

数理科学展望 I (オムニバス講義)・シラバス

作成日：October 1, 2012 Version：1.1

担当教員：川平友規，松本耕二，松本詔（講義担当順）

講義の目的（コースデザインより）： この講義の目的は「数学の世界にはこの先どんなものがあり，どれだけの広がりをもっているか」を体験することにある．もちろん，無限の可能性の中から限られた題材を選ぶことになってしまうが，少しでも幅を持たせるため講義は 3 人の教員が行う．より具体的には，各教員が数回の講義を独立に行う形（オムニバス形式）となる．普段の講義はどちらかと言えば基礎力，論理的思考を身につけるための「足腰を鍛える」側面が強いが，この講義では題材やアイディアの紹介，またそれが科学や社会の中でどのように使われるか，等の視点を提供することに力点が置かれる．可能ならば数学の最新の話題や各分野の有機的なつながりも見えるようにしたい．

講義日と授業内容（予定）：

講義日	曜日	担当者と内容
10 月 1 日	月	川平友規 その 1: フラクタルと複素力学系入門
10 月 15 日	月	
10 月 22 日	月	
10 月 29 日	月	
11 月 5 日	月	松本耕二 その 2: 保型形式
11 月 12 日	月	
11 月 19 日	月	
11 月 26 日	月	
12 月 3 日	月	松本詔 その 3: 行列式とパフィアン
12 月 10 日	月	
12 月 17 日	月	
12 月 25 日	火	
1 月 9 日	水	講義予備日
1 月 21 日	月	講義予備日

成績評価の方法： 各教員が出題するレポート課題により，総合的に評価する．具体的には，3 人のそれぞれの判定で全て「可」以上を合格最低ラインとし，その中で一番良い判定を全体の成績とする．

レポート問題の提示方法・レポートの提出方法は各担当教員が 1 回目の講義で詳しく説明するので，必ず出席すること．

川平担当分の講義詳細

講義の目的 (担当教員別コースデザインより)： フラクタル集合とは、「自己相似性」をもった集合の総称である。たとえば円周の一部を拡大すると線分のように見えるが、自然の海岸線はどのスケールの地図でも同じようにギザギザした線で表現され、決して線分や円周のように見えることはない。どんなに小さな「部分」をとっても全体と同様の構造をもつ、というのが「自己相似性」である。

このフラクタル集合を体系的に生成できるのが、「力学系」とよばれるシステムである。たとえば、漸化式 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ (c は複素定数) が生成する複素数列の全体をひとつの動的なシステム(「複素力学系」)と解釈することで、そのカオス部分としてフラクタル集合が現れる。この集合はもちろん複素定数 c に依存し、驚くほどの多様な変化を見せてくれる。

この講義では、これまでに学習した平面集合の位相、複素関数論の内容を復習しながら、フラクタル集合と上述の複素力学系について解説したいと思う。

講義ウェブサイト： <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/12W-tenbou.html>
配布されたプリントが pdf 形式でダウンロードできます。また、毎週の進捗状況についてコメントしていきます。

教科書および参考書： 教科書は使用しません。参考書として以下をあげておきます：

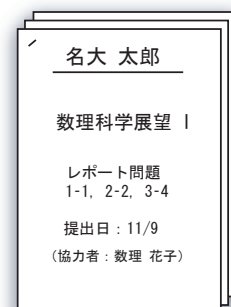
- L.V. アールフォルス.『複素解析』
- K. ファルコナー.『フラクタル幾何学の技法』
- 谷口 雅彦.『フラクタル曲線についての解析学』
- 川平 友規.『マンデルブロー集合 — 2 次多項式の複素力学系入門』

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/mandel.pdf>

- R. Devaney.『カオス力学系の基礎 (第 2 版)』

川平担当分のレポートについて： レポート問題はおもに講義中に
出題しますが、問題をまとめたプリントも配布する予定です。

- **提出期間：**10 月 15, 22, 29 日の講義開始時、もしくは 10 月 30 日～11 月 19 日、教育研究支援室のレポート提出ボックスへ。
- **評価の目安：**3 問以上正答で合格 (可以上)。
- **提出様式：**必ず右図のような表紙をつけてください。表紙のないレポートは受けとらない場合があります。
- 受講者同士で協力し合って解答することを奨励します。ただし、レポートには協力者の名前も明記するようにしてください。(それによって減点されることは一切ありません。)
- **返却：**レポートは採点の上、講義中もしくは 11 月以降の Cafe David (月曜日) にて返却します。返却が済むまで成績評価の対象とはしないので、レポートは必ず受け取るようにしてください。



- ・必ずA4サイズ、表紙をつける。
- ・名前は上の方に大きく書く。
- ・左上をホチキスで留める。
- ・解いた問題の番号、提出日を書く。
- ・裏面はなるべく使わない。

オフィスアワー： 私のオフィスアワーは、合同オフィスアワー「Cafe David (カフェ・ダヴィド)」の 月曜日, 12:00-13:30 に設定しています。授業中・授業後の質問も大歓迎です。

第1回目：フラクタルの例

作成日：October 15, 2012 Version：1.1

フラクタル

フラクタル (fractal) とは、ある種の「自己相似性」をもつこと。もしくはそのような形状をもつもの。ラテン語の fractus (バラバラ, の意味) をもとに、マンデルブロー (Benoit Mandelbrot, 1924–2010) が作った言葉。

