

「現代数学基礎 CIII (複素関数統論)」について

配布日：October 4, 2013 Version：1.1

担当教員：川平 友規 (Kawahira, Tomoki, 理学部数理学科・多元数理科学研究科)

担当 TA：若狭 尊裕 (Takahiro, Wakasa, 大学院多元数理科学研究科博士課程 3 年)

講義ウェブサイト：

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/13W-kansuron.html>

配布されたプリントが pdf 形式でダウンロードできます。また、毎週の進捗状況についてコメント. していきます。

本授業の目的およびねらい (コースデザインより)：前期の複素関数論を引き継ぐかたちで講義を進める。講義の目的は大きく分けてふたつある。ひとつは、留数計算をマスターし実積分への応用方法を知ること。もうひとつは、下のキーワードのような種々の有名定理を通して、複素関数が「解析的」であることの特殊性 (たとえば「滑らかな関数」との違い) を理解し、今後学ぶ解析学・幾何学への橋渡しをすることである。

講義日と授業内容 (予定)：

10 月 4 日	前期の復習・ちからだめし
10 月 11 日	積分定理・積分公式の応用 1 (実積分・ポンペイユの公式)
10 月 18 日	応用 2 (リュービルの定理・代数学の基本定理・最大値原理)
10 月 25 日	テイラー展開・ローラン展開・一致の定理・モレラの定理
11 月 1 日	留数定理と実積分への応用
11 月 8 日	<休講予定>
11 月 15 日	偏角の原理・ルーシェの定理
11 月 22 日	リーマン球面・有理関数・有理形関数
12 月 6 日	メビウス変換
12 月 13 日	正規族とアスコリ・アルツェラの定理
12 月 20 日	等角写像とリーマンの写像定理
1 月 10 日	調和関数概説
1 月 17 日	<休講予定：センター準備日>
1 月 24 日	楕円関数概説
1 月 31 日	期末試験

参考書：教科書は使わない (講義ノートも配布する予定)。ただし、留数計算までをマスターするために、好みのテキスト (薄くて簡単なものでよい) を一冊手に入れて隅々まで読み込むことをすすめる。無料で手に入るものとして次の 2 点を挙げておく：

- 川平友規, 『複素関数の基礎のキソ』,
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/kansuron.pdf>
- 山上滋, 『複素解析入門』
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/complex/hukuso2013.html>

留数計算以降の発展的内容に関しては、次を挙げておく：

- アールフォルス, 『複素解析』, 現代数学社 (1982/03)
- 志賀啓成, 『複素解析学 II』, 培風館 (1999/06)

- 杉浦光夫,『解析入門 II』, 東京大学出版会 (1985/04)
- 高橋礼司,『複素解析 (新版)』, 東京大学出版会 (1990/01)

成績評価の方法：「履修取り下げ制度」を適用する.

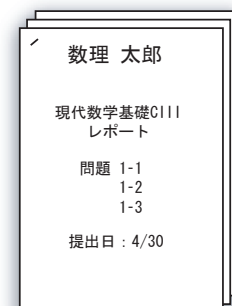
- レポートおよび期末試験の点数の合計点をもとに評価する.
- 履修取り下げ届が提出された場合, レポートを 5 回以上提出しなかったは「欠席」とする. それ以外は評価の目安として 59 点以下を F, 60 – 69 点を C, 70 – 79 点を B, 80 – 89 点を A, 90 – 100 点を S とする.

レポートの様式： レポートの締め切りは原則として「次の講義開始時」とします. 教壇前の机に提出しておいてください. 締め切りを過ぎたレポートは一切受け取らないので注意してください. 提出する際には, **必ず A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙を使用し, 右図のような表紙をつけてください.**

受講者同士で協力し合って解答してもかまいませんが, 必ず協力者の名前も明記するようにしてください. (それによって減点されることはありません.)

レポートは採点して返却します. 返却が済むまで, 成績への加点の対象とはしないので注意してください.

オフィスアワー： 授業中・授業後の質問は大歓迎です. それ以外の時間に質問したい場合は, ぜひオフィスアワー (教員ごとの質問受付時間) を活用してください. 私のオフィスアワーは, 理学部数学科内の合同オフィスアワー「Cafe David (カフェ・ダヴィド)」の時間に設定しています. Cafe David は月曜から金曜の 12:00–13:30, 理 1 号館 2 階のエレベーター前にオープンし, コーヒー・紅茶を無料で提供しています. 私の担当は**月曜日**です.



- ・ 名前は上の方に大きく書く.
- ・ 左上をホチキスで留める.
- ・ 解いた問題の番号, 提出日を書く.
- ・ 裏面はなるべく使わない.

よく使う記号など：数の集合

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (1) $\mathbb{C}$: 複素数全体 | (2) $\mathbb{R}$: 実数全体 | (3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体 |
| (4) $\mathbb{Z}$: 整数全体 | (5) $\mathbb{N}$: 自然数全体 | (6) $\emptyset$: 空集合 |

ギリシャ文字

- | | | | | |
|-------------------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| (1) α : アルファ | (2) β : ベータ | (3) γ, Γ : ガンマ | (4) δ, Δ : デルタ | (5) ϵ : イプシロン |
| (6) ζ : ゼータ | (7) η : エータ | (8) θ, Θ : シータ | (9) ι : イオタ | (10) κ : カッパ |
| (11) λ, Λ : ラムダ | (12) μ : ミュー | (13) ν : ニュー | (14) ξ, Ξ : クシー | (15) $\omicron$: オミクロン |
| (16) π, Π : パイ | (17) ρ : ロー | (18) σ, Σ : シグマ | (19) τ : タウ | (20) υ, Υ : ウプシロン |
| (21) ϕ, Φ : ファイ | (22) χ : カイ | (23) ψ, Ψ : プサイ | (24) ω, Ω : オメガ | |

ちからだめし

配布日：October 4, 2013 Version：1.1

ちからだめし

問題 1. 複素平面内の「領域」とはどんな集合のことをいう？

以下 $D \subset \mathbb{C}$ を領域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を複素関数とする.

問題 2. 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ がある点 $\alpha \in D$ で (複素) 微分可能であることの定義は何か？

問題 3. 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が正則関数であることの定義を書け.

問題 4. コーシー・リーマンの方程式を用いて, e^z が正則関数であることを示せ.

問題 5. コーシー・リーマンの方程式を用いて, $\bar{z}^2$ が正則関数でないことを示せ.

問題 6. $(-1)^i$ は正の実数であることを示せ. (注意！無限個あるよ.)

以下, $\alpha \in \mathbb{C}$, $r > 0$ にたいし α 中心半径 r の円を左回り (反時計回り) にまわる閉曲線を $C(\alpha, r)$ で表すことにする.

問題 7. m を整数, $C = C(\alpha, r)$ とするとき, 線積分 $\int_C (z - \alpha)^m dz$ を計算せよ.

問題 8. コーシーの積分定理を書け.

問題 9. $C = C(i, 1)$ とするとき, $\int_C \frac{1}{z^2 + 2} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ を示せ.

問題 10. コーシーの積分公式を書け.

問題 11. $C = C(0, 2)$ とするとき, $\int_C \frac{z^2}{z - i} dz = -2\pi i$ を示せ.

問題 12. (オマケ)

(1) 最大で時速 300 キロ出る車が平面上を気まぐれに 2 時間走り続けた. 出発点からの移動距離は, 最大で何キロメートルか？

(2) 正則関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は領域 D 上で $|f(z)| \leq 300$ を満たしている. C を D に含まれる長さ 2 の滑らかな曲線とすると, 線積分の絶対値 $\left| \int_C f(z) dz \right|$ の考えうる最大の値を求めよ.

レポート問題

締切りは 10 月 11 日 (金) の講義開始時とします.

問題 1-1. 上のちからだめし (問題 1~問題 11) をもう一度解け.

問題 1-2 (オプション). 講義への意見・感想・要望があれば, 自由に書いて下さい.

ちからだめしの略解 (前期の復習)

配布日：October 11, 2013 Version：1.1

前回 (10/4) のまとめ：ちからだめしの略解

問題 1. 複素平面内の「領域」とはどんな集合のことをいう？

【解答】 $D \subset \mathbb{C}$ が領域 (domain) : $\iff D$ は開集合かつ連結 (「連結開集合」).
 $\iff D$ は開集合かつその中の任意の 2 点を D 内の折れ線で結べる. ■

以下 $D \subset \mathbb{C}$ を領域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を複素関数とする.**問題 2.** 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ がある点 $\alpha \in D$ で (複素) 微分可能であることの定義は何か？

【解答】 関数 $w = f(z)$ が $z = \alpha$ で微分可能 (differentiable)
 $\iff$ ある定数 $A \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = A$$

この定数 A を f の α における微分係数 (differential coefficient) とよび, $A = f'(\alpha)$ と表す. ■注意. 微分係数を定める極限の式から, $z \approx \alpha$ のとき

$$\frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \approx A \iff \frac{\Delta w}{\Delta z} \approx A \iff \Delta w \approx A \Delta z$$

を得る. とくに $A = re^{i\theta} \neq 0$ のとき, f は $z = \alpha$ のまわりの点を (ほぼ) $r = |A|$ 倍拡大・ $\theta = \arg A$ 回転させながら $f(\alpha)$ のまわりに写す.**問題 3.** 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が正則関数であることの定義を書け.**【解答】**

関数 $w = f(z)$ が D 上で正則 (holomorphic) : $\iff \begin{cases} f \text{ が } D \text{ 上で微分可能かつ} \\ \text{導関数 } f' \text{ が } D \text{ 上で連続} \end{cases}$ ■

注意. 念のため言葉の復習 (確認) をしておく:

- 関数 $w = f(z)$ が D 上で微分可能
 $\iff$ すべての $\alpha \in D$ において f は微分可能.
- D 上で微分可能な関数 $w = f(z)$ にたいし, 点 $z \in D$ に微分係数 $f'(z)$ を対応させる関数を f の導関数 (derivative) とよぶ.

注意. 実は「導関数 f' が D 上で連続」という条件は不要 (Goursat の定理).**問題 4.** コーシー・リーマンの方程式を用いて, e^z が正則関数であることを示せ.

複素関数の正則性を「実関数の言葉で」言い換えたのが次のコーシー・リーマンの方程式である:

定理 (コーシー・リーマンの方程式). 複素関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z)$ の変数を $z = x + yi$, $w = u + vi$ とし $f(x + yi) = u + vi$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$) の形で表現するとき, 次の (a) と (b) は同値:

(a) f は D 上で正則.(b) u, v は D 上で C^1 級かつ方程式 (CR) $\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$ を満たす.

さらにこのとき, $f'(z) = u_x + iv_x$ が成り立つ.

注意. 方程式 (CR) を **コーシー・リーマンの方程式** (the Cauchy-Riemann equation) とよぶ.

注意. (CR) は, f を xy 平面から uv 平面への写像だと思ったとき, ヤコビ行列が

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & -\blacksquare \\ \blacksquare & \square \end{pmatrix}$$

の形になっていることを意味する. (これは回転+拡大を表す線形変換の形.)

【解答】 上の定理を用いて証明する. $e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$ より, 指数関数は xy 平面から uv 平面への写像として $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$ である. ヤコビ行列を計算すると, $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$ となり, u, v は C^1 級, かつコーシー・リーマンの方程式 (CR) を満たす. x, y は任意であるから, 定理 (コーシー・リーマンの方程式) より f は $\mathbb{C}$ 上正則といえる. ■

ちなみに導関数は $f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$.

問題 5. コーシー・リーマンの方程式を用いて, $\bar{z}^2$ が正則関数でないことを示せ.

【解答】 先の問題と同様である. 実部と虚部に分けて関数を表示すると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$ となる. ヤコビ行列は $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$ であるから, コーシー・リーマンの方程式を満たさない. よって正則関数ではない. ■

問題 6. $(-1)^i$ は正の実数であることを示せ. (注意! 無限個あるよ.)

【解答】 「複素数の複素数乗」の定義より $(-1)^i := e^{i \log(-1)}$ である. ここで $\log(-1)$ は $e^z = -1$ を満たす無限個の複素数を表すから, $-1 = e^{\pi i} = e^{\pi i + 2m\pi i}$ ($m \in \mathbb{Z}$) より $\log(-1) = (2m+1)\pi i$ ($m \in \mathbb{Z}$). よって

$$(-1)^i := e^{i \log(-1)} = e^{i(2m+1)\pi i} = e^{-(2m+1)\pi} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

これは $\dots, e^{-3\pi}, e^{-\pi}, e^{\pi}, e^{3\pi}, e^{5\pi}, \dots$ で得られる無限個の正の実数. ■

以下, $\alpha \in \mathbb{C}$, $r > 0$ にたいし α 中心半径 r の円を左回り (反時計回り) にまわる閉曲線を $C(\alpha, r)$ で表すことにする.

問題 7. m を整数, $C = C(\alpha, r)$ とするとき, 線積分 $\int_C (z - \alpha)^m dz$ を計算せよ.

【解答】 $z(t) = \alpha + re^{it}$ より $z'(t) = ire^{it}$. よって

$$\begin{aligned} \int_C (z - \alpha)^m dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^m \cdot (ire^{it}) dt = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt \\ &= \begin{cases} ir^{m+1} \left[\frac{1}{(m+1)i} e^{i(m+1)t} \right]_0^{2\pi} &= 0 \quad (m \neq -1) \\ i \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt &= 2\pi i \quad (m = -1). \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

注意. この線積分は複素関数論の中でもっとも重要! 絶対マスターすべし.

問題 8. コーシーの積分定理を書け.

【解答】 この講義では, 「コーシーの積分定理」 (もしくは単に「積分定理」) は次の形で与えられるとする:

コーシーの積分定理 (Cauchy's Integral Theorem). D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし, C を D 内の 単純閉曲線 とする. このとき, 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が正則であれば,

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

注意. 曲線 C が自己交差しない閉曲線であるとき, 単純閉曲線 (simple closed curve, 略して s.c.c.) とよばれる. また, 領域 $D \subset \mathbb{C}$ が 単連結 (simply connected) であるとは, D 内の任意の単純閉曲線 C について, その内部が D に含まれることをいう. ようするに, D に穴があいてないことをいう. (正確な定義は講義で復習する.)

問題 9. $C = C(i, 1)$ とするとき, $\int_C \frac{1}{z^2 + 2} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ を示せ.

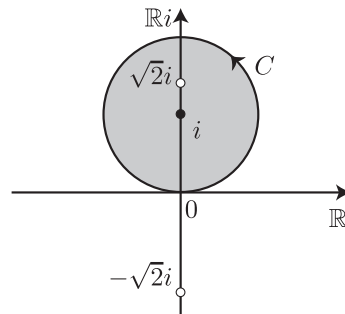
まずは次の基本公式を用いる (問題 7 と積分定理からの帰結):

基本公式: 任意の単純閉曲線 C にたいし, 次が成り立つ:

$$\int_C \frac{1}{z - \alpha} dz = \begin{cases} 2\pi i & (\alpha \text{ が } C \text{ の内部にあるとき}) \\ 0 & (\alpha \text{ が } C \text{ の外部にあるとき}) \end{cases}$$

【解答】

$$\begin{aligned} & \text{被積分関数を } \frac{1}{z^2 + 2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}i} \left(\frac{1}{z - \sqrt{2}i} - \frac{1}{z + \sqrt{2}i} \right) \text{ のように変形すれば,} \\ & \int_C \frac{1}{z^2 + 2} dz = \frac{1}{2\sqrt{2}i} \left(\int_C \frac{1}{z - \sqrt{2}i} dz - \int_C \frac{1}{z + \sqrt{2}i} dz \right). \end{aligned}$$



$\sqrt{2}i$ は C の内部, $-\sqrt{2}i$ は C の外部にあるので, 基本公式より求める積分は $\frac{1}{2\sqrt{2}i} (2\pi i - 0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. ■

問題 10. コーシーの積分公式を書け.

【解答】 この講義では, 「コーシーの積分公式」 (もしくは単に「積分公式」) は次の形で与えられるとする:

コーシーの積分公式 (Cauchy's Integral Formula): D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし, C を D 内の 単純閉曲線 とする. 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が 正則 であれば, 任意の $\alpha \in (C \text{ の内部})$ にたいし,

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$$

問題 11. $C = C(0, 2)$ とするとき, $\int_C \frac{z^2}{z - i} dz = -2\pi i$ を示せ.

【解答】 題意の積分を I とおく. $D = \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, $\alpha = i$ としてコーシーの積分公式を適用する. 実際, D は単連結領域であり f は D 上正則. $i \in (C \text{ の内部})$ であるから,

$$f(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^2}{z-i} dz \iff I = 2\pi i f(i) = -2\pi i.$$

■

問題 12. (オマケ)

- (1) 最大で時速 300 キロ出る車が平面上を気まぐれに 2 時間走り続けた. 出発点からの移動距離は, 最大で何キロメートルか?
- (2) 正則関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は領域 D 上で $|f(z)| \leq 300$ を満たしている. C を D に含まれる長さ 2 の滑らかな曲線とすると, 線積分の絶対値 $\left| \int_C f(z) dz \right|$ の考えうる最大の値を求めよ.

【解答】 (1) 最高速度でまっすぐ直線上を走りつづけて, $300 \times 2 = 600$ キロ.

(2) C 上を時速 1 (キロ) の一定速度で移動する点 z を考えよう. すなわち $C: z = z(t)$ と表すとき, $|z'(t)| = 1$ ($0 \leq t \leq 2$) とする. 微小時間 Δt の間に z は C 上をだいたい $\Delta z \approx z'(t)\Delta t$ 移動するのである.

では線積分 $\int_C f(z) dz = \int_0^2 f(z(t))z'(t)dt$ を考えてみよう. $f(z)\Delta z \approx f(z(t))z'(t)\Delta t$ という量は微小時間 Δt 内に (複素数で表された) 速度 $f(z(t))z'(t)$ で進んだ距離と解釈できる. 積分はそのトータルの道のりである. いま $|f(z(t))z'(t)| \leq 300 \cdot 1 = 300$ であるから, (1) と同じ考え方で速度 $f(z(t))z'(t)$ が最高速度 $|f(z(t))z'(t)| = 300$ で一定 (方向) のとき, 積分は最大値 600 をとる. ■

レポート問題

締切りは 10 月 18 日 (金) の講義開始時とします.

問題 2-1. 曲線 C は単位円を左側向きにまわる曲線とする. このとき, 以下の積分値を計算せよ.

$$(1) \int_C \frac{1}{z(z-2i)} dz \quad (2) \int_C \frac{1}{4z^2+1} dz \quad (3) \int_C \frac{1}{2z^2+3z-2} dz$$

問題 2-2. 以下の曲線 C について, 積分

$$\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$$

を計算せよ. ただし $C(\alpha, r) = \{z(t) = \alpha + re^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$ とする.

$$(1) C = C(i, 1) \quad (2) C = C(-i, 1) \quad (3) C = C(0, 2) \quad (4) C = C(1, 1)$$

問題 2-3. 正の数 a, b にたいし, 楕円

$$E = \{z(t) = a \cos t + ib \sin t \mid t \in [0, 2\pi]\}$$

を考える. ただし, 向きは左回りとする.

$$(1) \int_E \frac{1}{z} dz \text{ を求めよ.} \quad (2) \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx = \frac{2\pi}{ab} \text{ を証明せよ.}$$

(HINT: (1) の積分を変数変換し実部と虚部に分けてみる.)

積分定理・積分公式の応用

配布日：October 15, 2013 Version：1.1

前回 (10/11) のまとめと補足

コーシーの積分定理 (Cauchy's Integral Theorem). D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし, C を D 内の 単純閉曲線 とする. このとき, 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が正則であれば,

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

用語の確認 (ア). 複素平面上の曲線 C とはある適当な連続関数 $x = x(t)$, $y = y(t) \in \mathbb{R}$ によって

$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

と表されるものであった.¹ 曲線 C が 滑らか (smooth) であるとは, 速度

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) + \frac{dy}{dt}(t)i$$

が $a < t < b$ で存在し, 連続であり, かつゼロにならないことをいう.

(イ). C_1, C_2 を滑らかな曲線とすると, C_1 にそって進んだあとさらに C_2 にそって進む経路を記号 $C_1 + C_2$ で表す. 鉄道で言えば「乗り継ぎ」である.² 曲線 C が 区分的に滑らか (piecewise smooth) であるとは, C が有限個の滑らかな曲線 $C_1, C_2, \dots, C_N$ を順につなぎ合わせたものになっているときをいう. このとき, $C = C_1 + \dots + C_N$ と表す.

以下, 曲線 C といえば「区分的に滑らかな曲線」であると仮定しよう.

(ウ). 曲線 C が 閉曲線 (closed curve) であるとは, 始点と終点が一致することをいう. すなわち $C: z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) と表されるとき, $z(a) = z(b)$ が成り立つことをいう.

(エ). さらに $C: z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) が 単純閉曲線 (simple closed curve, 略して s.c.c.) であるとは, $a \leq t_1 < t_2 < b$ のとき $z(t_1) \neq z(t_2)$ が成り立つことをいう. (これは「自己交差しない閉曲線」ということ.)

(オ). $\mathbb{C}$ 上に単純閉曲線 C が与えられたとき, $\mathbb{C} - C$ はふたつの領域からなる (「Jordan の曲線定理」).³ そのうち有界なほうを C の 内部 (interior) とよび, $\text{int}(C)$ で表す. 有界でないほうを C の 外部 (exterior) とよび, $\text{ext}(C)$ で表す.

(カ). 領域 $D \subset \mathbb{C}$ が 単連結 (simply connected) であるとは, D 内の任意の単純閉曲線 C について, その内部 $\text{int}(C)$ が D に含まれることをいう. (これは「 D に穴があいてない」ということ.)



左は文句なしに単連結, 中央は単連結でない, しかし右のように切り込み (スリット) をいれたものは単連結.

¹ とくに断らないかぎり, C には t の増加方向にあわせた 向き (orientation) をあわせて考えることにする. また, $z(a)$ を C の 始点 (initial point), $z(b)$ を 終点 (terminal point) とよぶ.

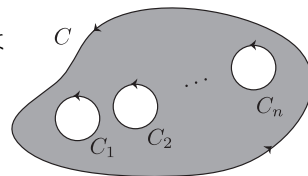
² ふつうは C_1 の終点が C_2 の始点と一致している場合を考える.

³ これは自明 (あたりまえ) ではなく, ちゃんと証明がつけられている. ちなみにドーナツの表面 T の場合, うまく単純閉曲線 C をとると $T - C$ がふたつに分割されないようにできる.

積分定理の応用

応用 (積分路の変更). 一般に単純閉曲線 C と $C_1, \dots, C_n$ が右図のように与えられているとき, 影のついた部分を含む領域で正則な関数の積分は

$$\int_C = \int_{C_1} + \dots + \int_{C_n}$$



をみたす.

証明のアイディア. 影のついた部分を一刀両断する切り込みを入れ, 2つの単連結領域に分割する. (その際, C と $C_1, \dots, C_n$ はそれぞれ2つに分割されるようにしておく.) これら単連結領域の境界線上の積分はコーシーの積分定理より0になるから, 切り込みで相殺される部分を忘れれば

$$\int_C + \left\{ \int_{-C_1} + \dots + \int_{-C_n} \right\} = 0 \iff \int_C = \int_{C_1} + \dots + \int_{C_n}.$$

ここで $-C_i$ は C_i を逆行する積分路であり, 線積分の基本性質 $\int_{-C_i} = -\int_{C_i}$ を用いた. ■

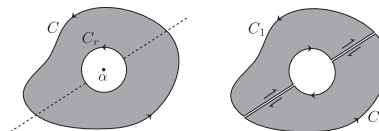
応用その2. 上の方法をもちいて次の基本公式を示そう:

基本公式. 任意の単純閉曲線 C にたいし, 次が成り立つ:

$$\int_C \frac{1}{z - \alpha} dz = \begin{cases} 2\pi i & : \alpha \in \text{int}(C) \text{ のとき} \\ 0 & : \alpha \in \text{ext}(C) \text{ のとき} \end{cases}$$

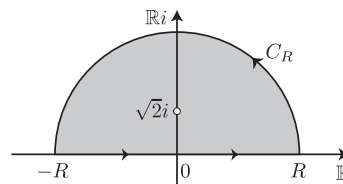
基本公式の証明. $\frac{1}{z - \alpha}$ は $\mathbb{C} - \{\alpha\}$ で正則である. α が C の外部にあるときは, C の内部を少しだけ膨らませることで, C を含み α を含まない単連結領域 D を見つけることができる. よってコーシーの積分定理より, $\int_C = 0$.

次に α が C の内部にあるときを考える. 十分小さな $r > 0$ を固定すると, $C_r := C(\alpha, r)$ は C の内部にあるとしてよい. このとき, 上の「応用」($n=1$) と「ちからだめし問題7」の計算により $\int_C = \int_{C_r} = 2\pi i$. ■



実積分への応用. 実1変数の広義積分に応用して, 次を示す:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$



計算の概略. ちなみにこの積分自体は $x = \sqrt{2} \tan \theta$ とおけば簡単に求まるが, あえて複素積分を適用してみよう. (これは練習. もっと有益な例はレポート問題で.)

$R > \sqrt{2}$ とし, $I_R = \int_{-R}^R \frac{1}{x^2 + 2} dx$ とおく. さらに, $C_R := \{Re^{it} \mid t \in [0, \pi]\}$ (半円) とおく.

図のような半円の境界線 (集合としては $[-R, R] \cup C_R$ で表される) を C とすると, 「ちからだめし問題9」と同様にして

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 2} dz = \frac{1}{2\sqrt{2}i} \left(\int_C \frac{1}{z - \sqrt{2}i} dz - \int_C \frac{1}{z + \sqrt{2}i} dz \right).$$

$\sqrt{2}i$ は C の内部, $-\sqrt{2}i$ は C の外部にあるので, 基本公式より $\int_C = \frac{1}{2\sqrt{2}i} (2\pi i - 0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. よって

$$\int_C = \int_{C_R} + I_R = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

が成り立つ. ここで, $\left| \int_{C_R} \right| \rightarrow 0 \ (R \rightarrow \infty)$ を示せば, 求める積分 $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \pi/\sqrt{2}$ が示される.

いま $R > \sqrt{2}$ より, $z \in C_R$ のとき

$$\left| \frac{1}{z^2 + 2} \right| \leq \frac{1}{|z|^2 - 2} = \frac{1}{R^2 - 2} > 0$$

であるから, ⁴ 「ちからだめし問題 12」と同じ考え方を用いると,

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{z^2 + 2} dz \right| \leq \frac{1}{R^2 - 2} \cdot \ell(C_R) = \frac{\pi R}{R^2 - 2} \rightarrow 0 \ (R \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. ただし $\ell(C_R)$ は C_R の長さである.

参考: グリーンの定理 (複素版)

コーシーの積分定理は「正則関数」特有の現象である. これを確認するために, 一般の「正則とはかぎらない関数」に対して積分定理にあたるものを考えてみよう. D を $\mathbb{C}$ 内の領域とし, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は C^1 級の複素関数とする. ここで C^1 級とは, $f(x+yi) = u+vi$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$) と表現したとき, u, v が x, y の関数として C^1 級であることを意味する.

