

「数学展望 I」について

配布日：April 15, 2013 Version：1.1

担当教員：川平 友規 (Kawahira, Tomoki, 理学部数理学科・多元数理科学研究科)

担当 TA：吉田 繁広 (Shigehiro, Yoshida, 大学院多元数理科学研究科博士課程)

講義ウェブサイト：

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/13S-tenbou.html>

配布されたプリントが pdf 形式でダウンロードできます。また、毎週の進捗状況についてコメント、していきます。

本授業の目的およびねらい：

講義日と授業内容 (予定)：

4 月 15 日	複素数あらわる
4 月 22 日	複素数の幾何学
5 月 13 日	オイラーの公式 $e^{\pi i} = -1$
5 月 20 日	<休講の予定>
5 月 27 日	3 次方程式・4 次方程式の解法
6 月 3 日	<休講の予定>
6 月 10 日	代数学の基本定理
6 月 17 日	数列と漸化式・力学系
6 月 24 日	無限遠点とリーマン球面
7 月 1 日	メビウス変換
7 月 8 日	メビウス変換と行列
7 月 15 日*	<祝日：補講予備日>
7 月 20 日*	<土曜：補講予備日>
7 月 22 日	メビウス変換の分類
7 月 29 日*	<補講予備日>

* 印のついた日のうち、2 つ選んで補講を行う。

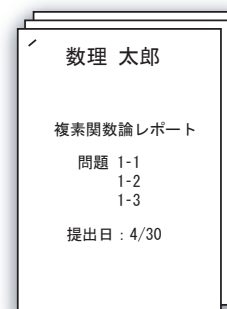
成績評価の方法：「履修取り下げ制度」を適用する。

- レポートおよびクイズ (小テスト) の点数の合計点をもとに評価する。
- 履修取り下げ届が提出された場合は「欠席」とする。それ以外は評価の目安として 59 点以下を F, 60 - 69 点を C, 70 - 79 点を B, 80 - 89 点を A, 90 - 100 点を S とする。

レポートの様式：レポートの締め切り (提出日) については講義中に指示します。提出する際には、必ず A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙を使用し、右図のような表紙をつけてください。提出日の授業開始前に教壇前の机に提出しておいてください。

受講者同士で協力し合って解答してもかまいませんが、必ず協力者の名前も明記するようにしてください。(それによって減点されることはありません。)

レポートは採点して返却します。返却が済むまで、成績への加点の対象とはしないので注意してください。



- ・ 名前は上の方に大きく書く。
- ・ 左上をホチキスで留める。
- ・ 解いた問題の番号、提出日を書く。
- ・ 裏面はなるべく使わない。

オフィスアワー：授業中・授業後の質問は大歓迎です。それ以外の時間に質問したい場合は、ぜひオフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を活用してください。私のオフィスアワーは、理学部数学科内の合同オフィスアワー「Cafe David (カフェ・ダヴィド)」の時間に設定しています。Cafe David は月曜から金曜の 12:00–13:30 にオープンし、コーヒー・紅茶を無料で提供しています。私の担当は月曜日、場所は理 1 号館 2 階のエレベーター前です。

よく使う記号など：数の集合

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (1) \mathbb{C} : 複素数全体 | (2) \mathbb{R} : 実数全体 | (3) \mathbb{Q} : 有理数全体 |
| (4) \mathbb{Z} : 整数全体 | (5) \mathbb{N} : 自然数全体 | (6) \emptyset : 空集合 |

ギリシャ文字

- | | | | | |
|-------------------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| (1) α : アルファ | (2) β : ベータ | (3) γ, Γ : ガンマ | (4) δ, Δ : デルタ | (5) ϵ : イプシロン |
| (6) ζ : ゼータ | (7) η : エータ | (8) θ, Θ : シータ | (9) ι : イオタ | (10) κ : カッパ |
| (11) λ, Λ : ラムダ | (12) μ : ミュー | (13) ν : ニュー | (14) ξ, Ξ : クシー | (15) \omicron : オミクロン |
| (16) π, Π : パイ | (17) ρ : ロー | (18) σ, Σ : シグマ | (19) τ : タウ | (20) υ, Υ : ウプシロン |
| (21) ϕ, Φ : ファイ | (22) χ : カイ | (23) ψ, Ψ : プサイ | (24) ω, Ω : オメガ | |

その他

- $x \in X$ と書いたら、「 x は集合 X に属する」すなわち「 x は X の元」という意味。
- 「…をみたす X の元全体の集合」を $\{x \in X \mid (x \text{ に関する条件})\}$ の形で表す。たとえば「 $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ 」
- $X \subset Y$ と書いたら、「集合 X は集合 Y に含まれる」という意味。
- $f: X \rightarrow Y$ と書いたら、「 f は集合 X の元に集合 Y の元をひとつ対応させる関数」という意味。数学では「関数」という言葉のかわりに「写像」という言い方をすることが多い
- $A := B$ と書いたら A を B で定義する、という意味。たとえば $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 。
- (文章 1) $:\iff$ (文章 2) と書いたら、(文章 1) の意味は (文章 2) であることと定義する、という意味。たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 $:\iff$ ある実数 M が存在して、すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$ 。」

複素数への道

配布日：April 22, 2013 Version：1.1

第 1 回 (4/15) の講義内容をまとめておきます。

数の歴史 (複素数を除く)

<古代> 自然数の使用：1, 2, 3, ...

<古代エジプト> 分数 (有理数) の使用： $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots$, etc.

ちなみに $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ のように、 $\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ の形で表現した。

<前 5C ごろ, ギリシャ> ピタゴラス学派が無理数を発見 (たとえば辺の長さが 1 の正方形の斜辺) したが、最初はその発見を隠そうとしたとされる。

<1C ごろ, インド> 0 (記号としてのゼロ) の発見。記数法を比較すると...

- インド式：808
- 中国式：八百八
- ローマ式：DCCCVIII

<7C ごろまで, インド> 0 (ゼロ) および負の数の算法の確立。「正の数」は「資産」, 「負の数」は「借金」。

<18C ごろまで, ヨーロッパ> 負の数を数として認めない風潮。

<1872, ドイツ> デデキント (Dedekind, 1831 – 1916) が実数の厳密な定義を提唱。

<1891, イタリア> ペアノ (Peano, 1858 – 1932) が自然数の厳密な定義を提唱。

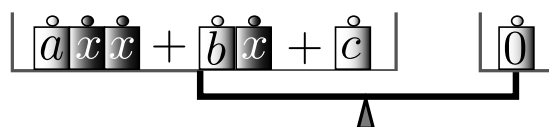
<19C, ドイツ> クロネッカー (Kronecker, 1823 – 1891)：「整数は神が創ったものだが、他は人間が作ったものだ。」

ポイント.

- 人類が新しい「数」を受け入れるまでには根強い抵抗感があった。
- 一方で 17C ごろまでには微分積分学も成立しており、計算法は確立していた。
- 実数や自然数も、数学的に厳密に定式化されたのはごく最近 (150 年以内の出来事)。

複素数の発見へ

$a \neq 0, b, c$ を実数として、2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を考えよう。(ちなみに解の公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ は 6C 頃にはすでにインドで発見されていた。) 2 次方程式は次のようにイメージすることができる：



すなわち、この天秤が「つり合う」分 x を探そう、ということだ。

例. $(a, b, c) = (1, 0, -2)$ のとき。方程式は

$$1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-2) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}: \text{無理数}$$

となる。注意すべきは、 (a, b, c) の分胴を「整数」というカテゴリーから準備したのに、天秤が「つり合う」ような x の分胴はそこには見つからず、「無理数」を含んだ「実数」というよりひろいカテゴリーに属してしまう、ということだ。このように方程式の解は、その係数のカテゴリー内に見つからないことがある。これが数の体系を広げるひとつの大きな動機となる。

例. $(a, b, c) = (1, 0, 3)$ のとき. 方程式は $x^2 + 3 = 0$ となるが、もし x が実数ならば $x^2 \geq 0$ より方程式の左辺は 3 以上. すなわち「実数」という分胴セットのなかには天秤が「つり合う」 x がみつからない. 昔の人は「この方程式自体がナンセンス」と切り捨てた. しかし現代人なら、分胴のセットを広げて、すなわち「数」のカテゴリーを広げて天秤が「つり合う」ような x を見つけたくなる.

重要な考察. さきほど $x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$ としたが、この方程式はまだ解けていない. なぜなら $\sqrt{2}$ は $(\sqrt{2})^2 = 2$ となる数を表すただの記号であって、そういう数が本当にあるのか、という考察がなされていない. 記号を導入して、「解けたふり」をしているだけなのだ.

そこで、調子に乗って $(\sqrt{-3})^2 = -3$ を満たす数を表す記号 $\sqrt{-3}$ を導入してみよう. これで方程式 $x^2 + 3 = 0$ も「解けたふり」ができて、解は $x = \pm\sqrt{-3}$ と書ける.

例. $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ のとき. 方程式は $x^2 + x + 1 = 0$. 解の公式より $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ だが、昔の人であれば「意味のない解が出てきた、忘れよう。」となる. しかしちゃんと計算してみると、

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}^2 + \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} + 1$$

は 0 になることがわかって、計算上はバッチリつじつまが揃っている.

< 16C, イタリア > デル・フェロ, タルタリアが 3 次方程式の解の公式を発見. これは虚数なしでは表現できないものだった. また, フェラリが 4 次方程式の解法も発見.

< 1541, イタリア > カルダノ (1501 - 1576) が 3 次・4 次方程式の解法を出版. これには「足して 10, かけて 40 となるふたつの数はなにか?」という問いにたいし, 答えは「 $5 + \sqrt{-15}$ と $5 - \sqrt{-15}$ 」と書かれているらしい. (虚数が初めて数として「認知」された?)

< 17C 頃まで > それでも $\sqrt{-3}$ のような数は「無意味」とされていた. デカルトが虚数 (imaginary number) という呼び名を作ったのもこの頃.

< 18C, ヨーロッパ > 複素平面の発見. (ガウス? 複素数の幾何学的解釈の確立. 複素数が感覚的な実体を得た.)

< 1799, ドイツ > ガウス (1777 - 1855) が代数学の基本定理『複素数の係数をもつ方程式は複素数の解をもつ』を証明. (複素数は完全な「分胴セット」なのだ!)

