a,b) + \frac{1}{2!}(h\partial_x + k\partial_y)^2 f(a,b) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}(h\partial_x + k\partial_y)^{n-1} f(a,b) \\ &\quad + \underline{\frac{1}{n!}(h\partial_x + k\partial_y)^n f(a,b) + o\Big((h^2+k^2)^{n/2}\Big)}. \end{aligned}$$

下線部がどのように置き換わったかに注意しよう．たとえば $n = 2$ のとき，$x = a + h$, $h = \Delta x$ などと書けば

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2!}\{f_{xx}(a,b)\Delta x^2 + 2f_{xy}(a,b)\Delta x\Delta y + f_{yy}(a,b)\Delta y^2\} \\ &\quad + o\big(\Delta x^2 + \Delta y^2\big). \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0) \end{aligned}$$

を得る．これは全微分の式

$$f(x,y) = \underline{f(a,b) + f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y} + o\Big(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\Big)$$

の自然な拡張である．下線部は「接平面」の式であったが，2 次の漸近展開は「接 2 次曲面」の式を与えているわけである．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

2 変数の極大と極小

(a,b) が極値を取る点であれば，その点で $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ 出なくてはならない．後で学ぶ 2 変数のテイラー展開によれば，このとき

$$f(x,y)-f(a,b)\approx A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$$

と近似される．ただし $A=f_{xx}(a,b)$, $B=f_{xy}(a,b)$, $C=f_{yy}(a,b)$ である．したがって，たとえば $A>0$ かつ $AC-B^2>0$ であるとき，

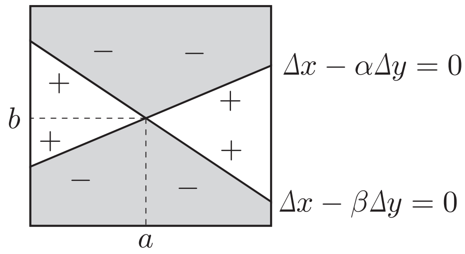
$$A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2=A\left(\Delta x+\frac{B\Delta y}{A}\right)^2+\frac{AC-B^2}{A}\Delta y^2>0$$

が $(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$ のとき成り立つ．これは (a,b) で f が極小値をとることを示唆している．

また，$A>0$ かつ $AC-B^2<0$ であるとき，

$$A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2=A(\Delta x-\alpha\Delta y)(\Delta x-\beta\Delta y)$$

ただし α,β は方程式 $At^2+2Bt+C=0$ の異なるふたつの実数解．よって $(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$ のとき正の値も負の値も取りうる．これは (a,b) で f が極値でない（鞍点である）ことを示唆している．このような議論を精密に行うことで，定理 6-4 の極値判定法が得られるのである．(教科書 p96 参照.)

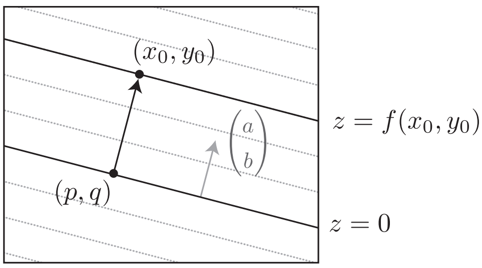


参考：点と直線の距離の公式

高校で学んだ次の公式を思い出そう：(x_0,y_0) と直線 $\ell: ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