ここで**自己相似性** (self-similarity) とは、全体と部分が似ていることをさす。¹

例. 海岸線, 木, カリフラワー, カントールの3進集合 (図2), コッホ曲線, シェルピンスキー・ガスケット, etc (図1)。

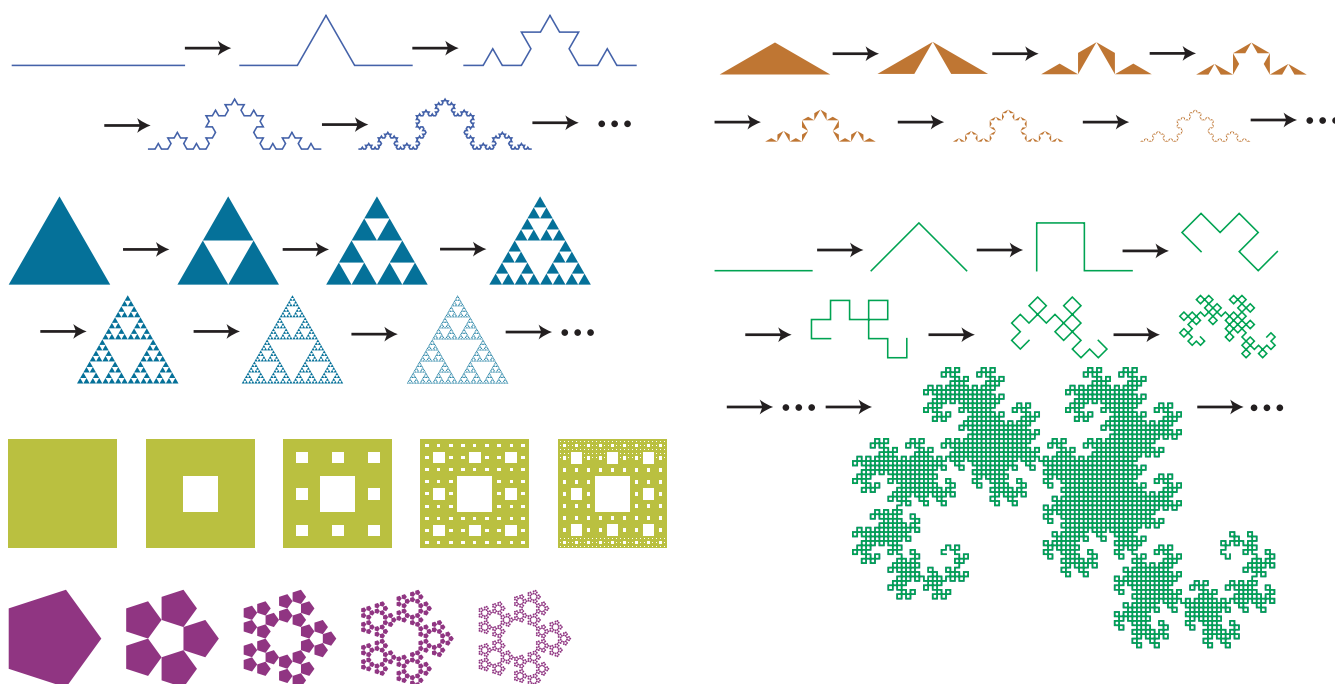


図 1: 左列は上から, コッホ曲線, シェルピンスキー・ガスケット, シェルピンスキー・カーペット, ペンタゴン. 右列は上がコッホ曲線, 下がハイウェイ・ドラゴン. 単純なルールで図形を操作していった「極限」.

講義の目標.

- フラクタル集合の作り方 (レシピ) を学ぶ.
- フラクタル集合の複雑さを数値化 (次元).
- 「2 次多項式の力学系」が生成するフラクタル集合について調べる.

¹ 「フラクタル」も「自己相似性」も、数学的な定義が複数提唱されていて、これが決定版、というものがない.

レシピその 1. カントール集合.

$I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ にたいし, 写像 $T_0, T_1 : I \rightarrow I$ を

$$T_0(x) := \frac{x}{3} \quad T_1(x) := \frac{1}{3}(x-1) + 1$$

と定める. これらの写像を用いて帰納的に,

$$\begin{aligned} E_0 &:= I \\ E_1 &:= T_0(E_0) \cup T_1(E_0) \\ E_2 &:= T_0(E_1) \cup T_1(E_1) \\ &\vdots \\ E_{n+1} &:= T_0(E_n) \cup T_1(E_n) \end{aligned}$$

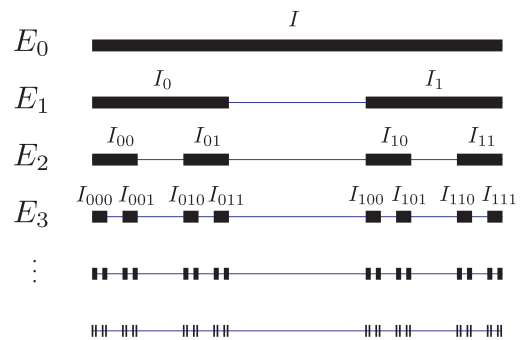


図 2

と定める.

☆ レポート問題 1-1. 次を示せ:

- (1) $\forall n \geq 0, E_{n+1} \subsetneq E_n$.
- (2) $\forall n \geq 0, E_n$ は空でないコンパクト集合.

カントール集合の定義と性質. いま,

$$C := \bigcap_{n \geq 0} E_n \subset I$$

を**カントールの 3 進集合** (Cantor's triadic set) とよぶ.

定理 1-1 (カントール集合の 3 進集合の性質). 集合 C は次をみたす:

- (ア) C は空でないコンパクト集合.
- (イ) C は全不連結集合である. すなわち, 連結成分はすべて一点からなる.
- (ウ) $C = T_0(C) \cup T_1(C)$. (不変性, もしくは自己相似性)
- (エ) C は長さ (1 次元ルベグ測度) ゼロ.
- (オ) C は非可算濃度をもつ. すなわち, 任意の写像 $f : \mathbb{N} \rightarrow C$ は全射でない.

(ア) の証明は簡単 (講義で示した). (イ) を証明するために, 講義では図 2 のような区間の縮小列を用いて, C の点を「番号付け」する

$$f : \Sigma \rightarrow C$$

という全単射が存在することをまず確認した. ただし, $\Sigma = \{u_1 u_2 \cdots \mid u_k = 0 \text{ もしくは } 1, k \in \mathbb{N}\}$, すなわち 0 と 1 からなる片側無限列全体の集合である.

定理 1.1 (ウ) の証明するには, 次を示せばよい. ((a) は講義で証明済.)

$$(a): C \supset T_0(C) \cup T_1(C) \quad \text{かつ} \quad (b): C \subset T_0(C) \cup T_1(C)$$

- ☆ レポート問題 1-2. 上の (b) を示せ.
- ☆ レポート問題 1-3. 定理 1.1 (エ) を示せ.
- ☆ レポート問題 1-4. 定理 1.1 (オ) を示せ.