< 19C > 複素関数論の発展 (ガウス, コーシー, ワイエルストラス). 複素数の厳密な定義 (ハミルトン, 四元数も発見.)

ポイント.

- 方程式を解く過程で数のカテゴリー（「分胴の種類」）を広げる必然が生じた. 複素数はその流れのなかで自然と登場した.
- それでも「数」として市民権を得るまでには、かなり時間かかった.

レポート問題

締切りは 5 月 13 日 (月) の講義開始時。(講義開始と同時にレポート回収用の封筒を回します。) そのときに提出できない場合は事前に理 1 号館 1 階, 多元数理科学研究科・研究教育支援室の横にあるレポートボックスに提出してください。あたりまえのことですが, 締切り後のレポートは一切受け付けません。レポートの提出様式は前回のプリントを参照してください。

問題 1-1. $z = 2 - i$, $w = -3 + 2i$ のとき, 以下を計算し複素平面上に図示せよ.

(1) $z + w$ (2) $z - w$ (3) zw (4) $\frac{z}{w}$

問題 1-2. $z = a + bi$, $w = c + di$ (a, b, c, d は実数) とするとき, 次を示せ:

(1) $|zw| = |z||w|$.

(2) $w \neq 0$ のとき, $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$

(3) 三角不等式: $|z + w| \leq |z| + |w|$

問題 1-3 (オプション). 講義への意見・感想・要望があれば, 自由に書いて下さい.

複素数と複素平面

配布日：May 13, 2013 Version：1.1

お知らせ：● 来週 (5/20) は休講です。補講は7月中に実施します。

- 複素数・複素関数の講義ノート『複素関数の基礎のキソ』を

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/kansuron.pdf>http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/kansuron_2IN1.pdf

におきました (後者は A4 横に 2 ページずつ印刷できるバージョン)。

第 2 回 (4/22) の講義内容のまとめ

1. 方程式 $x^2 = 2$ の解を $x = \pm\sqrt{2}$ と書くノリで, 方程式 $x^2 = -1$ の解を $x = \pm\sqrt{-1}$ と書いてみる. $\sqrt{-1}$ を簡単に i と表し, **虚数単位**と呼ぶ. (この時点では, i という数の存在は保証されていない. 仮の名前である.)
2. a と b を実数とすると, $a + bi$ の形の数 (i の文字式) を**複素数** (complex number) と呼ぶ. また, 複素数全体の集合を記号 \mathbb{C} で表す. すなわち,

$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

$b = 0$ の場合, 複素数 $a + 0i$ は単に実数 a とみなされるから, 集合 \mathbb{C} は実数全体の集合 \mathbb{R} を含む集合であろうと考えられる. (この時点でも \mathbb{C} という集合の存在は保証されていない. これも仮の名前である.)

3. **複素数の四則**. \mathbb{C} の「満たすべき」計算規則 (四則) は次のように定義される:

$z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$ とするとき,

$$(C0) \quad a + bi = 0 \iff a = b = 0$$

$$(C1) \quad z \pm w := (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$(C2) \quad zw := (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(C3) \quad w \neq 0 \text{ のとき, } \frac{z}{w} := \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i$$

4. **複素数の存在の正当化 (ハミルトンの方法)**. いわゆる xy 平面 (2次元ユークリッド空間) を \mathbb{R}^2 で表す. すなわち,

$$\mathbb{R}^2 := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

ここで,

ベクトル (a, b) を改名し, **複素数** $a + bi$ と呼ぶ.

また, xy 平面 \mathbb{R}^2 を改名し, **複素平面** \mathbb{C} と呼ぶ.

芸能人が本名と芸名を持っているように, 「ベクトル (a, b) 」は別名 (芸名) 「複素数 $a + bi$ 」を持つ, と考えるのがミソである. 例えば「虚数単位 i 」は「ベクトル $(0, 1)$ 」の別名である. また, 複素数の「満たすべき」計算規則 (C0) と (C1) は, 次の平面ベクトルの性質の言い替えである:

$$(C0)' \quad (a, b) = \vec{0} \iff a = b = 0$$

$$(C1)' \quad (a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$$

これに加えて、(内積でも外積でもない) あたらしいベクトルの積と商

$$(C2)' (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

$$(C3)' (a, b) / (c, d) := \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}$$

を導入したのが (C2) と (C3) である. (C2) より

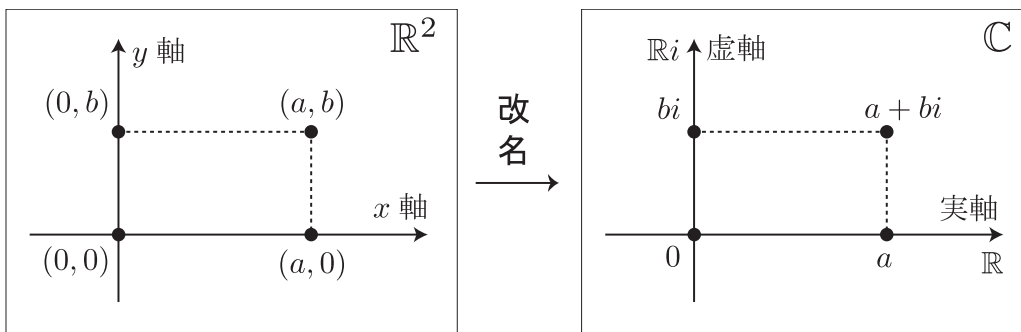
$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \xrightarrow{\text{別名}} i^2 = -1$$

となり, i の満たすべき性質が実現されている. 以上で, 計算規則 (C0)–(C3) をもつ集合 \mathbb{C} の存在が正当化できた.

複素数・複素平面のパーツ名称 (今回の内容).

xy 平面の各パーツは次のように改名される:

xy 平面 \mathbb{R}^2	改名	複素平面 \mathbb{C}
ベクトル (a, b)	改名	複素数 $a + bi$
ベクトル $(a, 0)$	改名	実数 $a \in \mathbb{R}$
ベクトル $(0, 1)$	改名	虚数単位 i
ベクトル $(0, b)$	改名	純虚数 $bi \in \mathbb{R}i$
原点 $(0, 0)$	改名	ゼロ $0 \in \mathbb{C}$ (「原点」)
x 軸	改名	実軸 (= 数直線 \mathbb{R})
y 軸	改名	虚軸 (= $\mathbb{R}i$)
(a, b) の x 座標 a	改名	$a + bi$ の 実部 a
(a, b) の y 座標 b	改名	$a + bi$ の 虚部 b



記号.

- $z = a + bi$ にたいし, 実部 a を $\text{Re } z$, 虚部 b を $\text{Im } z$ で表す.
- z の絶対値 (もしくは長さ) を $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ で定義する. これはベクトル (a, b) の原点からの距離にあたる.
- ベクトル (a, b) と x 軸がなす角を複素数 $z = a + bi$ では偏角とよび, 記号 $\arg z$ で表す.

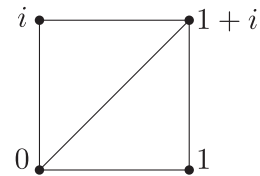
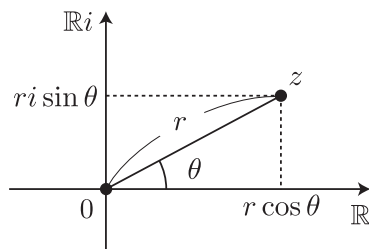
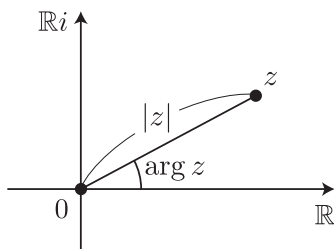
極形式

配布日：May 27, 2013 Version：1.1

お知らせ：● 来週 (6/3) は休講です。こちらの補講も 7 月中 (7/15, 20, 29 のいずれか) に実施します。

第 3 回 (5/13) の講義内容のまとめ

1. まず複素数・複素平面のパーツ名称を確認。複素数の絶対値と偏角を定義。(前回のプリント)
2. 複素数の和・差の幾何学的意味。これはベクトルのそれとおなじ。
3. 複素数の積の幾何学的意味 (最初の考察)。 z に虚数単位 i をかけた iz は、 z を原点中心に 90 度回転させたものになっている。(次ページ上の図, 左側参照.)
 ⇒ 掛け算と「回転」の関係に着目すべし。
4. 極形式。複素数 $z = a + bi \neq 0$ において、 $r = |z| > 0$, $\arg z = \theta$ とすれば、 $a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$ が成り立つ。複素数 z を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表したものを、 z の極形式 (polar form) もしくは極表示 (polar representation) と呼ぶ。¹



たとえば

$$\begin{aligned}
 1 &= \cos 0 + i \sin 0 & i &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \\
 -1 &= \cos \pi + i \sin \pi & -i &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \\
 1 + i &= \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) & -\sqrt{3} + i &= 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})
 \end{aligned}$$

といった具合だ。(図示して確認せよ.)