分子に直線の方程式（っぽいもの）が出てくるのが不思議に感じられたことはないだろうか？2 変数関数の勾配ベクトルを考えれば，これはごく自然なことなのだ．

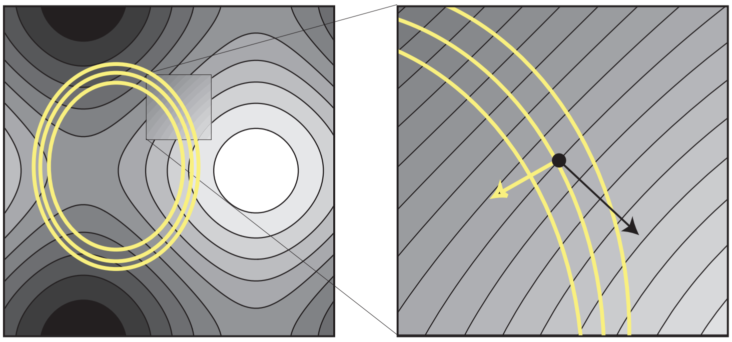


まず関数 $z=f(x,y)=ax+by+c$ の等高線を考えると，これは勾配ベクトル $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ に垂直な直線群である．とくに直線 ℓ は $z=0$ の等高線であって，(x_0,y_0) は $z=f(x_0,y_0)$ の等高線上にある．さて (x_0,y_0) から ℓ への垂線の足を (p,q) とおく．さらに $(\Delta x,\Delta y)=(x_0-p,y_0-q)$ とし，これに対応する関数 $z=f(x,y)=ax+by+c$ の増分 $\Delta z=f(x_0,y_0)-f(p,q)=f(x_0,y_0)$ を考えよう．この関数の勾配ベクトルは点の位置によらず (a,b) だから，全微分の式 $\Delta z=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\end{pmatrix}$ が成り立つ．右辺の内積に表れる 2 つのベクトルは平行であり，成す角 θ は 0 または π である．よって 右辺 $=\left|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\end{pmatrix}\right|\cos\theta=\pm\sqrt{a^2+b^2}\,d$ となる．一方 $\Delta z=f(x_0,y_0)=ax_0+by_0+c$ であるから，両辺の絶対値をとれば上の公式が得られるわけである．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

参考：ラグランジュの未定乗数法（教科書 p104-105）の直感的説明

「$x^2+2y^2=1$ という条件のもとで xy の最大値（極値）を求めよ」といった問題が考えられる.（教科書 p106，問題 4.4, 6(2)）このとき有効なのが，**未定乗数法**と呼ばれる手法である．一般に $C: g(x,y)=0$ という条件下で，$z=f(x,y)$ の極値を考えてみよう．$z=g(x,y)$ という関数を考えると，C はこの関数の等高線である．もしある点 $(a,b)\in C$ で，そこでの f の等高線と g の等高線が図のように交差していたら，C 上の点 (a,b) の近くでは f の値は単調に増加もしくは減少することになり，極値ではない．よって，**もし** $(a,b)\in C$ **で極値をとるならば**，そこでの f の等高線と g の等高線はほぼ平行であろう．



すなわち，**そこでの** f **の勾配ベクトルは** g **の勾配ベクトルと平行であろう．**したがって適当な $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ が存在して，

$$\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{pmatrix}$$

が成立するはずである．以上のことから,「極値を与える点の候補」は a,b,c に関する連立方程式

$$g(a,b)=0,\quad f_x(a,b)-\alpha\, g_x(a,b)=0,\quad f_y(a,b)-\alpha\, g_y(a,b)=0.$$

によって与えられる．この条件は 3 変数関数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\, g(x,y)$ を用いると次のように書きかえることができる：

$$F_\lambda(a,b,\alpha)=F_x(a,b,\alpha)=F_y(a,b,\alpha)=0.$$

ただしこの連立方程式は必要条件であって，十分条件ではない．方程式を解いたら，その点が本当に極値を与えるか，改めてチェックしなければならない．

演習問題

適宜教科書や教科書巻末の略解を参照しつつ，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません.）

提出締め切り： 来週 12 月 6 日の講義開始時．締め切り後に提出しても成績への加点はしません．

レポート問題 7-1（マクローリン展開）． 教科書 p.99．問題 4.3 の 5 の (1)(2) の関数について，$n=2$ および 3 のときのテイラー展開（マクローリン展開）を求めよ．

レポート問題 7-2（累次積分）． 教科書 p.115．問題 5.1 の 1 を解け．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

重積分

配布日： December 6, 2012 Version： 1.1

来週 (12/13) は休講です！

講義 (11/29) のまとめ

講義と教科書で異なる用語などをまとめておく：

- $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ の形の閉領域を**区画**とよび，$D = [a,b] \times [c,d]$ とも表す．
- 連続関数 $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ にたいし，

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$$

  の形の閉領域を**縦線領域**とよぶ．同様に，

$$D = \{(x,y) \mid a \le y \le b,\ \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)\}$$