「 z 偏微分」と「 $\bar{z}$ 偏微分». 次のような記号を導入しよう:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x+yi) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x+yi) \end{aligned}$$

z と $\bar{z}$ は独立に動くわけではないので, これらは普通の意味の偏微分ではないが, とにかく形式的に記号として導入するのである. また通常の偏微分の記号にならって, $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ は $f_z(z), f_{\bar{z}}(z)$ のようにも表す.

例. $f(z) = \bar{z}$ のとき,

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x-yi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x-yi) - i \frac{\partial}{\partial y} (x-yi) \right\} = \frac{1}{2} \{ (1-0) - i(0-i) \} = 0.$$

同様にして,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x-yi) = \frac{1}{2} \{ (1-0) + i(0-i) \} = 1.$$

一般に $f(z) = \bar{z}^n$ のとき $f_z(z) = 0, f_{\bar{z}}(z) = n\bar{z}^{n-1}$ が成り立つ ($\rightarrow$ レポート問題).

グリーンの定理 (複素版) (Green's Theorem): D を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域とし, C を D 内の単純閉曲線とする. 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が C^1 級であれば, 任意の $\alpha \in \text{int}(C)$ にたいし,

$$\int_C f(z) dz = 2i \iint_{\text{int}(C)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dxdy$$

例. $f(z) = \bar{z}$ としてグリーンの定理を適用してみよう. 上の計算から

$$\int_C \bar{z} dz = 2i \iint_{\text{int}(C)} 1 \cdot dxdy$$

⁴一般に $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ にたいし三角不等式 $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ が成り立つのであった. この場合 $\alpha = z^2, \beta = 2$ として適用.

であるから, 単純閉曲線 C で囲まれる領域の面積は

$$(\text{int}(C) \text{ の面積}) = \frac{1}{2i} \int_C \bar{z} dz$$

と, 右辺の線積分で計算できることがわかる. また右辺は 0 にならないから, $\bar{z}$ に関してはコーシーの積分定理が成立しないこともわかる. もちろん, $\bar{z}$ は正則関数ではないので積分定理の仮定を満たしていないわけだが.

正則関数とグリーン定理. グリーンの定理の面白いところは, 「正則関数でない」という性質が端的に数値として現れるところにある. その理由を説明しよう.

一般の C^1 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z)$ を実部と虚部にわけて $u + vi = f(x + yi)$ のように表現してみよう. すると

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + vi) = \frac{1}{2} \{ (u_x - v_y) + i(u_y + v_x) \}$$

であるから, D 上で

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0 \iff u, v \text{ は } C^1 \text{ かつコーシー・リーマンを満たす} \iff f \text{ は正則}$$

が成り立つことがわかる. したがって, グリーンの定理に f が正則であることを仮定したものが積分定理に他ならない. 標語的に言えば $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ とは f の「正則性からのズレ」を表す関数であって, グリーンの定理は左辺の線積分によってそのズレをあぶり出す, という仕組みなのである.

証明 (グリーンの定理). 実関数のグリーンの定理は仮定して証明する. 実部虚部にわけた $u + vi = f(x + yi)$ の形の表記を用いて,

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + vi)(dx + i dy) \\ &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx) \quad (\downarrow \text{ここで実関数グリーンの定理}) \\ &= \iint_{\text{int}(C)} (-u_y - v_x) dx dy + i \iint_{\text{int}(C)} (-v_y + u_x) dx dy \\ &= \iint_{\text{int}(C)} \left(\frac{\partial}{\partial x} (iu - v) + \frac{\partial}{\partial y} (-u - vi) \right) dx dy \\ &= i \iint_{\text{int}(C)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + vi) dx dy = 2i \iint_{\text{int}(C)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy. \end{aligned}$$

■

「全微分」の式. 講義では扱わなかったが, C^1 級複素関数にも次のような「全微分」が存在する:

複素版「全微分」. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が C^1 級のとき, $\alpha \in D$ に対し $f_z(\alpha) = A$, $f_{\bar{z}}(\alpha) = B$ とおくと, $z \rightarrow \alpha$ のとき

$$f(z) = f(\alpha) + A(z - \alpha) + B\overline{(z - \alpha)} + o(|z - \alpha|).$$

この式から, 「 f が α で微分可能 $\iff f_{\bar{z}}(\alpha) = 0$ 」がわかる.

証明. $f(x + yi) = u + vi$ の形で表現してみよう. $\alpha = x_0 + y_0 i$, $f(\alpha) = u_0 + v_0 i$ とおき, 差分をそれぞれ $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta u = u - u_0$, $\Delta v = v - v_0$, $\Delta z = z - \alpha$ と表現しておく. このとき, $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$, $\overline{\Delta z} = \Delta x - i \Delta y$ となることに注意しておこう. さて f は C^1 級であるから, u, v もそれぞれ x, y について C^1 級である. よって全微分の式

$$\Delta u = p_1 \Delta x + p_2 \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \quad \Delta v = q_1 \Delta x + q_2 \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

(ただし, $p_1 = u_x(x_0, y_0)$, $p_2 = u_y(x_0, y_0)$, $q_1 = v_x(x_0, y_0)$, $q_2 = v_y(x_0, y_0)$) が成り立つ. これより

$$\begin{aligned} f(z) - f(\alpha) &= \Delta u + \Delta v i = (p_1 \Delta x + p_2 \Delta y) + (q_1 \Delta x + q_2 \Delta y) i + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= (p_1 + q_1 i) \Delta x + (p_2 + q_2 i) \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) \cdot \frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha) \cdot \frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i} + o(|\Delta z|) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) - i \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha) \right) \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) + i \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha) \right) \overline{\Delta z} + o(|\Delta z|) \\ &= A(z - \alpha) + B(\overline{z - \alpha}) + o(|z - \alpha|). \end{aligned}$$

■

積分公式とポンペイユの公式 (参考)

コーシーの積分公式 (Cauchy's Integral Formula): D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし, C を D 内の 単純閉曲線 とする. 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が 正則 であれば, 任意の $\alpha \in \text{int}(C)$ にたいし,

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$$

応用. $C = C(0, 3)$ とするとき, $\int_C \frac{z^2}{z+1} dz = 2\pi i$ を示す. 題意の積分を I とおく. $D = \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, $\alpha = -1$ としてコーシーの積分公式を適用する. 実際, D は単連結領域であり f は D 上正則. $-1 \in \text{int}(C)$ であるから,

$$f(-1) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^2}{z - \alpha} dz \iff I = 2\pi i(-1)^2 = 2\pi i.$$

積分公式の本当にすごい応用は次回やることにして, ここでは積分公式の一般化を参考までに紹介しておこう.

ポンペイユの公式 (Pompeiu's Formula): D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし, C を D 内の 単純閉曲線 とする. 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が C^1 級であれば, 任意の $\alpha \in \text{int}(C)$ にたいし,

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\text{int}(C)} \frac{f_{\bar{z}}(z)}{z - \alpha} dx dy.$$

こちら「正則性からのズレ」が右辺第 2 項の面積分で表現される, という仕組みになっている.
5

証明のスケッチ. $g(z) = f(z)/(z - \alpha)$, $D(\alpha, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < r\}$ とおく. r が十分に小さいとき, $D(\alpha, r) \subset \text{int}(C)$ である. これに「基本公式」と同様にグリーンの定理 (複素版) を適用すれば,

$$\int_C g(z) dz - \int_{\underbrace{C(\alpha, r)}_{(1)}} g(z) dz = 2i \iint_{\text{int}(C) - D(\alpha, r)} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} dx dy \quad (**)$$

が成り立つ. ここで「 $\bar{z}$ 偏微分」も普通の偏微分のようにライプニッツ則を満たすことから (→レポート)

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{f(z)}{z - \alpha} \right) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \cdot \frac{1}{z - \alpha} + f(z) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{z - \alpha} \right)$$

となる. ここで $1/(z - \alpha)$ は $\text{int}(C) - D(\alpha, r)$ を含む部分で正則であるから, 下線部分は 0 となる.

⁵この面積分は正確には $\text{int}(C) - \{\alpha\}$ 上での広義積分であるが, 値が確定するのでこのように書き表すことが多い.

つぎに (1) の積分を次のように変形する:

$$\underbrace{\int_{C(\alpha,r)} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz}_{(1)} = \int_{C(\alpha,r)} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} dz - f(\alpha) \int_{C(\alpha,r)} \frac{1}{z-\alpha} dz$$

$|z-\alpha|=r$ であることに注意しよう. 右辺第 2 項は変数変換して計算すると $2\pi i f(\alpha)$ となる. また, f は C^1 級なので, $f_z(\alpha)=A$, $f_{\bar{z}}(\alpha)=B$ のとき「全微分」の式 $f(z)-f(\alpha)=A(z-\alpha)+B(\bar{z}-\bar{\alpha})+o(|z-\alpha|)$ (ただし $|z-\alpha|=r \rightarrow 0$) が成り立つ. よって $|z-\alpha|=r$ が十分小さいとき, $|f(z)-f(\alpha)| \leq (|A|+|B|+1)|z-\alpha|$. これより,

$$\left| \int_{C(\alpha,r)} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} dz \right| \leq (|A|+|B|+1)2\pi r \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

を得る. 以上で, $r \rightarrow 0$ のとき, (**) の式の左辺の値が確定し, (したがって右辺も広義積分として値が確定し), 式を整理することでポンペイユの公式が得られる. ■

レポート問題

締切りは 10 月 25 日 (金) の講義開始時とします.

問題 3-1 (実積分への応用). 次の広義積分

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx$$

を複素積分を用いて計算しよう.

(1) $\alpha = e^{\pi i/4}$ とおくとき, 方程式 $z^4+1=0$ の解は $\pm\alpha, \pm\bar{\alpha}$ の 4 つであることを示せ.

(2) 恒等式

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{a}{z-\alpha} + \frac{b}{z+\alpha} + \frac{c}{z-\bar{\alpha}} + \frac{d}{z+\bar{\alpha}}$$

を満たす a, b, c, d を求めよ.

(3) 講義でやった $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2} dx$ の計算を参考にして, 積分値 I を求めよ.

問題 3-2 (「 $f_z, \bar{z}$ 偏微分」の性質). $D \subset \mathbb{C}$ を領域, $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ を C^1 級関数とする.

(1) ライブニッツ則

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(f(z)g(z)) &= \frac{\partial f}{\partial z}(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(z) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f(z)g(z)) &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) \end{aligned}$$

を示せ. (HINT: 関数・変数を実部と虚部に分けて定義どおり計算を頑張る.)

(2) 自然数 n に対し, $f(z) = \bar{z}^n$ のとき, $f_{\bar{z}}(z) = n\bar{z}^{n-1}$ を示せ.

(3) $f(z)$ が正則のとき, $\overline{f(\bar{z})}$ も正則であることを示せ.

積分公式の応用

配布日：October 25, 2013 Version：1.1

前回 (10/18) のまとめと補足

積分公式の一般化と、さまざまな応用を紹介する．以下，とくに断らない限り D は $\mathbb{C}$ 内の領域とします．

微分可能性と微分の積分公式． 正則関数には（定義により）連続な導関数が存在する．この性質は，導関数にまで「遺伝」するのである：

定理（微分可能性）． 正則関数 $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ は何回でも微分可能である．とくに， $f', f'', f^{(3)}, \dots$ も全て正則関数となる．

注意． 実関数 $f(x) = |x|^{3/2}$ ($x \in \mathbb{R}$) は連続な導関数 f' をもつが， $f''(0)$ は存在しない．実関数の微分に比べ，複素関数の微分は 2 次元的な強い制限がかかっているのである．

微分の積分公式． 定理（微分可能性）の証明には，次の「積分公式の一般化」を使う：

積分公式 2（ n 階微分の積分公式）． D を単連結領域， $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数， C を D 内の単純閉曲線とする．このとき，すべての $\alpha \in \text{int}(C)$ と $n \geq 0$ に対し $f^{(n)}(\alpha)$ が存在し，次が成り立つ

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz.$$

微分の値が積分で計算できてしまう，という不思議な公式である．しかし，なんとも覚え辛い．たとえば次のように，（やや強引に）変形した形で覚えてるとよいかもしれない：

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)} dz \cdot \frac{1}{\underline{\underline{(z-\alpha)^n}}}$$

下線部は普通の積分公式であり，二重下線部分母の $(z-\alpha)^n$ と左辺を掛けあわせるとちょうどテイラー展開の n 次の項になるのである．

積分公式 2 の証明． $n=0$ のときは積分公式そのものである．ここでは $n=1$ のときを証明しよう． $n \geq 2$ の場合は数学的帰納法を用いて，以下と同様の計算をすれば証明できる． $h \approx 0$ とするとき， $n=0$ での結果（積分公式そのもの）を用いて

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_C \frac{f(z)}{z-(\alpha+h)} dz - \int_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha-h)(z-\alpha)} dz \end{aligned}$$

ここで $h \rightarrow 0$ とすれば $f'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz$ を得ることを示そう．積分部分の絶対誤差は

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha-h)(z-\alpha)} dz - \int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz \right| = \left| \int_C \frac{hf(z)}{(z-\alpha)^2(z-\alpha-h)} dz \right|$$

である． C 上での $|f(z)|$ の最大値 M とする．¹ また， C を半径 r だけ膨らませた集合 $N_r(C) = \bigcup_{z \in C} D(z, r)$ ただし $D(z, r) = \text{int}(C(z, r))$ を考えると， $r, |h|$ がともに十分 0 に近いとき， α と $\alpha+h$ は $N_r(C)$ に入

¹ 有界閉集合（ここでは C ）の連続関数（ここでは $z \mapsto |f(z)|$ ）は最大値・最小値をもつ．

らない。したがって $z \in C$ のとき $|z - \alpha| \geq r$ かつ $|z - \alpha - h| \geq r$ が成り立つ。よって上の絶対誤差の式は $\frac{|h|M}{r^3} \ell(C)$ 以下である。 $|h| \rightarrow 0$ のときこれはいくらでも 0 に近づく。 ■

定理 (微分可能性) の証明. 任意の $\alpha \in D$ にたいし, α 中心の十分小さな開円板 D_α をとりその中で α を囲む単純閉曲線 C をとれば, 積分公式 2 の仮定を満たすようにできる。よって $n \geq 1$ に対し $f^{(n)}(\alpha)$ の存在がわかる。

これから $n \geq 0$ に対し $f^{(n)}$ は D 上微分可能で導関数 $f^{(n+1)}$ が存在することがわかった。 $f^{(n)}$ が正則であることをいうには, 導関数 $f^{(n+1)}$ が連続であることも確認しなくてはならない。²

いま任意の $\alpha \in D$ に対し, $f^{(n+2)}(\alpha)$ が存在することは分かっている。よって $f^{(n+1)}$ は $z = \alpha$ で微分可能, したがって連続である。³ α は任意であるから, $f^{(n+1)}$ は D 上連続。 ■

積分計算への応用. 再び $C = C(0, 2)$ として, 次の積分値を求めてみよう。

$$I = \int_C \frac{e^z}{(z-1)^4} dz$$

積分公式 2 で $D = \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$, $\alpha = 1$, $n = 3$ としてみよう。 $\alpha \in \text{int}(C)$ であるから,

$$f^{(3)}(1) = \frac{3!}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{(z-1)^4} dz \iff I = \frac{2\pi i f^{(3)}(1)}{3!} = \frac{e\pi i}{3}.$$

ここで $f^{(3)}(z) = e^z$ を用いた。

原始関数とモレラの定理. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を領域 D 上の連続関数としよう。「コーシーの積分定理」によれば,

$$f \text{ が正則} \implies \text{任意の } \text{int}(C) \subset D \text{ を満たす単純閉曲線 } C \text{ に対し, } \int_C f(z) dz = 0.$$

がなりたつ。じつは, その逆が言えるのである:

モレラ (Morera) の定理, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を領域 D 上の連続関数とする。

$$(*) : D \text{ 内の任意の単純閉曲線 } C \text{ に対し } \int_C f(z) dz = 0 \text{ が成り立つ}$$

ならば, f は D 上で正則である。

証明 (モレラ). 次を示せば十分である:

$$(**) : \text{ある関数 } F: D \rightarrow \mathbb{C} \text{ が存在して, } F'(z) = f(z) \text{ } (z \in D).$$

なぜなら, そのような F は D 上で連続な導関数 f をもつことになり, 正則関数である。したがって定理 (微分可能性) より, f も正則関数, というわけである。

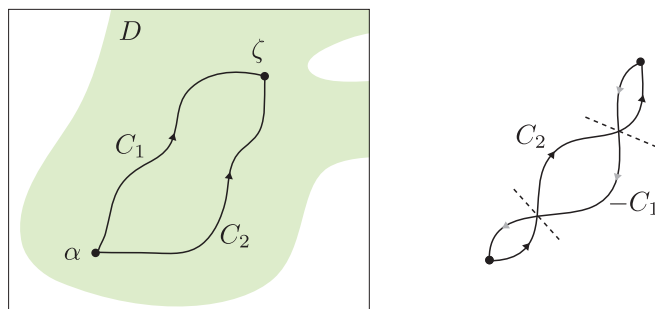
では関数 F を具体的に構成して $(**)$ を示そう。 $\alpha \in D$ を任意に選び固定する。また, $\zeta \in D$ も自由に選び, さらに α から ζ にいたる D 内の経路 (曲線) C_1, C_2 を自由に選ぶ。仮定 $(*)$ から, (必要なら図のように経路 $C_2 + (-C_1)$ を適当に単純閉曲線分割することで)

$$\int_{C_2 + (-C_1)} f(z) dz = 0 \iff \int_{C_2} = - \int_{-C_1} = \int_{C_1}$$

がわかる。

²Goursat の定理によれば, この時点で導関数の連続性は自動的に導かれる。しかしわれわれはこの高尚な定理を用いる代わりに, 連続性も正則性の定義に加えたのであった。

³一般に複素関数 g が $z = \alpha$ で微分可能であれば, $z = \alpha$ で連続である。



これは, D 内で積分を考える限り, α から ζ にいたる経路によらず積分値がひと通りに定まることを示している. よって

$$F(\zeta) := \int_{C_1} f(z) dz \quad \left(= \int_{C_2} f(z) dz \right)$$

とおく. 経路に依存しないことから, $F(\zeta) = \int_{\alpha}^{\zeta} f(z) dz$ のようにも表す.

こうして定まる関数 $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ が f を導関数に持つことを示そう. すなわち, 任意の $\zeta \in D$ に対し

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\zeta + h) - F(\zeta)}{h} = f(\zeta)$$

が成り立つことを示す. より正確には, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して, $|h| \leq \delta$ のとき

$$\left| \frac{F(\zeta + h) - F(\zeta)}{h} - f(\zeta) \right| \leq \epsilon$$

を示せばよい.

いま f は連続であったから, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して, $|z - \zeta| \leq \delta$ のとき

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq \epsilon$$

とできる. これを念頭に, $|h| \leq \delta$ として

$$\frac{F(\zeta + h) - F(\zeta)}{h} = \frac{1}{h} \left\{ \int_{\alpha}^{\zeta+h} f(z) dz - \int_{\alpha}^{\zeta} f(z) dz \right\}$$

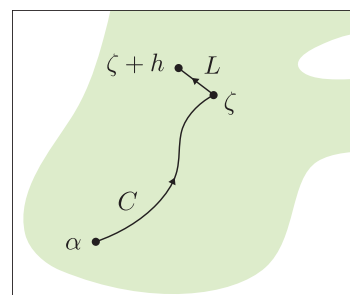
を考えよう. 積分は (D 内の) 経路に依存しないから,

α から ζ まで: 曲線 C (何でもよい)

ζ から $\zeta + h$ まで: 線分 $L: z(t) = \zeta + ht$ ($0 \leq t \leq 1$)

をとると, 上の式は

$$\frac{F(\zeta + h) - F(\zeta)}{h} = \frac{1}{h} \left\{ \int_{C+L} f(z) dz - \int_C f(z) dz \right\} = \frac{1}{h} \int_L f(z) dz$$



となる. さらに $\int_L 1 \cdot dz = \int_0^1 h \cdot dt = h$, $\ell(L) = |h|$ (線分 L の長さ) を用いれば

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(\zeta + h) - F(\zeta)}{h} - f(\zeta) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_L f(z) dz - \frac{f(\zeta)}{h} \int_L 1 \cdot dz \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_L (f(z) - f(\zeta)) dz \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \epsilon \cdot \ell(L) = \epsilon \end{aligned}$$

を得る. $\zeta \in D$ は任意であったから, 以上で (**) は示された. ■

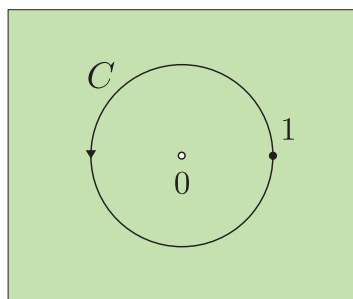
原始関数. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ に対し, $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ が $F' = f$ を満たすとき, F を f の原始関数 (primitive function) とよぶ.

- もし F_1 と F_2 がともに f の原始関数であれば, $F_1(z) - F_2(z)$ は定数関数である. (理由はレポート問題.)
- D が単連結かつ $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が正則であれば, コーシーの積分定理よりモレラの定理の仮定 (*) を満たす. よって原始関数 $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ が積分によって構成できる.

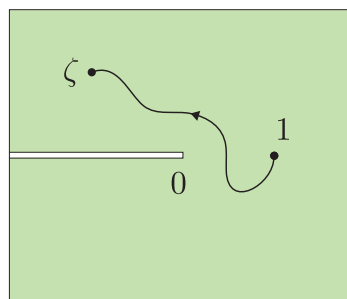
例. $f(z) = z^2$ のとき, 原始関数は $F(z) = z^3/3 + C$ (C は定数) の形となる. ($(z^3/3)' = z^2$ だから.)

微妙な例 (対数関数). $f(z) = \frac{1}{z}$ のとき, 原始関数は $F(z) = \log z + C$ の形だろうか? これはおかしい. $\log z$ は多価関数だからである.

たとえば $C = C(0, 1)$ とすれば, $\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$ である. そもそもモレラの定理の仮定 (*) を満たしてなかったのである.



$$D = \mathbb{C} - \{0\}$$



$$D' = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$$

$f(z)$ の定義域は $D = \mathbb{C} - \{0\}$ である. f はここで正則にはなっているが, D は単連結でないので, 「積分定理」との相性が悪いのである. そこでスリット (切れ込み) をいれて, f を単連結領域 $D' := \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ に制限してみよう. このとき積分定理よりモレラの定理の仮定 (*) が満たされるので, 原始関数 $F(\zeta) = \int_1^\zeta f(z) dz$ が定まるのである. (ただし, 積分経路は D' 内に限定.) この F は $\log z$ の主値 ($|\operatorname{Im} \log z| < \pi$) にあたるものになっている.

リュービルの定理. 積分公式の応用に戻ろう. 正則関数でのみ成立する定理のひとつに, 次のものがある:

リュービルの定理 (Liouville's Theorem) 複素平面全体で正則かつ有界な関数は, 定数関数に限る.

すなわち, 「 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が正則かつある $M > 0$ が存在して $|f(z)| \leq M$ ($\forall z \in \mathbb{C}$) であれば, f は定数」だといっている. たとえば次のことがわかる:

- 指数関数 e^z , 三角関数 $\sin z$, $\cos z$ は $\mathbb{C}$ 上正則. しかし定数でないので, リュービルの定理より有界ではない. たとえば実三角関数は $|\sin x| \leq 1$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) だが, 複素で $|\sin z| \leq 1$ ($\forall z \in \mathbb{C}$) はウソになる.
- 関数 $f(z) = \frac{z}{1+|z|^2}$ は $\mathbb{C}$ 上で C^1 級. このとき任意の $z \in \mathbb{C}$ で $|f(z)| \leq \frac{|z|}{1+|z|^2} \leq \frac{1}{2}$ が成り立つから有界かつ定数でない. リュービルの定理より, この f は正則関数ではない.

リュービルの定理の証明. 「 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が正則, かつある M が存在して $|f(z)| \leq M$ ($\forall z \in \mathbb{C}$)」と仮定しよう. 任意に $\alpha \in \mathbb{C}$ を固定し, $C = C(\alpha, r)$ ($r > 0$) とすると, 積分公式 2 より

$$|f'(\alpha)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \ell(C) = \frac{M}{r}.$$

このとき, M は一定だが $r > 0$ は任意に大きくとれるので, $f'(\alpha) = 0$ でなくてはならない. α も任意なので, f は定数. (レポート問題も参照) ■

代数学の基本定理. リュービルの定理を用いると, 次の定理が証明できる:

代数学の基本定理 (The Fundamental Theorem in Algebra) 複素係数の方程式 $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0, n \geq 1$) は, 複素数解をもつ.

「複素」を「実」に変えて, 「実係数の方程式は実数解をもつ」としたらウソになる. たとえば $x^2 + 1 = 0$ は実数解をもたないからである. 複素数のように「係数に用いる数の体系と, 解が存在するような数の体系が一致する」ことを, 代数学では「複素数体は代数的に閉じている」と表現する.

「代数学の基本定理」はガウス (Gauss) が最初に証明したとされる. この定理から, ある複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$$

が成り立つ. すなわち, 「複素係数の n 次方程式は重複度込みで n 個の解をもつ.」この事実も, 同様の因数分解が実数では成り立たない (たとえば, $x^2 + 1$) こととは対照的である.

代数学の基本定理の証明. 方程式の左辺を $f(z)$ とおく. いま $f(z) \neq 0$ がすべての $z \in \mathbb{C}$ で成り立つと仮定して矛盾を導こう. この仮定のもと, $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ は $\mathbb{C}$ 上正則かつ定数関数ではないことに注意しておこう.

まず, $z \neq 0$ のとき等式

$$|f(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right|$$

を考える. 下線部を $A(z)$ とおくと, $|z| \geq r > 0$ のとき

$$|A(z)| \leq \left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| + \cdots + \left| \frac{a_0}{z^n} \right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{r} + \cdots + \frac{|a_0|}{r^n}$$

がなりたつ. 最右辺は r を大きくすることでいくらでも 0 に近づけることができるから, $|z| \geq r_0$ のとき $|A(z)| \leq |a_n|/2$ を満たすような r_0 をみつけることができる. したがって $|z| \geq r_0$ のとき

$$|f(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_n|}{2} \right) \geq \frac{r_0^n |a_n|}{2} \iff |g(z)| \leq \frac{2}{r_0^n |a_n|} =: M.$$

一方, 閉円板 $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ は有界閉集合であるから, $|g(z)|$ は E 上で最大値 M' をもつ. 以上から $|g(z)| \leq \max\{M, M'\}$ が $\mathbb{C}$ 上なりたつが, これはリュービルの定理に矛盾する. ■

レポート問題

締切りは 11 月 1 日 (金) の講義開始時とします.