5. 複素数の積の幾何学的意味 (一般化)。回転というキーワードに着目して、0 でない複素数 z と w をそれぞれ次のように極形式で表す：

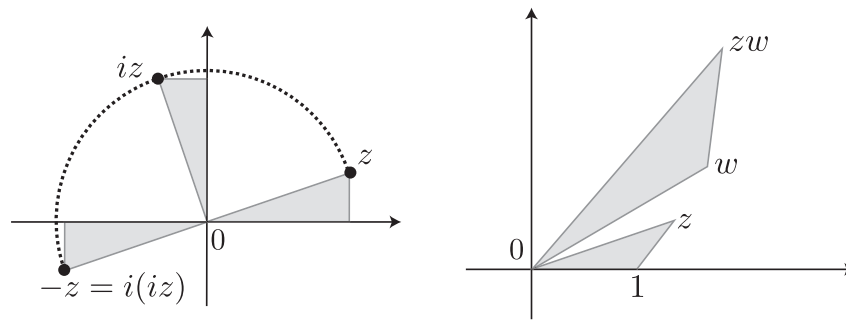
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad w = r'(\cos \theta' + i \sin \theta').$$

これらの積を計算すると、(C2) と三角関数の加法定理により

$$\begin{aligned}
 zw &= rr'(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\
 &= rr'\{(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')\} \\
 &= rr'\{\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')\}
 \end{aligned}$$

となる。

¹ $r = 1$ のときは単に $z = \cos \theta + i \sin \theta$ と書いたり、 $z = e^{i\theta}$ とも表す。 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ というのはいわゆる「オイラーの公式」だが、これについてはあとで正当化する。



試しに $w = i$ とすれば, $r' = 1, \theta' = \pi/2$ より $iz = r\{\cos(\theta + \pi/2) + i\sin(\theta + \pi/2)\}$ となり, z に比べ偏角だけが $\pi/2$ 増加している. 「 i 倍は原点中心 $\pi/2$ 回転」という性質が完璧に記述されているのではないかな. すばらしい. 一般に, 複素数倍の幾何学的意味は

複素数に $w = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ を掛けると絶対値が r' 倍され, 原点を中心に θ' 回転

となる. 上の図 (右側) をちっと眺めてみよう. $0, 1, z$ を頂点とする三角形は w 倍されることで, 全体的に $|w|$ 倍に拡大, $\arg w$ ラジアン回転され, $0, w, zw$ を頂点とする相似な三角形に移るのだ.

今回 (5/27) の内容

上の計算結果は次のように公式としてまとめることができる:

公式. 複素数 $z, w \neq 0$ にたいし, 次が成り立つ:

(1) $|zw| = |z||w|$ かつ $\arg zw = \arg z + \arg w$

(2) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ かつ $\arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w$

また, 数学的帰納法を用いると次の公式が証明される (証明は第 2 回レポート問題として出題する):

ド・モアブル (de Moivre) の公式. $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とするとき, 任意の整数 n にたいし $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ が成り立つ.

例. $A = (1 + \sqrt{3}i)^{10}$ を計算してみよう. (まじめに計算すると悲劇である.) $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ であるから, de Moivre の公式より

$$A = 2^{10}(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3}) = 1024(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = -512 - 512\sqrt{3}i.$$

オイラーの等式

配布日：June 10, 2013 Version：1.1

第 4 回 (5/27) の講義内容のまとめ

1. **ド・モアブル (de Moivre) の公式.** $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とするとき, 任意の自然数 m にたいし

$$z^m = r^m(\cos m\theta + i \sin m\theta)$$

が成り立つ.

2. **応用.** $B = (-\sqrt{3} + i)^{10}$ を計算してみよう. (まじめに計算すると悲劇である. くれぐれも 2 項定理などを持ちいてはならない.) 極形式で $-\sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$ となるから, ド・モアブルの公式より

$$B = 2^{10}(\cos \frac{50\pi}{6} + i \sin \frac{50\pi}{6}) = 1024(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 512 + 512\sqrt{3}i.$$

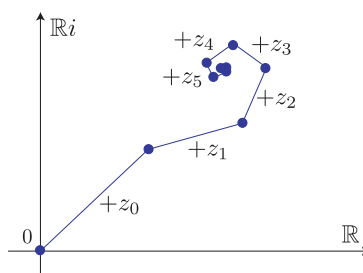
3. **オイラーの等式.** 実数 $\theta \in \mathbb{R}$ にたいし, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.
4. **例.** たとえば $\theta = \pi$ とすれば $e^{i\pi} = -1 \iff e^{i\pi} + 1 = 0$. これは $e, i, \pi, 1, 0$ の関係式.
5. **極形式.** 複素数が極形式で $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と書けるとき, オイラーの公式より $z = re^{i\theta}$ とも表現できる. こちらも z の「極形式」もしくは「極表示」と呼ばれ, よく用いられる.
6. **2 点間の距離.** 複素数 z, w の (直線) 距離は $|z - w|$ で与えられる.
7. **数列の収束.** $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ を複素数列とする. このとき $\{z_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するとは, $|z_n - \alpha| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ が成り立つことをいう. これを $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ もしくは $z_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ と表す.
8. **例.** $z_n = (i/2)^n$ とおくと, $|z_n - 0| = |(i/2)^n| = |i^n| \cdot |1/2^n| = 1/2^n \rightarrow 0$. よって $z_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.
9. **級数の収束.** 複素数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ にたいし,

$$S_0 = z_0, S_1 = z_0 + z_1, S_2 = z_0 + z_1 + z_2, \dots$$

で定まる数列 $\{S_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n\}$ を考える. この極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を

$$z_0 + z_1 + \dots + z_n + \dots \quad \text{もしくは} \quad \sum_{n=0}^{\infty} z_n \quad \text{もしくは} \quad \sum_{n \geq 0} z_n$$

と表し, $\{z_n\}$ が定める級数 (series) という. この極限は一般に存在するとは限らない. 極限が存在するとき, この級数は収束するといひ, そうでないとき発散するといひ.



10. 収束する例. $z_n = (1/2)^n$ のとき, 級数は $1 + 1/2 + 1/2^2 + \dots = 2$ となり収束.
11. 発散する例. $z_n = n$ のとき, 級数は $1 + 2 + 3 + \dots$ となる. 対応する S_n は原点から限りなく離れていくので収束できない.
12. 問題. 収束? 発散?

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{2}^n \qquad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad 3. \sum_{n=1}^{\infty} n i^n \qquad 4. \sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n}$$

答は 1. と 4. のみ収束.

13. 指数関数 (数学で最も重要な関数). 複素数 $z \in \mathbb{C}$ にたいし,

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (*)$$

と定義する. これを z の指数関数 (exponential function) とよび, $\exp(z)$ とも表す.

14. 疑問その 1: 一般に (*) の右辺の級数は収束するのか? たとえば定義から

$$e^{100} := 1 + 100 + 10000/2! + 1000000/3! + 100000000/4! + \dots$$

となるが, 右辺が本当に収束するかすぐにはわからない.

15. 疑問その 2: 指数関数であれば任意の z, w にたいし指数法則 $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ が成り立つべきであろう. しかしこの等式の実体は級数の関係式

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \cdot 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \dots = 1 + (z + w) + \frac{(z + w)^2}{2!} + \dots$$

であって, 成り立つかどうかすぐには判定できない.

16. 今週 (6/10), これらの疑問点が問題なく解決されることを説明する予定.

17. オイラーの等式の導出. (*) に $z = i\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) を代入すると

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right)$$

を得る. 微分積分で学ぶテイラー展開 (マクローリン展開) によれば, 任意の実数 θ について

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \qquad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

が成り立つ (すなわち右辺の級数は収束して左辺と一致する) ことが知られているので, オイラーの等式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

が成り立つ.

18. 注意. $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ は絶対値が 1, 偏角が θ の複素数である. したがって単位円周上にある.

レポート問題 (第 2 回)

締切りは 6 月 24 日 (月) の講義開始時。(講義開始時にレポート回収用の封筒を回します。) そのときに提出できない場合は事前に理 1 号館 1 階, 多元数理科学研究科・研究教育支援室の横にあるレポートボックスに提出してください。あたりまえのことですが, 締切り後のレポートは一切受け付けません。レポートの提出様式は初回に配布したプリントを参照してください。

問題 2-1 (ド・モアブル)。数学的帰納法を用いて, 次の公式を証明せよ:

ド・モアブルの公式の拡張版. 複素数 $z \neq 0$ の極形式が $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ であるとき, 任意の整数 m にたいし

$$z^m = r^m (\cos m\theta + i \sin m\theta)$$

が成り立つ。

問題 2-2 (1 の累乗根)。 N を自然数とする。ド・モアブルの定理を用いて, 方程式 $z^N = 1$ の解は

$$z = \exp \frac{2m\pi i}{N} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

で与えられることを証明せよ。また $N = 6$ のとき, これらの解を図示せよ。

問題 2-3 (オプション: 成績 A を目指す人は必須)。複素数 z が $|z| > 1$ を満たすとき, その逆数 $1/z$ は以下の方法で作図できる: z から単位円へ 2 本接線を引く。それらの接点を結んだ線分と z と原点を結ぶ線分が交わる点を w とすると, w を実軸に関して対称に折り返した点が $1/z$ となる。(すなわち $w = u + vi$ のとき, $1/z = u - vi$.) これを証明せよ。また, $0 < |z| < 1$, $|z| = 1$ の場合の $1/z$ の作図方法を説明せよ。

問題 2-4 (オプション: 成績 S を目指す人は必須)。任意の複素数 z, w を固定する。 N を自然数とするととき, 複素数

$$D_N := \left(\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^N \frac{w^n}{n!} \right) - \sum_{n=0}^N \frac{(z+w)^n}{n!}$$

は $N \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束することを証明せよ。(これより指数関数の指数法則が導かれる。) が成り立つことを示せ。

(Hint: 二項定理を使うと, D_N は右辺の $N+1$ 次以上の項すべての和に対応することがわかる。そのような項は $\frac{z^i w^{m-i}}{i!(m-i)!}$ ($m = N+1, N+2, \dots, 2N$) のような形をしており, $N(N+1)/2$ 個存在する。また, $K = \max\{|z|, |w|, 1\}$ とおくと, $\left| \frac{z^i w^{m-i}}{i!(m-i)!} \right| \leq \frac{m C_i K^m}{m!} \leq \frac{(2K)^m}{m!} \leq \frac{(2K)^{2N}}{(N+1)!}$ が成り立つことが示される。)

級数の収束

配布日：June 17, 2013 Version：1.1

第 5 回 (6/10) の講義内容のまとめ

1. 前回の問題. 収束? 発散?

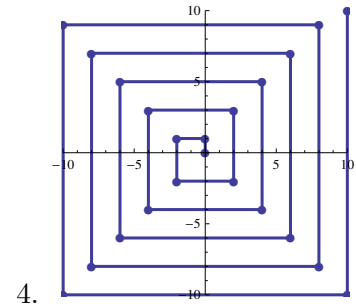
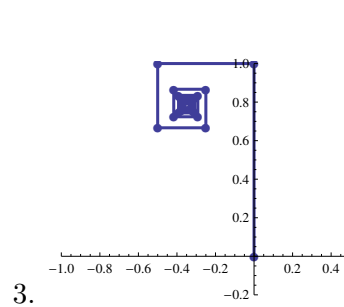
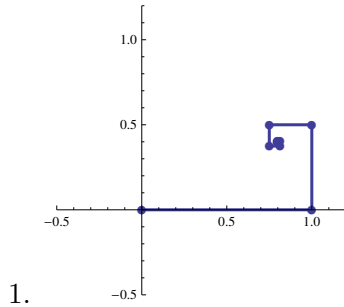
1. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n i^n$

4. $\sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n}$

答は 1. と 4. のみ収束. これを「折れ線」で表現し, 視覚的に確認した. (証明ではないので注意.) ちなみに 1. の収束先は $2/(2-i)$, 4. は $-\log \sqrt{2} + \pi i/4$.