  の形の閉領域を**横線領域**とよぶ．

定理（累次積分）． 上の縦線領域 D で定義された $f : D \to \mathbb{R}^2$ が連続であるとき，f は D 上積分可能かつ

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$$

もちろん横線領域の場合も同様の定理が成り立つ．

演習問題

適宜教科書や教科書巻末の略解を参照しつつ，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません．）

提出締め切り： 次回 12 月 20 日の講義開始時．締め切り後に提出しても成績への加点はしません．

レポート問題 8-1（重積分）． 教科書 p.115．問題 5.1 の 2 (1) から (6) までを解け．

レポート問題 8-2（積分順序の交換）． 教科書 p.115．問題 5.1 の 3 を解け．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

重積分の変数変換

配布日： December 6, 2012　Version： 1.1

講義 (12/6) のまとめ

E および D を区分的に滑らかな境界をもつ閉領域とし，変数変換 $\Phi : E \to D$ は次を満たすとする：

- $\Phi : (u, v) \mapsto (x, y)$ は C^1 級.
- ヤコビ行列 $D\Phi$ について，そのヤコビアン $\det D\Phi$ は E の境界以外では 0 にならない.
- Φ による E の像は，境界以外では 1 対 1．すなわち，その像が境界以外で重なることはない.

このとき，次が成り立つ：

定理（変数変換）． 上の変数変換について，f は D 上積分可能であるとき，

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \, |\det D\Phi| \, dudv.$$

演習問題

適宜教科書や教科書巻末の略解を参照しつつ，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません.）

提出締め切り： 次回 1 月 17 日の講義開始時．締め切り後に提出しても成績への加点はしません.

レポート問題 9-1（極座標変換）． 教科書 p.121．問題 5.2 の 1 を解け.

レポート問題 9-2（変数変換）． 教科書 p.121．問題 5.2 の 2 を解け.

レポート問題 9-3（空間の極座標変換）． 教科書 p.121．問題 5.2 の 3 を解け.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

極座標変換とその応用

配布日： January 17, 2013　Version： 1.1

講義 (12/20) のまとめ

2 次元の極座標変換． $(x,y)=(r\cos\theta, y\sin\theta)$ の形の変数変換は極座標変換と呼ばれる．このとき

$$\text{ヤコビ行列：}\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} \qquad \text{ヤコビアン：}r$$

となる．積分の変数変換は，$(x,y)\in D$ が $(r,\theta)\in E$ に対応するとき

定理（極座標）． 関数 $f(x,y)$ が D 上積分可能であるとき，上の変数変換について次が成り立つ：

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \;=\; \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta.$$

これを用いると，次の**ガウス積分** (Gaussian integral) が計算できる：

定理（ガウス積分）．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \;=\; \sqrt{\pi}$$

3 次元の極座標変換．

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\end{pmatrix} \qquad (r\geq 0,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\phi\leq 2\pi)$$

の形の変数変換も 3 次元の極座標変換と呼ばれる．上のベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と置くとき，r はその長さ，θ は z 軸の正の方向と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角度，ϕ は P から xy 平面に降ろした垂線の足を H とするとき，x 軸から計った $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ 方向のラジアン角である．このときヤコビアンは $r^2\sin\theta\geq 0$ となり，上と同様の変数変換公式 $\iiint f(\cdots)\,dxdydz = \iiint f(\cdots)\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi$ が成り立つ．

演習問題（最終回）

適宜教科書や教科書巻末の略解を参照しつつ，細部を補って「誰が見てもわかる完全な解答」を目指すこと．（教科書の略解から情報量がほとんど増えてない解答には点数あげません．）

提出締め切り： 次回 1 月 24 日の講義開始時．締め切り後に提出しても成績への加点はしません．

レポート問題 10-1（曲面積）． 教科書 p.131．問題 5.4 の 4，(1)(2)(3) を解け．

レポート問題 10-2（回転体の面積）． 教科書 p.131．問題 5.4 の 5，(1)(2) を解け．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

曲面積 (1/17) と線積分 (1/24)

配布日： January 24, 2013　Version：1.1

1 月 31 日（木）は期末試験です．いつもと同じ教室・同じ時間に行います．座席指定があり．学生証を忘れないように !!