レシピその 2 : コッホ曲線.

カントール集合のレシピと同様に, コッホ曲線を次のように定義できる. (図 1 の右上参照.)

いま $s = e^{\pi i/6}/\sqrt{3} \in \mathbb{C}$ とおくとき, $0, 1, s$ を頂点とする複素平面上の三角形を I とする. さらに, $T_0, T_1 : I \rightarrow I$ を

- T_0 は $0, 1, s$ をこの順で $0, s, 1/3$ に写す相似変換.
- T_1 は $0, 1, s$ をこの順で $s, 1, 2/3$ に写す相似変換.

とする. このとき帰納的に,

$$E_0 := I, \quad E_{n+1} := T_0(E_n) \cup T_1(E_n) \subsetneq E_n$$

と定義し, その共通部分

$$K := \bigcap_{n \geq 0} E_n$$

をコッホ曲線 (Koch's curve) とよぶ.

☆☆ レポート問題 1-5. 集合 K は次を満たすことを示せ.

- (1) K は空でないコンパクト集合.
- (2) 全射 $g : \Sigma \rightarrow K$ が存在する.
- (3) K は面積 (2 次元ルベーグ測度) ゼロ.
- (4) K は非可算濃度をもつ.

☆☆ レポート問題 1-6. 集合 K は閉区間 $[0, 1]$ と同相であることを証明せよ.

(☆ふたつの問題は発展問題, 2 問分のウェイトで評価します.)

第2回目：IFS と次元いろいろ

作成日：October 22, 2012 Version：1.1

フラクタルのレシピ (復習)

レシピその1：カントール集合. $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ にたいし, 写像 $T_0, T_1 : I \rightarrow I$ を

$$T_0(x) := \frac{x}{3} \quad T_1(x) := \frac{1}{3}(x-1) + 1$$

と定める. これらの写像を用いて帰納的に,

$$E_0 := I, \quad E_{n+1} := T_0(E_n) \cup T_1(E_n)$$

と定める. このとき $E_{n+1} \subsetneq E_n$ であり,

$$C := \bigcap_{n \geq 0} E_n \subset I$$

を**カントールの3進集合** (Cantor's triadic set) とよぶ.

レシピその2：コッホ曲線. $s = e^{\pi i/6}/\sqrt{3} \in \mathbb{C}$ とし, $0, 1, s$ を頂点とする複素平面上の三角形を I とする. このとき写像 $T_0, T_1 : I \rightarrow I$ を

$$T_0(x) := s\bar{z} \quad T_1(x) := \bar{s}(\bar{z}-1) + 1$$

と定める.

$$E_0 := I, \quad E_{n+1} := T_0(E_n) \cup T_1(E_n) \subsetneq E_n$$

と定義し, その共通部分

$$K := \bigcap_{n \geq 0} E_n$$

を**コッホ曲線** (Koch's curve) とよぶ.

定理 2-1 (コッホ曲線の性質, レポート 1-5, 1-6) 集合 K は次を満たす.

- (1) K は空でないコンパクト集合.
- (2) 全射 $g : \Sigma \rightarrow K$ が存在する.
- (3) K は面積 (2次元ルベグ測度) ゼロ.
- (4) K は非可算濃度をもつ.
- (5) 集合 K は閉区間 $[0, 1]$ と同相. (「曲線」という名の正当性.)
- (6) $K = T_0(K) \cup T_1(K)$. (自己相似性)

レシピその3：シェルピンスキー・ガスケッ. 前回のプリント図1, 左列の2段目 (青いやつ.)

レシピその4：シェルピンスキー・カーペット. 前回のプリント図1, 左列の3段目 (黄緑色のやつ.)

IFS

IFS とは Iterated Function System (反復関数系) の略語であり, 次のように定義する.

定義 (IFS): $X \subset \mathbb{R}^n$ を空でないコンパクト集合とする. その上の写像の族 $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ ($m \geq 2$) が次を満たすとき, X 上の **IFS** とよぶ: すべての $i = 1, \dots, m$ にたいし, 定数 $r_i \in (0, 1)$ が存在して,

$$(*) \quad \forall x, y \in X, \quad \|F_i(x) - F_i(y)\| \leq r_i \|x - y\|$$

を満たす. ただし $\|\cdot\|$ はユークリッド的長さ.

注. (*) より, F_i たちはそれぞれ連続 (リプシッツ連続) である.

例. レシピその 1 は $X = I \subset \mathbb{R}$ 上の, その 2 は $X = I \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ 上の IFS. この場合, (*) に対応する式は不等号ではなく等号にできる.

☆ **レポート問題 2-1.** レシピその 3, その 4 を与える IFS を (複素数を用いて) 具体的に求めよ.

IFS の基本性質

$X \subset \mathbb{R}^n$ を空でないコンパクト集合, その上の写像の族 $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ ($m \geq 2$) を X 上の IFS とするとき, 任意の部分集合 $A \subset X$ にたいし

$$\tilde{F}(A) := F_0(A) \cup \dots \cup F_m(A)$$

と表すことにする. 次の定理は, これまでに紹介したレシピその 1 から 4 の自己相似集合に統一的な解釈を与える:

定理 2-2 (IFS のアトラクター) 上の IFS は次をみたす:

(ア) $\tilde{F}(E) = E$ を満たす空でないコンパクト集合 $E \subset X$ が一意的存在する. (E はこの IFS の **アトラクター** と呼ばれる.)

(イ) $E_0 := X$, $E_{n+1} := \tilde{F}(E_n)$ ($n \geq 0$) とおくと, $E_{n+1} \subsetneq E_n$ かつ $E = \bigcap_{n \geq 0} E_n$.

証明の準備 (記号など).

- $\text{Comp}^*(X)$ で, X に含まれる空でないコンパクト集合全体を表す. (集合の集合.)
- $A \in \text{Comp}^*(X)$ および $\delta > 0$ にたいし, A の δ -近傍を

$$N_\delta(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists a \in A, \|x - a\| < \delta\}$$

と定義.