2. 補足. 2. の $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ は発散. 実際, 積分を使うと

$$0 \leq (1 + 1/2 + \dots + 1/n) - \log(n + 1) \leq 1$$

がわかる. 一般に $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$ は $\alpha > 1$ のときにのみ収束する. たとえば $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots = \pi^2/6$ (オイラー).

3. 絶対収束. 級数 $z_0 + z_1 + z_2 + \dots$ は $|z_0| + |z_1| + |z_2| + \dots$ が有限の値のとき (無限大に発散しないとき) 絶対収束するという. これは「折れ線の長さが有限」であることを意味する. したがってもとの級数 (折れ線) も発散できない!

4. 定理. 絶対収束する級数は収束する. (ただし, 逆は成立しない. たとえば上の問題の 4. は, 無限に長い折れ線がうまくたまって収束する.)

5. 指数関数の収束性の証明.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

の右辺の級数がすべての複素数 z で収束することを確認しよう.

$z = 0$ のとき, 級数は $1 + 0 + 0 + \dots = 1$ となり収束. $z \neq 0$ のとき, $z_n = z^n/n!$ とおくと

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} = \frac{z}{n+1}.$$

ここで $|z| < N$ となる自然数を選び固定すると, $n \geq N$ のとき

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| < \frac{N}{N+1}.$$

$r = N/(N+1) < 1$ とおくと、任意の自然数 k にたいし $|z_{n+k}| < r^k |z_N|$ である。よって

$$\begin{aligned} |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_{N+k}| &\leq |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_{N-1}| + |z_N| + \cdots + |z_{N+k}| \\ &< |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_{N-1}| + |z_N|(1 + r + r^2 + \cdots + r^k) \\ &< |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_{N-1}| + |z_N| \cdot \frac{1}{1-r} \\ &< |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_{N-1}| + (N+1)|z_N|. \end{aligned}$$

最後の辺は k に依存しないから、もとの級数は絶対収束する。よって収束。 ■

6. 指数法則. z, w にたいし指数法則 $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ が成り立つ。実際、級数の間の等式

$$\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right) \cdot \left(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \cdots\right) = 1 + (z+w) + \frac{(z+w)^2}{2!} + \cdots$$

が成立する (前回レポート問題参照)。

7. 応用. 0 でない複素数 $z = re^{i\theta}$ と $w = r'e^{i\theta'}$ (オイラーの公式を用いた極形式) にたいし、指数法則より

$$zw = re^{i\theta} \cdot r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

となり、積の公式ときれいに一致する。

参考文献.

これまでの内容に関する参考文献をすこしだけ挙げておきます：

- 志賀 浩二, 『複素数 30 講 (数学 30 講シリーズ)』朝倉書店 (1989/04).
- T. ニーダム, 『ヴィジュアル複素解析』, 培風館 (2002/01).
- 川平友規, 『複素関数の基礎のキソ』,
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/kansuron.pdf>

3 次方程式の解法

配布日：June 24, 2013 Version：1.1

第 6 回 (6/17) の講義内容のまとめ

- 2 次方程式の解の公式. $x^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$.
- 3 次方程式の解の公式は? $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解を $x = (a, b, c$ の式) と表せ. ただし, ここでいう「式」は四則演算と累乗根 $\sqrt[n]{\quad}$ のみを用いたものをさす. また, $a, b, c \in \mathbb{R}$ とする.
- 答: カルダノ (Cardano) の公式.

$$x = A + B - \frac{a}{3}, \quad x = \omega A + \omega^2 B - \frac{a}{3}, \quad x = \omega^2 A + \omega B - \frac{a}{3}.$$

ただし

$$A = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, \quad B = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}, \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{2\pi i/3},$$

$$p = \frac{1}{3} b - \frac{a^2}{3}, \quad q = \frac{1}{2} c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3}.$$

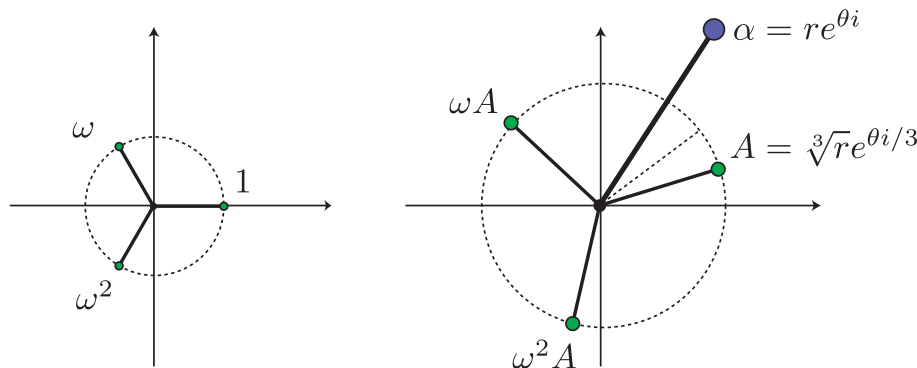
- ボンベリ (Bombelli) の例. $x^3 = 15x + 4$ を解く. ($x = 4$ は解のひとつ.) $a = 0, b = -15, c = -4$ とおくと, $p = -5, q = -2$ より

$$A = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11i}, \quad B = \sqrt[3]{2 - 11i}$$

と計算できる. このとき $x = A + B$ は解のはずだが, どんな値かはよくわからない. ボンベリは $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$ であることに気づき, $A = 2 + i, B = 2 - i$ と置いて $x = A + B = 4$ を正当化した. このように, 実用上は複素数の 3 乗根を求めるという操作が必要となる.

- 問題 (複素数の 3 乗根). 複素数 $\alpha \neq 0$ にたいし, $z^3 = \alpha$ を満たす複素数 z を決定せよ.
- 答. $\alpha = 1$ のとき, $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$ より $z = 1, \omega, \omega^2$. すなわち $z = e^{0i}, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$.

$\alpha = re^{\theta i}$ のとき, $A = \sqrt[3]{re^{\theta i/3}}$ とおくと $A^3 = \alpha$ を満たす. $z^3 = \alpha = A^3$ より, $(z/A)^3 = 1 \iff z/A = 1, \omega, \omega^2$. よって $z = A, \omega A, \omega^2 A$. ■



7. カルダノの公式の導出. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ において $y = x + a/3$ とおくと

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

の形に変形できる. ただし p, q は上で定義したのと同じもの. これをみたす y が求まれば x も求まる.

つぎに $y = u + v$ と置いてみる. このとき上の y の方程式の左辺は

$$y^3 + 3py + 2q = \underline{(u^3 + v^3 + 2q)} + 3\underline{(uv + p)}(u + v)$$

と変形できる. したがって右辺の下線部が 0 になるように, すなわち $u^3 + v^3 = -2q$ かつ $uv = -p$ を満たすような u, v が見つけられれば十分である.

いま $u^3 v^3 = -p^3$ であるから, u^3 と v^3 は方程式 $t^2 - 2qt - p^3 = 0$ の解である (解と係数の関係). よって

$$u^3 = -q + \sqrt{q^2 + p^3} =: \alpha, \quad v^3 = -q - \sqrt{q^2 + p^3} =: \beta$$

と置くことができる. そこで,

- u は α の 3 乗根
- v は β の 3 乗根
- $uv = -p$

の 3 条件をみたすペア $(u, v) = (A, B)$ をみつければ, $y = u + v$ は求める解のひとつとなる. このとき $(u, v) = (\omega A, \omega^2 B), (\omega^2 A, \omega B)$ も先の 3 条件を満たすので,

$$y = A + B, \quad y = \omega A + \omega^2 B, \quad y = \omega^2 A + \omega B$$

が求める解となる.

8. ペア (A, B) の見つけ方. もし $q^2 + p^3 \geq 0$ であれば, α, β はともに実数. したがって, それぞれ普通の実数の 3 乗根 $A = \sqrt[3]{\alpha}, B = \sqrt[3]{\beta}$ をとればよい.

もし $q^2 + p^3 < 0$ であれば, $\alpha = -q + \sqrt{|q^2 + p^3|}i = re^{\theta i}, \beta = -q - \sqrt{|q^2 + p^3|}i = re^{-\theta i}$ と書ける. このとき, $A = \sqrt[3]{re^{\theta i/3}}, B = \sqrt[3]{re^{-\theta i/3}}$, とおけば $AB = -p \in \mathbb{R}$ を満たす.

9. 注意. 係数 a, b, c が複素数の場合も同様の方法で解を求めることができる. ただし, 途中ででてくる複素数の平方根, 3 乗根を慎重に選ぶ必要がある.

参考文献.

- Wikipedia による『三次方程式』の解説:
<http://ja.wikipedia.org/wiki/三次方程式>
- 『物理のかぎしっぽ』. 3 次方程式の解の公式が a, b, c で書き下されている:
<http://hooktail.sub.jp/algebra/CubicEquation/>
- 永田雅宜, 『理系のための線型代数の基礎』, 紀伊國屋書店 (1987/01).
- 梅村浩, 『ガロア/偉大なる曖昧さの理論』 現代数学社 (2011/11).
- 原田耕一郎, 『群の発見』, 岩波書店 (2001/11/21).