講義 (1/17) のまとめ

定理（曲面積）． 閉領域 D（ただし境界は区分的に滑らか）上で定義された C^1 級関数 $z = f(x,y)$ にたいし，そのグラフ $K = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$ の面積 $S(K)$ は次で与えられる：

$$S(K) \;=\; \iint_D \sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2 + 1}\; dxdy.$$

ただし $f_x = f_x(x,y)$，$f_y = f_y(x,y)$ である．

講義 (1/24) のまとめと平面ベクトル解析の基礎

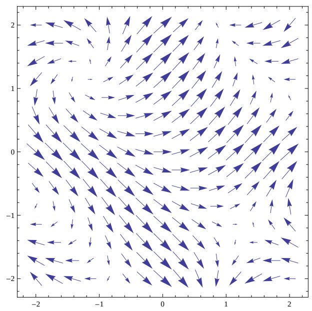
ベクトル場と線積分． 線積分で登場する $\int_C u(x,y)\,dx$ といった形の積分は，2 変数なのに積分は一方向のみで，不自然な感じがする．しかしその由来を知れば，これもアリかな，という気持ちになるものである．

いま，$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ で与えられる $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場を考える．ベクトル場の数学的表現は連続写像 $\boldsymbol{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ なのだが，直感的には風速（風の向きと強さ）を表現する矢印の**場**（field）である．ちょうど，麦**畑** (field) の麦が風になびくように，ベクトル場では矢印が何らかの力によってなびいている．曲線 $C = \left\{ \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \mid t \in [a,b] \right\}$ があるとき，分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ に対応した C の分割 $\Delta = \{\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{p}(t_k)\}_k$ が考えられる．さらに $\Delta\boldsymbol{p}_k := \boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_{k-1}$ とおくことで，リーマン和

$$\Sigma(\boldsymbol{V}, \Delta) \;=\; \sum_k \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}_{k-1}) \cdot \Delta\boldsymbol{p}_k \quad \text{（内積の和）}$$

が考えられる.（短冊の面積のかわりに，ベクトルの内積を使うのがミソ.）さらに $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}_{k-1}) = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$，$\Delta\boldsymbol{p}_k = \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix}$ とおけば，

$$\Sigma(\boldsymbol{V}, \Delta) \;=\; \sum_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix} \;=\; \sum_k (u_k\,\Delta x_k + v_k\,\Delta y_k)$$



$\boldsymbol{V}(x,y) = (\cos xy, \sin(x+y))$ で与えられるベクトル場.

を得る．ここで分割 Δ を無限に細かくした（すなわち $\delta(\Delta) := \max_k \|\Delta\boldsymbol{p}_k\| \to 0$ とした）極限が，ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の曲線 C に沿った積分

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{p} \;=\; \int_C u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy$$

なのである．となると，単独で $\int_C u(x,y)\,dx$ という積分が現れるのは不自然ではないか？相棒の $\int_C v(x,y)\,dy$ はどこ？ということになるわけだが，いや，たまたま C 上 $v(x,y) \equiv 0$ で，$\int_C u(x,y)dx + 0 \cdot dy$ なんですよ，と答えればその場は収まるのである．

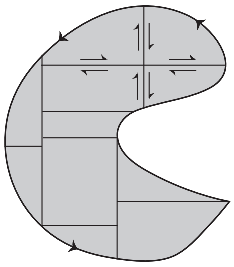
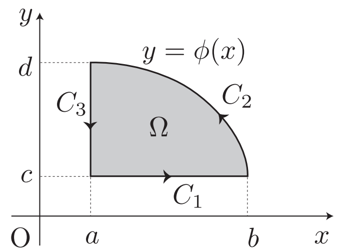
担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

グリーンの定理. ベクトル場が $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x,y) := \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ の形で与えられているとき，そこでの線積分について次の定理が成り立つ：

> **グリーンの定理** (Green's Theorem) C を R^2 内の（区分的に滑らかな）単純閉曲線とし，その内部を Ω と表す．関数 $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ Ω 上で C^1 であるとき，次が成り立つ：
>
> $$\int_C P\,dx + Q\,dy \;=\; \iint_\Omega (-P_y + Q_x)\,dx\,dy$$

左辺は線積分は曲線上だけを歩いて計算できる積分値である．それが右辺の，定義上は曲線の内部の領域をくまなく測量しなければ得られないはずの面積分の値と一致してしまうのである．