問題 4-1 (コーシーの積分公式) 次の積分を求めよ. ただし, $C = C(0, 2)$ とする.

$$(1) \int_C \frac{e^z}{z-1} dz \quad (2) \int_C \frac{e^z}{z^2-1} dz \quad (3) \int_C \frac{\sin z}{(z-\pi/2)(z+\pi)} dz$$

問題 4-2 (n 階微分の積分公式) 次の積分を求めよ. ただし, $C = C(0, 2)$ とする.

$$(1) \int_C \frac{e^z}{z^4} dz \quad (2) \int_C \frac{z+1}{(z-1)^2(z+3)} dz \quad (3) \int_C \frac{e^{-iz}}{(3z-\pi)^2} dz$$

問題 4-3 (定数になる条件)

- (1) 正則関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が D 上 $f'(z) = 0$ であるとき, 定数関数であることを示せ.
- (2) 連続関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が原始関数 $F_1, F_2: D \rightarrow \mathbb{C}$ をもつとき, ある定数 C が存在して $F_1(z) = F_2(z) + C$ を満たすことを示せ.

(HINT. コーシー・リーマンを用いる.)

一様収束と微分積分 / テイラー展開

配布日：November 1, 2013 Version：1.1

前回 (10/25) のまとめと補足

複素解析の目玉である留数計算に向けて、関数の一様収束性と極限関数の性質、およびテイラー展開までを解説する。

記号. 以下、 D を複素平面内の領域とする。また、 $D(\alpha, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < r\}$ とする。すなわち、 α 中心半径 r の開円板であり、 $D(\alpha, r) = \text{int}(C(\alpha, r))$ を満たす。

一様収束と微分積分. この先、関数の収束、とくに関数の無限和の収束性について扱うことが多い。ここでは「収束」の意味を厳格に、「一様収束」という概念で定式化し、極限についてさまざまな結果が得られることをみておく。

標語的に言えば、 g_n が g に 一様収束 するとき、

(ア) g_n が連続なら極限 g も連続。

(イ) 線積分 $\int_C g_n(z) dz$ は $\int_C g(z) dz$ に収束。

(ウ) g_n が正則なら極限 g も正則。さらに g'_n も g' に (広義) 一様収束。(ワイエルシュトラス)

定義 (一様収束). 関数列 $g_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) と D の部分集合 E にたいし、「 g_n が E 上で関数 $g : E \rightarrow \mathbb{C}$ に 一様収束 (uniform convergence) する」とは、

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall z \in E) \quad |g_n(z) - g(z)| < \epsilon$$

が成り立つことをいう。

すなわち、 E 上での関数 g_n と g の絶対誤差が「 z によらず一様に」0 に収束することをいう。一様収束は $g_n \rightarrow g$ ($n \rightarrow \infty$) もしくは $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ と表すことも多いが、普通は前後の文章で (各点収束ではなく) 一様収束であることを明記するのが作法である。

例 (最重要). この先もっとも重要な具体例は次のものである：

補題 (幾何級数). $0 < r < 1$ を固定し、

$$g_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n, \quad g(z) = \frac{1}{1-z}$$

とおくと、 g_n は g に $E(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ 上一様収束する。とくに、 $|z| < 1$ であれば

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \cdots + z^n + \cdots$$

が成り立つ。(すなわち、右辺の級数は収束して左辺と一致。)

証明. $g_n(z) = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$ であるから、

$$|g_n(z) - g(z)| = \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たす. とくに, $r^{n+1}/(1-r)$ は $z \in E(r)$ に依存しないから, g_n は g に $E(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ 上一様収束する. 後半の主張は r を 1 に近づけることで任意の z について成立する. ■

以下, (ア) (イ) (ウ) をもう少し厳密な形で述べていこう.

(ア)：一様収束と連続性. 実の微積分でも学ぶ大事な命題である：

命題 4-1 (一様収束極限の連続性). 連続 な関数列 $g_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \geq 0$) が関数 $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ に D 上 一様収束 するとき, g も D 上で連続.

証明. 任意に小さい $\epsilon > 0$ と任意の $\alpha \in D$ を選ぶ. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$|z - \alpha| < \delta \implies |g(z) - g(\alpha)| < \epsilon$$

となることを示せばよい.

一様収束性により, ある自然数 N が存在して

$$(\forall n \geq N)(\forall z \in D) \quad |g_n(z) - g(z)| < \epsilon/3$$

が成り立つ. とくに, $|g_n(\alpha) - g(\alpha)| < \epsilon/3$ も成立する.

ここで $m \geq N$ をひとつ固定すると, g_m は D 上 (とくに $z = \alpha$ で) 連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して

$$|z - \alpha| < \delta \implies |g_m(z) - g_m(\alpha)| < \epsilon/3$$

を満たす. よって $|z - \alpha| < \delta$ という条件のもと,

$$|g(z) - g(\alpha)| \leq |g(z) - g_m(z)| + |g_m(z) - g_m(\alpha)| + |g_m(\alpha) - g(\alpha)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

が成り立つ. ■

(イ)：一様収束と線積分. 次に線積分の収束性を確かめよう：

命題 4-2 (一様収束極限の線積分). 連続 な関数列 $g_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \geq 0$) が関数 $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ に D 上 一様収束 するとき, D 内の任意の曲線 C に対し,

$$\int_C g_n(z) dz \rightarrow \int_C g(z) dz \quad (n \rightarrow \infty).$$

証明. 一様収束性より

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall z \in C) \quad |g_n(z) - g(z)| < \epsilon.$$

よって $n \geq N$ のとき

$$\left| \int_C g_n(z) dz - \int_C g(z) dz \right| = \left| \int_C (g_n(z) - g(z)) dz \right| \leq \epsilon \cdot \ell(C)$$

ここで C の長さ $\ell(C)$ は (区分的に滑らかという仮定から) 有限であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C g_n(z) dz = \int_C g(z) dz$ が示された. ■

(ウ)：一様収束と正則性 (ワイエルシュトラスの定理). 一様収束は正則性も保存する：

命題 4-3 (一様収束極限の正則性). 正則 な関数列 $g_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \geq 0$) が関数 $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ に D 上 一様収束 するとき,

(1) g も D 上正則であり,

(2) D 内の任意のコンパクト集合上で g'_n も g' に一様収束する.

証明: (1) 必要なら D を分割することで, D は単連結であると仮定してよい. C を D 内の任意の単純閉曲線とすれば, g_n は D 上正則なので「積分定理」より $\int_C g_n(z) dz = 0$. よって命題 4-2 より, $\int_C g(z) dz = 0$. C は任意であり, また 命題 4-1 より g は連続であるから, ¹モレラの定理により g は D 上で正則となる.

(2) E を D 内のコンパクト集合 (有界閉集合) としよう. このとき, E は D の境界から一定距離離れている.² より正確には, ある (十分小さな) $r > 0$ が存在して, 任意の $\alpha \in E$ にたいし $D(\alpha, r) \cup C(\alpha, r) \subset D$ となるようにできる.

いま, $\alpha \in E$ を選び $C = C(\alpha, r)$ とおくと, 積分公式 2 より

$$g'_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g_n(z)}{(z-\alpha)^2} dz \quad g'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{(z-\alpha)^2} dz$$

が成立する. また, g_n の一様収束性から,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall z \in D) \quad |g_n(z) - g(z)| < \epsilon.$$

である. よって $n \geq N$ のとき,

$$|g'_n(\alpha) - g'(\alpha)| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g_n(z) - g(z)}{(z-\alpha)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{r^2} \ell(C) = \frac{\epsilon}{r}.$$

ϵ/r は $\alpha \in E$ に依存しないので, g'_n は g' に E 上一様収束する. ■

注意 (広義一様収束とワイエルシュトラスの定理). $g_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ が $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ に広義一様収束 (もしくはコンパクト一様収束) するとは, 任意のコンパクト集合 $E \subset D$ 上で制限 $g_n|_E$ が $g|_E$ に一様収束することをいう.

上の命題 4-3 の証明を修正すると, 「正則な g_n が g に D 上広義一様収束すれば, g も正則, かつ g'_n も g' に D 上広義一様収束する」というワイエルシュトラスの定理 (Weierstrass's Theorem) が得られる.

広義一様収束の例 (これも重要). $g_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ は $g(z) = 1/(1-z)$ に単位円板 $D(0, 1)$ 上で広義一様収束する. ワイエルシュトラスの定理から, 単位円板上で

$$g'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(z) \iff \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + \cdots + nz^{n-1} + \cdots$$

が結論できる.

注意 (実関数でワイエルシュトラスは成立しない!). たとえば $g_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) と定義する. g_n は $g(x) = 0$ (定数関数) に $\mathbb{R}$ 上一様収束するが, $g'_n(x) = \cos nx$ は $g'(x) = 0$ に (広義) 一様収束しない. 実は複素数で見ると, $z \in \mathbb{C}$ のとき, $g_n(z)$ は $g(z)$ に一様収束していないのである. (レポート問題)

テイラー展開 (前期の復習?).

定理 4-4 (テイラー展開). $D \subset \mathbb{C}$ は単連結領域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数とする. さらに $\alpha \in D$ と $R > 0$ が $C = C(\alpha, R) \subset D$ を満たすとする. このとき, 任意の $z \in \text{int}(C)$ にたいして, 次の等式が成り立つ:

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots$$

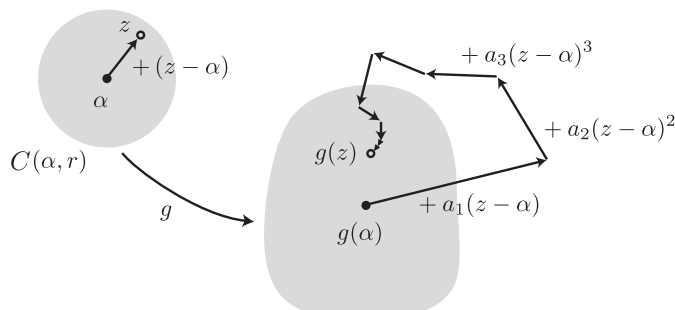
すなわち右辺の級数は収束し, 左辺に一致.

¹正則なら連続である. よって g_n は連続である. 念のため.

²そうでないと, 点列 $\{e_n\} \subset E$ をうまく選んで e_n が ∂D から $1/n$ 以下の距離になるようにできる. コンパクト性から収束部分列 $\{e_{n(k)}\}$ が存在するが, その極限は境界点 $z \in \partial D$ でなくてはならない. 一方 E は閉集合なので $z \in E$ でもある. これは $E \subset D$ かつ D が開集合 ($D \cap \partial D = \emptyset$) であることに矛盾する.

この式を $f(z)$ の α におけるテイラー展開 (Taylor expansion about α) とよぶ.

注. 一般に, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ の形で与えられる関数をべき級数もしくは整級数とよぶ.³



正則関数のテイラー展開は無限和なので, テイラー級数 (展開) と呼ばれる.

準備: 関数の級数の項別積分. 関数の列 $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) にたいし,

$$g_n(z) := f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z)$$

とおく. 適当な $z \in D$ を固定するとき, 数列 $g_n(z)$ が極限 $g(z)$ をもつとき,

$$g(z) = f_0(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad g(z) = \sum_{n \geq 0} f_n(z)$$

などと表す. これは関数 $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ を定める. (いわゆる「各点収束」. 一様収束とは限らず.)

補題 4-5 (積分と無限和の順序交換). C を D 内の任意の曲線とする. 連続な関数列の有限和 $g_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z)$ が C 上である関数 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ に一様収束するとき,

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z) dz.$$

証明. $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ とすると,

$$\text{左辺} = \int_C g(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C g_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \sum_{k=0}^n f_k(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_C f_k(z) dz = \text{右辺}.$$

ただし $=_*$ のところで一様収束性と命題 4-2 を用いた. ■

証明 (テイラー展開). $z_0 \in \text{int}(C)$ を任意にとり, $r := |z_0| < R$ とおく. さらに $z \in C$ をひとつとり, 固定する. このとき $\left| \frac{z_0 - \alpha}{z - \alpha} \right| = \frac{r}{R} < 1$ であるから,

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z)}{(z - \alpha) - (z_0 - \alpha)} = \frac{f(z)}{z - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0 - \alpha}{z - \alpha}} = \frac{f(z)}{z - \alpha} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - \alpha}{z - \alpha} \right)^n.$$

³ 「べき」は漢字で「冪」と書く. 省略して「巾」のように書いていた時代もあったような...

いま $f_n(z) := \frac{f(z)}{z-\alpha} \cdot \left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^n$, $g_n(z) := f_0(z) + \cdots + f_n(z)$, $g(z) := \frac{f(z)}{z-\alpha}$ とおくと, 上の式変形から $z \in C$ を固定することにより (数列の極限の意味で) $g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ である. これが C 上の関数の意味で一様収束になっていることを示そう.

C 上での $|f(z)|$ の最大値を $M = M(C)$ とし, $z \in C$ のとき $\beta = \frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g(z)| &= |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots| = \left| \frac{f(z)}{z-\alpha} (\beta^{n+1} + \beta^{n+2} + \cdots) \right| \\ &\leq \frac{M}{R} \cdot \left| \frac{\beta^{n+1}}{1-\beta} \right| \leq \frac{M|\beta|^{n+1}}{R(1-|\beta|)} \end{aligned}$$

$|\beta| = r/R < 1$ は $z \in C$ の取り方に依存しないから, g_n は g に C 上一様収束する. よって積分公式より,⁴

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z) dz \quad (\leftarrow \text{補題 4-5}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{f(z)}{z-\alpha} \cdot \left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^n dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \right) (z_0-\alpha)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z_0-\alpha)^n. \end{aligned}$$

■

今回 (11/1) の内容

例 (マクローリン展開). たとえば微分係数を計算することにより, 任意の $z \in \mathbb{C}$ にたいし

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

が成り立つ. すなわち右辺の級数は収束し, 左辺に一致する. 実際, $\alpha = 0$ とし, $|z| < R$ となる R にたいし $C = C(0, R)$ 上で定理 4-4 を適用すればよい.

例. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (z-2)^n$ を示そう.

これは $e^z = e^2 \cdot e^{z-2} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n!}$ よりすぐにわかる.

注意 (テイラー展開の一意性). 正則関数 $f(z)$ にたいし, A さんがテイラー展開の公式を用いて $f(z) = \sum a_n(z-\alpha)^n$ と展開した. 一方 B さんはまったく別の方法で $f(z) = \sum b_n(z-\alpha)^n$ と計算した. このとき, すべての n で $a_n = b_n$ が成り立つ. すなわち, テイラー展開は計算方法には依存しない. もっとも簡単な方法を選べばいいのである.

例題. $f(z) = \frac{1}{z-2i}$ を次の点を中心に展開せよ.

⁴講義ではこのあたりの計算で書き間違いをしてしまいました. これを参考に修正しておいてください.

(1) $z = 0$

(2) $z = i$

答. まず (1). 補題 (幾何級数) を適用するために, 次のように変形する:

$$f(z) = \frac{1}{-2i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2i}}.$$

よって $\left|\frac{z}{2i}\right| < 1$ のとき, すなわち $|z| < 2$ のとき,

$$f(z) = \frac{1}{-2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2i}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^{n+1}} z^n \quad (\text{ただし } |z| < 2)$$

つぎに (2). 基本的なアイディアは (1) と同じである. まず次のように変形する:

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)-i} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-i}{i}}.$$

よって $\left|\frac{z-i}{i}\right| < 1$ のとき, すなわち $|z-i| < 1$ のとき,

$$f(z) = \frac{1}{-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{i}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i^{n+1}} (z-i)^n \quad (\text{ただし } |z-i| < 1)$$

注意 2 (収束半径). 級数 $\sum a_n(z-\alpha)^n$ の収束半径 (radius of convergence) とは, 級数が $|z-\alpha| < R$ のとき収束し, かつ, $|z-\alpha| > R$ のとき発散するような R をいう. 上の例題の場合, (1) での収束半径は 2, (2) の収束半径は 1 である.

レポート問題

締切りは 11 月 15 日 (金) の講義開始時とします. (11 月 8 日は休講です.)

問題 5-1 (テイラー展開) 次の関数の $z = 0$ におけるテイラー展開を, z^4 の項までもとめよ.

(1) $\frac{1}{z+3}$

(2) e^{-z^2}

(3) $\frac{\cos z}{z-1}$

問題 5-2 (テイラー展開その 2) 関数 $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ を次の α でテイラー展開せよ.

(1) $\alpha = 0$

(2) $\alpha = 2i$

(3) $\alpha = 1$

問題 5-3 (一様収束?) 関数 $g_n, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $g_n(z) := \frac{\sin nz}{n}$, $g(z) := 0$ (定数関数) と定める.

(1) g_n は g に $\mathbb{R}$ 上で 一様収束することを示せ.

(2) リュービルの定理を用いて, g_n は g に $\mathbb{C}$ 上で 一様収束 しないことを示せ.

注意. 実部が負になるような z を含む領域 D で g_n は g に一様収束はおろか, 各点収束すらできない. (これが自力で証明できれば, なかなかの腕前.)

ローラン展開と留数定理

配布日: November 15, 2013 Version: 1.1

前回 (11/1) のまとめと補足

テイラー展開の拡張として正則関数のローラン展開を導入する. さらにローラン展開を経由することで, 正則関数の積分値が「留数」と呼ばれる (ある意味, 式変形だけで計算可能な) 量で表現できることをみる. これが「留数定理」である.

記号. 以下, D を複素平面内の領域とする. また, $D(\alpha, r)$ で α 中心半径 r の開円板を表す. すなわち $D(\alpha, r) = \text{int}(C(\alpha, r))$.

テイラー展開 (再).

定理 4-4 (テイラー展開). $D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数とする. さらに $\alpha \in D$ と $R > 0$ が $C = C(\alpha, R) \subset D$ を満たすとする. このとき, 任意の $z \in \text{int}(C)$ にたいして, 次の等式が成り立つ:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n$$

すなわち右辺の級数は収束し, 左辺に一致.

この式を $f(z)$ の α における**テイラー展開** (Taylor expansion about α) とよぶのであった. とくに, 積分公式 2 から $(z - \alpha)^n$ の係数は

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz$$

を満たすことに注意しておこう. さてテイラー展開を用いると,

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots \quad e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

といった級数も考えたい. しかし, これらの式の左辺は $z = 0$ で定義できないし, 右辺も明らかに $z \rightarrow 0$ のとき発散してしまう. そこで, 発散しそうな場所 (この場合 $z = 0$) のまわりをくりぬいた円環領域での収束を考えることにする.

ローラン展開

定理 5-1 (ローラン展開). $\alpha \in \mathbb{C}$ とし, 円環領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - \alpha| < R_2\}$ 上で関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は正則であるとする. さらに $C = C(\alpha, R)$ (ただし $R_1 < R < R_2$) を選び, すべての整数 n にたいし定数 a_n を

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz$$

と定める. このとき, 任意の $z \in D$ にたいして, 次の等式が成り立つ:

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - \alpha)^2} + \frac{a_{-1}}{z - \alpha} + \frac{a_0 + a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + \cdots}{1}$$

すなわち, 右辺の 2 重下線部と下線部の級数はそれぞれ収束し, その和は左辺に一致する. この式を $f(z)$ の α におけるローラン展開 (Laurent expansion about α) とよぶ.

注意. $R_1 = 0$ もしくは $R_2 = \infty$ の場合も許す.

注意. 積分定理より, a_n の値は R の取り方に依存しない.

注意 (ローラン展開の一意性). テイラー展開と同様に, ローラン展開の係数 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ も計算方法によらず一意的に定まる. (あとの「補足」参照.)

極. f が $0 < |z - \alpha| < R_2$ で正則であり, ある自然数 k と $a_{-k} \neq 0$ が存在して

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - \alpha)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - \alpha} + a_0 + a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + \cdots$$

と書けるとき, 「 f は $z = \alpha$ において k 位の極 (pole of order N) を持つ」という.

具体例 1. 関数 $\frac{e^z}{z^2}$ は $D = \{0 < |z| < \infty\}$ で正則であるから, $\alpha = 0$ においてローラン展開ができる. 係数の一意性より, 次のように計算してよい:

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \cdots \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots$$

とくに, $z = 0$ は 2 位の極である.

具体例 2. 関数 $\frac{1}{z^2(z-2)}$ は $D = \{0 < |z| < 2\}$ で正則であるから, $\alpha = 0$ においてローラン展開ができる. 上と同様にして,

$$\frac{1}{z^2(z-2)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{-2(1-z/2)} = -\frac{1}{2z^2} \cdot \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots \right) = -\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4z} - \frac{1}{8} - \frac{z}{16} - \cdots$$

とくに, $z = 0$ は 2 位の極である.

定理 5-1 の証明. $z_0 \in D$ を固定する. また, 円 $C_0 := C(z_0, \epsilon)$, $C_1 := C(\alpha, r_1)$, $C_2 = C(\alpha, r_2)$ を次を満たすように選ぶ:

- $\epsilon > 0$ は十分小さい.
- $R_1 < r_1 < |z_0 - \alpha| < r_2 < R_2$
- 右の図のように, C_0, C_1, C_2 は互いに交わらない.

いま, 積分公式より

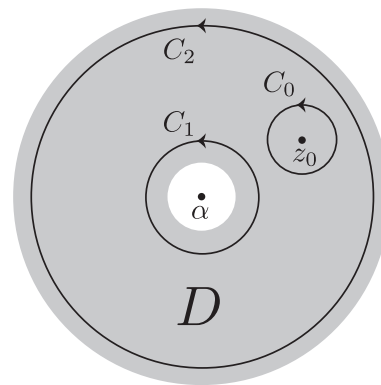
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

である. さらに積分定理より (基本公式の証明も参照せよ),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_2} - \int_{C_1} \right)$$

が成り立つ. したがって次を証明すればよい:

- 2 重下線部: $-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} = \sum_{m \geq 1} \frac{a_{-m}}{(z_0 - \alpha)^m}$, ただし $a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{-m+1}} dz$
- 下線部: $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} = \sum_{n \geq 0} a_n (z_0 - \alpha)^n$, ただし $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz$



2 重下線部を示そう. $z \in C_1$ のとき $|z - \alpha| < |z_0 - \alpha|$ であるから, テイラー展開のときの式変形を参考にすると,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z_0 - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \alpha}{z_0 - \alpha}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z_0 - \alpha} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - \alpha}{z_0 - \alpha} \right)^n dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{f(z)}{(z - \alpha)^{-n}} \cdot \frac{1}{(z_0 - \alpha)^{n+1}} \right) dz \end{aligned}$$

ここで無限和で表現された関数が C_1 で一様収束することをテイラー展開のときと同様に確認できる. よって補題 4-5 より項別積分が可能であり,

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 0} \left(\int_{C_1} \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{-n}} dz \right) \cdot \frac{1}{(z_0 - \alpha)^{n+1}} = \sum_{n+1=m \geq 1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{-m+1}} dz \right) \cdot \frac{1}{(z_0 - \alpha)^m}.$$

ここで右辺の積分路 C_1 は, 積分定理より C に変えてもよい. よって 2 重下線部が得られた.

下線部の計算はテイラー展開と同様なので省略する. ■

留数

定理 5-2 (積分と留数) D を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域, $\alpha \in D$ とする. いま $f: D - \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{C}$ が正則であるとし, (ある D に含まれる α 中心の円環領域上で) ローラン展開 $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - \alpha)^n$ をもつとする. このとき, α を内部に含む D 内の任意の単純閉曲線 C について, 次が成り立つ:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \cdot a_{-1}.$$

a_{-1} はローラン展開の $\frac{1}{z - \alpha}$ の係数であり, 多くの場合代数的な計算 (要するに式変形) だけで求めることができる. また, この α は極かもしれないし, そうでないかもしれない. いずれにしても定理は成立するのである.

証明. 積分定理より, $C = C(\alpha, r)$ (ただし r は十分小さく, $C \subset D$) としてよい. このとき r に依存せず, $n \neq -1$ のとき $\int_C (z - \alpha)^n dz = 0$, $n = -1$ のとき $\int_C (z - \alpha)^n dz = 2\pi i$ であった. よってローラン展開を用いて

$$\int_C f(z) dz = \int_C \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - \alpha)^n \right) dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(a_n \int_C (z - \alpha)^n dz \right) = 2\pi i \cdot a_{-1}.$$

ただし, $=*$ の部分は項別積分に関する正当化が必要である. (補足とレポート問題参照.) ■

留数. 証明から分かるように, $f(z)$ を極の回りでローラン展開してから積分すると, a_{-1} の項のみが「留まり」, それ意外の項の消え去ってしまう. この a_{-1} を, すなわち $(z - \alpha)^{-1}$ の係数を f の α における**留数** (りゅうすう, residue) と呼び, $\text{Res}(f(z), \alpha)$ と表す. よって定理 5-2 の式は $\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), \alpha)$ と表される.

例と積分への応用 1. $\frac{e^z}{z^2}$ の $z = 0$ における留数を求めてみよう. さきほど計算したローラン展開 $\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \dots$ より $\text{Res}\left(\frac{e^z}{z^2}, 0\right) = 1$. たとえば $C = C(0, 1)$ とすれば, $\int_C \frac{e^z}{z^2} dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$.

例と積分への応用 2. 同じく $C = C(0, 1)$ にたいし, $\int_C \frac{1}{z^2(z-2)} dz$ を計算しよう. $D = \{|z| < 2\}$ とすると被積分関数は $D - \{0\}$ で正則であるから, $\int_C \frac{1}{z^2(z-2)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2(z-2)}, 0\right)$. さきほど計算したローラン展開 $\frac{1}{z^2(z-2)} = \cdots - \frac{1}{4z} + \cdots$ より $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2(z-2)}, 0\right) = -\frac{1}{4}$. よって求める積分は $2\pi i \cdot \frac{-1}{4} = -\frac{\pi i}{2}$

具体例 2 の別解. じつは留数など知らなくてもこの積分は計算できる. $g(z) = \frac{1}{z-2}$ とすると, これは C とその内部で正則となるから, 1 階微分の積分公式より

$$g'(0) = \frac{1!}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z^2} dz \iff \int_C \frac{1}{z^2(z-2)} dz = 2\pi i \cdot g'(0) = 2\pi i \cdot \frac{-1}{4} = -\frac{\pi i}{2}.$$

留数定理. 留数という言葉を用いると, これまで積分公式や積分路の取替えを駆使して行ってきた積分計算をすっきりと公式の形でまとめることが出来る:

留数定理. C を $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ を $\operatorname{int}(C)$ 内の互いに異なる点とする. 関数 f が $\operatorname{int}(C) - \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 上, および C 上でも正則_(*) とする. このとき

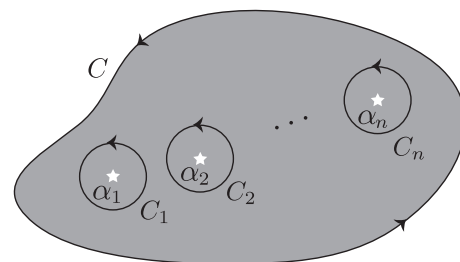
$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), \alpha_k).$$

注意. (*) の意味は「 C をわずかに膨らませた領域上でも f は定義されており, そこでも正則」, という事.