4 次方程式の解法と代数学の基本定理

配布日：July 1, 2013 Version：1.1

第 7 回 (6/24) の講義内容のまとめ

1. **3 次方程式の解の公式の歴史 (イタリア)**. 16C 始めごろデル・フェロが発見するも発表せず, 1526 年に死去. その後タルタリアが再発見する. カルダノはその方法をタルタリアに「誰にも言わない」約束で教えてもらうも, デル・フェロの結果の再発見であることを知り, 1545 年出版の著作で勝手に公開してしまう. 同書にはカルダノの弟子フェラーリが発見した 4 次方程式の解法も書かれている.
2. **4 次方程式の解法 (フェラーリの方法)** $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解を求めたい. ただし $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ であり, 計算には四則演算と累乗根 $\sqrt[n]{}$ のみを用いるとする,
3. **Step 1.** 方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ において $y = x + a/4$ とおくと

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \quad (1)$$

の形に変形できる. ただし p, q, r は a, b, c の式で表される実数である. これをみたす y が求まれば x も求まる.

4. **Step 2.** $q = 0$ のとき, 方程式 (1) は $y^4 + py^2 + r = 0$ となる. よって $t = y^2$ とおけば 2 次方程式に帰着される.

$q \neq 0$ のとき,

$$y^4 + py^2 + qy + r = \left(y^2 + \frac{p+u}{2}\right)^2 - u\left(y - \frac{q}{2u}\right)^2$$

を満たす $u \neq 0$ をひとつ求めよう. この式の係数を比較すると, u の 3 次方程式

$$u(p+u)^2 - 4ru = q^2$$

を得る. $q \neq 0$ よりこの方程式は解 $u \neq 0$ をもち, その値は 3 次方程式の解の公式によって求められる. (この方程式は実係数なので, u として実数を選ぶこともできる.)

5. **Step 3.** 上で求めた u を用いると, (1) の方程式は

$$\left\{ y^2 + \frac{p+u}{2} - \sqrt{u}\left(y - \frac{q}{2u}\right) \right\} \left\{ y^2 + \frac{p+u}{2} + \sqrt{u}\left(y - \frac{q}{2u}\right) \right\} = 0$$

のように変形できる. ここで, 二つの括弧 $\{ \}$ の中身を 0 とおいた 2 次方程式をとけば y が計算できる.

6. **定理 (アーベル, 5 次以上の場合)**. 5 次以上の方程式に四則と累乗根だけを用いた解の公式は存在しない. (解自体は存在する. 次の定理がそれを保証する.)
7. **代数学の基本定理 (ガウス)**. 複素係数の方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ (ただし $a_n \neq 0, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$) は必ず複素数の解をもつ.
8. この定理を繰り返して用いると, 因数分解 $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ を与える複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が求まる. すなわち, n 次方程式は重複込みで n 個の解を持つことがわかる.

代数学の基本定理の証明

配布日：July 8, 2013 Version：1.1

お知らせ：7/15 と 7/29 (いずれも月曜日) に補講を予定しています。時間と場所はいつもと同じです。(7/29 日には救済小テストを予定しています。)

第 8 回 (7/1) の講義内容のまとめ

1. 代数学の基本定理 (ガウス). 複素係数の方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ (ただし $a_n \neq 0, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$) は必ず複素数の解をもつ。
2. 定理の証明. 話を単純にするために, $n = 3, a_3 = 1$ の場合を考える. (一般の場合も同様なので, 各自考えてほしい.) すなわち次の方程式に複素数解が存在することを証明する:

$$f(z) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0.$$

以下の証明は (ウ) の扱いを講義の内容と少し変えてあるので注意. (おかげで証明が少しすっきりしたはず。)

3. (ア) 三角不等式. すべての $z, w \in \mathbb{C}$ にたいし,

$$|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

4. (イ) 命題. ある $R, M > 0$ が存在して,

$$|z| \geq R \implies |f(z)| \geq M > 0.$$

ここで, R が十分大きいとき, $M = R^3/2$ とできる. (したがって, $|z| \geq R$ のとき $f(z) = 0$ の解ではない。)

5. (イ) の証明. $|f(z)| = |z|^3 \left| 1 + \left(\frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z^3} \right) \right| \geq |z|^3 \left(1 - \left| \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z^3} \right| \right)$. (三角不等式の左側を用いた.) 下線部について, 三角不等式の右側より $|z| \geq R$ のとき $\left| \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z^3} \right| \leq \frac{|a|}{|z|} + \frac{|b|}{|z|^2} + \frac{|c|}{|z|^3} \leq \frac{|a|}{R} + \frac{|b|}{R^2} + \frac{|c|}{R^3}$ が成り立つ. $|a|, |b|, |c|$ は定数であるから, R を十分大きく取れば $\frac{|a|}{R} + \frac{|b|}{R^2} + \frac{|c|}{R^3}$ を $1/2$ 以下にすることができる. よって $|f(z)| \geq |z|^3 (1 - 1/2) = |z|^3 / 2 \geq R^3 / 2$. 後は $M := R^3 / 2 > 0$ とおけばよい. ■

6. (ウ) 命題. ある $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$|f(z)| \geq |f(\alpha)| (\geq 0).$$

がすべての $z \in \mathbb{C}$ にたいし成り立つ. すなわち, α は $f(z)$ の絶対値の最小値を与える。

7. 注意. 方程式 $f(z) = 0$ に複素数解がある $\iff |f(\alpha)| = 0$.
複素数解が存在しない $\iff |f(\alpha)| > 0$.

8. (ウ) の証明のスケッチ. (イ) の条件をみたしかつ $|f(0)| < R^3/2$ となる十分大きな $R > 0$ を固定する. 一般に「有界閉集合上の実数値連続関数は最大値・最小値をもつ」ということが知られているので, 閉集合 $K = \{|z| \leq R\}$ 上には関数 $z \mapsto |f(z)| \geq 0$ の最小値を与える $\alpha \in K$ が存在することがわかる. すなわち, $|z| \leq R$ であれば $|f(z)| \geq |f(\alpha)|$ である. 一方 $|z| \geq R$ であれば, (イ) より $|f(z)| \geq R^3/2 > |f(0)|$ を満たすが, $0 \in K$ であったから $|f(0)| \geq |f(\alpha)|$ である. すなわちいずれの場合も, $z \in \mathbb{C}$ であれば $|f(z)| \geq |f(\alpha)|$ を満たす. ■

9. 定理の証明. 背理法を用いる：方程式 $f(z) = 0$ に複素数解がないと仮定しよう。(ウ) より、これは $|f(\alpha)| > 0$ を意味する.

いま式変形により $f(z) - f(\alpha)$ は

$$f(z) - f(\alpha) = (z - \alpha)^3 + a(z - \alpha)^2 + b(z - \alpha)$$

形で表現できる. ただし複素数 a と b はそれぞれ a_2, a_1, α の式で表される定数である. また、さらに変形して

$$\frac{f(z)}{f(\alpha)} = 1 + \frac{(z - \alpha)^3}{f(\alpha)} + \frac{a(z - \alpha)^2}{f(\alpha)} + \frac{b(z - \alpha)}{f(\alpha)}$$

としておく (ここで仮定 $f(\alpha) \neq 0$ が用いられている.) 式を簡単にするために $w = z - \alpha$, $A = 1/f(\alpha)$, $B = a/f(\alpha)$, $C = b/f(\alpha)$ として,

$$\frac{f(\alpha + w)}{f(\alpha)} = 1 + Aw^3 + Bw^2 + Cw$$

と表しておく. (このあと $|\frac{f(\alpha+w)}{f(\alpha)}| < 1$ となる w を見つけ出して, $|f(\alpha)|$ の最小性に矛盾することを示す.)

10. $C \neq 0$ のとき, $Cw < 0$ かつ $|w|$ が十分小さくなるように w を選ぶ. 具体的には, $C = re^{i\theta}$ のとき, $w = \rho e^{i(\pi-\theta)}$ とおくと, $Cw = r\rho e^{\pi i} < -r\rho$ となる ($e^{\pi i} = -1$ はオイラーの等式!). ρ を十分小さく選ぶときは, つぎのようにする: $\eta(w) := (Aw^2 + Bw)/C$ とおくと,

$$\frac{f(\alpha + w)}{f(\alpha)} = 1 + Cw(1 + \eta(w))$$

とかける. このとき $|\eta(w)| \leq |w||Aw + B|/|C| \leq |w|(|A||w| + B)/|C| = \rho(\rho|A| + |B|)/|C|$ (三角不等式) であるが, $|A|, |B|, |C|$ は定数なので ρ を十分小さく取れば $|\eta(w)| \leq 1/2$ が成り立つようにできる. さらに (必要ならもっと小さな ρ を選んで) $0 < r\rho < 1$ が成り立つとしてよい.

以上のように選んだ $w = \rho e^{i(\pi-\theta)}$ にたいし, 再び三角不等式より

$$\left| \frac{f(\alpha + w)}{f(\alpha)} \right| = |1 + Cw(1 + \eta(w))| = |1 - r\rho - r\rho\eta(w)| \leq |1 - r\rho| + |-r\rho\eta(w)|.$$

ここで $|1 - r\rho| = 1 - r\rho > 0$, $|-r\rho\eta(w)| = r\rho|\eta(w)| \leq r\rho/2$ であったから,

$$\left| \frac{f(\alpha + w)}{f(\alpha)} \right| \leq 1 - r\rho + r\rho/2 = 1 - r\rho/2 < 1$$

となる. これは $|f(\alpha)|$ の最小性に反する.

11. $C = 0, B \neq 0$ のとき, $Bw^2 < 0$ かつ $|w|$ が十分小さくなるように w を選ぶ. あとの計算は同様.
12. $C = B = 0, A \neq 0$ のとき, $Aw^3 < 0$ かつ $|w|$ が十分小さくなるように w を選ぶ. あとの計算は同様. ■

レポート問題 (第 3 回)

締切りは 7 月 22 日 (月) の講義開始時。(講義開始と同時にレポート回収用の封筒を回します。) そのときに提出できない場合は事前に理 1 号館 1 階, 多元数理科学研究科・研究教育支援室の横にあるレポートボックスに提出してください。あたりまえのことですが, 締切り後のレポートは一切受け付けません。レポートの提出様式は初回に配布したプリントを参照してください。

問題 3-1.