証明. 必要ならタテ・ヨコの線分で分割して，図の右側のような領域（$C = C_1 + C_2 + C_3$）について定理を証明すればよい．なぜなら，分割線上の積分は相殺されるし，領域を分割したら面積分も分割されるからである．

図のような領域は縦線集合であり横線集合でもあるから，積分の計算と相性がよい．いま，C_2 のグラフは $y = \phi(x)$ と表されるとしよう．このとき，たとえば $P(x,y)$ の場合，

$$\begin{aligned}
\int_C P\,dx &= \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx \\
&= \int_a^b P(x,c)\,dx + \int_b^a P(x,\phi(x))\,dx + \int_a^a P(a,y)\,dx \\
&= -\int_a^b \underline{\{P(x,\phi(x)) - P(x,c)\}}\,dx + 0 \\
&= -\int_a^b \underline{\left\{\int_c^{p(x)} P_y(x,y)\,dy\right\}}\,dx \\
&= -\iint_\Omega P_y\,dx\,dy
\end{aligned}$$

となる．下線部では x を固定して，いわゆる微積分の基本定理を用いた．同様の計算で

$$\int_C Q\,dy \;=\; \iint_\Omega Q_x\,dx\,dy$$

も得るから，グリーンの定理が成り立つ． ■

勾配ベクトル. $f = f(\boldsymbol{p}) = f(x,y)$ で与えられる $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 関数を考える．$f \in \mathbb{R}$ は 1 次元ベクトルだ，と強引に考えればこれもある種のベクトル場であるが，一般に各点に実数が対応するものはスカラー場 (scalar field) と呼ばれる．気温や気圧の分布，地図に描かれた海抜高度などをイメージするのが分かりやすい．

さてスカラー場からベクトル場を生成する方法をひとつ紹介しよう．いま C^1 を仮定したから f は任意の $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で全微分可能であり，

担当教員：川平 友規　研究室：理学部A館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \;=\; f(x,y) + a\,\Delta x + b\,\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

(ただし $a = f_x(x,y)$, $b = f_y(x,y)$．これらは定数) と書けるのであった．ここで $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ おけば，この式はベクトルの内積を用いて

$$f(\boldsymbol{p}+\Delta\boldsymbol{p}) \;=\; f(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{V}\cdot\Delta\boldsymbol{p} + o(\|\Delta\boldsymbol{p}\|)$$

のように書ける．いま $\boldsymbol{V}$ は偏微分係数によって決まる固定されたベクトルだが，$\Delta\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p}$ からの変化分として，好きな方向を選ぶことができる．では f が最も増加するのはどの方向かというと，それは $\Delta\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{V}$ が同じ方向を向いているときである.（内積の幾何学的な意味を考えよ.）逆に最も減少するのは $\Delta\boldsymbol{p}$ が $-\boldsymbol{V}$ の向きを向いているときである．ベクトル $\boldsymbol{V}$ は点 $\boldsymbol{p}$ において f が最も変化する方向を表現するのである．これを関数 f の $\boldsymbol{p}$ における**勾配ベクトル** (gradient vector) と呼び，$\boldsymbol{V} = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{p})$ と表す．すなわち，

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{p}) \;:=\; (f_x(x,y), f_y(x,y)).$$

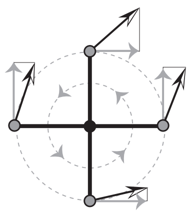
f が気圧を表すスカラー場であれば，風は $-\operatorname{grad} f$ の向きに流れる．麦畑は，$-\operatorname{grad} f$ 側にそよぐであろう．h が海抜高度を表すスカラー場であれば，$\boldsymbol{p}$ においたボールは $-\operatorname{grad} h$ の向きに転げ落ちる．麦畑に降り注いだ雨もまた，$-\operatorname{grad} h$ の方向に流れるであろう．

回転． つぎに，平面のベクトル場からスカラー場を構成する方法をふたつ紹介する．各成分が C^1 級なベクトル場 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ にたいし，

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) \;:=\; -u_y(x,y) + v_x(x,y) \;\in\; \mathbb{R}$$

で定まる関数（スカラー場）を $\boldsymbol{V}$ の**回転** (rotation) とよぶ．[1]