証明. $r > 0$ を十分に小さく取り, $C_k = C(\alpha_k, r)$ とすれば, $C_1, \dots, C_n$ はすべて D に含まれ, かつそれぞれ (内部までふくめて) 互いに交わらないとしてよい. このとき, 積分定理より,

$$\int_C = \int_{C_1} + \cdots + \int_{C_n}$$

が成り立つ. また定理 5-2 より, $\int_{C_k} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \alpha_k)$ ($1 \leq k \leq n$) である. ■



補足: べき級数の一様収束性 (定理 5-2 の証明の続き)

定理 5-2 の証明では, f のローラン展開 $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - \alpha)^n$ について¹項別積分

$$\int_C \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - \alpha)^n dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_C a_n(z - \alpha)^n dz$$

を正当化する必要があった. 補題 4-5 を適用するために, $f(z)$ を

$$f(z) = F(z) + G(z); \text{ ただし } F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n, \quad G(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - \alpha)^n}$$

と分割する. その上で,

¹定理 5-1 では D 上の各点 z_0 ごとでの収束しか証明されていないので, 一様収束性はまだわからない.

(a) $F_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k(z-\alpha)^k$ が C 上 $F(z)$ に一様収束し, かつ

(b) $G_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_{-k}}{(z-\alpha)^k}$ も C 上 $G(z)$ に一様収束する

ことを示せばよい. ここでは (a) の証明だけを与えて, のこりはレポート問題で完成してもらおう.
まず, 一般のべき級数について次の (有名な) 補題を示す:

補題 5-3 (絶対収束の条件). べき級数 $F(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n + \cdots$ がある $z_0 \in \mathbb{C}$ で収束するとき, $|z| < |z_0|$ を満たす任意の z について $F(z)$ は収束する. とくに $0 < r < |z_0|$ を任意に固定するとき, 部分和の列 $F_n(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ は $E(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ 上で一様収束する.

証明. $r < |z_0|$ を満たす任意の r を固定しよう. いま $F(z_0) = a_0 + a_1z_0 + \cdots + a_nz_0^n + \cdots$ は収束するから, $a_nz_0^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) でなくてはならない. (←理由を考えよ.) よってある $M > 0$ が存在し, すべての $n \geq 0$ で $|a_nz_0^n| \leq M$ が成り立つ.

さて $|z| \leq r < |z_0|$ を満たす z をとるとき, $|a_nz^n| = |a_nz_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \cdot \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ であるから,

$$|a_0| + |a_1z| + \cdots + |a_nz^n| \leq M \left\{ 1 + \frac{r}{|z_0|} + \cdots + \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \right\} \leq M \frac{1}{1 - r/|z_0|}.$$

これは任意の n で成り立つので, $F(z)$ は絶対収束する. したがって $F(z)$ は収束する. $r (< |z_0|)$ は任意であったから, $|z| < |z_0|$ のとき $F(z)$ は収束することが示された.

つぎに $E(r)$ 上での一様収束性を確認する. $z \in E(r)$ にたいし,

$$|F(z) - F_n(z)| = |a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots| = \lim_{N \rightarrow \infty} |a_{n+1}z^{n+1} + \cdots + a_{n+N}z^{n+N}|$$

であるが, 上と同様にして

$$|a_{n+1}z^{n+1} + \cdots + a_{n+N}z^{n+N}| \leq M \left\{ \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^{n+N} \right\} \leq M \frac{(r/|z_0|)^{n+1}}{1 - r/|z_0|}.$$

が任意の N で成り立つ. よって $|F(z) - F_n(z)| \leq M \frac{(r/|z_0|)^{n+1}}{1 - r/|z_0|}$. この右辺は z に依存せず, かつ $n \rightarrow \infty$ のとき任意に小さくできるから, $E(r)$ 上で F は一様収束する. ■

この補題を用いて (a) を証明しよう:

証明 (a). いまある $0 < R_1 < R_2$ が存在して, $R_1 < |z - \alpha| < R_2$ を満たす z についてローラン展開 $f(z) = F(z) + G(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - \alpha)^n$ が収束すると仮定してよい. そのような $z = z_2$ を固定すると, $F_n(z_2) = \sum_{k=0}^n a_k(z_2 - \alpha)^k$ は $n \rightarrow \infty$ のとき $F(z_2)$ に収束する. いま $R_1 < r < |z_2 - \alpha| < R_2$ を満たす r を固定し, $C = C(\alpha, r)$ とおこう. 補題 5-3 より², このような C 上では $F_n(z)$ が $F(z)$ に一様収束する. ■

(b) の証明はレポート問題 6-1 としよう.

補足. ローラン展開 (テイラー展開) の一意性

(a) と (b) を用いて, 「ローラン展開の係数は計算の仕方によらず一意に定まる.」ことを示そう. ちなみにテイラー展開はローラン展開の特殊な場合とみなせるので, テイラー展開の係数の一意性も同時に示されたことになる.

²もちろん, べき級数の中心を α に平行移動して適用する

ローラン展開の一意性の証明. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - \alpha| < R_2\}$ において, 定理 5-1 のようにローラン展開 $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - \alpha)^n$ が存在したとしよう. 一方, おなじ f について D 上で級数展開 $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_m(z - \alpha)^m$ が成り立つことが別の方法で確かめられたとしよう. このとき,

$$a_n = b_n \text{ が全ての整数 } n \text{ で成立する}$$

ことを確認すればよい.

(a) の証明で用いた補題 5-3 と, (b) の証明で用いる補題 5-4 (レポート問題 6-1) によれば, 任意の $C = C(\alpha, R)$ (ただし $R_1 < R < R_2$) について, 級数展開 $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n(z - \alpha)^n$ は一様収束していることがわかる. (じつは D 上で広義一様収束している.) よって

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{(z - \alpha)^{n+1}} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(z - \alpha)^m \right\} dz \\ &= *_* \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{2\pi i} \int_C \frac{1}{(z - \alpha)^{n-m+1}} dz = b_n \end{aligned}$$

$=_*$ のところで, 一様収束性と項別積分を用いた.

レポート問題

締切りは 11 月 22 日 (金) の講義開始時とします.

問題 6-1 (項別積分の正当化) 補足文中の (b) を証明しよう.

(1) 補題 5-3 の証明を参考にして, 次の補題を示せ:

補題 5-4 (絶対収束の条件 2). べき級数 $F(z) = a_0 + a_1/z + \cdots + a_n/z^n + \cdots$ がある $z_0 \in \mathbb{C}$ で収束するとき, $|z| > |z_0|$ を満たす任意の z について $F(z)$ は収束する. とくに $r > |z_0|$ を任意に固定するとき, 部分和の列 $F_n(z) = a_0 + a_1/z + \cdots + a_n/z^n$ は $E'(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq r\}$ 上で一様収束する.

(2) (b) を示せ. ただし, 最終的に定理 5-2 の証明が完結するように, (a) の証明と矛盾しないように $C = C(\alpha, r)$ を選ぶこと.

問題 6-2 (ローラン展開) 関数 $f(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2}$ を次の円環領域で収束するようにローラン展開せよ.

(1) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (2) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ (3) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$

(HINT: $f(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z+2} \right)$ と部分分数展開し, それぞれローラン展開し, ふたたび和を取る. たとえば (2) の場合は $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z}$, $\frac{2}{z+2} = \frac{1}{1+z/2}$ とすればそれぞれ幾何級数の形で展開できる. 手持ちの教科書等も参照せよ.)

留数定理の実積分への応用

配布日: November 22, 2013 Version: 1.1

前回 (11/15) のまとめと補足

復習: 留数. $f(z)$ が点 α のまわりでローラン展開 $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - \alpha)^n$ を持つとき, a_{-1} を, すなわち $(z - \alpha)^{-1}$ の係数を f の α における**留数**(りゅうすう, residue) と呼び, $\text{Res}(f(z), \alpha)$ と表す.

留数定理. C を $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ を $\text{int}(C)$ 内の互いに異なる点とする. 関数 f が $\text{int}(C) - \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 上, および C 上でも**正則**_(*) とする. このとき

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), \alpha_k).$$

注意. (*) の意味は「 C をわずかに膨らませた領域上でも f は定義されており, そこでも正則」, ということ.

補足 (特異点と極). ある点 $\alpha \in \mathbb{C}$ にたいし, 関数 f は領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - \alpha| < R\}$ (穴あき円板) で正則と仮定する.

このとき, 定理 5-1 (ローラン展開) によって, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - \alpha)^n$ とローラン展開できるのであった.

(1). 任意の $m \in \mathbb{N}$ にたいし $a_{-m} = 0$ のとき. すなわちローラン展開に負べきの項がなく, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$ と表されるとき, α は**除去可能特異点** (removable singularity) と呼ばれる.

例えば $z \neq 0$ にたいし

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^2}$$

とすると, これは領域 $\mathbb{C} - \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$ で正則な関数を与える. ここでのローラン展開は

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots$$

となり, 負べきの項をもたない. よって $z = 0$ は f の除去可能特異点である. この例の場合 $f(0) := 1$ と定義すれば, f を $\mathbb{C}$ 上で正則な関数に拡張できることは「みえみえ」であろう.¹

(2). ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して, $a_{-k} \neq 0$, かつ $a_{-m} = 0$ がすべての $m \geq k$ で成り立つとき. すなわち

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - \alpha)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - \alpha} + a_0 + a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + \dots$$

と書けるとき, α は **k 位の極** (pole of order k) と呼ばれるのであった (前回).

(3). $a_{-k} \neq 0$ となる $k \in \mathbb{N}$ が無限個存在するとき. この場合, α は f の**真性特異点** (essential singularity) と呼ばれる.

¹ $f(z) = (\sin z^2)/z^2$ という表現には $z = 0$ を代入できないので「特異」に見えるけど, 調べてみたらそんなことはなかったよ, という一連のなりゆきを「除去可能特異点」と少し大袈裟な言葉で呼んでいる. この例ではどこか「わざとらしさ」が漂っているが, たとえば関数 $g(z) = \frac{e^z - z - \cos zi}{\sin(\sin z) - z}$ のような例はどうだろうか? $z = 0$ は除去可能特異点である. しかし確認には多少の計算を要するし, 除去可能性も「みえみえ」とはまではいえないだろう.

たとえば

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

は $\mathbb{C} - \{0\}$ で正則であり, $z = 0$ は真性特異点である.

以上, (1)(2)(3) をまとめて**孤立特異点** (isolated singularity) もしくは単に**特異点**とよぶ.

問. $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$ の定義域は何か? また, その孤立特異点は?

答. 定義域は $\mathbb{C} - \{0, \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \dots\}$ である. また, $\{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \dots\}$ が孤立特異点である. 実際, これらの点のどれをとっても, その点を中心に小さな穴あき円板をとれて, そのうえで f は正則. よってローラン展開できる.²

一方, $z = 0$ を中心にどんなに小さな円板をとっても, 無限個の孤立特異点 (そこでは f の値が定義できない) が含まれているので, ローラン展開できない. このような点は「集積特異点」と呼ばれる.

留数定理による積分計算. 留数定理から, 複素積分計算の最終形は次のようにまとめることができる:

積分計算の手順 $I = \int_C f(z) dz$ を計算するには,

- (i) $f(z)$ の特異点 (極) で C の内部にあるもの $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を探す.
- (ii) そこでの留数 $\text{Res}(f(z), \alpha_k)$ をそれぞれ計算する.
- (iii) $I = 2\pi i \times (\text{留数の和})$ を計算する.

留数定理による積分計算の例. たとえば $C = C(0, 2)$ とし, $I = \int_C \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$ を計算してみよう.

³ $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ は $\mathbb{C} - \{\pm i\}$ で正則であり, その特異点は $z = \pm i$ は C の内部に含まれる. (それぞれ 1 位の極) よって留数定理より

$$I = \int_C f(z) dz = 2\pi i \{ \text{Res}(f(z), i) + \text{Res}(f(z), -i) \}.$$

あとは, 留数を計算すればよいことになる.

留数の求め方その 1 (ローラン展開を頑張る). 上の f について, 留数 $\text{Res}(f(z), i)$ を求めてみよう. 留数の定義から, 実際にローラン展開をして, $(z - \alpha)^{-1}$ の係数を求めればよい.⁴

²実は全て 1 位の極.

³この例の場合は, 留数定理を用いなくても $\frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{e^{iz}}{z - i} - \frac{e^{iz}}{z + i} \right\}$ と変形したり, $z = i$ のまわりで $\frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \frac{e^{iz}}{z + i} \cdot \frac{1}{z - i} = \frac{\text{正則関数}}{z - i}$ と解釈することで積分公式の計算に帰着される. 一般に $\frac{\text{正則関数}}{\text{多項式}}$ のような形の関数にたいしては, 無理に留数定理に持ち込む必要はない. 留数定理が本質的に有効なのは, $f(z) = e^{1/z}$ や $z^2 \sin \frac{1}{z}$ のように, 有限位数の極ではない, 真性特異点の場合である.

⁴この際「ローラン展開の係数の一意性」(前回のプリント参照)があるから, どのような姑息な手を持ちいても良いので, とにかく $\sum a_n(z - \alpha)^n$ の形に f を変形し, a_{-1} だけをピックアップすればよい.

$w = z - i$ とおくと, $z = w + i$ より,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{i(w+i)}}{(w+i)^2+1} = \frac{e^{-1}e^{iw}}{2iw+w^2} = \frac{1}{2ei} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1+\frac{w}{2i}} \cdot e^{iw} \\ &= \frac{1}{2ei} \cdot \frac{1}{w} \cdot \left\{ 1 + \left(-\frac{w}{2i}\right) + \left(-\frac{w}{2i}\right)^2 + \cdots \right\} \cdot \left(1 + iw + \frac{(iw)^2}{2!} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{2ei} \cdot \frac{1}{w} + (0 \text{ 次以上の項}) \end{aligned}$$

と計算できる. よって $\text{Res}(f(z), i) = 1/(2ei)$.

留数の求め方その 2 (公式に頼る). 次のような便利な公式がある:

公式 6-1 (留数の計算公式). $f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^k}$, $g(z)$ は $z = \alpha$ のまわりで正則なとき,

$$\text{Res}(f(z), \alpha) = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(\alpha).$$

とくに $k = 1$ のとき,

$$\text{Res}(f(z), \alpha) = g(\alpha).$$

α が k 位の極であれば, $g(\alpha) \neq 0$ となるように g と k を選ぶとよい.

証明. $f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^k}$ かつ $g(z)$ は $z = \alpha$ のまわりで正則なとき, $C = C(\alpha, r)$ (r は十分小) とすれば, 留数定理と積分公式 2 より

$$\text{Res}(f(z), \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{(z-\alpha)^k} dz = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(\alpha).$$

■

この公式 6-1 を用いて留数 $\text{Res}(f(z), \pm i)$ を計算してみよう.

まず $g(z) = \frac{e^{iz}}{z+i}$ とおくと, g は $z = i$ の周りで正則であるから公式 6-1 より $\text{Res}(f(z), i) = g(i) = \frac{e^{-1}}{2i}$. 同様に, $h(z) = \frac{e^{iz}}{z-i}$ とおくと $\text{Res}(f(z), -i) = h(-i) = -\frac{e}{2i}$.

留数定理による積分計算のつづき. 以上の計算から,

$$I = \int_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{2i} - \frac{e}{2i} \right) = \pi(e^{-1} - e).$$

実積分への応用 1 (三角関数の積分). 次の積分を計算しよう:⁵

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Step 1. 一般に $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とおくと, z は単位円 $C = C(0, 1)$ 上を左回りに動き,

$$\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta \iff d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

⁵ $t = \tan\theta/2$ とおくと有理関数の実積分に帰着されるので初等的に計算することもできる.

Step 2. もとの積分に代入すれば

$$I = \int_C \frac{1}{5 + 3 \cdot \frac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_C \frac{1}{3z^2 + 10z + 3} dz$$

のように, 有理関数の積分に書き直すことができる.

Step 3. 右辺の被積分関数を $f(z)$ とおくと, $f(z) = \frac{1}{3(z + 1/3)(z + 3)}$ より, 単位円の中の極は $z = -1/3$ のみである. よって留数定理より

$$I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}\left(f(z), -\frac{1}{3}\right).$$

ここで公式 6-2 を用いる. $\alpha = -1/3$, $g(z) = \frac{1}{3(z + 3)}$, $k = 1$ とすれば,

$$\text{Res}\left(f(z), -\frac{1}{3}\right) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8}.$$

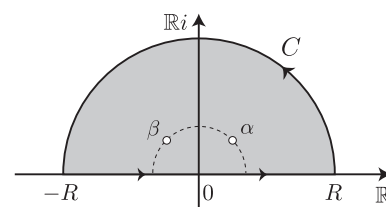
$$\text{よって } I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

実積分への応用 2 (有理関数の積分). 次の広義積分を計算しよう:⁶

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

右図のような経路 C および $f(z) = \frac{1}{1 + z^4}$ にたいし, 線積分 $\int_C = \int_C \frac{1}{1 + z^4} dz$ を考える. C 内の極は $\alpha = e^{\pi i/4}$, $\beta = e^{3\pi i/4}$ なので,

$$\int_C = 2\pi i \cdot \{\text{Res}(f(z), \alpha) + \text{Res}(f(z), \beta)\}.$$



ここで次の公式を用いる.

公式 6-2 (留数の計算公式その 2). $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ かつ $z = \alpha$ が 1 位の極であるとき,

$$\text{Res}(f(z), \alpha) = \frac{1}{g'(\alpha)}.$$

公式の証明は後回しにして, 積分の計算を進めていこう. 公式で $g(z) = z^4 + 1$ とおけば,

$$\text{Res}\left(\frac{1}{1 + z^4}, \alpha\right) = \frac{1}{4\alpha^3} = -\frac{\alpha}{4} = \frac{-1 - i}{4\sqrt{2}}.$$

(ここで $\alpha^4 = -1$ を用いた.) 同様にして

$$\text{Res}\left(\frac{1}{1 + z^4}, \beta\right) = \frac{1}{4\beta^3} = -\frac{\beta}{4} = \frac{1 - i}{4\sqrt{2}}.$$

⁶ これも有理関数なので部分分数展開をもちいれば原理的には不定積分を計算できる. *Mathematica* によれば, $\{-\log(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) - 2 \tan^{-1}(1 - \sqrt{2}x) + 2 \tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1)\}/(4\sqrt{2})$

よって

$$\int_C = 2\pi i \left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

さてこの積分から実積分 I の値を引き出そう. 経路 C を次のように分割する:

$$\begin{aligned} J_R &:= \{z = x \mid -R \leq x \leq R\} \\ C_R &:= \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\} \\ C &= J_R + C_R. \end{aligned}$$

このとき, $\int_C = \int_{J_R} + \int_{C_R} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ より, $R \rightarrow \infty$ のとき $\int_{C_R} \rightarrow 0$ であれば,

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{J_R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_C - \int_{C_R} \right) = \int_C - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

を得る.

下線部を証明しよう. $|z| = R > 1$ のとき, 三角不等式より

$$|z^4 + 1| \geq |z|^4 - 1 = R^4 - 1 > 0$$

であるから, C_R 上 $|f(z)| \leq \frac{1}{R^4 - 1}$ が成り立つ. したがって,

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\ell(C_R)}{R^4 - 1} = \frac{\pi R}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

以上で $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ が示された. ■

公式 6-2 の証明. 条件より, α の周りで正則な関数 $h(z)$ で, $h(\alpha) \neq 0$ かつ $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-\alpha)h(z)}$ を満たすものが存在する. よって公式 6-1 より, $\text{Res}(f(z), \alpha) = \frac{1}{h(\alpha)}$. 一方, $g'(z) = h(z) + (z-\alpha)h'(z)$ より $g'(\alpha) = h(\alpha)$ が成り立つ. ■

レポート問題

締切りは 11 月 29 日 (金) の講義開始時とします.

問題 7-1 (留数) 以下の関数の特異点における留数を求めよ.

$$(1) \frac{e^z}{z - \pi i} \quad (2) \frac{2z^2 + 1}{(z-1)^2} \quad (3) z^2 \exp\left(-\frac{1}{z}\right) \quad (4) z^2 \sin \frac{1}{z}$$

問題 7-2 (留数定理) . 留数定理によって以下の積分を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) \int_{C(0,1)} \frac{1}{\sin z} dz & \quad (2) \int_{C(0,3)} \frac{z}{(z-1)(z+2)} dz & (3) \int_{C(0,2)} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} dz \\ (4) \int_{C(1,2)} \frac{1}{z^2(z^2-4)} dz & \quad (5) \int_{C(1,2)} \frac{e^z}{z^2(z^2-4)} dz & (6) \int_{C(i,1)} \frac{1}{z^4-1} dz \end{aligned}$$

実積分への応用 2・偏角の原理

配布日：November 29, 2013 Version：1.1

前回 (11/22) のまとめと補足

実積分への応用 3. これまでの例は複素積分を用いなくても計算可能であるが、次の例は初等的な関数では表現できないと思われる¹：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ とおき、応用 2 と同じ経路 C について線積分 $\int_C = \int_C f(z) dz$ を考える。すなわち、

$$C = C_R + J_R, \quad C_R := \{z = Re^{it} \mid 0 \leq t \leq \pi\}, \quad J_R := \{z = t \mid -R \leq t \leq R\}.$$

C 内の特異点 (極) は $z = i$ のみなので、留数定理より

$$\int_C = 2\pi i \cdot \text{Res}(f(z), i).$$

いま $f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{e^{iz}}{z+i}$ であり、 $\frac{e^{iz}}{z+i}$ は $z = i$ において正則であるから、公式 6-1 より

$$\text{Res}(f(z), i) = \frac{e^{i \cdot i}}{i+i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

$$\text{よって } \int_C = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

次に応用 2 と同様に、「 $R \rightarrow \infty$ のとき $\int_{C_R} \rightarrow 0$ 」を示す。まず $|z| = R > 1$ のとき、 $|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1 > 0$ が成り立つ。さらに $z = x + yi \in C_R$ とおくと、 $y \geq 0$ より

$$|e^{iz}| = |e^{i(x+yi)}| = e^{-y} \leq 1.$$

よって C_R 上 $|f(z)| = \left| \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2-1}$ が成り立つ。したがって、

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\ell(C_R)}{R^2-1} = \frac{\pi R}{R^2-1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

いま $\int_{J_R} = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \int_{-R}^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ だが、 $\frac{\sin x}{1+x^2}$ は奇関数なので、積分 $\int_{J_R}$ の虚部は 0。ゆえに

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{J_R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_C - \int_{C_R} \right) = \int_C - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} = \frac{\pi}{e}.$$

■

実積分への応用 4 (「コーシーの主値」)。最後に次の積分を計算する：

¹その分技巧的なので、解法を覚える必要は全くない。

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

注意. この積分は絶対収束しないが収束する広義積分の典型例.²また, 以下での積分の計算方法は, 「コーシーの主値積分」と呼ばれるものの特別な場合となっている.³

積分計算のスケッチ: (ア). $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ とおき, 次の積分路 C を考える:

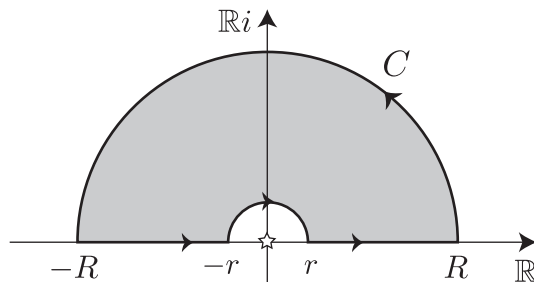
$$C = C_1 + J_1 + C_2 + J_2$$

$$C_1 := \{z = Re^{it} \mid 0 \leq t \leq \pi\}$$

$$J_1 := \{z = t \mid -R \leq t \leq -r\}$$

$$C_2 := \{z = re^{i(\pi-t)} \mid 0 \leq t \leq \pi\}$$

$$J_2 := \{z = t \mid r \leq t \leq R\}$$



ただし $r < R$ であり, あとで $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ とする.

いま $\text{int}(C) \cup C$ 内で f は正則であるから, 積分定理より

$$\int_C f(z) dz = 0 \iff \int_{C_1} + \int_{J_1} + \int_{C_2} + \int_{J_2} = 0.$$

(イ). 上の式をうまく変形すると

$$\frac{2}{i} \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

となる (→レポート問題). よって, 求めたい積分値は本質的に右辺の積分から得られるはずである.

(ウ). $\left| \int_{C_1} \right| \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) を示そう.

いま $C_1: z = Re^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$) より, $dz = iRe^{it} dt = iz dt \iff dz/z = i dt$. よって

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} f(z) dz \right| &= \left| \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{iRe^{it}} i dt \right| \\ &= \left| \int_0^\pi e^{iR(\cos t + i \sin t)} dt \right| = \left| \int_0^\pi e^{-R \sin t} e^{iR \cos t} dt \right| \\ &\leq_{(*)} \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt \\ &\rightarrow 0. \quad (R \rightarrow \infty) : \text{最後のここはレポート問題.} \end{aligned}$$

²すなわち $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$.

³被積分関数 $\sin x/x$ には $x=0$ を代入できないから, 実質的には $I = \lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$ という形の広義積分を考えていることになる. また, 被積分関数 $\sin x/x$ は偶関数であるから,

$$2I = \lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x} dx + \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx \right)$$

がなりたつ. この形の積分 (値) は「コーシーの主値」と呼ばれるものの特別な場合となっている.

ここで $\leq_{(*)}$ の部分について簡単に説明しておこう. 積分 $\int_0^\pi e^{-R \sin t} e^{iR \cos t} dt$ は, 時刻 t に速度ベクトル $e^{-R \sin t} e^{iR \cos t}$ をもつような動点が時刻 0 に原点から出発したときの時刻 π での位置にである. $e^{-R \sin t}$ は速度の大きさを決める要素であり, $e^{iR \cos t}$ は速度の方向を決める要素だが, 原点からの距離を稼ぐには方向を変えずに進むのがよい. このとき, 最大で $\int_0^\pi e^{-R \sin t} dt$ 進むことができるわけである.

(工). $\int_{C_2} = -\pi i$ ($r \rightarrow 0$) を示そう. そのために, 次の補題を使う:

補題 7-1 $\alpha \in \mathbb{C}$ とし, 関数 f はある穴あき円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - \alpha| < R\}$ で正則, かつ α は 1 位の極とする. このとき, 半円形の積分路 $C_r := \{z = \alpha + re^{it} \mid 0 \leq t \leq \pi\}$ にたいし, 次が成り立つ:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(f(z), \alpha).$$

注意. 半円 C_r のかわりに $C = C(\alpha, r)$ を積分路にした場合 ($r \rightarrow 0$ の極限をとるまでもなく)

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \alpha)$$

が成り立つ. このちょうど半分の値が半円 C_r 上の積分の $r \rightarrow 0$ とした極限として得られる, というのが補題の主張である.

証明 (補題 7-1). α を中心にローラン展開すれば, $f(z) = \frac{a_{-1}}{z - \alpha} + g(z)$ (ただし $g(z)$ は $z = \alpha$ の周りで正則) の形になる. そこで積分

$$\int_{C_r} f(z) dz = \int_{C_r} \frac{a_{-1}}{z - \alpha} dz + \int_{C_r} g(z) dz$$

を考えよう.