- $A, B \in \text{Comp}^*(X)$ にたいし, その **ハウスドルフ距離** を次で定義:

$$d(A, B) := \inf \{\delta > 0 \mid N_\delta(A) \subset B \text{ かつ } N_\delta(B) \subset A\}$$

命題 2-3. $\text{Comp}^*(X)$ はハウスドルフ距離 d によって距離空間となる. すなわち, ハウスドルフ距離は次を満たす: 任意の $A, B, C \in \text{Comp}^*(X)$ にたいし,

(D1) $d(A, B) \geq 0$, ただし等号は $A = B$ のときに限る.

(D2) $d(A, B) = d(B, A)$.

(D3) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

☆ **レポート問題 2-2.** 上の命題 2-3 を証明せよ.

注. じつは X がコンパクトであることを用いると, $\text{Comp}^*(X)$ が点列コンパクトである ($:=$ 任意の点列は $\text{Comp}^*(X)$ 内に集積点をもつ) ことが証明できる.

次の事実が知られている.

定理 2-4 (完備性). $(\text{Comp}^*(X), d)$ は完備距離空間である. すなわち, すべてのコーシー列は $\text{Comp}^*(X)$ 内で収束する.

縮小写像定理 (固定点定理, 不動点定理などともよばれる). 一般の完備距離空間にたいし, 次が成り立つ:

定理 2-5 (縮小写像定理). (S, d) を完備距離空間とする. また, 写像 $F: S \rightarrow S$ はある $r \in (0, 1)$ にたいして

$$(**) \quad \forall x, y \in S, \quad d(F(x), F(y)) \leq r d(x, y)$$

を満たすとする. このとき, F は S 内に唯一の固定点をもつ. すなわち, $F(x_0) = x_0$ を満たす $x_0 \in S$ がひとつだけ存在する.

☆ **レポート問題 2-3.** 定理 2-5 を証明せよ.

定理 2-2 の証明のスケッチ

まず $\tilde{F}$ はコンパクト集合をコンパクト集合にうつすので, 写像 $\tilde{F}: \text{Comp}^*(X) \rightarrow \text{Comp}^*(X)$ を定めることに注意. さらに任意の $A, B \in \text{Comp}^*(X)$ にたいし,

$$d(\tilde{F}(A), \tilde{F}(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} r_i \right) d(A, B)$$

が成り立つ. $\tilde{r} := (\max_{1 \leq i \leq m} r_i) < 1$ であるから, $\tilde{F}$ は定理 2-5 の $(**)$ を満たす. よって唯一の固定点 $E \in \text{Comp}^*(X)$ が存在する. 以上で (ア) が示された.

(イ) の証明はレポート問題とする. ■

☆ **レポート問題 2-4.** 上の定理 2-2 (イ) を証明せよ.

(HINT: $d(E_{n+1}, E) = d(\tilde{F}(E_n), E) \leq \tilde{r} d(E_n, E)$ を示せば十分.)

次元いろいろ

次元その 1：相似次元． X 上の IFS $\{F_1, \dots, F_m\}$ の各 $F_i : X \rightarrow X$ が相似比 $r_i \in (0, 1)$ の相似変換であるとき、そのアトラクター E の**相似次元**を

$$r_1^d + r_2^d + \dots + r_m^d = 1$$

を満たす唯一の $d \geq 0$ として定義する．これを $d = \dim_S(E)$ と表す．

例． カントールの 3 進集合の場合、 $(\frac{1}{3})^d + (\frac{1}{3})^d = 1$ を解いて $d = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.631$ ．

☆ **レポート問題 2-5．** コッホ曲線、シェルピンスキー・ガスケット、シェルピンスキー・カーペットの相似次元の厳密値および有効数字 10 桁の近似値を求めよ．ただし、近似値の計算には *Mathematica* 等の計算機を用いてかまわない．

次元その 2：ボックス次元． $E \in \text{Comp}^*(\mathbb{R}^n)$ とする．また、 $\nu_r(E)$ で「 E を覆うのに必要な半径 r の閉円板の数」の最小値を表すことにする．もし極限

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{\log \nu_r(E)}{-\log r}$$

が存在するとき、これを E の**ボックス次元**とよび、 $\dim_B(E)$ で表す．

☆ **レポート問題 2-6．**

- (1) 任意の有界閉区間 $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ のボックス次元は 1 であることを示せ．
- (2) 集合 $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ のボックス次元は $1/2$ であることを示せ．

次元その 3：ハウスドルフ次元．

(a) $U \subset \mathbb{R}^n$ にたいし、その**直径** (diameter) を $\text{diam } U := \sup_{x, y \in U} \|x - y\|$ で定義する．

(b) $\delta > 0$ とする． $\mathbb{R}^n$ の集合の族 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ の δ -**被覆**であるとは、任意の $i \in \mathbb{N}$ にたいし $\text{diam } U_i \leq \delta$ かつ $E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ であることをいう．

(c) $s \geq 0$ および $\delta > 0$ にたいし、 $\mathcal{H}_\delta^s(E) := \inf \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } U_i)^s \in [0, \infty]$ とおく．ただし、 $\inf$ はすべての E の δ -被覆をわたるものとする．

(d) E の s **次元ハウスドルフ外測度**を $\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \rightarrow +0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \in [0, \infty]$ と定義する．

(e) E の**ハウスドルフ次元**を $\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} \infty & (0 \leq s < d) \\ 0 & (s > d) \end{cases}$ を満たす唯一の $d \geq 0$ として定義し、 $\dim_H(E)$ と表す．

例． E をカントールの 3 進集合、コッホ曲線、シェルピンスキー・ガスケット、シェルピンスキー・カーペットのいずれかとするとき、次の等式が成り立つ：

$$\dim_S(E) = \dim_B(E) = \dim_H(E).$$

第 3 回目：漸化式から力学系へ

作成日：October 29, 2012 Version：1.1

次元いろいろ (つづき)

$X \subset \mathbb{R}^n$ を空でないコンパクト集合, その上の写像の族 $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ ($m \geq 2$) を X 上の IFS とし, 各 F_i ($1 \leq i \leq m$) は相似比 $r_i \in (0, 1)$ の相似変換と仮定する. また, そのアトラクターを E で表すことにする. 前回定義した次元を思い出そう:

次元その 1：相似次元. $d = \dim_S(E) : \iff r_1^d + r_2^d + \dots + r_m^d = 1$ を満たす唯一の $d \geq 0$.