この量の直感的な意味は，次のように説明される：$\boldsymbol{V}$ が風速をあらわすとしよう．点 $\boldsymbol{p}$ においた図のような十字型の風車（直径 2ϵ）を置くとき，その端点における風で風車の回転に寄与する分の合計は（左回りを正の向きと考えると）



$$v(x+\epsilon,y) - u(x,y+\epsilon) - v(x-\epsilon,y) + u(x,y-\epsilon)$$

と計算される．この値が $2\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})\,\epsilon + o(\epsilon)$ と表されるのである．

実際，u, v は C^1 関数であり全微分可能なので，上の式に $u(x,y+\epsilon) = u(x,y) + u_y(x,y)\epsilon + o(\epsilon)$ などを代入して整理すると，$2\{-u_y(x,y)+v_x(x,y)\}\epsilon + o(\epsilon) = 2\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})\,\epsilon + o(\epsilon)$ となる．

グリーンの定理再訪． C を単純閉曲線，Ω をその内部とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ にたいして，

$$\int_C \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{p} \;=\; \iint_D \operatorname{rot}\boldsymbol{V}\,dx\,dy$$

が成り立つ．$\boldsymbol{V}$ の成分として $(P(x,y), Q(x,y))$ を代入すれば，これが「グリーンの定理」そのものだということがわかる．

発散． もうひとつ，ベクトル場からスカラー場を構成する方法を紹介する．上と同じベクトル場 $\boldsymbol{V}$ にたいし，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) \;:=\; u_x(x,y) + v_y(x,y) \;\in\; \mathbb{R}$$

で定まる関数（スカラー場）を $\boldsymbol{V}$ の**発散** (divergence) とよぶ．$\boldsymbol{p}$ の周りに一辺が $\epsilon > 0$ の正方形をおき，そこでの風の「流出量 − 流入量」を計算すると，$\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})\,\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$ になる．

[1] 3 次元ベクトル場の回転はベクトル場となる．3 次元の場合，回転軸の方向を表現する必要があるからである．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ガウスの発散定理． $C = \{\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}$ を滑らかな単純閉曲線とし，Ω をその内部とする．与えられた C^1 級ベクトル場 $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ にたいし，$\boldsymbol{V}^* = \begin{pmatrix} -v(x,y) \\ u(x,y) \end{pmatrix}$ とするとき，$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \operatorname{rot} \boldsymbol{V}^*$ が成り立つ．よってグリーンの定理より，

$$\int_C \boldsymbol{V}^* \cdot d\boldsymbol{p} \;=\; \iint_D \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, dx\, dy.$$

一般にガウスの発散定理は次のように解釈（表現）される：$\boldsymbol{p}(t)$ における C の外向き法線ベクトル $\boldsymbol{p}^*(t) = (y'(t), -x'(t))$ を考えると，

$$\int_C \boldsymbol{V}^* \cdot d\boldsymbol{p} \;=\; \int_a^b \boldsymbol{V}^*(\boldsymbol{p}(t)) \cdot \boldsymbol{p}'(t)\, dt \;=\; \int_a^b \boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}(t)) \cdot \boldsymbol{p}^*(t)\, dt$$

が成立する．これは左辺がベクトル場の曲線 C にそった流出量であることを意味しており，右辺の積分（流出入量の合計）の意味と合致する．

期末試験準備用自宅模擬テスト

問題 1． つぎの積分の値を計算せよ．

(1) $D = \{(x, y) \mid |x + 2y| \le 1,\ |x - y| \le 1\}$ にたいし，

$$I = \iint_D (x - y)^2\, dxdy.$$

(2) $D = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\right\}$ にたいし，

$$I = \iint_D x e^{-y^2}\, dxdy.$$

問題 2． $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $I = \iint_D f(x)\, dxdy$ を求めよ．ただし $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\right\}$ とする．

(2) $f(x, y)$ の $(x, y) = (0, 0)$ における 2 次テイラー展開（2 次多項式＋剰余項）を求めよ．

(3) $g(x, y)$ を上で求めた f のテイラー展開で剰余項を除いた部分とする．このとき，$J = \int_D g(x)\, dxdy$ と I はどちらが大きいか？

問題 3． $a > 0$ とする．xyz 空間内の 2 つの円柱 $x^2 + y^2 \le a^2$ と $y^2 + z^2 \le a^2$ とが交わる部分の体積を求めよ．