下線部は (r によらず)

$$\int_0^\pi \frac{a_{-1}}{re^{it}} ire^{it} dt = \pi i a_{-1} = \pi i \operatorname{Res}(f(z), \alpha).$$

次に 2 重下線部を計算しよう. $g(z)$ は $z = \alpha$ の周りで連続なので, r が十分小さいとき C_r 上で $|g(z) - g(\alpha)| \leq 1$ とできる. よって C_r 上 $|g(z)| \leq |g(\alpha)| + 1$ が成り立つ. これより

$$\left| \int_{C_r} g(z) dz \right| = (|g(\alpha)| + 1) \ell(C_r) = (|g(\alpha)| + 1) \pi r \rightarrow 0. \quad (r \rightarrow +0)$$

■

この補題を $f(z) = e^{iz}/z$, $\alpha = 0$ として適用しよう. 0 でのローラン展開は

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \cdots \right) = \frac{1}{z} + (0 \text{ 次以上の項})$$

なので, $\operatorname{Res}(f(z), 0) = 1$. ゆえに ($C_r = -C_2$ に注意せよ),

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{C_2} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow +0} \int_{-C_r} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) = -\pi i.$$

(オ). (イ) (ウ) (エ) の結果を合わせると, $r \rightarrow +0$, $R \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{2}{i} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = 0 + (-\pi i) \iff I = -\frac{i}{2} \pi i = \frac{\pi}{2}.$$

偏角の原理

有理形関数. D を $\mathbb{C}$ 内の領域とする. 「 D 上で正則な関数」の概念をすこしだけ拡張しよう. 関数 f が D 上で**有理形** (meromorphic) であるとは,

- 点の集合 $P := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \subset D$ が存在して, f は $D - P$ 上で正則; かつ
- 各 α_k はそれぞれ f の極 (除去可能特異点でも真性特異点でもない).

ことをいう.⁴ ただし $P = \emptyset$ の場合も許し, この場合 f は D 上で正則な関数である.

例. $f(z) = \frac{e^z}{z+z^2}$ は $\mathbb{C}$ 上の有理形関数. 実際, f は $P = \{0, -1\}$ のみで極をもち, $\mathbb{C} - P$ 上正則.

例. $f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$ は $\mathbb{C}$ 上の有理形関数. 実際, f は $P = \mathbb{Z}$ のみで (1 位の) 極をもち, $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ 上正則.

零点と極の位数. 関数 $f(z)$ にたいし, $f(\alpha) = 0$ となる α を f の**零点** (れいてん, zero) とよぶ.

いま, f が $z = \alpha$ を含む領域で有理形であると仮定しよう.

- α が零点のとき, ある自然数 k が存在してテイラー展開が

$$f(z) = a_k(z - \alpha)^k + a_{k+1}(z - \alpha)^{k+1} + \dots$$

の形で書ける. このとき, k を零点 α の**位数** (order) とよぶ.

- α が極のとき, ある自然数 k が存在してテイラー展開が

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - \alpha)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - \alpha} + c_0 + a_1(z - \alpha) + \dots$$

の形で書ける. このとき, k を極 α の**位数** (order) とよぶ.

α が零点のとき, 位数 k は「方程式 $f(z) = 0$ の解の重複度」に他ならない. α が極のときも, 位数 k は (適切な定式化のもとで) 「方程式 $f(z) = \infty$ の解の重複度」と解釈できる.⁵

偏角の原理. 有理形関数に関しては, 次が成り立つ:

定理 7-2 (偏角の原理). D を $\mathbb{C}$ 内の領域, C を D 内の単純閉曲線とする. 関数 f は D 上の有理形関数であり, とくに C 上で零点も極ももたないと仮定する. このとき,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (C \text{ の内部にある零点の数}) - (C \text{ の内部にある極の数}).$$

ただし「 C の内部の零点 (極) の数」とは, 「 C の内部に含まれる零点 (極) の位数の和」のことである. すなわち, 重複度込みで零点 (極) を数えたものである.

この定理には重要な応用がいくつかある. 応用例と「偏角の…」という名前の由来は次回に回すことにして, まずは証明を済ませておこう:

証明 (偏角の原理). まず次の事実を確認しておこう:

⁴ ふたつ目の条件から, 各 α_k は P の孤立点である. (そうでないと α_k のまわりでローラン展開できないから) すなわち P は D 内に集積点をもたない. また, ふたつ目の条件は $\lim_{z \rightarrow \alpha_k} |f(z)| = \infty$ と同値であることが知られている.

⁵ 次回以降, 「リーマン球面」を導入して正当化する.

命題 7-3. 定理 7-1 の仮定のもと, $\text{int}(C)$ 内に含まれる零点および極はそれぞれ有限個である.

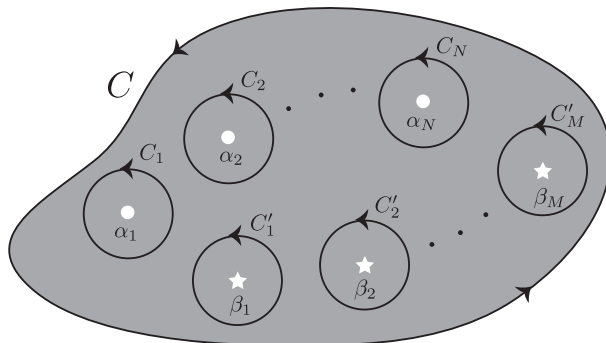
証明はレポート問題としよう.

これより $\text{int}(C)$ 内の零点を $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, 極を $\beta_1, \dots, \beta_M$ とする. ただし, これらの重複は許さず, 互いに異なる点とする. さらに十分小さな $r > 0$ を選んで固定し,

$$C_n := C(\alpha_n, r), \quad D_n := D(\alpha_n, r) \quad (1 \leq n \leq N)$$

$$C'_m := C(\beta_m, r), \quad D'_m := D(\beta_m, r) \quad (1 \leq m \leq M)$$

とおく. ただし r はこれら円および開円板が互いに共通部分をもたず, 全て $\text{int}(C)$ に含まれるようにとる (図).



このとき, $f'(z)/f(z)$ は

$$\tilde{D} := \text{int}(C) - \bigcup_{n=1}^N D_n - \bigcup_{m=1}^M D'_m$$

の点上で正則である.⁶ ゆえにコーシーの積分定理から

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \underbrace{\sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f'(z)}{f(z)} dz}_{(1)} + \underbrace{\sum_{m=1}^M \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_m} \frac{f'(z)}{f(z)} dz}_{(2)}$$

(1) の計算 (零点の位数のカウント). $n = 1, \dots, N$ にたいし, α_n は位数 k_n をもつとする. このとき D_n 上で正則な関数 $g = g_n$ で $g(\alpha_n) \neq 0$ を満たすものが存在し,

$$f(z) = (z - \alpha_n)^{k_n} g(z)$$

と表される. (f のテイラー展開から g のテイラー展開は具体的に決まる.) . よって

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_n(z - \alpha_n)^{k_n-1}g(z) + (z - \alpha_n)^{k_n}g'(z)}{(z - \alpha_n)^{k_n}g(z)} = \frac{k_n}{z - \alpha_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

ここで $g(\alpha_n) \neq 0$ と g の連続性より (必要なら r を十分小さく取り直して) D_n 上で $g(z) \neq 0$ と仮定してよい. よって $g'(z)/g(z)$ は $C_n \cup D_n$ 上正則である. したがって基本公式 (プリント 02-3 参照) と積分定理より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{k_n}{z - \alpha_n} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = k_n + 0 = k_n.$$

ゆえに

$$(1) = \sum_{n=1}^N k_n = (C \text{ の内部に含まれる零点の位数の和}).$$

⁶ 実際, $\tilde{D}$ 上で f は正則, よって f' も正則. また, $\tilde{D}$ 上で f は零点をもたないので, $1/f$ も $\tilde{D}$ 上正則. よって f' と $1/f$ の積は $\tilde{D}$ 上正則. 地味な議論の積み重ねだが, 数学は正確さが命. このような議論は綿密に行う習慣をつけよう.

(2) の計算 (極の位数のカウント). (1) の計算とほぼ同様である. $m = 1, \dots, M$ にたいし, β_m は位数 l_m をもつとする. このとき D'_m 上で正則な関数 $h = h_m$ で $h(\beta_m) \neq 0$ を満たすものが存在し,

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - \beta_m)^{l_m}}$$

と表される. (今度は f のローラン展開から h のテイラー展開が具体的に決まる.) . よって

$$f'(z) = \frac{-l_m}{(z - \beta_m)^{l_m+1}} h(z) + \frac{1}{(z - \beta_m)^{l_m}} h'(z)$$

より

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-l_m}{z - \beta_m} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

ここで, (1) の g のときと同様にして, $h(\beta_m) \neq 0$ より $h'(z)/h(z)$ は $C'_m \cup D'_m$ 上正則と仮定してよい. よって基本公式と積分定理より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C'_m} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_m} \frac{l_m}{z - \beta_m} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_m} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = -l_m + 0 = -l_m.$$

ゆえに

$$(2) = \sum_{m=1}^M (-l_m) = -(C \text{ の内部に含まれる極の位数の和}).$$

■

レポート問題

締切りは 12 月 6 日 (金) の講義開始時とします. この日だけ教室が 109 号室となりますのでご注意ください.

問題 8-1 (応用 4 の詰め)

(1) 応用 4 の (イ): $\frac{2}{i} \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = \int_{C_1} + \int_{C_2}$ を示せ.

(2) 応用 4 の (ウ):

(a) $\int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin t} dt$ を示せ.

(b) $t \in [0, \pi/2]$ のとき $\sin t \geq 2t/\pi$ であることを用いて, $\int_0^\pi e^{-R \sin t} dt \rightarrow 0$ ($R \rightarrow 0$) を示せ.

問題 8-2 (実積分への応用).

(1) $I = \int_0^\infty \frac{1}{x^6 + 1} dx$ を求めよ. (HINT: 応用 2 と同様. 留数計算では公式 6-2 も活用せよ.)

(2) $I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4e}$ を示せ. (HINT: 応用 3 と同じ積分路で $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 1)^2}$ を考える.)

問題 8-3. 命題 7-3 を証明せよ. (HINT: $E := C \cup \text{int}(C)$ はコンパクト集合なので, $\text{int}(C)$ 内の無限点列は E 内に集積点をもつ.)

ルーシェの定理・一致の定理 1

配布日：December 6, 2013 Version：1.1

前回 (11/29) のまとめと補足

復習：有理形関数. D を $\mathbb{C}$ 内の領域とする. 関数 f が D 上で有理形 (meromorphic) であるとは,

- 点の集合 $P := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \subset D$ が存在して, f は $D - P$ 上で正則; かつ
- 各 α_k はそれぞれ f の極 (除去可能特異点でも真性特異点でもない).

ことをいう. ただし $P = \emptyset$ の場合も許し, この場合 f は D 上で正則な関数である.

復習：偏角の原理. 有理形関数に関して, 次が成り立つ:

定理 7-2 (偏角の原理). D を $\mathbb{C}$ 内の領域, C を D 内の単純閉曲線とする. 関数 f は D 上の有理形関数であり, C 上で零点および極をもたないと仮定する. このとき,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (C \text{ の内部にある零点の数}) - (C \text{ の内部にある極の数}).$$

ただし「 C の内部の零点 (極) の数」とは, 「 C の内部に含まれる零点 (極) の位数の和」のことである. すなわち, 重複度込みで零点 (極) を数えたものである.

名前の由来. 定理 7.2 がなぜ「偏角の原理」と呼ばれるか, その由来を解説しよう. 簡単にいえば,

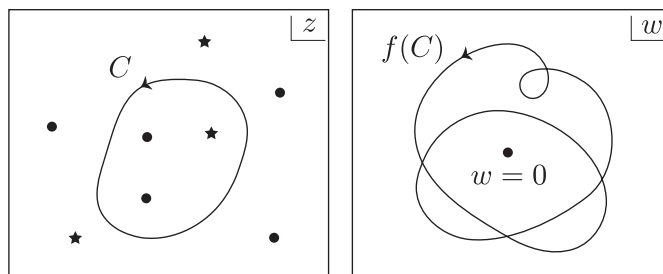
『左辺の積分は $w = f(z)$ が $f(C)$ 上を移動したときの偏角 $\arg w$ の積分になっている』

からで, それが右辺のような「位数の数え上げ」を与えるのが定理の面白いところだといえる.

さて $w = f(z)$ とおいたとき, $dw = f'(z)dz$ より¹

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(C)} \frac{1}{w} dw$$

をえる. じつは右辺の積分は, 「 w 平面で閉曲線 $f(C)$ が $w = 0$ を (実質) 何回まわるか」を計算していることを確認しよう.



いま C 上に f の零点も極もないので, $f(C)$ は $\mathbb{C} - \{0\}$ に含まれる閉曲線である. よって任意の $w \in f(C)$ は $w = e^{x+yi}$ ($x, y \in \mathbb{R}$) と書き表すことができる. より正確には, $f(C): w(t) =$

¹このような複素線積分の変数変換は初めてやるので, 一瞬「いいのかな…」と思うかもしれない. 心配であれば, $C: z = z(t)$, $f(C): w = f(z(t))$ とパラメーター表示して t の積分に変換してから両辺を比べればよい.

$e^{x(t)+iy(t)}$ ($0 \leq t \leq 1$) とパラメーター表示できる. ただし, $x(t)$, $y(t)$ は t の連続関数となるように選んでおく. (じつはここが重要なポイント. さらに C^1 関数と仮定しておく.) このとき, $\arg w(t) = y(t)$ が成り立つことに注意しておこう.

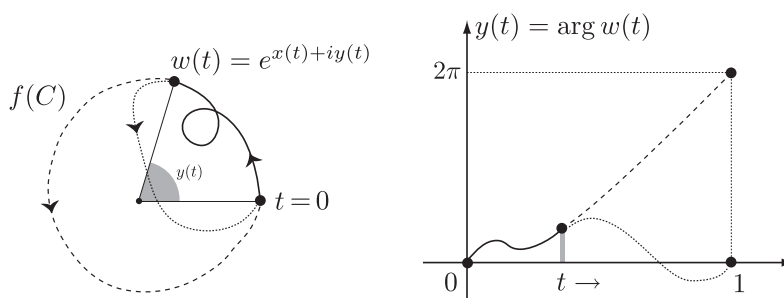
さて適当に t と微小時間変化 Δt を固定し $\Delta x := x(t + \Delta t) - x(t)$, $\Delta y := y(t + \Delta t) - y(t)$, とすれば,

$$w(t + \Delta t) = e^{x(t+\Delta t)+iy(t+\Delta t)} = e^{(x(t)+iy(t))+\Delta x+i\Delta y} = w(t) \cdot e^{\Delta x} \cdot e^{i\Delta y}$$

下線部は正の値であるから, 両辺の偏角を比べると

$$\arg w(t + \Delta t) = \arg w(t) + \Delta y$$

が成り立つのである.



さて $w = e^{x+iy}$ の全微分を考えると (正確には「 dt で割って」微分係数の関係式だと思えばよい)

$$dw = e^{x+iy} dx + e^{x+iy} i dy \iff \frac{dw}{w} = dx + i dy$$

であるから, もとの積分は

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{f(C)} \frac{1}{w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{dx}{(1)} + \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \frac{dy}{(2)}$$

となる. ただし C' は $w(t) = e^{x(t)+iy(t)} \in f(C)$ に対応する $x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$ が描く曲線である. (こちらは閉曲線とは限らない.) (1) の下線部の積分は 0 になる. なぜなら, 偏角の原理から左辺の積分は整数 (実数) となるので, 下線部が 0 にならないとつじつまがあわないからである. 偏角の原理を仮定しない理由付けもできる: $\int_{C'} dx = \int_0^1 x'(t) dt = x(1) - x(0)$ となるが, C' に対応する $f(C)$ は閉曲線なので $w(0) = w(1)$. この絶対値をとれば $e^{x(1)} = e^{x(0)} \iff x(1) = x(0)$ が成り立つ. (2) の下線部も (1) と同様に, $\int_{C'} dy = \int_0^1 y'(t) dt = y(1) - y(0)$ が成り立つから, $e^{iy(1)} = e^{iy(0)}$ より一般に $y(1) = y(0) + 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) が成り立つ. ここで現れる $2m\pi$ は $w(t)$ が $f(C)$ 上を動くときの偏角 $y(t) = \arg w(t)$ の実質的な変化量だといえる.² (上の図は $m = 1$ (破線) になる場合と $m = 0$ (点線) になる場合の $y(t)$ のグラフ.)

以上をまとめると, 偏角の原理の積分は

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(C)} \frac{1}{w} dw = m \quad : \quad w = 0 \text{ のまわりを } f(C) \text{ が回った回数}$$

となる.

² $y = \arg w$ より, 形式的に $\frac{1}{2\pi} \int_{C'} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{f(C)} d \arg w$ と表現されることもある.

ルーシェの定理. 偏角の原理の応用としてもっとも有名 (有用) なものが次の定理である：

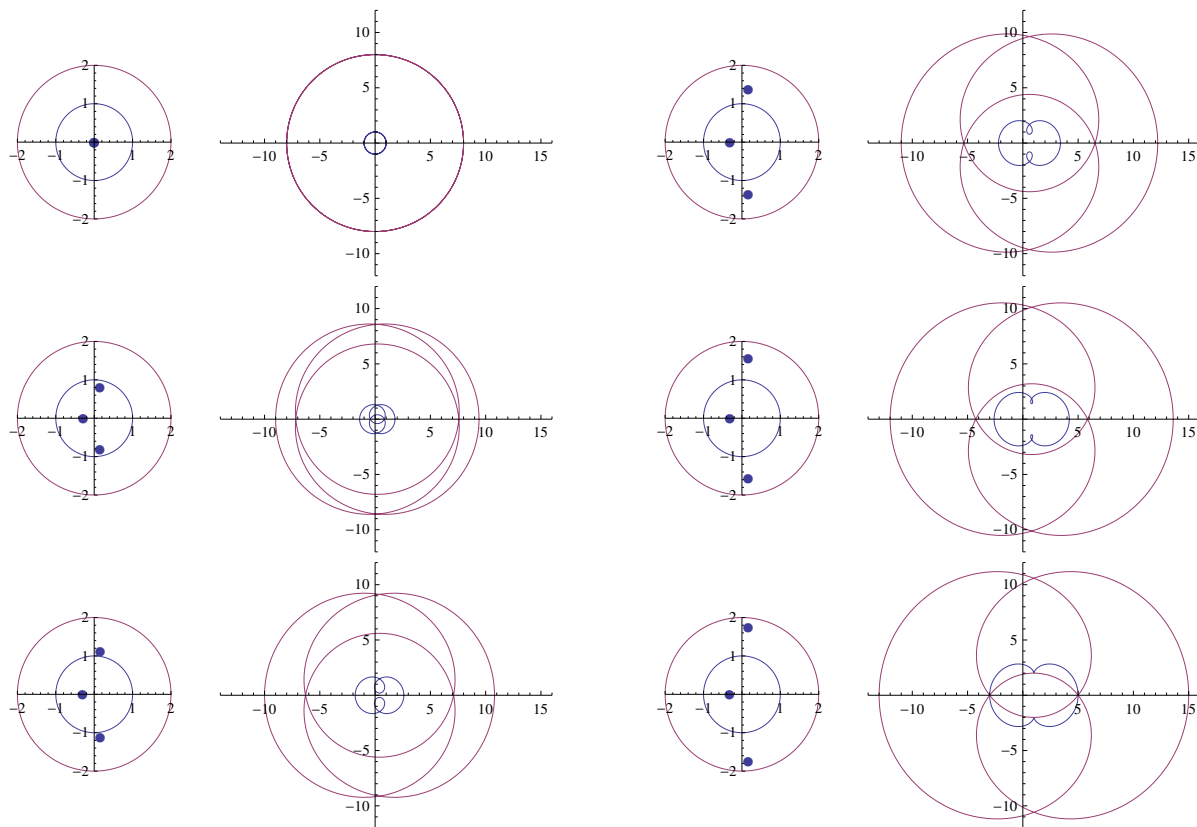
ルーシェ (Rouché) の定理. D を $\mathbb{C}$ 内の領域とし, $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数とする. さらに D 内の単純閉曲線 C が $\text{int}(C) \subset D$ かつ C 上で $|f(z)| > |g(z)|$ を満たすとき,

$$(C \text{ の内部の } f(z) + g(z) \text{ の零点の数}) = (C \text{ の内部の } f(z) \text{ の零点の数})$$

標語的にいうと、『 f に C 上で「 f より小さい g 」 ($|f| > |g|$) を加えても, 内部の零点の数は変化しない』ということである.

具体例. 方程式 $z^3 + 3z + 1 = 0$ の解の個数を考えよう. $f(z) = z^3$, $g(z) = 3z + 1$ とする. $|z| = 2$ のとき, $|f(z)| = 8$, $|g(z)| = |3z + 1| \leq 3|z| + 1 = 7$. よって $C = C(0, 2)$ についてルーシェの定理を適用できて, 「 $|z| < 2$ を満たす $f(z) + g(z)$ の零点の数」は「 $|z| < 2$ を満たす $f(z)$ の零点の数」と同じである. $f(z) = z^3$ の零点は 3 位の零点 $z = 0$ のみであるから, 「 $|z| < 2$ を満たす方程式 $z^3 + 3z + 1 = 0$ の解の数」は (重複度込みで) 3 だとわかる. $z^3 + 3z + 1 = 0$ は 3 次方程式だから, 解の全てが開円板 $D(0, 2)$ 内にあることがわかった.

もっと具体例. $|z| = 1$ のとき, $|g(z)| = |3z + 1| \geq 3|z| - 1 = 2$. $|f(z)| = 1$. よって $C = C(0, 1)$ についてルーシェの定理を適用すると, 「 $|z| < 1$ を満たす $g(z) + f(z)$ の零点の数」は「 $|z| < 1$ を満たす $g(z)$ の零点の数」と同じである. $g(z) = 3z + 1$ の零点は 1 位の零点 $z = -1/3$ のみであるから, 「 $|z| < 1$ を満たす方程式 $z^3 + 3z + 1 = 0$ の解の数」は 1 だとわかる. よって残りの 2 つの解は $1 \leq |z| < 2$ で表される円環領域内にあることもわかった.



上の図は $w = h_t(z) := f(z) + tg(z)$ ($0 \leq t \leq 1$) の「零点の位置 (z 平面)」「半径 1 の円と半径 2 の円の h_t による像 (w 平面)」のペアの図を描いたものである. 左側 3 段は $t = 0, 0.2, 0.4$, 右側 3 段は $t = 0.6, 0.8, 1.0$ に対応する.

さらなる具体例. 方程式 $z^{100} - 5z^3 + 1 = 0$ は単位円板内にいくつ解をもつだろうか? $f(z) = -5z^3$, $g(z) = z^{100} + 1$ とおくと, $|z| = 1$ のとき $|f(z)| = 5$, $|g(z)| \leq |z^{100}| + 1 = 2$ より求める解の個数は「単位円板内の $f(z) = 0$ の零点の個数」と同じである. よって 3 個. (残りの 97 個の解は一体どこにあるのか, それはレポート問題としよう.)

注意. D 上で正則関数の列 f_n が f に一様収束するとき (このとき f の正則), $g_n(z) := f(z) - f_n(z)$ とおくと $f_n(z) = f(z) + g_n(z)$ であり $g_n(z)$ は定数関数 0 に収束するから, さまざまな形でルーシェの定理が適用できる.

証明 (ルーシェの定理). $z \in C$ としよう. このとき $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$ より, C 上に $f(z)$ の零点はないことに注意しよう. そこで $f(z) + g(z) = f(z) \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$ と変形し, $h(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ とおく. 偏角の原理より,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\{f(z)h(z)\}'}{f(z)h(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

を示せばよい. さらに

$$\text{左辺} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right) dz = \text{右辺} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h'(z)}{h(z)} dz$$

であるから, 下線部が 0 になることを示そう.

$w = h(z)$ ($z \in C$) とおいてみると,

$$|w - 1| = |h(z) - 1| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$$

であるから, 曲線 C の h による像 $h(C)$ は w 平面の $w = 1$ 中心半径 1 の開円板内に含まれる. その上で関数 $w \mapsto 1/w$ は正則であるから, コーシーの積分定理より³

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{h(C)} \frac{1}{w} dw = 0.$$

■

一致の定理

二人の人物がじつは同一人物であることを確認するには, どのくらいの情報 (データ, たとえば身長, 座高, 体重など) が必要だろうか?

「人物」を「正則関数」に置き換えて, 同じ問題を考えてみよう.

多項式版の一致の定理. ウォーミングアップとして, 「ふたつの多項式がじつは同じ多項式」であるための条件を考えてみよう.

多項式の一致の定理. $f(z)$, $g(z)$ を n 次多項式とする. ある互いに異なる $n+1$ 個の点 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ が存在して $f(\alpha_k) = g(\alpha_k)$ ($k = 1, \dots, n+1$) が成り立つとき, じつは全ての $z \in \mathbb{C}$ で $f(z) = g(z)$ が成り立つ.

したがってふたつの多項式が一致するかを確認するには, (次数 + 1) 個の点での値を「測定」すればよいことになる.

証明. $h(z) := f(z) - g(z)$ とおくと, これは n 次以下の多項式である. $h(\alpha_k) = 0$ ($k = 1, \dots, n+1$) より, 因数定理を繰り返し用いることで

$$h(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{n+1})Q(z)$$

³ここで, すこしごまかしている部分がある. われわれの積分定理は単純閉曲線にのみ適用可能な形で述べていた. しかし $h(C)$ は一般に閉曲線だが単純閉曲線とは限らない. そのような場合, 適当に積分路を分割することで単純閉曲線の和にできるから, そのあとで積分定理を適用すればよい.

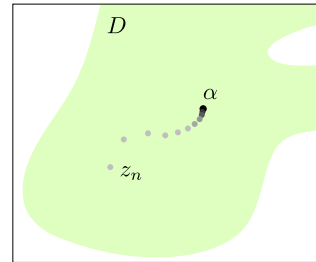
(ただし $Q(z)$ は多項式) の形で書ける. $Q(z)$ 以外の部分は $n+1$ 次式になっているから, 両辺で次数のつじつまがあうためには $Q(z) = 0$ (定数関数) しかありえない. ■

正則関数の一致の定理. では, 「ふたつの正則関数がじつは同じ関数」であるための条件はなんだろうか? 一般の正則関数は (局所的に) テイラー展開で表現できる. テイラー展開は無限次数の多項式のお化けのようなものだから, すくなくとも無限個の点で値を確認しないとイケないだろう.

一致の定理 (Identity Theorem).

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$, $g(z)$ にたいし, ある $\alpha \in D$ と点列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset D - \{\alpha\}$ が存在し,

- $z_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$
- $f(z_n) = g(z_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$



が成り立つとき, じつは全ての $z \in D$ で $f(z) = g(z)$ が成り立つ.

証明は次回に行う.