次元その 2：ボックス次元. $d' = \dim_B(E) : \iff d' = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{\log \nu_r(E)}{-\log r}$, ただし $\nu_r(E)$ は「 E を覆うのに必要な半径 r の n 次元閉円板の数」の最小値.

次元その 3：ハウスドルフ次元. $d'' = \dim_H(E) : \iff \mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} \infty & (0 \leq s < d'') \\ 0 & (s > d'') \end{cases}$ を満たす唯一の $d'' \geq 0$.

これらが一致する十分条件が知られている:

定理 3-1 (次元の一致). 相似変換からなる IFS が開集合条件を満たすとき, そのアトラクターの次元について次の等式が成り立つ:

$$\dim_S(E) = \dim_B(E) = \dim_H(E).$$

ただし, IFS $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ が開集合条件 (open set condition) を満たすとは, 次の 3 条件を満たす U が存在する場合を言う:

- (1) U は有界かつ空でない
- (2) $F_1(U), F_2(U), \dots, F_m(U)$ は互いに共通部分をもたない.
- (3) $U \supset F_1(U) \cup \dots \cup F_m(U)$.

定理 3-1 の証明はそれほど難しくないが, 長くなるので省略する. 興味があるひとは最初に挙げた参考文献を見てほしい.

例. E をカントールの 3 進集合, コッホ曲線, シェルピンスキー・ガスケット, シェルピンスキー・カーペットを生成する IFS は開集合条件を満たす. $U = X^\circ$ (内部) とすればよい.

漸化式から力学系へ

$z_0 \in \mathbb{C}$ をひとつ決めて, 漸化式

$$z_{n+1} = z_n^2 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

を考える. この漸化式は一般項 $z_n = z_0^{2^n}$ を持つので, $n \rightarrow \infty$ としたときの「ふるまい」は

- ア. $|z_0| < 1$ のとき, $|z_n| \rightarrow 0$.
- イ. $|z_0| > 1$ のとき, $|z_n| \rightarrow \infty$.
- ウ. $|z_0| = 1$ のとき, $|z_n| = 1$ のまま, 単位円から出ない.

ということがわかる。

より一般に、次の問題を考えよう：

問題. $f(z)$ を (複素係数の) 多項式とすると、

$$z_0 \in \mathbb{C}, \quad z_{n+1} = f(z_n) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

で定まる数列の、 $n \rightarrow \infty$ としたときの「ふるまい」について調べよ。

最初の漸化式は $f(z) = z^2$ で与えられるが、この場合一般項が求まるので、数列の「ふるまい」は完全に予知できる。しかし、一般の多項式 $f(z)$ について数列の一般項を求めることは不可能であり、なにか別の戦略が必要になる。

☆ **レポート問題 3-0 (追加問題).** すべての 2 以上の自然数 m にたいし、 $z_0 = z_m$ かつ $z_0 \neq z_k$ ($k = 1, \dots, m-1$) を満たす z_0 が単位円周上に存在することを示せ。

力学系の考え方

「問題」の漸化式で与えられる数列 $\{z_0, z_1, \dots\}$ を、

$$z_0 \xrightarrow{f} z_1 \xrightarrow{f} z_2 \xrightarrow{f} z_3 \xrightarrow{f} \dots \quad (1)$$

のように考えてみる。これは

$$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \dots$$

という関数が無限に繰り返し合成されるような状況で、ひとつの z_0 の像に注目した場合に得られる数列ということになる。

大げさだが、これを「宇宙」のモデルだと考えてみよう。すなわち、

「空間」= 複素平面 $\mathbb{C}$

「時間」= $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ (秒)

「運動法則」= 「点 z は 1 秒後に $f(z)$ に写る」

という「世界」を考えるのである。

このような設定のもと、上の

$$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \dots$$

はまさに「世界」の時間発展を表現していると考えられる。これを $\mathbb{C}$ 上の写像 f による**力学系** (dynamical system) とよぶ。¹力学系は本質的に「空間」と「運動法則」のペアによって決定される。(「時間」はある意味「運動法則」の中に織り込まれているので。) そこで力学系を表す記号として $(\mathbb{C}, f)$ を用いることにする。

軌道. いま (1) の数列は

$$z_0 \xrightarrow{f} f(z_0) \xrightarrow{f} f(f(z_0)) \xrightarrow{f} f(f(f(z_0))) \xrightarrow{f} \dots$$

¹一般に集合 X とその上の写像 $f: X \rightarrow X$ があれば、力学系は定義できる。とくに、 X として複素多様体、 f として正則写像があたえられた場合を**複素力学系** (complex dynamics) とよぶ。また、離散時間を用いる力学系は**離散力学系** (discrete dynamical systems) と呼ばれる。

のように書き直すことができ、 $f^n(z) := \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n \text{ 個}}(z)$ (ただし $f^0(z) = z$) という記号を導入すれば、 $z_n = f^n(z_0)$ と表されるわけである。与えられた力学系 $(\mathbb{C}, f)$ と $z_0 \in \mathbb{C}$ にたいし、 $\{f^n(z_0)\}_{n \geq 0}$ で定まる数列を初期値 z_0 の軌道 (orbit) とよぶ。したがって当初の問題は、

問題. $f(z)$ を (複素係数の) 多項式とすると、力学系 $(\mathbb{C}, f)$ が生成する軌道の「ふるまい」について調べよ。

と言い換えられる。

軌道の安定性

最初の $f(z) = z^2$ のケースを考えてみよう。いま初期値 z_0 をわずかに変化させて $z_\epsilon = z_0 + \epsilon$ ($\epsilon \in \mathbb{C}, |\epsilon|$ は十分小) としたとき、軌道がどのように変化するか考えてみよう。 ϵ が十分に小さければ、

ア. $|z_0| < 1$ のとき、 $|z_\epsilon| < 1$. よって $|f^n(z_\epsilon)| \rightarrow 0$. (変化なし：安定)

イ. $|z_0| > 1$ のとき、 $|z_\epsilon| > 1$. よって $|f^n(z_\epsilon)| \rightarrow \infty$ (変化なし：安定).