- (1) 複素数 $\alpha, \beta \neq 0$ にたいし, $0, \alpha, \beta$ が正三角形の頂点であることの必要十分条件は $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$ である。これを示せ。(Hint: α は β を原点中心に $\pm\pi/3$ 回転させたもの.)
- (2) 互いに異なる複素数 α, β, γ にたいし, α, β, γ が正三角形の頂点であることの必要十分条件は $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$ である。これを示せ。

問題 3-2. 平面上の $\triangle ABC$ において, BC, CA, AB をそれぞれ $m:n$ に内分する点を A', B', C' とする。このとき, $\triangle ABC$ が正三角形であることの必要十分条件は $\triangle A'B'C'$ が正三角であることである。これを複素数を用いて証明せよ。(HINT: 問題 3-1 の結果は用いてよい。)

問題 3-3 (代数学の基本定理: オプション. 成績 A 以上を目指す人は必須). $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ ($a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$) とおく。このとき n 次方程式 $f(z) = 0$ は複素数解を持つことをしめせ。ただし, 次の事実は用いてよい: ある $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在し, 関数 $z \mapsto |f(z)|$ の最小値を与える。すなわち, すべての $z \in \mathbb{C}$ にたいし

$$|f(z)| \geq |f(\alpha)|.$$

問題 3-4 (オプション. 成績 S を目指す人は必須). 次の二つの等式を証明せよ:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos(\alpha + (n-1)\beta) &= \frac{\sin \frac{n\beta}{2} \cos \left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta \right)}{\sin \frac{\beta}{2}} \\ \sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \dots + \sin(\alpha + (n-1)\beta) &= \frac{\sin \frac{n\beta}{2} \sin \left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta \right)}{\sin \frac{\beta}{2}} \end{aligned}$$

(Hint: ひとつ目の式を実部に, ふたつ目の式を虚部にもつ複素数を考え, 複素数の積と偏角に関する法則とド・モアブルの定理を適用していくと, 等比級数の和 $z^{n-1} + \dots + z + 1 (= \frac{1-z^n}{1-z})$ が見えてくるはず.)

小テストについて

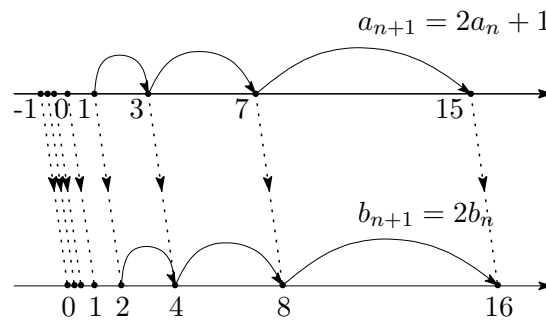
7 月 29 日 (月) の講義で, 小テストをします。レポートの点数が足りなさそう, でも単位がほしいという人は受験してください。

漸化式と力学系

配布日：July 15, 2013 Version：1.1

第 9 回 (7/8) の講義内容のまとめ

1. 漸化式を解く (高校数学の定番). $a_{n+1} = 2a_n + 1$; $a_1 = 1$ を解くとき, まず方程式 $x = 2x + 1$ を解き, 解の $x = -1$ からもとの漸化式を $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$; $a_1 + 1 = 2$ のように変形する. $b_n := a_n + 1$ とおくと, $b_{n+1} = 2b_n$; $b_1 = 2$. これより $b_n = 2^n$. すなわち $a_n = b_n - 1 = 2^n - 1$.
2. 疑問. $x = 2x + 1$ の意味はなにか?
3. 考察. $b_{n+1} = 2b_n$; $b_1 = 2$ より $b_0 = 1, b_{-1} = 1/2, b_{-2} = 1/4, \dots$ と, 「添え字をさかのぼって」数列を考えることができる. これを数直線に図示すると, $\{b_n\}$ は 0 を中心に 2 倍に拡大であることがわかる. また, $a_n = b_n - 1$ より, a_n は -1 中心 2 倍拡大であることがわかる. もし座標系を消し去った場合, これらの数列は区別できない. 本質的に同じものである.



4. 力学系としての解釈. 世界 (宇宙) の素朴な 3 要素は「空間・時間・運動法則」. 数列 b_n が棲む世界は
 - 空間：数直線 \mathbb{R}
 - 時間： $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (秒)
 - 運動法則： x の位置にある動点は 1 秒後に $2x$ の位置に移動する

ここで $g(x) = 2x$ と置こう. この「世界」を「 \mathbb{R} 上の関数 $g(x) = 2x$ による力学系 (dynamical system)」と呼ぶ. また, 点 $x_0 \in \mathbb{R}$ にたいし

$$x_0 \xrightarrow{g} g(x_0) = 2x_0 \xrightarrow{g} g(g(x_0)) = 2^2x_0 \xrightarrow{g} \dots$$

で定まる数列を初期値 x_0 の軌道 (orbit) と呼ぶ. たとえば数列 b_n は初期値 $b_1 = 2$ の軌道だと考えられる.

5. 問題. 数列 a_n が棲む世界は?
6. 答. 「 \mathbb{R} 上の関数 $f(x) = 2x + 1$ による力学系」. 実際, 漸化式は $a_{n+1} = f(a_n)$ と表され, $a_{n+1} = f(f(\dots f(a_1)\dots))$ のように, f を n 回合成したものになっている. これを $a_{n+1} = f^n(a_1)$ と略記する.
7. グラフ解析. 与えられた実数 p と関数 $y = f(x)$ に対し, 軌道

$$p \mapsto f(p) \mapsto f(f(p)) \mapsto f(f(f(p))) \mapsto \dots$$

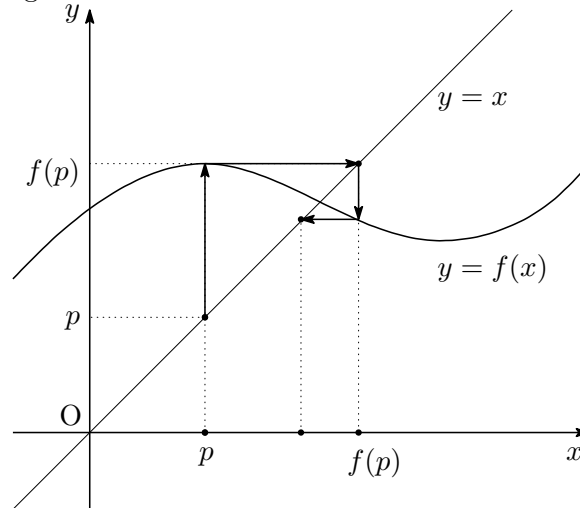
を視覚化する非常によい方法がある. $y = f(x)$ のグラフを用いて, xy 平面上の点 (p, p) から $(f(p), f(p))$ を作図する方法である:

Step 0 $y = f(x)$ と $y = x$ のグラフを描く.

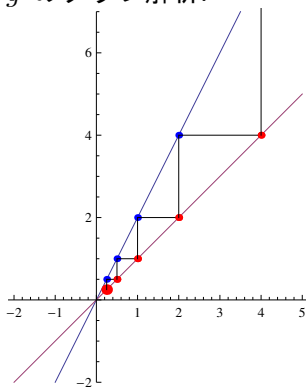
Step 1 点 (p, p) からタテ方向に, $y = f(x)$ のグラフまで線分を引く. その交点は $(p, f(p))$ である.

Step 2 $(p, f(p))$ からヨコ方向に, $y = x$ のグラフとまで線分を引く. その交点が $(f(p), f(p))$ である.

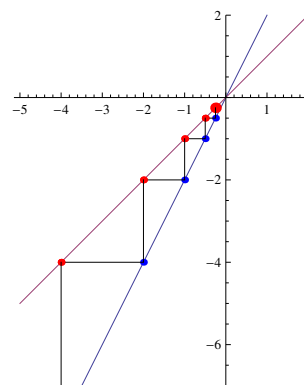
この Step 1 と 2 を続けていき, 直線 $y = x$ を数直線だと思えば点 p の軌道が視覚化される. この手続きを **グラフ解析** (graphical analysis) と呼ぶ. また, グラフ解析で得られる図を **ウェブ・ダイアグラム** (web diagram) と呼ぶ.



8. g のグラフ解析.



← $x_0 = 1/4$ のとき.



← $x_0 = -1/4$ のとき.

9. g の力学系のまとめ. $x_0 \neq 0, n \rightarrow \infty$ のとき, 軌道は

$$g^n(x) \rightarrow \begin{cases} +\infty & (x_0 > 0) \\ -\infty & (x_0 < 0) \end{cases} \quad g^{-n}(x_0) \rightarrow 0$$

$x_0 = 0$ のとき, これは方程式 $g(x_0) = x_0$ の解であり, 軌道は 0 から動かない.

力学系の共役/無限遠点の導入

配布日：July 22, 2013 Version：1.1

第 10 回 (7/15) の講義内容のまとめ

1. **固定点.** 関数 $f(x)$ による力学系において, $f(x_0) = x_0$ を満たす点を f の **固定点** とよぶ.
2. **具体例.** $g(x) = 2x$ の固定点は $2x = x \iff x = 0$. グラフ解析から, g による力学系はこの固定点 0 を中心とした 2 倍拡大であることがわかる.
3. **具体例 2.** $f(x) = 2x + 1$ の固定点は $2x + 1 = x \iff x = -1$. グラフ解析から, f による力学系はこの固定点 -1 を中心とした 2 倍拡大であることがわかる.
4. **漸化式 a_n について.** 上のことから, 漸化式 $a_{n+1} = f(a_n) = 2a_n + 1$ を解くときに用いる方程式 $x = 2x + 1$ は, 力学系で固定される点を探している, ということがわかる. 漸化式が $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ と変形できるのは, 力学系が -1 を中心とした 2 倍拡大だからである.
5. **力学系の共役.** グラフ解析を行うと, f と g の力学系は「軸の位置」の違いだけで本質的に同じもののように見える. この「本質的に同じ」ということを定式化しよう.

いま $x \in \mathbb{R}$ を変数とする $f: x \mapsto 2x + 1$ による力学系と, $X \in \mathbb{R}$ を変数とする $g: X \mapsto 2X$ による力学系を結びつけたい. $X = T(x) = x + 1$ とおくと, $x = T^{-1}(X) = X - 1$ より

$$T \circ f \circ T^{-1}(X) = T \circ f(X - 1) = T(2(X - 1) + 1) = 2X = g(X)$$

を得る. すなわち $g = T \circ f \circ T^{-1}$ が成り立つ. これから, 次のようなダイアグラムが得られる:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \dots \\ & & \downarrow T & & \downarrow T & & \downarrow T & & \\ \dots & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \dots \end{array}$$

これは T という座標変換 (「レンズ」) を通して f の力学系を観測すると, g という力学系に見える, という状況を示唆している. (すなわち, 実体は同じだが見え方が異なっている.)