応用. ある「 C^∞ 級関数」 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $x + yi \mapsto f(x + yi)$ が

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = e^x$$

を満たすと仮定する. このとき, f の具体的な形としては

$$f(x + yi) = e^{x+2yi}, \quad f(x + yi) = e^x(1 + yi), \quad f(x + yi) = e^x \cos y, \quad \dots$$

などなど, さまざまな可能性がある. しかし 「 f は正則関数」と仮定すると, じつは

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad f(z) = e^z \iff f(x + yi) = e^{x+yi}$$

である. (たとえば $g(z) = e^z$, $z_n = 1/n \in \mathbb{R}$, $\alpha = 0$ として一致の定理を用いればよい.) したがって, 「実指数関数の正則関数への拡張はひとつしかない」ことがわかる. やはり正則関数は特殊なのである.

注意. 一致の定理から, ある D 内の円板 $D(\alpha, r)$ 上で f と g が一致していれば,

- $r > 0$ がどんなに小さくても, たとえ $r = 10^{-100 \dots 00}$ でも,
- もとの領域 D がどんなに大きくても, たとえ無限の彼方まで広がる $\mathbb{C}$ であっても

f と g は D 全体で一致する.⁴

レポート問題

締切りは 12 月 13 日 (金) の講義開始時とします.

問題 9-1 (偏角の原理). $f(z) = \frac{z^3(z-1)(z^2-4)}{(z^2+1)^2}$ とする. 偏角の原理をもちいて, $r = 1/2, 3/2, 5/2$ それぞれにたいし, 積分 $\int_{C(0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ の値をもとめよ.

⁴生物には細胞ひとつひとつに遺伝子が仕込まれていて, 個体全体を決定する情報が記述されている. 一致の定理はそれを彷彿とさせる定理である.

問題 9-2 (ルーシェの定理) $z^{100} - 5z^3 + 1 = 0$ の単位円板内の解は 3 個であった. 残りの 97 個の解は $1 \leq |z| < 1.02$ を満たすことを示せ. ただし, 必要であれば $\log_{10} 1.02 = 0.0086$, $\log_{10} 7 = 0.845$ として計算せよ.

問題 9-3 (留数の公式). 関数 $g(z)$, $h(z)$ はともに $z = \alpha$ のまわりで正則であり, $g(\alpha) \neq 0$ かつ $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ は $z = \alpha$ において 1 位の極を持つとする. このとき, $\text{Res}(f(z), \alpha) = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$ であることを示せ. (HINT: 公式 6-2 と同様の方法で示す.)

一致の定理 2・最大値原理

配布日：December 13, 2013 Version：1.1

前回 (12/6) のまとめと補足

「一致の定理」と、その応用として「最大値原理」を証明する。いずれも正則関数特有の著しい性質である。

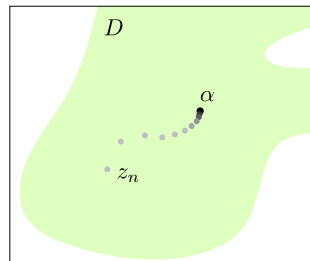
一致の定理の証明.

一致の定理 (Identity Theorem) .

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$, $g(z)$ にたいし, ある $\alpha \in D$ と点列 $\{z_n\}_{n=0}^\infty \subset D - \{\alpha\}$ が存在し,

- $z_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$
- $f(z_n) = g(z_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$

が成り立つとき, じつは全ての $z \in D$ で $f(z) = g(z)$ が成り立つ.



証明. 「多項式の一致の定理」のときと同様に $h(z) = f(z) - g(z)$ を考えて,

$$[n \rightarrow \infty \text{ のとき } z_n \rightarrow \alpha, (\forall n \in \mathbb{N}) f(z_n) = 0 \implies (\forall z \in D) f(z) = 0]$$

を示せばよい. 以後は便宜的に, 集合 E の任意の元 z について $f(z) = 0$ であるとき, 「 E 上 $f \equiv 0$ 」と表すことにする.¹

まず, 次の補題を示す:

補題 9-1. もしある $\alpha \in D$ が存在して全ての $n = 0, 1, 2, \dots$ について $f^{(n)}(\alpha) = 0$ であれば, D 上で $f(z) \equiv 0$.

補題の証明: (ア) $\beta \in D$ を任意にとる. さらに D 内で α と β を結ぶ曲線

$$C: z = z(t), \quad (0 \leq t \leq 1); \quad z(0) = \alpha, \quad z(1) = \beta$$

を取る.

(イ). $\alpha_0 := \alpha, t_0 := 0$ とし, $R_0 \in (0, \infty]$ を α_0 と ∂D の距離とする. ただし, $D = \mathbb{C}$ のときに限り $R_0 = \infty$ とし, $D(\alpha, \infty) := \mathbb{C}$ とおく. このとき $D(\alpha_0, R_0)$ 上 f は正則であるから, この開円板上でテイラー展開ができて

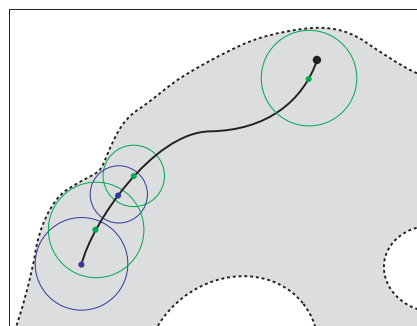
$$\forall z \in D(\alpha_0, R_0), \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha_0)}{n!} (z - \alpha_0)^n$$

が成り立つ. よって $\alpha_0 = \alpha$ および $f^{(n)}(\alpha) = 0$ より, $D(\alpha_0, R_0)$ 上 $f \equiv 0$ でなくてはならない.

$D = \mathbb{C}$ のときはこれで証明が終わるので, 以下は $D \neq \mathbb{C}$ と仮定する.

(ウ). いま, $k \geq 0$ にたいし開円板 $D(\alpha_k, R_k)$ 上で $f \equiv 0$ が成り立つと仮定する. このとき, α_{k+1} を $\alpha_{k+1} \in C \cap D(\alpha_k, R_k)$ かつ $\alpha_{k+1} = z(t_{k+1})$ (ただし $0 \leq t_k < t_{k+1} < 1$) となるようにとる. さらに $R_{k+1} > 0$ を α_{k+1} と ∂D の距離とする. 開円板 $D(\alpha_{k+1}, R_{k+1})$ 上でもテイラー展開ができるので

$$\forall z \in D(\alpha_{k+1}, R_{k+1}), \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha_{k+1})}{n!} (z - \alpha_{k+1})^n$$



¹日本語では「 E 上で恒等的に 0」と言ったりする.

となるが, $\alpha_{k+1} \in D(\alpha_k, R_k)$ かつ $D(\alpha_k, R_k)$ 上 $f \equiv 0$ であったから全ての $n = 0, 1, 2, \dots$ で $f^{(n)}(\alpha_{k+1}) = 0$ でなくてはならない. よって $D(\alpha_{k+1}, R_{k+1})$ 上でも $f \equiv 0$.

(エ). 以上の操作は t_k が 1 に近づくように続けることができ, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し $\beta \in D(\alpha_N, R_N)$ となる. (そのような N がとれないとすると, $R_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) となるはず. これは $C \subset D$ であったことに矛盾.)

ゆえに $f(\beta) = 0$ となる. β は任意なので補題の主張を得る. ■(補題 9-1)

一致の定理の証明のつづき. f は D 上正則なので, 連続である. よって

$$f(\alpha) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0.$$

ここで, 「 D 上 $f \equiv 0$ でない」と仮定しよう. 補題 9-1 の対偶を用いると, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し, $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$ となる. そのような k で最小のものをとれば, α のまわりでのテイラー展開から

$$f(z) = (z - \alpha)^k g(z)$$

(ただし $g(z)$ は α の周りで正則, $g(\alpha) \neq 0$) と表される. ここで $z = z_n$ を代入すると, $z_n \neq \alpha$ より

$$0 = f(z_n) = (z_n - \alpha)^k g(z_n) \iff g(z_n) = 0$$

を得る. したがって $g(z)$ の連続性から

$$g(\alpha) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = 0.$$

これは $g(\alpha) \neq 0$ に矛盾する.

よって仮定は否定されて, D 上 $f \equiv 0$ が示された. ■

応用. 一致の定理から, 次の基本的な系がわかる:

系 (零点は孤立). $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を定数でない正則関数とする. このとき, D 内の f の零点 α にたいし, ある $r > 0$ が存在して,

$$\forall z \in D(\alpha, r) - \{\alpha\}, \quad f(z) \neq 0.$$

すなわち $D(\alpha, r)$ 内の零点は α のみ.

証明. 主張が成り立たないと仮定すると, たとえば $|z_n - \alpha| < 1/n$, $f(z_n) = 0$ を満たす数列 z_n がとれる. これは一致の定理に矛盾. ■

最大値原理. 次の定理は非常に強力な定理である:

最大値原理 (Maximum Principle). $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数とする. ある $\alpha \in D$ が存在し,

$$(\forall z \in D), \quad |f(\alpha)| \geq |f(z)|$$

であれば, f は D 上で定数関数となる.

「最大値原理」は「最大絶対値の原理 (Maximum Modulus Principle)」とも呼ばれる. 証明はあとまわしにして, さきに重要な系を紹介しよう:

系 9-2 (境界で最大). $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数とする. 任意のコンパクト集合 $E \subset D$ にたいし, その上での関数 $z \mapsto |f(z)|$ の最大値は境界 ∂E で実現される. すなわちある $\alpha \in \partial E$ が存在し,

$$(\forall z \in E), \quad |f(\alpha)| \geq |f(z)|.$$

例. 関数 $f(z) = 1 - z^2$ を考える. まず関数を実数に制限して, $x \in (-1, 1)$ とする. この場合 $0 < f(x) \leq f(0) = 2$ であるから, (絶対値の) 最大値は区間 $(-1, 1)$ の内部にある $x = 0$ で実現される. しかし $f(x)$ は定数でないから, 最大値原理の主張は実数の世界では成立しない.

つぎに複素数に帰って, $E = \overline{D(0, 1)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ としてみよう. ここでは (三角不等式より)

$$|f(z)| \leq |1| + |-z^2| \leq 2$$

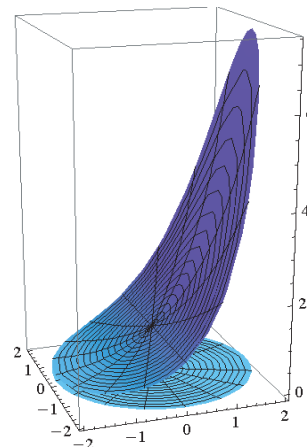
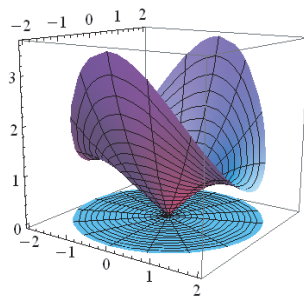
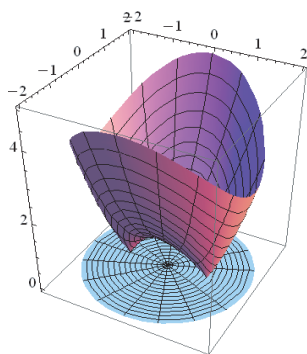
であるから, 等号成立条件を精査すると $z = \pm i$ のときに限って最大値 $|f(z)| = 2$ が成り立つことがわかる. $\pm i \in \partial E$ であるから, これは最大値原理とその系の主張に合致する.

正則でない例. 今度は $f(z) = \frac{z}{z\bar{z} + 1}$ とする. このとき

$$|f(z)| = \frac{|z|}{|z|^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

であり (たとえば相加・相乗平均の不等式からわかる), 等号は $|z| = 1$ のときに限り成立する. すなわち $\mathbb{C}$ 上で f の最大絶対値は単位円周上でのみ実現される. (最大値原理から, f は正則でないことが結論される.)

その他の例. 左から順に $1 - z^2$, $\sin z$, e^z の絶対値を半径 2 の円板上でグラフ化したもの:



応用. 最大値原理を用いると, 代数学の基本定理が証明できる (レポート).

最大値原理の証明. いまそのような $\alpha \in D$ にたいして, 十分に小さな $r > 0$ をとれば, $C = C(\alpha, r)$ およびその内部 $\text{int}(C)$ は D の内部に含まれるとしてよい.

$z \in C$ では $\left| \frac{f(z)}{z - \alpha} \right| = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{|f(\alpha)|}{r}$ であるから, 積分公式より

$$|f(\alpha)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{|f(\alpha)|}{r} \cdot \ell(C) = |f(\alpha)|$$

が得られる. したがってここで現れる不等号はすべて等号であり, とくに C 上で $|f(z)| = |f(\alpha)|$ が成り立つ.

この結果は C の半径 r に依存しないから, 各 $r' < r$ で同様の議論をすることで $\text{int}(C)$ 上 $|f(z)| = |f(\alpha)|$ が成立することがわかる. 絶対値が一定の正則関数は定数関数に限るので², $\text{int}(C)$ 上 f は定数関数 ($f(z) = f(\alpha)$) である. 一致の定理より, f は D 上で定数関数でなくてはならない. ■

系 9-2 の証明. 関数 $z \mapsto |f(z)|$ は D 上連続なので, コンパクト集合 $E \subset D$ 上最大値をもつ. ここで, E の内点の集合を E° と表す. (このとき $E = E^\circ \cup \partial E$, $E^\circ \cap \partial E = \emptyset$ であることに注意.) もし $\alpha \in E^\circ$ が存在し $|f(\alpha)|$ が最大であったと仮定しよう. このとき E° の α を含む連結成分を D' とおけば, 最大値原理が使えて f は D' 上で定数関数 ($f(z) = f(\alpha)$) となることがわかる. よって一致の定理より, f は D 全体で定数関数でなくてはならない. 当然 ∂E 上でも同じ定数であり, 最大絶対値が実現されている. ■

応用. 最大値原理のもっともすばらしい応用例として, 次の「シュワルツの補題」がある.³ 以下, $\mathbb{D} = D(0, 1)$ を単位円板とする.

シュワルツの補題. $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が正則かつ $f(0) = 0$ であれば, $|f(z)| \leq |z|$ かつ $|f'(0)| \leq 1$ を満たす. 等号を満たす $z \in \mathbb{D}$ が存在するのは, いずれも関数が $f(z) = e^{i\theta}z$ ($\theta \in \mathbb{R}$) の形であるときに限る.

関数 f にたいする仮定が極めて少ないことに注意しよう. 原点を固定する単位円板から単位円板への正則写像であれば, 1 次多項式でも 100 次多項式でも何でもよいのである. にもかかわらず, たとえば原点の微分係数に関する厳しい条件 $|f'(0)| \leq 1$ が導かれる. なぜ, $|f'(0)| > 1$ であってはいけないのだろうか? と, 考えずにはいられない.

そして何よりも, この補題の証明がすばらしい.

証明. 正則性より, 原点でテイラー展開すると $f(z) = az + O(z^2)$ ($a = f'(0) \in \mathbb{C}$) の形となる. したがって, 関数 $g(z) = f(z)/z = a + O(z)$ も正則関数である. いま $|z| \leq r < 1$ とすると, 最大値原理 (の系 9-2) からある z_0 で $|z_0| = r$ となるものが存在して, $|g(z)| \leq |g(z_0)| = |f(z_0)|/|z_0| \leq 1/r$. $r < 1$ は任意であったから, 1 に近づけた極限を取ることで任意の $z \in \mathbb{D}$ について $|g(z)| \leq 1$ を得る.

次に等号成立に関する主張を示そう. もし $|f(z_0)| = |z_0|$ をみたす $z_0 \in \mathbb{D}$ が存在したとすると, $|g(z_0)| = 1$ が成立する. また, もし $|f'(0)| = 1$ であれば, $g(0) = f'(0)$ より, $|g(0)| = 1$ が成立することになる. いずれの場合も, 最大値原理より $g(z)$ は定数関数である. とくに, その絶対値は 1 であるから, $g(z) = f(z)/z = e^{i\theta}$ の形となる. ■

解析接続

D_1, D_2 を領域とし, $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ正則関数とする. いま $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ かつその上で $f_1 = f_2$ が成り立つとき, f_2 は f_1 の**解析接続** (analytic continuation), (もしくは「 f_1 は f_2 に**解析接続**される」) という.^{4 5}

例. $f_1(z) = 1 + z + z^2 + \cdots$, $D_1 = D(0, 1)$ とするとき, $f_2(z) = \frac{1}{1-z}$, $D_2 = \mathbb{C} - \{1\}$ は f_1 の解析接続である. 実際, $D_1 \subset D_2$ であり, D_1 上では $f_1 = f_2$ が成り立っている.

例 (リーマンのゼータ). $s = \sigma + it$ ($\sigma, t \in \mathbb{R}$) とし,

$$\zeta_1(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

²これはコーシー・リーマンを用いる問題の典型例. ヒント: $f(x+yi) = u+vi$ とおくと, $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ は定数. これを偏微分して $2uu_x + 2vv_x = 2uu_y + 2vv_y = 0$. これとコーシー・リーマンより $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ を得る.

³この補題は, 複素解析や複素多様体論, 複素力学系理論の随所に現れて, さらりと重要な役割をこなしていく.

⁴この定義は f_1 と f_2 にたいして対称であるから, たとえば f_1 は f_2 の解析接続でもある.

⁵本家ワイエルシュトラス流の「解析接続」はもう少しややこしい. 関数要素とよばれる「円板」を張り合わせて, 大きな「面」をつくる作業を伴う.

(ただし $n^s := e^{s \log n}$, $\log n > 0$) と定義する. この ζ_1 の右辺は $D_1 := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s = \sigma > 1\}$ 上で広義一様収束することがわかるので, (各 n について $s \mapsto e^{s \log n}$ が正則であることから) $\zeta_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ は正則関数である.

この ζ_1 は次の性質を持つ正則関数 $\zeta : \mathbb{C} - \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ に解析接続されることが知られている:

- ζ は $\mathbb{C}$ 上の有理形関数.
- $s = 1$ は ζ の 1 位の極.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \zeta(-2n) = 0$.

このような ζ をリーマンのゼータ関数 (Riemann's zeta function) と呼ぶ. ⁶ 次の予想は懸賞金 100 万ドルがかけられた「ミレニアム問題」のひとつである:

リーマン予想 (The Riemann Hypothesis).

$$\zeta(\alpha) = 0 \implies \alpha = -2n \ (n \in \mathbb{N}) \text{ もしくは } \operatorname{Re} \alpha = 1/2.$$

レポート問題

締切りは 12 月 20 日 (金) の講義開始時とします.

問題 10-1 (偏角の原理の拡張). D を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域, $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数とする. 単純閉曲線 $C \subset D$ をとり, その上で f は零点を持たないとする. $\operatorname{int}(C)$ 内の f の零点を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ とし, 各 α_n ($1 \leq n \leq N$) は k_n 位の零点とすると,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = k_1 g(\alpha_1) + \dots + k_N g(\alpha_N).$$

が成り立つことを示せ. ($g(z) = 1$ (定数関数) のときが偏角の原理で極を持たない場合に相当する.)

問題 10-2 (最大値原理の応用) 代数学の基本定理を最大値原理を用いて証明しよう. $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ とする.

- (1) R が十分に大きいとき $|z| \geq R \implies |f(z)| \geq R^n/2$ が成り立つことを示せ. (HINT: $|f(z)| \geq |z^n| \left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|\right)$)
- (2) $f(z)$ に零点が存在しないと仮定する. $g(z) = 1/f(z)$ とおくと, $\mathbb{C}$ 全体で $|g(z)| \leq 2/R^n$ が成り立つことを (最大値原理を用いて) 説明せよ.

R は (1) が成り立つ程度に大きい限り任意であるから, $|g(z)| = 0$ (定数) でなくてはならない. 矛盾. ■

⁶ 「正の実軸を囲む」適当な積分路 C をとるとき,

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

と表される. ただし Γ は複素数のガンマ関数, $(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}$, $|\operatorname{Im} \log(-z)| < \pi$ とする.

解析接続と多価関数のリーマン面

配布日：December 20, 2013 Version：1.1

前回 (12/13) のまとめと補足

多価関数に付随する「リーマン面」とよばれる位相空間について解説する。

リーマン面とは？ 辞書的にいうと、「リーマン面」という言葉には次のふたつの意味がある：

- (1) 多価関数を 1 価関数のように扱うために導入される、複素平面 $\mathbb{C}$ を切り貼りして得られる位相空間。
- (2) 1 次元複素多様体の別称。

今回説明するのは (1) のほうで、具体例として「平方根 $w = \sqrt{z}$ 」, 「 n 乗根 $w = z^{1/n}$ 」, 「対数関数 $w = \log z$ 」を与える。¹

復習：解析接続. D_1, D_2 を領域とし, $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ正則関数とする. いま $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ かつその上で $f_1 = f_2$ が成り立つとき, f_2 は f_1 の**解析接続** (analytic continuation) (もしくは「 f_1 は f_2 に**解析接続**される」) という。²

準備：逆関数定理. リーマン面を導入する前の準備として、正則関数の「逆関数定理」を証明しよう. ここでは多変数微分積分で学ぶ実 2 次元写像の「逆関数定理」を用いて示す。³

以下では, xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の点 $\mathbf{p}$ を中心とする半径 r の開円板を $D(\mathbf{p}, r)$ と表すことにする。

逆関数定理 (実 2 次元版). D を $\mathbb{R}^2$ 内の領域, $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C^1 級写像とする. また, $F : \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とし, $\mathbf{p}_0 \in D$ において

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \bigg|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} \neq 0$$

と仮定する. $\mathbf{q}_0 = F(\mathbf{p}_0)$ とおくとき, ある $r > 0$ と次のような写像 $G : D(\mathbf{q}_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^2$ が存在する：

- (1) $G(\mathbf{q}_0) = \mathbf{p}_0$.
- (2) $\forall \mathbf{q} \in D(\mathbf{q}_0, r), F \circ G(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$.
- (3) $\forall \mathbf{p} \in G(D(\mathbf{q}_0, r)), G \circ F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.
- (4) $G : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は F と同じく C^1 級であり, その微分 (ヤコビ行列) は次の関係式をみたす：

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹適切な解釈のもとでは (1) も (2) でいう「1 次元複素多様体」とみなすことができる。

²もちろん f_1 と f_2 を入れ替えてもよい。

³べき級数展開を用いる方法、偏角の原理 (ルーシェの定理) を用いる方法などがあるが, これらは「正則性」もしくは「解析性」に依存しすぎていて, 定理の本質が見え辛いように思う。

すなわち, 「微分が消えてない場所では, 局所的に同相写像になっていて, 逆関数ももとの写像と同じぐらい滑らか」だと言っている. これを仮定した上で, 次を示す:

逆関数定理 (複素 1 次元版). D を $\mathbb{C}$ 内の領域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則写像とする. また, $f: z \mapsto w$ とし, $z_0 \in D$ において

$$f'(z_0) \neq 0$$

と仮定する. $w_0 = f(z_0)$ とおくと, ある $r > 0$ と次のような写像 $g: D(w_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する:

$$(1)' \quad g(w_0) = z_0.$$

$$(2)' \quad \forall w \in D(w_0, r), \quad f \circ g(w) = w.$$

$$(3)' \quad \forall z \in g(D(w_0, r)), \quad g \circ f(z) = z.$$

$$(4)' \quad g: w \mapsto z \text{ は } f \text{ と同じく正則であり, その微分は次の関係式をみたす:}$$

$$\frac{dg}{dw} \cdot \frac{df}{dz} = 1.$$

証明. 変数を実部と虚部にわけて $z = x + yi$, $w = u + vi$ のように表す. このとき, 関係式 $f(x + yi) = u + vi$ が定める 2 次元写像 $F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は, f の正則性より C^1 級である. いま $z_0 = x_0 + y_0 i$ とおくと, コーシー・リーマンの方程式より

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Big|_{z=z_0} = \det \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \Big|_{z=z_0} = u_x^2 + v_x^2 \Big|_{z=z_0} = |u_x + v_x i|^2 \Big|_{z=z_0} = |f'(z_0)|^2 \neq 0$$

であるから, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (すなわち $z = z_0$) において逆関数定理 (実 2 次元版) を適用できる. (1) ~ (3) を適宜複素数の言葉に読み替えれば, ある $r > 0$ が存在し, $D(w_0, r)$ 上で定義された C^1 関数 $g: D(w_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$, $g(u + vi) = x + yi$ が存在し, (1)' ~ (3)' を満たすことがわかった.

(4)' を示そう. $g(u + vi) = x + yi$ についてヤコビ行列を計算すると, 逆関数定理 (実 2 次元版) の (4) より

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{u_x^2 + v_x^2} \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}$$

であるから, コーシー・リーマンの関係式 $x_u = y_v$, $x_v = -y_u$ を満たしている. g は C^1 なので, 正則である. また,

$$\frac{dg}{dw} = \frac{\partial g}{\partial u} = x_u + y_u i = \frac{1}{u_x^2 + v_x^2} (u_x - v_x i) = \frac{1}{u_x + v_x i} = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{df/dz}.$$

■

$w^2 = z$ の性質

$z = w^2 = f(w)$ とおき, $w \neq 0$ を仮定しよう. このとき $z \neq 0$ であり, $z = re^{i\theta}$ ($r > 0, 0 \leq \theta < \pi$) とおけば $w = \pm \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ と表される. この二つの w は複素べきの意味で $z^{1/2} = e^{(\log z)/2}$ と一致するので, $w = \sqrt{z}$ と書いてもよいだろう.

さて $z = w^2$ より, $\frac{dz}{dw} = 2w \neq 0$ であるから, $w_0 \neq 0$ のとき逆関数定理が適用できて, $z_0 = w_0^2$ を含む開円板上で定義された $z = f(w)$ の逆関数 $w = g_1(z)$ が存在する.

一方 $-w_0$ についても, 上と同じ $z_0 = (-w_0)^2$ を含む開円板上で定義された f の逆関数 $w = g_2(z)$ が存在し, $g_2(z) = -g_1(z)$ を満たす.

そこで、 $z_0 = 1$ として、上のようにして得られる g_1 と g_2 (ただし $g_1(1) = 1$, $g_2(1) = -1$) を単位円 $C = C(0, 1)$ に沿って解析接続してみよう. すると下図のように、 z が C を 1 周するごとに $g_1(z)$ の像は上半円に沿って $g_2(z)$ の像に一致する. さらに z が C をもう 1 周すると、 $g_2(z)$ の像は上半円に沿って $g_1(z)$ に再びもどる.