ウ. $|z_0| = 1$ のとき、 $|z_\epsilon| > 1, |z_\epsilon| < 1, |z_\epsilon| = 1$ いずれの可能性もありうる。よって $|f^n(z_\epsilon)| \rightarrow 0, |f^n(z_\epsilon)| \rightarrow \infty, |f^n(z_\epsilon)| = 1$ のいずれか. (変化あり：不安定)

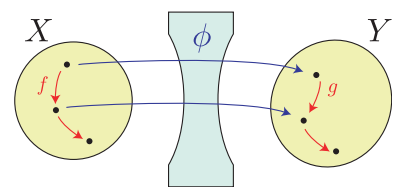
ということがわかる。ウのように大きな変化が生じる場合、数値計算の誤差などを考えるとき極めて重大な問題となる。これは計算精度を上げれば克服できる、という類のものではなく、力学系に内在する不安定性 (カオス性) である。

(複素) 力学系理論では、ア、イのように安定な軌道の初期値全体を **ファトウ集合** とよび、ウのような不安定性をもつ軌道の初期値全体を **ジュリア集合** と呼ぶ。²ジュリア集合がいわば力学系のカオス部分であり、一般に自己相似性をもつ集合となる。

力学系の共役

同じものでも見る角度や方法を変えると、ずいぶんと違ったものに見えることがある。たとえば時計を見るときあえてゆがんだガラス越しにみれば、サルバドール・ダリの描くゆがんだ時計のように見えるであろう。それでも、「60 秒で一周する」秒針の動きに本質的な変化はないから、時計としては機能するのである。

なにか複雑な動きをするシステムがあったとき、その複雑さは単に「見え方」から来ているのかもしれない。数学をやるときも、そのようなシステムの「見え方」の違いをうまく吸収して、より簡単なシステムに帰着させる工夫をすることが多い。



次の「力学系の共役」というのも、そのような工夫に一役買う概念である：

定義. $X, Y \subset \mathbb{C}$, 関数 $f: X \rightarrow X, g: Y \rightarrow Y$ にたいし、力学系 (X, f) と (Y, g) が **共役** (conjugate) であるとは、ある上への同相写像 $\phi: X \rightarrow Y$ が存在して、 $\phi \circ f = g \circ \phi$ が成り立つことをいう。

☆ **レポート問題 3-1.** 力学系 (X, f) と (Y, g) がある同相写像 $\phi: X \rightarrow Y$ によって共役であるとき、次を示せ：

²厳密には、複素関数族 $\{f^n\}_{n \geq 0}$ の正規性 (もしくは同程度連続性) を用いて (不) 安定性を定義する。

- (1) ある $x \in X$ について, $f^n(x) \rightarrow a \in X$ ($n \rightarrow \infty$) であれば, $g^n(\phi(x)) \rightarrow \phi(a) \in Y$ ($n \rightarrow \infty$).
- (2) ある $x \in X$ について, $f^n(x) = x$ ($n \geq 1$) であれば, $g^n(\phi(x)) = \phi(x)$.

定理 3-2 (2 次関数の力学系の正規化) . 一般の 2 次関数 $f(z) = az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$) にたいし, 力学系 $(\mathbb{C}, f)$ は次の 2 次関数による力学系 $(\mathbb{C}, g)$ と共役である:

$$g(w) = w^2 + C, \quad C = -b^2/4 + b/2 + ac \in \mathbb{C}.$$

ゆえに, 2 次関数による力学系を調べる場合, $f_c(z) = z^2 + c$ ($c \in \mathbb{C}$) の形の 2 次関数を考えれば十分である.

第 4 回目：2 次関数の力学系

作成日：October 29, 2012 Version：1.1

力学系の共役 (つづき)

定理 3-2 (2 次関数の力学系の正規化) . 一般の 2 次関数 $f(z) = az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$) にたいし, 力学系 $(\mathbb{C}, f)$ は次の 2 次関数による力学系 $(\mathbb{C}, g)$ と共役である:

$$g(w) = w^2 + C, \quad C = -b^2/4 + b/2 + ac \in \mathbb{C}.$$

実際, $w = \phi(z) = az + b/2$ とすれば, これは $\mathbb{C}$ から自身への同相写像 (相似変換) であり, $\phi \circ f = g \circ \phi$ をみちます.

以後は $f(z) = f_c(z) = z^2 + c$ ($c \in \mathbb{C}$) の形の 2 次関数による力学系を考える.

☆ **レポート問題 4-1 (別の正規化)** . 一般の 2 次関数 $f(z) = az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$) にたいし, ある複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して, 力学系 $(\mathbb{C}, f)$ は力学系 $(\mathbb{C}, \lambda w + w^2)$ と共役であることを示せ.

 B_c と K_c

以下 $c \in \mathbb{C}$ を任意に固定する. 一般に, 力学系 $(\mathbb{C}, f_c)$ の軌道は, 大雑把に次の二つに分類できる:

命題 4-1 $z \in \mathbb{C}$ の軌道は次のいずれか一方:

- (1) $|f_c^n(z)| \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$)
- (2) $\{f_c^n(z)\}_{n \geq 0}$ は有界.

注意. たとえば, $1, 1, 2, 1/2, 3, 1/3, \dots, n, 1/n, \dots$ のような軌道はありえない.

以後, 次の補題を繰り返し用いる:

補題 4-2 $|z| \geq 3 + |c|$ のとき, $|f_c(z)| \geq 2|z|$.

☆ **レポート問題 4-2.** 上の補題を示せ. (Hint: 三角不等式を用いる.)