一般に, $g = T \circ f \circ T^{-1}$ すなわち $g \circ T = T \circ f$ が成り立つような座標変換 $X = T(x)$ が存在するとき, f と g の力学系は互いに**共役** (conjugate) であるという.

6. **今後の目標.** 関数 $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0$) による力学系を共役により分類する.
7. **注意.** 上のような関数は**実メビウス変換**と呼ばれる. $c = 0$ のとき, $ad - bc = ad \neq 0$ より $d \neq 0$. このとき $f(x) = (ax + b)/d$ の形であるから, 実メビウス変換は $f(x) = 2x + 1$ などの 1 次関数をすべて含んでいることがわかる.
8. **無限遠点の導入.** \mathbb{R} を表現するのに直線 (数直線) を用いるのが一般的だが, ちょっと発想をやわらかくして「曲線」を用いて実数を表す, と考えてみよう.¹具体的には, 円を用いる.

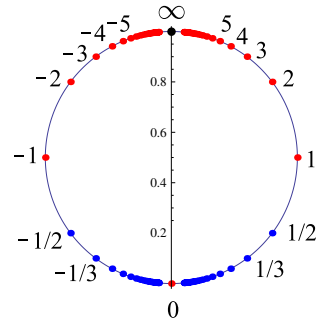
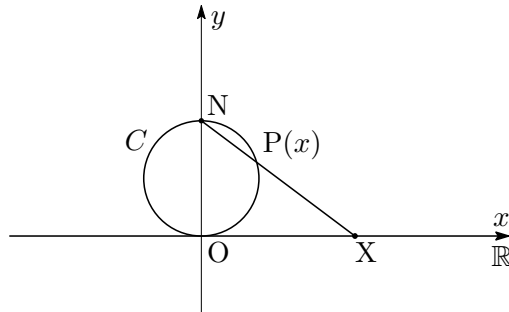
- xy 平面で円 $C: x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$ を考える. $N = (0, 1)$ とし, $x \in \mathbb{R}$ にたいし, 点 $X = (x, 0)$ とおく.

¹発想を逆転させれば, 直線の点を表現するのに実数を用いているとも考えられる. 一般に曲線の媒介変数表示は曲線上の点を表現するのに実数を用いている, と考えられる.

- 線分 NX と円 C の交点を $P(x)$ と表す. このとき

$$\mathbb{R} \ni x \xrightarrow{\text{別名}} P(x) \in C - N$$

という対応がつく. ここで, $C - N$ は円 C から点 N を除いたもの.



- ここで $x \rightarrow \pm\infty$ とすれば, $P(x)$ は N に近づく. この意味で, N は実数における正の無限大と負の無限大をくっつけたような点である. この点 N を無限遠点 (point at infinity) とよび, ∞ で表す. すなわち

$$C = (C - N) \cup \{N\} \iff C = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

と解釈できる. この円 C を $\hat{\mathbb{R}}$ (アールハット) で表す.²

$C = \hat{\mathbb{R}}$ 上の四則演算 (今週の内容)

- 和 (差): 任意の実数 x に対し,

$$\infty + x = x + \infty = \infty.$$

- 積と商: 任意の 0 でない実数 x に対し,

$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty, \quad \frac{x}{\infty} = 0, \quad \frac{x}{0} = \infty.$$

- 次のものはとりあえず考えない.

$$\infty \cdot \infty, \quad \infty \pm \infty, \quad \infty / \infty, \quad 0 \cdot \infty.$$

練習. $x = \infty$ に対し次の式の値をもとめよ.

(1) $\frac{x+1}{x-2}$

(2) $3x+1$

(3) $-\frac{1}{x}$

(4) $\frac{x^2-1}{x^2-4}$

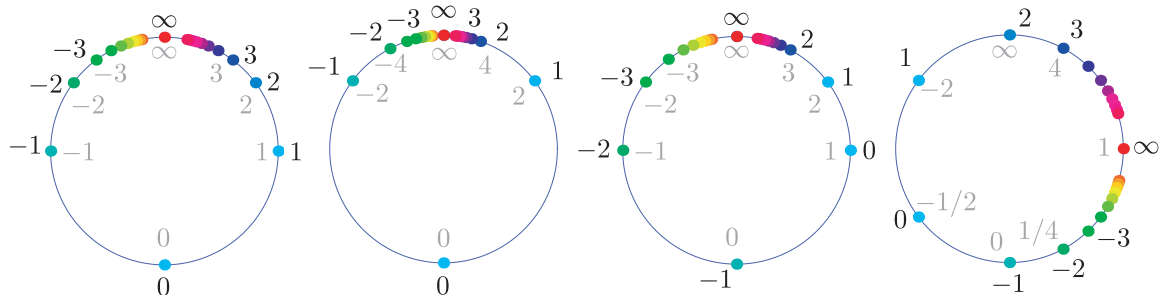
²拡張された実数 (extended reals) などと呼ばれることもあるが, 特に決まった呼び名はない. 円 C 上の点を実数と無限遠点で媒介変数表示していると考えてもよいし, 数直線に無限遠点という特殊な点 (特殊な「数」ではない) を加えたものを円 C で表現していると考えてもよい. どちらか選ぶなら, とりあえず前者をオススメする.

メビウス変換の分類定理

配布日：July 29, 2013 Version：1.1

第 11 回 (7/22) と第 12 回 (7/29) の講義内容のまとめ

1. $\hat{\mathbb{R}}$ と無限遠点の計算. 無限遠点 $\infty \in \hat{\mathbb{R}}$ は「数」ではないが, 極限計算として正当化できる範囲で計算規則を定めることができる. (前回のプリント参照.)
2. 例. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ のとき, $f(x) = \frac{1+1/x}{1-2/x}$ より $f(\infty) = \frac{1+1/\infty}{1-2/\infty} = \frac{1+0}{1-0} = 1$. また, $f(2) = \frac{2+1}{2-2} = \frac{3}{0} = \infty$.
3. 実メビウス変換. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (ただし $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc \neq 0$) の形の関数を実メビウス変換という.¹
4. 実メビウス変換の性質. 実メビウス変換 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ は $\hat{\mathbb{R}}$ の点を
 - ばねのように伸び縮みさせながら,
 - 穴があかないように,
 - 重ならないように
 ずらす.
5. 例. 実メビウス変換 $f(x) = 2x, x+1, \frac{x+1}{x-2}$ で $\hat{\mathbb{R}}$ の整数点をうつした様子:



左からもとの $\hat{\mathbb{R}}$, $2x$ による像, $x+1$ による像, $\frac{x+1}{x-2}$ による像.

6. 問題. 実メビウス変換 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (による力学系) を共役を用いて分類せよ.
7. 答え. 次の定理が成り立つ:

分類定理. 実メビウス変換 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ は次のいずれかひとつと共役:

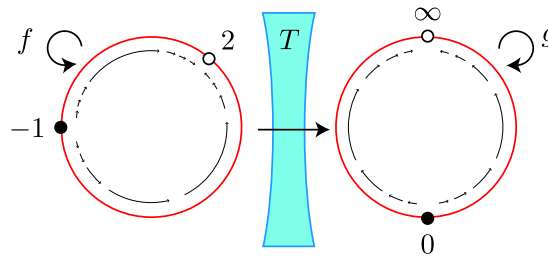
- (1) 双曲型: $g(x) = \lambda x$ ($x \in \hat{\mathbb{R}}, \lambda > 1$)
- (2) 放物型: $g(x) = x + 1$ ($x \in \hat{\mathbb{R}}$)
- (3) 楕円型: $g(z) = e^{i\theta} z$ ($z \in \mathbb{C}, |z| = 1, \theta \in \mathbb{R}$)

¹実係数一次分数変換とも呼ばれる.

8. 双曲型の例. $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$ のとき, これは $g(X) = 4X$ と共役な「双曲型」であることを確認してみよう. まず固定点を求めると $f(x) = x \iff x = -1, 2$ であることがわかる. この固定点を 0 と ∞ にうつす変換 $X = T(x) = \frac{x+1}{x-2}$ をとると (すなわち $T(-1) = 0, T(2) = \infty$),

$$T \circ f \circ T^{-1}(X) = T \circ f\left(\frac{2X+1}{X-1}\right) = T\left(\frac{3\frac{2X+1}{X-1}+2}{\frac{2X+1}{X-1}+2}\right) = \dots = 4X$$

となり, $T \circ f \circ T = g$ が成り立つ. これより, 「 f による力学系は g による力学系を T というレンズを通して観測したもの」だといえる.



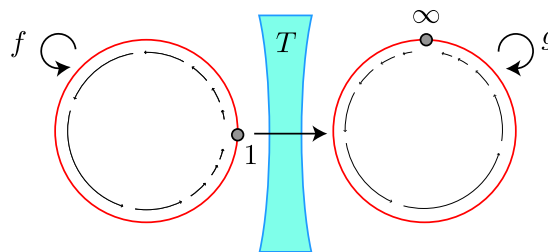
9. 漸化式への応用. $a_{n+1} = \frac{3a_n+2}{a_n+2} = f(a_n); a_1 = 1$ を解こう. $a_n = f^{n-1}(a_1)$ と表されることに着目する. $g^n = T \circ f^n \circ T^{-1} \iff f^n = T^{-1} \circ g^n \circ T$ より

$$a_n = T^{-1} \circ g^{n-1} \circ T(a_1) = T^{-1} \circ g^{n-1}\left(\frac{a_1+1}{a_1-2}\right) = T^{-1}\left(4^{n-1} \cdot \frac{1+1}{1-2}\right) = \dots = \frac{4^n - 1}{2 \cdot 4^{n-1} + 1}.$$

10. 放物型の例. $f(x) = \frac{3x+1}{-x+5}$ のとき, これは $g(X) = X+1$ と共役な「放物型」である. 確認してみよう. まず固定点を求めると $f(x) = x \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$ (重解) である. この固定点を ∞ にうつす変換 $X = T(x) = \frac{-4}{x-1}$ をとると (すなわち $T(1) = \infty$),

$$T \circ f \circ T^{-1}(X) = T \circ f\left(\frac{X-4}{X}\right) = \dots = X+1$$

となり, $T \circ f \circ T = g$ が成り立つ. g による力学系は数直線 \mathbb{R} で見ると平行移動であり, 等差数列を生成する. ここでも「 f による力学系は g による平行移動の力学系を T というレンズを通して観測したもの」だといえる.