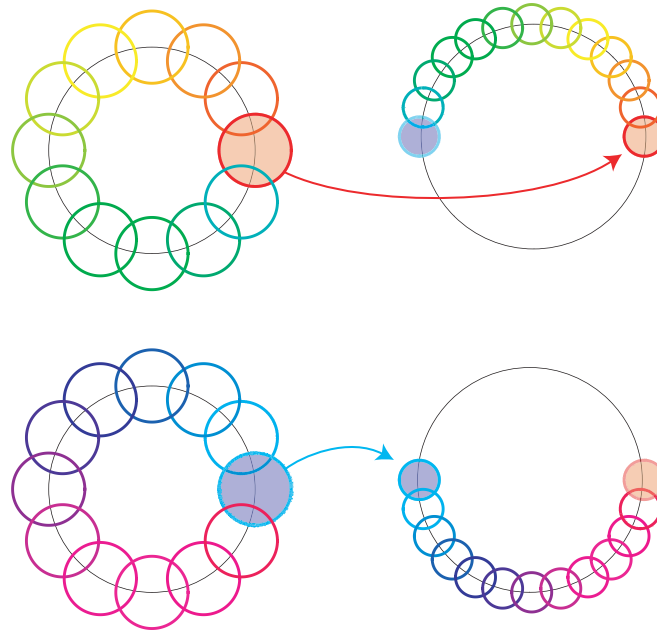
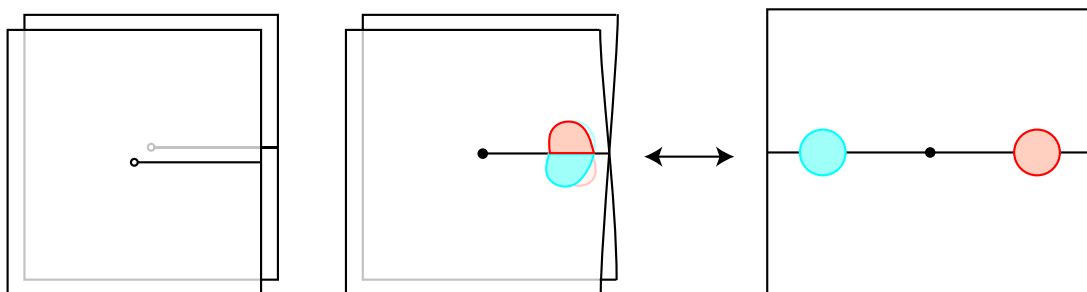


図 1: 左が z 平面の単位円で右が w 平面の単位円. 赤が g_1 ($g_1(1) = 1$ をみたとす) の作用で、水色 (シアン) が g_2 ($g_2(1) = -1$ をみたとす) の作用. これらは互いに解析接続される. ちなみに左列の輪 (わ) は本当の円を描いているが、右列の輪たちは (Mathematica に描かせた) その平方根による像なので、本当の円ではない. ほとんどゆがみない円に見えるのは、写像の「等角性」ゆえである.

こうして見ていると、「 z 平面 2 枚分」が「 w 平面 1 枚分」に対応するように思えてくる. もうすこし数学的に、

$$S = (z \text{ 平面のコピー 2 枚を切り貼りして得られる位相空間})$$

をうまく構成して、 w 平面と 1 対 1 かつ連続に対応するようにしてみよう.⁴



まず z 平面から原点を除いたもの $\mathbb{C}_z^* := \mathbb{C} - \{0\}$ のコピーを 2 つ用意する. 次にそれぞれの正の実軸部分に切れ目を入れておいて、その上部と下部を互い違いに貼り合わせる. こうして得ら

⁴ここでは直感的な構成に留めているが、実際には同値関係による商位相を用いたり、ワイエルシュトラス流に「関数要素の貼り合わせ」によって位相空間を構成する必要がある.

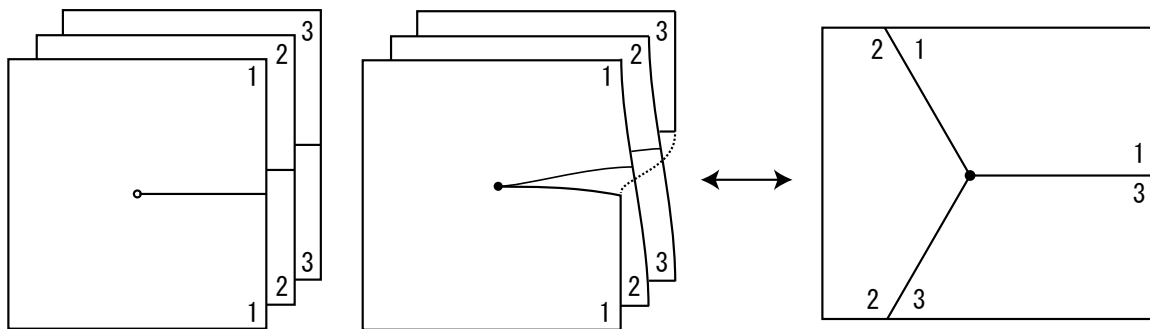
れる位相空間を S^* としよう.⁵そうすると, 関数 f (あるいは局所的な逆関数 g_1 と g_2 の解析接続) が S^* と w 平面から原点を除いた $\mathbb{C}_w^*$ への連続な全単射を与える.

最後に, $w = 0$ に対応する点として, S^* の中央の「穴」に 1 点「 $z = 0$ 」を埋めこむ.

このようにして得られる位相空間 S を関数 $w = \sqrt{z}$ のリーマン面 (Riemann surface) とよぶ. また, 最後に加えた 1 点「 $z = 0$ 」は S の分岐点 (branched point) と呼ばれる. さらにもとの $\mathbb{C}_z^*$ のコピーはしばしば S のブランチ (branch), もしくは分枝 (ぶんし), もしくは葉 (よう) とも呼ばれる.

注意. 一般に多価関数 $w = g(z)$ にたいし, 位相空間 S が「 g のリーマン面」であるとは, z 平面のコピーを切り貼りして得られる位相空間であって, g によって w 平面と自然な全単射をもつことをいう.

$w = z^{1/n}$ のリーマン面. 多価関数 $w = z^{1/n}$ は z にたいして $z = w^n =: f(w)$ を満たす (重複度込みで) n 個の w を対応させるものである. (ただし重複は $z = 0$ のときのみ. このリーマン面は平方根のリーマン面と同じアイデアで構成できる. すなわち, n 個の w と 1 対 1 対応できるように n 枚の z 平面のコピーを準備し, 正の実軸で切れ目を入れた後, 互い違いに貼り合わせていき, 原点は n 個のコピーをまとめて 1 点として留め合わせる.



$w = \log z$ のリーマン面. 多価関数 $w = \log z$ は $z \neq 0$ にたいして $z = e^w =: f(w)$ を満たす可算無限個の w を対応させるものである. 可算無限個の w に 1 対 1 対応するには, 可算無限個の z 平面 (から原点を除いたもの) のコピーが必要となる. また,

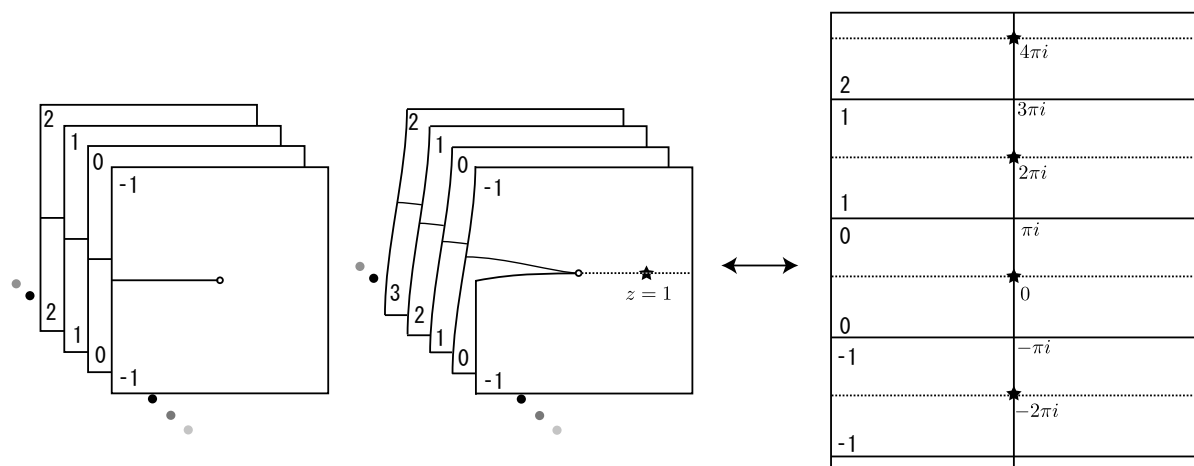
$$w \in \mathbb{C} \implies \frac{df}{dw} = \frac{d(e^w)}{dw} = e^w \neq 0$$

が成り立つので, 逆関数定理より局所的には正則な逆関数が存在する. 局所的な逆関数を解析接続することで, コピーの貼り合わせ方が決まるのである.

たとえば z 平面のコピーを整数 $k \in \mathbb{Z}$ で番号付けしておき, つぎに k 番目のコピーにおける $z = 1$ を $w = 2k\pi i$ に写す局所的な $f = \exp$ の逆写像 g_k を考える. これを解析接続していくと, g_k は $\mathbb{C}^*$ からさらに負の実軸を除いた $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ を w 平面内の帯状領域 $S_k := \{w \in \mathbb{C} \mid (2k-1)\pi < \operatorname{Im} w < (2k+1)\pi\}$ に全単射で対応させる.

負の実軸にあたる部分を g_k が $g_{k\pm 1}$ に解析接続されるように切り貼りすれば, 対数関数 $w = \log z$ のリーマン面が得られるのである.

⁵絵では切り貼りした部分が交差しているように見えるが, 頭の中では交差しておらず, 別の点 (線) と考えるべし.



対数関数の正則関数としての性質. 対数関数 $w = \log z$ を普通の 1 価関数として扱う方法を考えよう.⁶

先ほどリーマン面の構成に用いた $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ の k 番目のコピーを選ぶと, $f = \exp$ の逆関数 $g_k: \mathbb{C} - (-\infty, 0] \rightarrow S_k$ が全単射で定まっている. しかも逆写像定理より,

$$\frac{df}{dw} \cdot \frac{dg_k}{dz} = 1 \iff \frac{dg_k}{dz} = \frac{1}{df/dw} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

すなわち g_k は正則であり, かつ関数 $1/z$ の原始関数である. (この性質はコピーの番号 k に依存しない.) とくに, $1/z$ は単連結領域 $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ 上で正則であるから, 積分を用いて

$$g_k(z) - g_k(1) = \int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta \iff g_k(z) = \int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta + 2k\pi i$$

を得る. ただし, 式の中の積分路は 1 と z を結ぶ $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ 内の任意の経路である. また, $\text{Log } z$ の定義より $g_0(z) = \text{Log } z$ であるから, $g_k(z) = \text{Log } z + 2k\pi i$ と表される.

対数関数を正則関数として扱いたいときには, このようにリーマン面の適当なブランチに制限するとよい.

応用: ベキ級数展開. 応用として, 対数関数のベキ級数展開

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \quad (|z| < 1)$$

を示そう.

いま $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ 内には中心 1 半径 1 の開円板 $D(1, 1)$ が含まれるから, $|z| < 1$ のとき

$$\text{Log}(1+z) = \int_1^{1+z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

である. (ただし, 積分路は 1 から $1+z$ までを直線で結ぶことにする.) そこで $1+\eta = \zeta$ とおくと, $|z| < 1$ のとき

$$\text{Log}(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+\eta} d\eta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta)^n d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z (-\eta)^n d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$$

⁶たとえば主値 $w = \text{Log } z$ を考えればよいが, 連続性や正則性に関する議論は不十分であった.

とできる. 途中の $=_*$ の部分では, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-\eta)^n$ が $|\eta| < 1$ のとき広義一様収束する, という性質を用いた.

このべき級数展開は $|z| < 1$ で広義一様収束することに注意しておこう.

応用の応用: $(1+z)^\alpha$ のべき級数展開. $|z| < 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ にたいし,

$$(1+z)^\alpha := e^{\alpha \text{Log}(1+z)}$$

と定める.⁷ このとき,

$$e^{\alpha \text{Log}(1+z)} = e^{\alpha(z - z^2/2 + z^3/3 - \dots)} = 1 + \alpha\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots\right) + \frac{\alpha^2\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots\right)^2}{2!} + \dots$$

より, 2 次までの展開として

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots$$

を得る. 実用上はここまでで十分有用であるが, 一般に $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ とおくとき, $|z| < 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ にたいし

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

が成り立つことが知られている.

レポート問題 (最終回)

締切りは 1 月 10 日 (金) の講義開始時とします.

問題 11-1 (ルーシェの定理の応用). ルーシェの定理を用いて代数学の基本定理を証明せよ.

問題 11-2 (やや難: リーマン面.) 多価関数 $w = \sqrt{z^2 - 1}$ のリーマン面 S を構成せよ. (直感的な説明だけでもかまわないが, その S と w 平面の間に全単射が存在することは説明すること.) (HINT: z 平面のコピー 2 枚を準備し, それぞれ実軸の $|x| > 1$ にあたる部分に切れ目を入れて, 互い違いに貼り合わせる.)

⁷一般に複素べきは $(1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)}$ と定義されて, 多価であるが, ここではその「主値」を考えているのである.

リーマン球面とメビウス変換

配布日：January 10, 2014 Version：1.1

前回 (12/20) のまとめと補足

複素平面に「無限遠点」を付け加えた集合を「リーマン球面」として定式化する.

リーマン球面. XYZ 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面を

$$S := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$$

とし, 「北極」に当たる点 $(0, 0, 1)$ を N で表す.

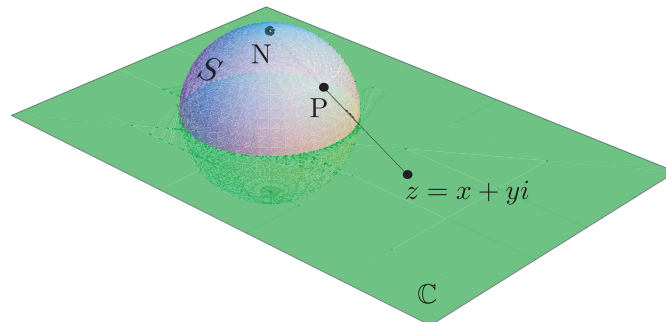
また, XY 平面 $Z = 0$ にあたる集合

$$\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

を複素平面 (すなわち複素数全体の集合)

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

と同一視する. 具体的には, 点 $(x, y, 0)$ は $x + yi$ の別名であり, XY 平面もまた集合 $\mathbb{C}$ の別名と解釈する. これは, どちらかが実名でもうひとつが仮名, というわけではない. 与えられたひとつのモノに, ふたつの対等な名前 (記号) が割り当てられているのである.



このとき, 北極点 N から出て $x + yi \longleftrightarrow (x, y, 0)$ を通る直線は, $S - N$ 上の 1 点と必ず交差する. その点を $P = (X, Y, Z)$ と表そう. これによって,

$$\begin{aligned} P = (X, Y, Z) &\longleftrightarrow x + yi \\ S - N &\longleftrightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

という 1 対 1 かつ連続な対応が得られる. もっと具体的に, 簡単な幾何学的な考察から, 次がわかる:

命題 11-1. 上のようにして $z = x + yi$ から得られる点 $P = (X, Y, Z)$ は,

$$X = \frac{2x}{1 + |z|^2}, \quad Y = \frac{2y}{1 + |z|^2}, \quad Z = \frac{-1 + |z|^2}{1 + |z|^2}$$

を満たす. また, 次が成り立つ:

$$x = \frac{X}{1 - Z}, \quad y = \frac{Y}{1 - Z}$$

以下, $P = (X, Y, Z) \in S - N$ は $z = x + yi \in \mathbb{C}$ の別名と考え, 集合 $S - N$ と $\mathbb{C}$ も互いに別名であると考えよう.

いま, $|z| \rightarrow \infty$ としてみると, z に対応する球面上の点 P は ($|z| \rightarrow \infty$ の発散の仕方に依存せず) N に近づく. その意味で, 点 N を無限遠点 (point at infinity) とよび, ∞ で表す.¹ すなわち,

$$\begin{aligned} N = (0, 0, 1) &\longleftrightarrow \infty \\ S - N &\longleftrightarrow \mathbb{C} \\ S &\longleftrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

という「別名」の関係がある. この集合 S すなわち別名 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をリーマン球面 (the Riemann sphere) と呼び, $\hat{\mathbb{C}}$ (シーハット) で表す.²

距離空間としての $\hat{\mathbb{C}}$. リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ に, 次の距離を導入しよう. 単位球面 S には, $\mathbb{R}^3$ でのユークリッド距離 (直線距離) を制限することで, 自然な距離 (弦距離) が入る. 命題 11-1 を用いて, これを $\hat{\mathbb{C}}$ の言葉で表現すると, 次のようになる: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ のとき,

$$d(z_1, z_2) := \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}, \quad d(z_1, \infty) := \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}.$$

さらに $d(\infty, \infty) := 0$ である. この距離について $\hat{\mathbb{C}}$ は距離空間となり, 位相空間とみなせる. 具体的には, $z \in \hat{\mathbb{C}}$ 中心半径 $r > 0$ の開円板を

$$B(z, r) := \{w \in \hat{\mathbb{C}} \mid d(w, z) < r\}$$

と定義することで, 「内点」「開集合」「開集合系」の概念が定義できる.³

練習問題. 次を示せ.

- (1) $z_n, \alpha \in \mathbb{C}$, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\|z_n - \alpha\| \rightarrow 0 \iff d(z_n, \alpha) \rightarrow 0$.
- (2) $U \subset \mathbb{C}$ にたいし, U は $\mathbb{C}$ の開集合 $\iff U$ は距離空間 $(\hat{\mathbb{C}}, d)$ の開集合.
- (3) $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ が ∞ を含む開集合であれば, ある $R > 0$ が存在して, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subset U$.

∞ を含む計算. $z_n, \alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ かつ $d(z_n, \alpha) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) のとき, 「点列 $\{z_n\}$ は α に収束する」といい, $z_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) もしくは $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ と表す.

いま $z \in \mathbb{C}$ を任意に固定し, $|w_n| \rightarrow \infty$ を満たす点列 $\{w_n\}$ を任意にとると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z + w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n + z) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

が成り立つ. この式を習慣的に

$$z + \infty = \infty + z = \infty$$

のように書き表すことがある. 同様に極限計算として正当化できる「 ∞ の計算」をまとめておこう:

- 和 (差): 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$z + \infty = \infty + z = \infty$$

¹ ∞ は無限遠点, あくまで「点」であって, 無限大ではない.

² 次元射影直線とも呼ばれ, そのときは $\mathbf{P}^1$ と表す.

³ 実はコンパクトかつ完備 (=コーシー列が収束する) な距離空間となる.

- 積と商：任意の 0 でない複素数 z に対し,

$$\infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad \frac{z}{0} = \infty.$$

- 次のものはとりあえず考えない.

$$\infty \cdot \infty, \infty \pm \infty, \infty/\infty, 0 \cdot \infty.$$

円と直線.

命題 11-2. $\mathbb{C}$ 上の円または直線の方程式は次で表される：

$$\begin{cases} \alpha z \bar{z} + \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0 \\ \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, |\beta|^2 - \alpha\gamma > 0 \end{cases} \quad (*)$$

証明. $\alpha \neq 0$ のとき, 式変形により

$$(*) \iff \left| z + \frac{\beta}{\alpha} \right|^2 = \frac{|\beta|^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2} (> 0)$$

がわかる. これは $-\beta/\alpha$ 中心, 半径 $\sqrt{(|\beta|^2 - \alpha\gamma)/\alpha^2}$ の円である. 逆に z_0 中心半径 $r > 0$ の円の方程式は

$$|z - z_0| = r \iff (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \iff z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + z_0 \bar{z}_0 - r^2 = 0$$

となる. いま $\alpha = 1, \beta = -z_0, \gamma = z_0 \bar{z}_0 - r^2$ とおけば, $|\beta|^2 - \alpha\gamma = r^2 > 0$ となり $(*)$ の形である. つぎに $\alpha = 0$ のとき, $\beta = p + qi$ とおくと

$$(*) \iff \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0 \iff 2\operatorname{Re}(\bar{\beta} z) + \gamma = 0 \iff 2(px + qy) + \gamma = 0$$

いま $|\beta|^2 - \alpha\gamma = |\beta|^2 > 0$ より, $(p, q) \neq (0, 0)$. よって $(*)$ は直線の方程式となる.

逆に直線 $ax + by + c = 0$ (ただし $(a, b) \neq (0, 0)$) は $\alpha = 0, \beta = (a + bi)/2, \gamma = c$ とすると $|\beta|^2 - \alpha\gamma = (a^2 + b^2)/4 > 0$ を満たし, 上の式変形を逆にたどることにより $(*)$ の形となる. ■

命題 11-3. $z \in \mathbb{C}$ が $(*)$ を満たすことと, S 上の対応する点 (X, Y, Z) が次の平面 Π の方程式を満たすことは同値である：

$$\Pi: 2pX + 2qY + (\alpha - \gamma)Z + (\alpha + \gamma) = 0. \quad (**)$$

ただし $\beta = p + qi$ であり,

$$|\beta|^2 - \alpha\gamma > 0 \iff (\text{球面 } S \text{ の中心 } (0, 0, 0) \text{ と } \Pi \text{ の距離}) < 1$$

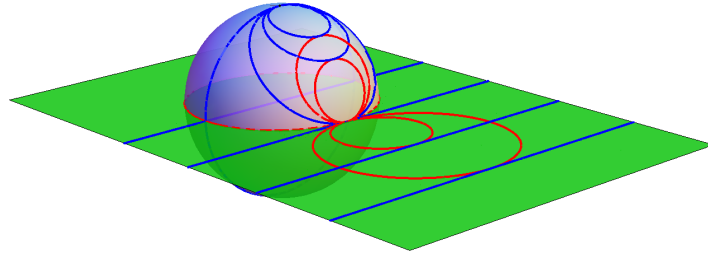
証明. 命題 11-1 より $z = \frac{X + Yi}{1 - Z}$. これを $(*)$ に代入し $X^2 + Y^2 = 1 - Z^2$ 関係式を用いると, $(**)$ の式に変形できる. また, 点と平面の距離の公式より,

$$((0, 0, 0) \text{ と } \Pi \text{ の距離}) < 1 \iff \frac{|0 + 0 + 0 + \alpha + \gamma|}{\sqrt{(2p)^2 + (2q)^2 + (\alpha - \gamma)^2}} < 1 \iff (\alpha + \gamma)^2 < 4\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2$$

であり, 最後の式を整理して $4(|\beta|^2 - \alpha\gamma) > 0$ となる. ■

これより, $\mathbb{C}$ 上の円または直線は $\mathbb{R}^3$ の中の平面 Π と $S - N$ との交わりとして表現できる. 球面と平面が交差する部分は円であり, $\alpha = 0 \iff N \in \Pi$ であることから, 次の定理が導かれる：

命題 11-4 (円と直線). $\mathbb{C}$ 上の円は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の ∞ を通らない円であり, $\mathbb{C}$ 上の直線は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の ∞ を通る円である. また, その逆も成り立つ.



メビウス変換.

定義 (メビウス変換). $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ のとき,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

の形の関数を**メビウス変換** (Möbius transformation) もしくは**1次分数変換** (fractional linear transformation) とよぶ.

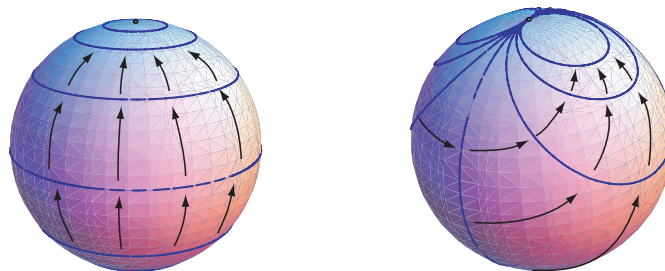
位相空間 X にたいし, 写像 $f: X \rightarrow f(X) = Y$ が**同相写像** (homeomorphism, topological map) であるとは, f は全単射かつ f と f^{-1} が連続であることをいうのであった.

定理 11-5 (メビウス変換の性質 1). メビウス変換 $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ は $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ の上への同相写像を与える. ただし

$$T(\infty) = \frac{a}{c}, \quad T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

と定める.

注意. $c = 0$ のとき, $T(z) = \alpha z + \beta$ ($\alpha \neq 0$) の形であり, $T(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ かつ $T(\infty) = \infty$ である. このタイプのメビウス変換は**複素アファイン変換** (complex affine transformation) とよばれる.⁴

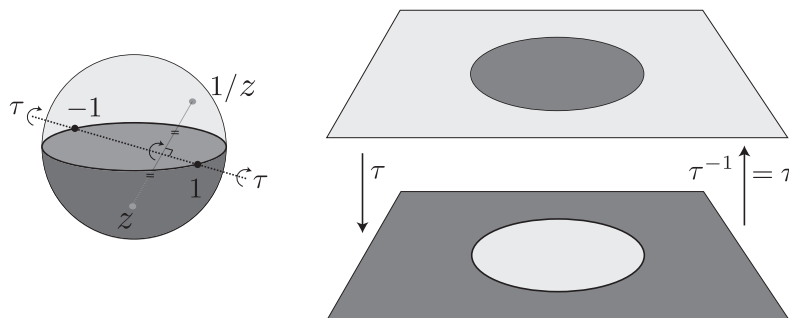


具体例 1 (拡大). 証明の前にメビウス変換の典型例をみて, T が $\hat{\mathbb{C}}$ を自身へ同相に写す様子を把握しておこう.

⁴ $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ の正則な全単射は複素アファイン変換に限ることが知られている.

まず $T(z) = 2z = \frac{2z+0}{0 \cdot z+1}$ のとき, 複素平面全体が無限遠点に近づくように移動する (上図の左). ただし $0, \infty$ は動かない. (いわゆる固定点.)

具体例 2 (平行移動). $T(z) = z+1 = \frac{z+1}{0 \cdot z+1}$ のとき, 複素平面全体が一定方向にずれる (上図の右). ただし ∞ は動かない.



具体例 3 (反転). $\tau(z) = \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z+1}{z+0}$ のとき. 上のふたつの例は複素平面上で見ると T の作用がわかりやすいが, こちらはリーマン球面で見たとほうがよい. じつは, τ は $z = \pm 1$ にあたる $(\pm 1, 0, 0) \in S$ を通る直線を軸に, 180 度回転させる作用になっているのである.⁵

証明 (命題 11-3, スケッチ). $w = T(z) = (az+b)/(cz+d)$ にたいし, $z = S(w) = (dw-b)/(-cw+a)$ とおく. ただし $S(\infty) = -d/c$, $S(a/c) = \infty$ とする.

このとき, 次が確認できる:

$$(1) \forall w \in \hat{\mathbb{C}}, T \circ S(w) = w \quad (2) \forall z \in \hat{\mathbb{C}}, S \circ T(z) = z \quad (3) T, S \text{ は } \hat{\mathbb{C}} \text{ 上で連続}$$

これより $S = T^{-1}$ であり, T は同相写像である. ■

円円対応. メビウス変換のもっとも重要な性質が, つぎの「円円対応」と呼ばれるものである:

定理 11-6 (円円対応). メビウス変換は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円に写す.

証明. $w = T(z) = (az+b)/(cz+d)$ とする.

$c = 0$ のとき, $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. すなわち

$$z \mapsto \frac{a}{d}z =: z_1 \mapsto z_1 + \frac{b}{d} = w.$$

一方 $c \neq 0$ のとき, $w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{z+d/c}$ と変形できるので,

$$z \mapsto z + \frac{d}{c} =: z_1 \mapsto \frac{1}{z_1} =: z_2 \mapsto \frac{bc-ad}{c^2} \cdot z_2 =: z_3 \mapsto \frac{a}{c} + z_3 = w.$$

いずれの場合も, T は次の 3 つの形のメビウス変換の合成で表される:

$$(1) z \mapsto \lambda z \quad (\lambda \neq 0) \quad (2) z \mapsto z + \ell \quad (\ell \neq 0) \quad (3) z \mapsto \frac{1}{z}$$

すなわち, これら 3 つのメビウス変換について「円円対応」を示せばよい.