証明 (命題 4-1) . (2) のタイプの軌道でなければ, ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $|f_c^m(z)| \geq 3 + |c|$ とできる. 補題 4-2 より, $k \in \mathbb{N}$ にたいし $|f_c^{k+m}(z)| = |f_c^k(f_c^m(z))| \geq 2^k |f_c^m(z)| \geq 2^k(3 + |c|) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$). すなわち z は (1) のタイプの軌道である. ■

定義. 命題 4-1 の (1), (2) に対応する軌道の初期からなる集合を次のように定義する:

- (1) $B_c := \{z \in \mathbb{C} \mid |f_c^n(z)| \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty)\}$, これを**無限の鉢**とよぶ.
- (2) $K_c := \{z \in \mathbb{C} \mid \{f_c^n(z)\}_{n \geq 0} \text{ は有界.}\}$, これを**充填ジュリア集合**とよぶ.

注意. $J_c := \partial K_c$ を**ジュリア集合**とよぶ. これは力学系の不安定部分であり, 前回のプリントで述べた正規族を用いた定義とも一致する.

注意. あきらかに, $B_c \sqcup K_c = \mathbb{C}$. ただし, 記号 $\sqcup$ は共通部分を持たない和集合 (disjoint union)

を表す.

例. $c = 0$ のとき,

$$B_0 = \{|z| > 1\}, \quad K_0 = \{|z| \leq 1\}.$$

このように B_c, K_c が具体的に表現できるケースは極めて稀である. 次の例も, その稀な例のひとつである.

例. $c = -2$ のとき,

$$B_{-2} = \mathbb{C} - [-2, 2], \quad K_{-2} = [-2, 2] \subset \mathbb{R}.$$

証明. $B_0 = \{|w| > 1\}$ とする. さらに写像 $\phi: B_0 \rightarrow \phi(B_0) \subset \mathbb{C}$ を $\phi(w) = w + 1/w$ で定義する. このとき, 次が成り立つ:

(ア) $\phi(B_0) = \mathbb{C} - [-2, 2]$.

(イ) ϕ は (中への) 同相写像.

(ウ) $f_{-2}(\phi(w)) = \phi(w^2)$.

☆ **レポート問題 4-3.** (ア), (イ), (ウ) を示せ.

さて (ウ) から, 力学系 (B_0, f_0) と $(\phi(B_0), f_{-2})$ は互いに共役であることがわかる. さらに $z = \phi(w) \in \phi(B_0) = \mathbb{C} - [-2, 2]$ とおくと, (ウ) の関係式から

$$f_{-2}^n(z) = f_{-2}^n(\phi(w)) = \phi(w^{2^n})$$

がなりたつ. ここで $|w| > 1$ より,

$$|\phi(w^{2^n})| = |w^{2^n} + 1/w^{2^n}| \geq |w^{2^n}| - 1/|w^{2^n}| \geq |w^{2^n}| - 1 \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

よって, $z \in B_{-2}$, すなわち $\mathbb{C} - [-2, 2] \subset B_{-2}$ を得る. さらに実関数としてのグラフから, $f_{-2}([-2, 2]) = [-2, 2]$ である. よって $z \in [-2, 2]$ であれば $f_{-2}^n(z) \in [-2, 2]$ がすべての n で成り立つ. すなわち $[-2, 2] \subset K_{-2}$. 以上より, $B_{-2} = \mathbb{C} - [-2, 2]$, $K_{-2} = [-2, 2]$. ■

さらに B_c, K_c の性質を見ていこう:

定理 4-3 (完全不変性など).

- (1) B_c は開集合.
- (2) K_c は空でないコンパクト集合.
- (3) $f_c(B_c) = B_c = f_c^{-1}(B_c)$ かつ $f_c(K_c) = K_c = f_c^{-1}(K_c)$. (完全不変性)

この (3) は, 力学系 (B_c, f_c) および (K_c, f_c) が互いに交わらない独立した力学系になっていることを示唆している.

証明 (定理 4-3). まず (1) を示す. $z_0 \in B_c$ を仮定すると, ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して, $|f_c^m(z_0)| > 4 + |c|$ が成り立つ. いま関数 $z \mapsto f_c^m(z)$ は連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して, $|z - z_0| < \delta$ のとき $|f_c^m(z) - f_c^m(z_0)| < 1$. よって $|f_c^m(z)| \geq 3 + |c|$. 補題 2-4 より, $z \in B_c$. これは B_c が開集合であることを示している.

次に (2) を示す. $K_c = \mathbb{C} - B_c$ と (1) の結果から, K_c は閉集合である. また補題 2-4 より $K_c \subset \{|z| < 3 + |c|\}$ が成り立つから, 有界でもある. すなわちコンパクトである. また, 自然数 n にたいし, 方程式 $f_c^n(z) = z$ は $\mathbb{C}$ 内に解をもつ (代数学の基本定理). そのような解は K_c に含まれるので, $K_c \neq \emptyset$.

(3) はレポート問題としよう. ■

☆ レポート問題 4-4. 定理 4-3 の (3) を示せ.

最大値原理の応用. 次の定理は, 複素関数論で学んだ最大値原理によって示される:

定理 4-4 (無限の鉢の連結性). B_c は連結. すなわち, B_c に「飛び地」はない.

最大値原理. 複素平面上のある有界閉集合 E 上で定義された連続関数 $g : E \rightarrow \mathbb{C}$ は, 定数関数でなく E の内部 E° で正則と仮定する. このとき, もしある $z_0 \in E$ が任意の $z \in E$ について $|g(z)| \leq |g(z_0)|$ を満たせば, $z_0 \in \partial E$ でなくてはならない.

証明 (定理 4-4). もし B_c が 2 つ以上の連結成分をもつならば, K_c のコンパクト性より (定理 4-3), 連結成分の少なくともひとつは有界である. それを U とする. $z_0 \in U$ をとると, これは無限の鉢に含まれるから $|f_c^m(z_0)| \geq 3 + |c|$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在する. 一方, $E = \bar{U} = U \cup \partial U$ とすれば, $g = f_c^m|_E$ は最大値原理の仮定をみたす. しかし $\partial E = \partial U \subset K_c$ であるから, $f_c^m(\partial E) \subset K_c \subset \{|z| < 3 + |c|\}$ となり, 矛盾. ■

系. K_c の内部 K_c° の連結成分はすべて単連結. (とくにリーマンの写像定理により, 円板と同相である.)