11. 楕円型の例. 分類定理をみると, 「楕円型」にだけ複素数がでてきて不思議な感じがするだろう. 実際, 力学系もちょっと変っている. たとえば, $f(x) = \frac{x+1}{-x+1}$ を考えてみよう. このとき,

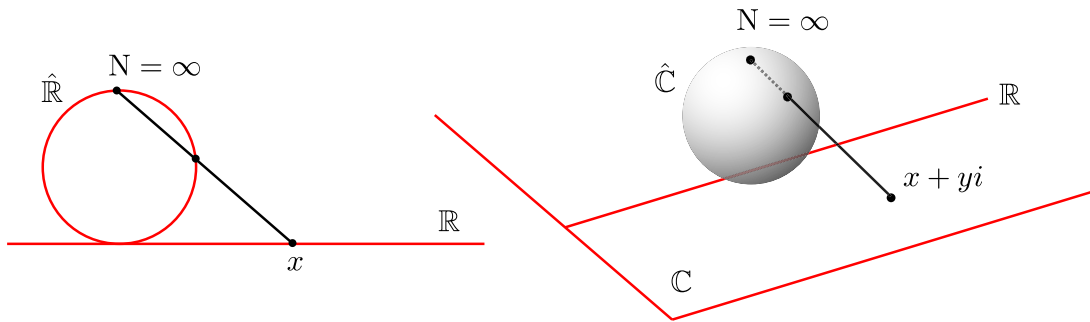
「任意の $a \in \hat{\mathbb{R}}$ に対し, $a \xrightarrow{f} f(a) \xrightarrow{f} f^2(a) \xrightarrow{f} f^3(a) \xrightarrow{f} f^4(a) = a$ が成り立つ. すなわち任意の点は周期 4 の軌道をもつ。」

この現象を理解するには、どうしても複素数が必要となる。

12. 準備：リーマン球面. \mathbb{R} から円を用いて $\hat{\mathbb{R}}$ を導入したように、 \mathbb{C} から球を用いて $\hat{\mathbb{C}}$ というものを考えよう. 具体的には、下の図のように複素平面 \mathbb{C} 上の点 (複素数) と球面上の点 (から北極にあたる点を除いたもの) を対応付ける. 北極にあたる点はやはり ∞ であり、

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

をリーマン球面とよぶ. $\hat{\mathbb{R}}$ はこのリーマン球面上の無限遠点を通る大円のひとつである.



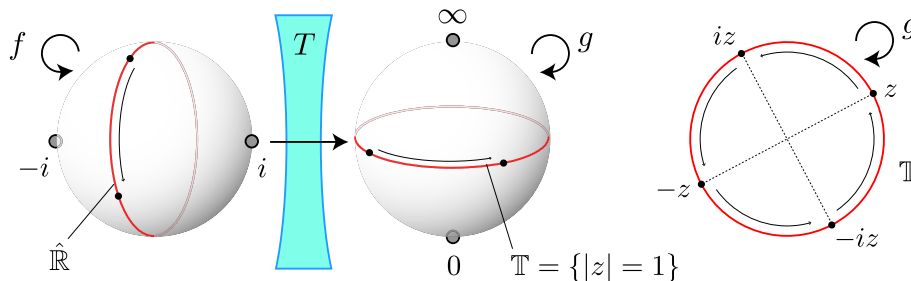
13. 楕円型の例 (つづき). さて $f(x) = \frac{x+1}{-x+1}$ に戻ろう. まず固定点を求めると $f(x) = x \iff x^2 + 1 = 0 \iff x = \pm i$ となり、2つの異なる複素数解を持つ. この固定点をそれぞれ 0 と ∞ にうつす変換 $z = T(x) = \frac{x-i}{x+i}$ をとると (すなわち $T(i) = 0, T(-i) = \infty$),

$$T \circ f \circ T^{-1}(z) = T \circ f\left(\frac{i(z+1)}{1-z}\right) = \dots = iz$$

となる. すなわち f は $g(z) = iz$ と共役である. しかも $x \in \hat{\mathbb{R}}$ のとき、 $|T(x)| = \left| \frac{x-i}{x+i} \right| = \frac{\sqrt{x^2+1^2}}{\sqrt{x^2+1^2}} = 1$ より $T(\hat{\mathbb{R}}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} =: \mathbb{T}$ であることが分かる.² したがって、

「 $\hat{\mathbb{R}}$ 上の $f(x) = \frac{x+1}{-x+1}$ による力学系」は T というレンズを通して「単位円 \mathbb{T} 上の $g(z) = iz$ による力学系」として観測される

ことがわかった.



$g(z) = iz = e^{\pi i/2} z$ は単位円上の複素数を 90 度回転させる. とくに $g^4(z) = i^4 z = z$ より、 $f^4(x) = T^{-1} \circ g^4 \circ T(x) = T^{-1} \circ T(x) = x$ が成り立つ. 以上で、 f による力学系ではすべての点が周期 4 の軌道を持つことが正当化された.

²これは論理的には不十分で、まだ $T(\hat{\mathbb{R}}) \subset \mathbb{T}$ しか証明できていない. じつは $z = T(x)$ は「複素モビウス変換」と呼ばれるものになっていて、リーマン球面上の円の像は必ずリーマン球面上の円になるのである.

分類定理の証明のスケッチ

固定点の分類. まず実メビウス変換 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) の固定点についてしらべてみよう. すなわち, 方程式

$$x = f(x) \iff x = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{*}$$

の解を考える, ただし, $(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 1)$ の場合は任意の $\hat{\mathbb{R}}$ 上の点が解なので, そのような場合は考えない.

- $c = 0$ のとき: $ad - bc = ad \neq 0$ より $d \neq 0$. よって 1 次関数

$$f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$$

の形である. すると, 上の方程式 (*) は

$$x = f(x) \iff dx = ax + b$$

となる. これは 2 つの $\hat{\mathbb{R}}$ 解³ $x = \infty$ と $x = \frac{b}{d-a}$ を持つ. 特に, $a = d$ の場合は $x = \infty$ を重解にもつ.

- $c \neq 0$ のとき: 単純な式変形により

$$x = \frac{ax+b}{cx+d} \iff cx^2 + (d-a)x - b = 0$$

となり, これは実数係数の 2 次方程式である.

したがって (高校で学んだ 2 次方程式の解の分類を思い出すと), 方程式 (*) の解として以下の 3 通りが考えられる:

- Case 1 相異なる $\hat{\mathbb{R}}$ 解 2 つ
- Case 2 $\hat{\mathbb{R}}$ 解 1 つ (重解)
- Case 3 相異なる虚数解 2 つ ($\hat{\mathbb{R}}$ には解を持たない.)

の 3 通りが考えられる.

分類定理の証明のスケッチ. (*) が異なる 2 つの解をもつとき (Case 1 もしくは 3); それを α, β とおく. まず, これらは ∞ ではないと仮定する. $X = T(x) = (x-\alpha)/(x-\beta)$ とおき, f の共役 $g = T \circ f \circ T^{-1}$ をとる. 地道に計算すると, $g(X) = \lambda X$ ($\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$) となるのがわかる.

次に α, β の一方が ∞ のとき, 例えば $\beta = \infty$ のとき, f は 1 次関数 $x \mapsto px+q$ の形であり, $T(x) = x-\alpha$ において $g = T \circ f \circ T^{-1}$ を計算すれば上と同様の形に変形できる.

さらに Case 1 の場合, f と T は実係数メビウス変換なので $\hat{\mathbb{R}}$ を $\hat{\mathbb{R}}$ に写す. したがって $g = T \circ f \circ T^{-1}$ は $\hat{\mathbb{R}}$ を $\hat{\mathbb{R}}$ に写す. このことから, λ は実数となることが分かる.⁴ もし $\lambda < 1$ のときは, 0 と ∞ を入れ替える変換 $X' = S(X) = 1/X$ をとり $G = S \circ g \circ S^{-1} = (S \circ T) \circ f \circ (S \circ T)^{-1}$ を計算すると, ちゃんと $G(X') = X'/\lambda$ となり双曲型の形になる.

次に Case 3 の場合, α, β は $a \pm bi$ の形をしていることから, $T(\hat{\mathbb{R}}) = \mathbb{T}$ (単位円) であることが分かる. f は実メビウス変換であり $\hat{\mathbb{R}}$ を $\hat{\mathbb{R}}$ に写すので, $g = T \circ f \circ T^{-1}$ は単位円 \mathbb{T} を \mathbb{T} に写さなくてはならない.

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{R}} & \xrightarrow{f} & \hat{\mathbb{R}} \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{g} & \mathbb{T} \end{array}$$

$g(z) = \lambda z$ は単位円を単位円に写すので $|z| = 1$ のとき $|g(z)| = 1$ より $|\lambda z| = |\lambda| = 1$. よって $\lambda = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) と表すことができ, 楕円型の形になる.

³実数解を \mathbb{R} 解と書く気分で.

⁴実数以外の複素数だと回転の要素が入ってしまうので, 実軸 \mathbb{R} が g によって原点中心に回転してしまう.

最後に (*) がただ 1 つの $\hat{\mathbb{R}}$ 解をもつとき (Case 2), これを α とおく. まず $\alpha \neq \infty$ のときは, $X = T(x) = 1/(x - \alpha)$ として共役 $g = T \circ f \circ T^{-1}$ をとれば, $g(X) = X + \mu$ ($\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$) の形になる. ここで $X' = S(X) = X/\mu$ として $G = S \circ g \circ S^{-1} = (S \circ T) \circ f \circ (S \circ T)^{-1}$ とすれば, $G(X') = X' + 1$ となり放物型になる.

$\alpha = \infty$ のときは f は最初から $x \mapsto x + \mu$ ($\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$) の形であるから, $g = S \circ f \circ S^{-1}$ とおけばよい. ■