カントール集合と IFS (revisited)

命題 4-5. $|c| > 2$ のとき, $|z| \geq |c| (> 2)$ であれば $z \in B_c$.

証明. 仮定より, $|f_c(z)| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| = (|z| - 1)|z| \geq (|c| - 1)|z|$ である. $\lambda = |c| - 1 > 1$ とおくと, $|f_c^n(z)| \geq \lambda^n |z| \geq \lambda^n |c| \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). ■

これより, 0 の軌道

$$0 \xrightarrow{f_c} c \xrightarrow{f_c} c^2 + c \xrightarrow{f_c} (c^2 + c)^2 + c \cdots$$

の絶対値は無限大に発散する.

8 の字型曲線 (図 1). $z = c$ を含む円 $C := \{|z| = |c|\}$ の逆像 $f_c^{-1}(C)$ を調べると, ちょうど $z = 0$ のところでくびれた 8 の曲線になることがわかる. とくに, $U := \{|z| < |c|\}$, U_0 を $f_c^{-1}(U)$ の連結成分ふたつのうちひとつ, U_1 をそのもう一方だとすると, $U_1 \cup U_2$ は 8 の字曲線の中身であり, U の部分集合であることがわかる. いま U , U_0 , U_1 の閉包をそれぞれ I , I_0 , I_1 とおくと, 写像

$$f_c : I_0 \rightarrow I \quad f_c : I_1 \rightarrow I$$

はそれぞれ上への同相写像となることがわかる. いまその逆写像を

$$F_0 := (f_c|_{I_0})^{-1} : I \rightarrow I_0, \quad F_1 := (f_c|_{I_1})^{-1} : I \rightarrow I_1$$

と表せば, ペア $\{F_0, F_1\}$ は次の意味で「IFS」である:

ある $r = r_c \in (0, 1)$ が存在して, $i = 0, 1$, 任意の $x, y \in U$ にたいし

$$d_c(F_i(x), F_i(y)) \leq r d_c(x, y).$$

$$\text{ただし, } d_c(x, y) = \frac{|c||x - y|}{||c|^2 - \bar{x}y|}.$$

カントールの三進集合のときと同様に議論より, 次の定理を得る:

定理 4-6. $|c| > 2$ のとき,

- (1) K_c は全不連結. すなわちカントール集合.
- (2) $\Sigma = \{u_0 u_1 \cdots \mid u_i = 0 \text{ もしくは } 1\}$ とし, $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ を

$$\sigma(u_0 u_1 \cdots) := u_1 u_2 \cdots$$

と定義する. このとき全単射 $\phi_c: \Sigma \rightarrow K_c$ が存在して, $\phi_c \circ \sigma = f_c \circ \phi_c$ が成立する. すなわち, 力学系 (Σ, σ) は (K_c, f_c) と「共役」.

上で「共役」と括弧つきにしたのは, Σ に位相を入れておらず, ϕ_c が同相写像か考慮されていないからである. 実際には Σ が完備な距離空間であることがわかり, ϕ_c は同相写像となる.¹

マンデルブロー集合

定理 (ジュリアとファトゥ). K_c が連結でない $\iff 0 \in B_c$.

定義. $M := \{c \in \mathbb{C} \mid K_c \text{ が連結}\}$ をマンデルブロー集合という.

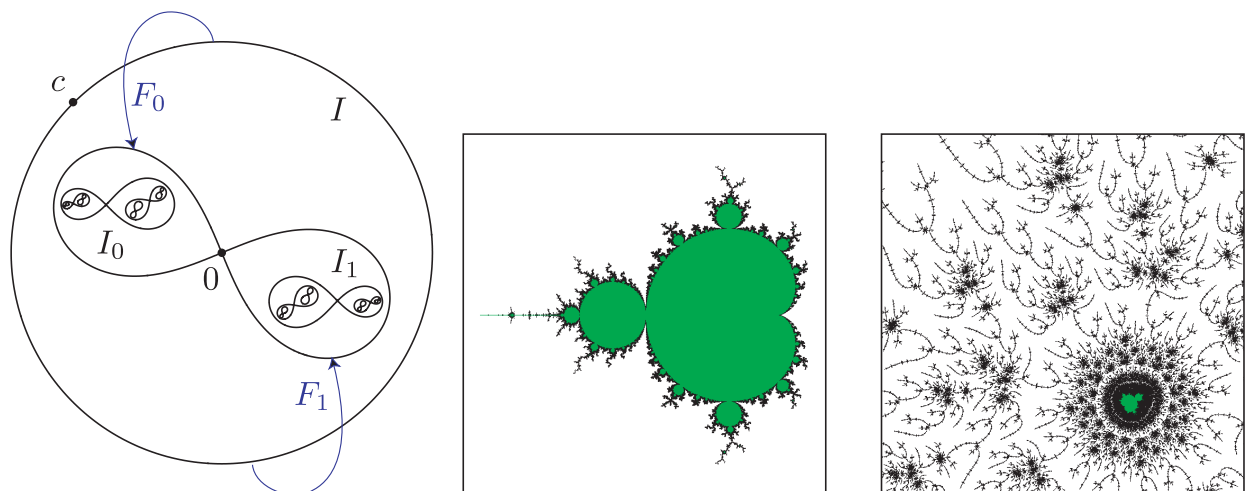


図 1: 左は $c = -2 + 2i$ のときの「IFS」の様子. 中央は M の全体像, 右はその一部を拡大したもの.

¹集合 Σ の元 $\underline{u} = u_1 u_2 \dots$, $\underline{v} = v_1 v_2 \dots$, にたいし, 距離を $d_\Sigma(\underline{u}, \underline{v}) := \sum_{n \geq 1} \frac{|u_n - v_n|}{2^n}$ と定める. この距離に関して, Σ は完備距離空間である.