(1) のとき, $w = T(z) = \lambda z$ ($\lambda \neq 0$) とおく. (*) で表される $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円 (すなわち $\mathbb{C}$ 上の円または直線) があるとき, (*) の式に $\lambda \bar{\lambda}$ をかけて整理すると

$$\alpha(\lambda z)(\overline{\lambda z}) + \beta \bar{\lambda} \lambda z + \beta \lambda \bar{\lambda} \bar{z} + \lambda \bar{\lambda} \gamma = 0 \iff \alpha w \bar{w} + \beta \bar{\lambda} w + \beta \lambda \bar{w} + |\lambda|^2 \gamma = 0$$

⁵ z と $1/z$ に対応する S 上の 2 点を P と P' とするとき, 線分 PP' の中点は回転軸上にあり, かつ PP' は回転軸と直交することがわかる.

となる. いま $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta\lambda$, $\gamma' = |\lambda|^2\gamma$ とおくと, $|\beta'|^2 - \alpha'\gamma' = |\lambda|^2(|\beta|^2 - \alpha\gamma) > 0$ となるので, (*) は $w = T(z)$ が

$$\begin{cases} \alpha' w \bar{w} + \bar{\beta}' w + \beta' \bar{w} + \gamma' = 0 \\ \alpha', \gamma' \in \mathbb{R}, \beta' \in \mathbb{C}, |\beta'|^2 - \alpha'\gamma' > 0 \end{cases} \quad (*)'$$

を満たすことと同値である. よって $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円に写ることがわかった.

(2), (3) の場合も同様である. ■

注意. 一般に正則関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z)$ (D は $\mathbb{C}$ 内の領域) が $z_0 \in \mathbb{C}$ において $A_0 := f'(z_0) \neq 0$ を満たすとき, テイラー展開から $z \approx z_0$ のとき

$$f(z) - f(z_0) = A_0(z - z_0)(1 + o(|z - z_0|)) \iff w - w_0 \approx A_0(z - z_0)$$

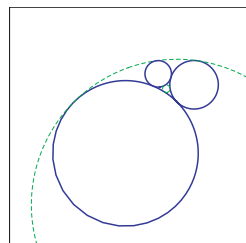
が成り立つ. これは z_0 の十分近くでは f の作用がほぼ定数 A_0 倍になっていることを意味する. $A_0 = |A_0|e^{i \arg A_0}$ と表すと, これは f の $z = z_0$ 付近での作用が $|A_0|$ 倍に拡大と $\arg A_0$ 回転という相似変換になっていることを意味する.

よって, もし $z = z_0$ で交差する 2 曲線があると, その f による像として得られる 2 曲線も $w = w_0$ で同じ角度で交差する. とくに, $z = z_0$ で互いに接する 2 曲線の f による像も $w = w_0$ で互いに接している. このことを念頭に置きつつ, 次のような応用を考えよう.

応用. 次の定理を証明しよう:

定理 11-7.

平面内に互いに外接する 3 つの円 C_1, C_2, C_3 がある. このとき, この 3 円に同時に外接する円 C_0 (それは C_1, C_2, C_3 に囲まれる部分に存在する) と, この 3 円が同時に内接する円 C_4 (それは C_1, C_2, C_3 を囲む) が存在することを示せ.



証明. 複素平面上で考えよう. C_1 と C_2 の接点を α とし, メビウス変換 $T(z) = \frac{1}{z - \alpha}$ による 3 円の像をそれぞれ $C'_k = T(C_k)$ ($k = 1, 2, 3$) とおく.

このとき C'_1, C'_2 は ∞ を通る $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円なので, $\mathbb{C}$ 上の 2 直線である. また, $\mathbb{C}$ では交点を持たないから平行な 2 直線となる. よって C'_3 はこの 2 直線に同時に接する (はさまれた) 円となる.

あとは図のように円 C'_0, C'_4 をとれば, 逆像 $T^{-1}(C'_0)$ と $T^{-1}(C'_4)$ が求めるふたつの円となる. ($T(\infty) = 0$ より, C'_0 か C'_4 のいずれか一方が 0 を含むはずである. その逆像が題意の C_4 を与える.) ■

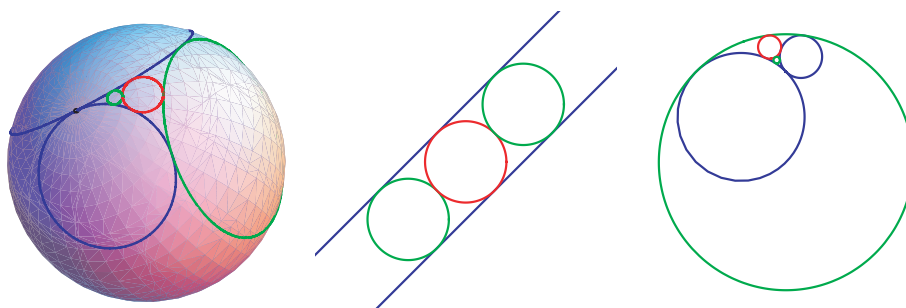


図 1: 円 C_1 と C_2 を青で. 円 C_3 を赤で描いて区別してある.

有理形関数と有理関数・正規族

配布日: January 24, 2014 Version: 1.1

前回 (1/10) のまとめと補足

有理形関数の零点と極. D を $\mathbb{C}$ 内の領域とし, f を D 上の有理形関数とする. (すなわち, f は D から極を除いた領域上で正則.) 関数 f の, 極と零点の周りでの作用を比較してみよう. 結論から言うと, これらをリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ で観測したとき, 両者はまったく同じようにみえるのである.

零点: いま $\alpha \in D$ を $w = f(z)$ の零点とする. すなわち, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し,

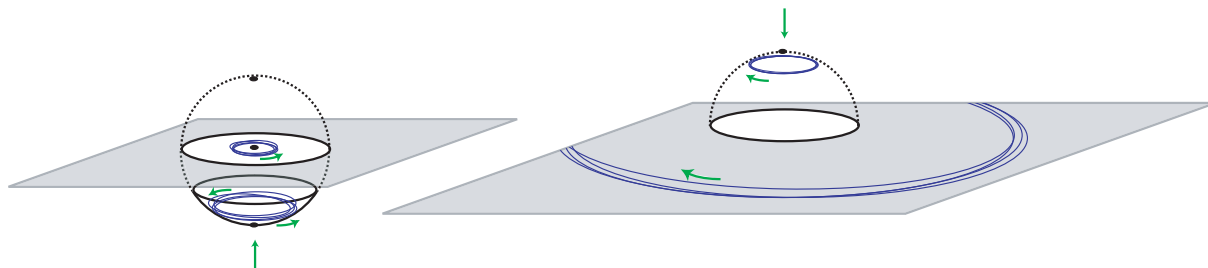
$$\begin{aligned} w = f(z) &= a_k(z - \alpha)^k + a_{k+1}(z - \alpha)^{k+1} + \cdots \\ &= a_k(z - \alpha)^k \left(1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}(z - \alpha) + \cdots \right) \end{aligned}$$

(ただし $a_k \neq 0$) と書ける. いま $\epsilon > 0$ を十分小さくとして固定し, $z = \alpha + \epsilon e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) を代入して変形すると

$$w = f(z) = a_k \epsilon^k e^{ikt} \{1 + O(\epsilon)\} \approx a_k \epsilon^k e^{ikt}$$

の形で表される.¹これから, z が α のまわりを 1 周左回りすると, $f(z)$ は原点 0 のまわりを k 周左回りすることがわかる.

これをリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{R}^3$ 中の単位球面の別名) で見てみよう. 点 w が $\mathbb{C}$ の原点 0 のまわりを k 周左回りするとき, $\hat{\mathbb{C}}$ では「外から見ると」(すなわち, 単位球面の外から原点に対応する点に垂直に「突き刺さる」法線ベクトルについて) k 周右回りしている.



極: 次に $\alpha \in D$ を $w = f(z)$ の極とする. すなわち, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$\begin{aligned} w = f(z) &= \frac{a_{-k}}{(z - \alpha)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - \alpha)^{k-1}} + \cdots + a_0 + \cdots \\ &= \frac{a_{-k}}{(z - \alpha)^k} \left(1 + \frac{a_{-k+1}}{a_{-k}}(z - \alpha) + \cdots \right) \end{aligned}$$

(ただし $a_{-k} \neq 0$) と書ける. いま $\epsilon > 0$ を十分小さくとして固定し, $z = \alpha + \epsilon e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) を代入して変形すると

$$w = f(z) = \frac{a_{-k}}{\epsilon^k} e^{-ikt} \{1 + O(\epsilon)\} \approx \frac{a_{-k}}{\epsilon^k} \cdot e^{-ikt}$$

の形で表される.²ここで a_{-k}/ϵ^k は非常に大きな絶対値をもつ複素数であり, e^{-ikt} は t の増加にあわせて単位円を右回りすることに注意しよう. よって z が α のまわりを 1 周左回りすると, $w = f(z) \in \mathbb{C}$ は原点中心の非常に大きな半径の円の周りを k 周右回りすることがわかる.

¹これは $f(z)$ と $a_k \epsilon^k e^{ikt}$ の相対誤差が $O(\epsilon)$ 程度だということである.

²これも $f(z)$ と $(a_{-k}/\epsilon^k) \cdot e^{-ikt}$ の相対誤差が $O(\epsilon)$ 程度だということ.

これをリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の「外から見ると」(すなわち, 単位球面の外から ∞ に対応する点に垂直に「突き刺さる」法線ベクトルについて) k 周右回りしている. すなわち, 零点で起きることと状況が一致するのである.

実際, リーマン球面の反転 $\tau(z) = 1/z$ を合成すると,³

$$\begin{aligned}\tau \circ f(z) &= \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-\alpha)^k}{a_{-k}} \left(1 + \frac{a_{-k+1}}{a_{-k}}(z-\alpha) + \cdots \right)^{-1} \\ &= \frac{(z-\alpha)^k}{a_{-k}} \left(1 - \frac{a_{-k+1}}{a_{-k}}(z-\alpha) + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{a_{-k}}(z-\alpha)^k - \frac{a_{-k+1}}{a_{-k}^2}(z-\alpha)^{k+1} + \cdots\end{aligned}$$

となり, 本当に k 位の零点と同じ形をしていることがわかる.

標語的に言えば, 「リーマン球面で f の像を観測する限りでは, k 位の極も k 位の零点も同じように見える」のである. そこで, 「正則関数」の概念を拡張して, 無限遠点での正則性も記述できるようにしよう.

正則関数から正則「写像」へ. D を $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域 (すなわち連結開集合) とする. (したがって $\infty \in D$ もありえる.)

写像 $f: D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が**正則写像** (holomorphic map) であるとは, 以下を満たすときをいう: 任意の $\alpha \in D$ について,

- $\alpha \in \mathbb{C}$ かつ $f(\alpha) \in \mathbb{C}$ のとき, α のある近傍で f は正則関数.
- $\alpha \in \mathbb{C}$ かつ $f(\alpha) = \infty$ のとき, α のある近傍で $\tau \circ f$ は正則関数.
- $\alpha = \infty$ かつ $f(\alpha) \in \mathbb{C}$ のとき, $\tau(\alpha) = 0$ のある近傍で $f \circ \tau$ は正則関数.
- $\alpha = \infty$ かつ $f(\alpha) = \infty$ のとき, $\tau(\alpha) = 0$ のある近傍で $\tau \circ f \circ \tau$ は正則関数.

例 1. $D \subset \mathbb{C}$ とする. 関数 f が D 上有理形であるとき, 極 $\alpha \in D$ それぞれについて $f(\alpha) = \infty$ とおくと, 正則「写像」 $f: D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が定まる. 逆に, 正則「写像」 $f: D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ にたいし, $f: D - f^{-1}(\{\infty\}) \rightarrow \mathbb{C}$ は有理形関数である.

例 2. メビウス変換 $T: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ ($ad-bc \neq 0$) は正則な全単射である. $\hat{\mathbb{C}}$ 上の正則な全単射は**自己同型** (automorphism) とも呼ばれる.

例 3. 有理式

$$R(z) = \frac{a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0}$$

(ただし, 分子・分母は共通因数をもたない) の形の関数を**有理関数** (rational function) とよぶ. 有理関数は正則写像 $R: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を定める. これを**有理写像** (rational map) と呼ぶこともある.⁴

例 3 の例: $R(z) = \frac{3z^5}{z^2-1}$ とする. このとき, 極および無限遠点での値を $R(\pm 1) = \infty$, $R(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z^3}{1-1/z^2} = \infty$ と値を定めれば, 正則写像 $R: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が定まる.

³下の式変形では $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots$ を用いている.

⁴定数写像 (定値写像) も有理写像のひとつとみなす. 例えば $R(z) \equiv \infty$ も有理写像である.

定理 12-1.

- (1) $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が正則 $\iff f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ は有理写像.
- (2) $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が正則な全単射 $\iff f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ はメビウス変換.
- (3) $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ が正則 $\implies f$ は定数写像.

証明のスケッチ. (3) から示す. 正則写像 f は定義より連続であるから, $f(\hat{\mathbb{C}})$ は「コンパクト集合の連続写像による像」となり, $\mathbb{C}$ 内のコンパクト集合だとわかる. とくに $f(\mathbb{C})$ も $\mathbb{C}$ の有界集合であるから, リュービルの定理より $f|_{\mathbb{C}}$ は定数である. 連続性より f も定数である.

(1) の $\Leftarrow$ は有理関数の式の形と正則写像の定義からわかる. $\Rightarrow$ は次のように示す: まず, 定数写像 (定値写像) でない場合を考えれば十分である. また, 必要なら $1/f(z)$ を考えることで, ∞ は極ではないと仮定しておく. すなわち $f(\infty) \in \mathbb{C}$ である. f の極の集合 P が有限集合であることを示そう. そうでなければ, $\hat{\mathbb{C}}$ はコンパクトなので P の集積点 z_0 が存在する. $z_0 = \infty$ の場合は, $g = \tau \circ f \circ \tau$ を考えると g は原点の周りで正則である. よって一致の定理より, 原点のまわりで定数 $g \equiv 0$ となる. これは矛盾である. $z_0 \in \mathbb{C}$ の場合も, 一致の定理より $g = \tau \circ f$ が z_0 の周りで定数 $g \equiv 0$ となり, 矛盾である.

さて有限個の極を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とおき, α_j の位数を k_j とおくと, ローラン展開

$$f(z) = \frac{a_{-k_j}}{(z - \alpha_j)^{k_j}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - \alpha_j} + a_0 + a_1(z - \alpha_j) + \dots$$

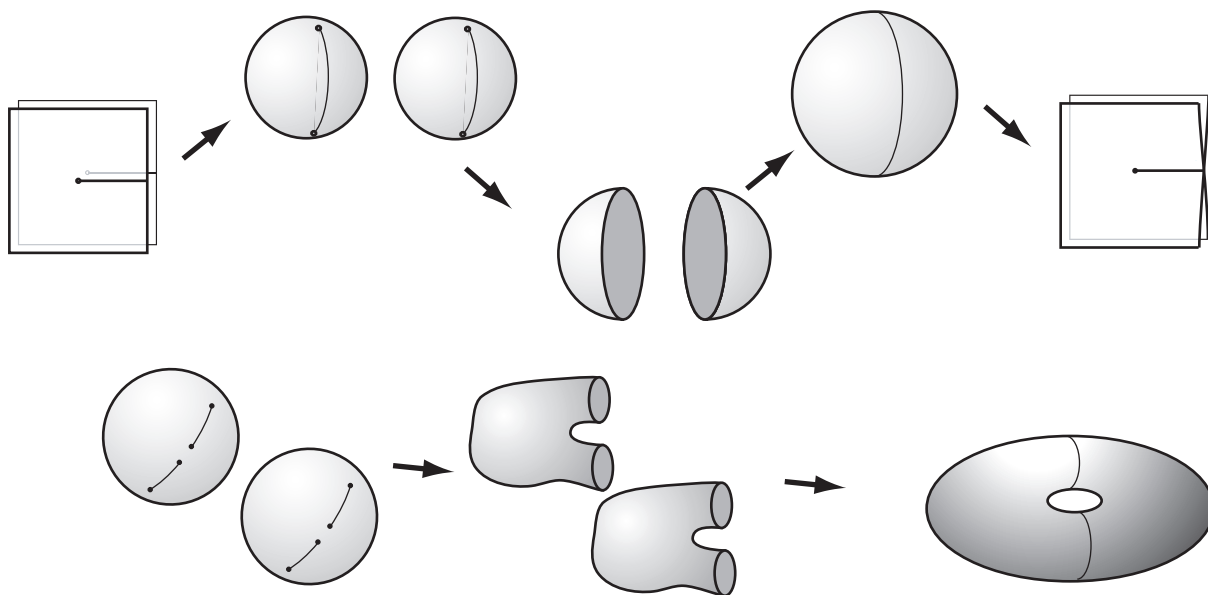
(ただし $a_{-k_j} \neq 0$.) をもつ. この下線の部分を $h_j(z)$ とおくと, $h_j(z)$ は有理関数の形をしている. すると関数

$$f(z) - \{h_1(z) + \dots + h_n(z)\}$$

は $\hat{\mathbb{C}}$ から $\mathbb{C}$ への正則写像となる. (3) より, これは定数となる. ゆえに f は有理関数である.⁵

(2) の $\Leftarrow$ は (1) と全単射性から明らか. $\Rightarrow$ は, (1) より f は有理関数だから分子・分母に 2 次以上の多項式がなければよい. 実際, もし 2 次以上の多項式があると, 単射にはならないことがわかるので矛盾である. ■

参考：リーマン面再論. 多価関数 $w = \sqrt{z}$ のリーマン面は, 無限遠点も考え合わせると球面と同相である. また, 多価関数 $w = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z)}$ ($0 < k < 1$) のリーマン面は, 無限遠点も考え合わせるとドーナツの表面 (トーラス) と同相である.



⁵以上の議論から, 「任意の有理関数は部分分数展開できる」ことがわかる.

正規族

定義（一様収束など）.

- 位相空間 X が**可分** (separable) であるとは, ある可算部分集合 $E \subset X$ が存在して, $\overline{E} = X$ が成り立つことをいう. 例えば $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$ は可分である.
- $\mathbb{X}$ を完備距離空間, d_0 をその距離とする. 例えば $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $d_0(z, w) = |z - w|$ と置いたものは (可分な) 完備距離空間である. $\mathbb{X} = \hat{\mathbb{C}}$, $d_0 = d$ を球面距離とした場合も同様に (可分な) 完備距離空間である. 以下では $\mathbb{X}$ はこのふたつのいずれかと仮定しよう.⁶
- $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ を領域とする. 関数の列 $\{f_n : D \rightarrow \mathbb{X}\}$ が部分集合 $E \subset D$ において $f : E \rightarrow \mathbb{X}$ に**一様収束**するとは,

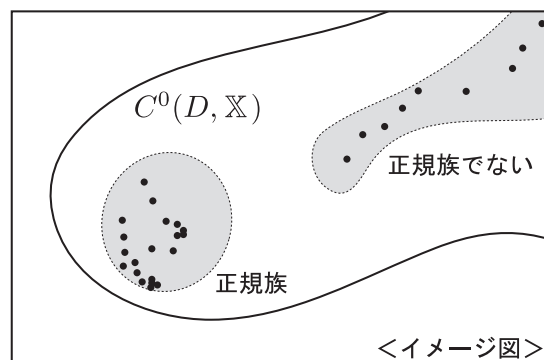
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall z \in E, d_0(f(z), f_n(z)) < \epsilon$$

が成り立つことをいう.

- 関数の列 $\{f_n : D \rightarrow \mathbb{X}\}$ が $f : D \rightarrow \mathbb{X}$ に**広義一様収束**するとは, D の任意のコンパクト集合上で f_n が f に一様収束することをいう.
- 例: $f_n(z) = \frac{nz}{z+n}$ とおくと, f_n は $D = \hat{\mathbb{C}}$ 上 $f = \text{id}$ に一様収束する.
- $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ を領域とする. D 上で定義され $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ または $\hat{\mathbb{C}}$ に値をもつ連続関数全体の集合を $C^0(D, \mathbb{X})$ で表す.
- 部分集合 $\mathcal{F} \subset C^0(D, \mathbb{X})$ が**正規族** (normal family) であるとは, $\mathcal{F}$ 内の任意の点列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ にたいし, D 上広義一様収束する部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在することをいう.

注意. $\{f_{n(k)}\}$ の広義一様収束極限 $f = \lim_k f_{n(k)}$ が $\mathcal{F}$ に入っているとは限らない.

注意. $C^0(D, \mathbb{X})$ は適切な距離を定義することで完備距離空間とみなすことができる. このとき, $\mathcal{F}$ が正規族であることと, 閉包 $\overline{\mathcal{F}}$ が点列コンパクトであることは同値である.



⁶このあと可分であること, 完備であることがどのように使われているか意識しておこう.

正規族とリーマンの写像定理

配布日: January 31, 2014 Version: 1.1

前回 (1/24) のまとめと補足

復習: 正規族.

- $\mathbb{X}$ を完備距離空間, d_0 をその距離とする. 例えば $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $d_0(z, w) = |z - w|$ と置いたものは (可分な) 完備距離空間である. $\mathbb{X} = \hat{\mathbb{C}}$, $d_0 = d$ を球面距離とした場合も同様に (可分な) 完備距離空間である. 以下では $\mathbb{X}$ はこのふたつのいずれかの場合を考える.
- $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ を領域とする. この D も (相対位相により) 可分となることに注意. D 上で定義され $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ または $\hat{\mathbb{C}}$ に値をもつ連続関数全体の集合を $C^0(D, \mathbb{X})$ で表す. $C^0(D, \mathbb{X})$ は適切な距離を定義することで完備距離空間とみなすことができる.
- 部分集合 $\mathcal{F} \subset C^0(D, \mathbb{X})$ が**正規族** (normal family) であるとは, $\mathcal{F}$ 内の任意の点列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ にたいし, D 上広義一様収束する部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在することをいう. これは, $C^0(D, \mathbb{X})$ を上述のように完備距離空間とみなしたとき, $\mathcal{F}$ の閉包 $\overline{\mathcal{F}}$ が (点列) コンパクトであることと同値.¹

アスコリ・アルツェラの定理

与えられた連続関数の族が正規族になるための必要十分条件が, 次の定理で与えられる:

アスコリ・アルツェラの定理 (the Ascoli-Arzelà theorem, AAT)関数の族 $\mathcal{F} \subset C^0(D, \mathbb{X})$ が正規族

$$\iff \begin{cases} (1) \text{ すべての } z \in D \text{ において } \mathcal{F} \text{ は同程度連続; かつ} \\ (2) \text{ すべての } z \in D \text{ において } \mathcal{F} \text{ は一様有界} \end{cases}$$

下線の言葉をちゃんと定義しよう.

$$(1) : \iff (\forall z \in D)(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta = \delta(z) > 0)(\forall f \in \mathcal{F}),$$

$$w \in D \text{ かつ } d(z, w) < \delta \implies d_0(f(z), f(w)) < \epsilon$$

この δ は z のみに依存し, $f \in \mathcal{F}$ に依存しないのがミソ. D の各点においては, $\mathcal{F}$ の元に一樣な速度制限がかかっている, と解釈できる.

$$(2) : \iff (\forall z \in D)(\exists E = E(z) \subset \mathbb{X} : \text{コンパクト})(\forall f \in \mathcal{F}),$$

$$\{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset E$$

こちら E は z のみに依存し, $f \in \mathcal{F}$ に依存しないのがミソ. D の各点においては, $\mathcal{F}$ の元に一樣な渡航制限がかかっている, と解釈できる.**AAT の系.** AAT を仮定すると, 次の簡単な系が得られる.²**系 13-1** ($\mathbb{X} = \hat{\mathbb{C}}$ のとき)関数の族 $\mathcal{F} \subset C^0(D, \hat{\mathbb{C}})$ が正規族 $\iff (1)$ すべての $z \in D$ において $\mathcal{F}$ は同程度連続¹距離空間ではコンパクト = 点列コンパクト.²複素力学系理論では重要な定理である.

証明. 全ての $z \in D$ において $E(z) = \hat{\mathbb{C}}$ とおくと, AAT の (2) が成立する. ■

AAT の証明. 以下の議論では, D の可分性と $\mathbb{X}$ の完備性がとくに重要である. たとえば $D, \mathbb{X}$ をユークリッド空間 ($\mathbb{R}^n$ など) に変えても成立することに注意しておこう.

($\Leftarrow$). まず (1) と (2) が正規性の十分条件であることを 5 ステップ (ア) ~ (オ) にわけて示す.

(ア) : $A = (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i) \cap D$ とおくと, A は可算かつ $\overline{A} = \overline{D} \subset \hat{\mathbb{C}}$. よって A の元を

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

と表しておく.

(イ) : $\mathcal{F}$ 内の任意の列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と任意の $a_k \in A$ に対し, 条件 (2) の一様有界性より集合 $\{f_n(a_k)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は集積点を持つ. たとえば $k = 1$ にたいし,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

のある増加列からなる部分集合

$$N_1 = \{n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}, \dots\}$$

が存在し, 点列 $\{f_n(a_1)\}_{n \in N_1}$ は収束列となる. (すなわち, $\lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_{1j}}(a_1)$ が収束する.) さらに増加列からなる N_1 の部分集合

$$N_2 = \{n_{21}, n_{22}, n_{23}, n_{24}, \dots\} \subset N_1$$

で, 今度は点列 $\{f_n(a_2)\}_{n \in N_2}$ が収束列となるようなものが存在する. 同様に続けていけば, 増加列からなる部分集合の列

$$\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \dots \supset N_k \supset \dots$$

で, 各自然数 k にたいし点列 $\{f_n(a_k)\}_{n \in N_k}$ が収束するようなものが存在する. いま,

$$N_k = \{n_{k1}, n_{k2}, n_{k3}, n_{k4}, \dots\}$$

とおくと,

$$M = \{n_{11}, n_{22}, n_{33}, n_{44}, \dots\}$$

も増加列からなる $\mathbb{N}$ の部分集合であり, 各自然数 k にたいし点列 $\{f_n(a_k)\}_{n \in M}$ は収束する.³ この M について, 関数列 $\{f_n\}_{n \in M} = \{f_{n_{kk}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が D 上で広義一様収束することを示せばよい.

(ウ) : E を D 内の任意のコンパクト集合とする. また, 任意の $\epsilon > 0$ を固定する. このとき, 条件 (1) の同程度連続性より,

$$\begin{aligned} &(\forall \zeta \in E)(\exists \delta = \delta(\zeta) > 0)(\forall f \in \mathcal{F}), \\ &z \in D \text{ かつ } d(z, \zeta) < \delta(\zeta) \implies d_0(f(z), f(\zeta)) < \epsilon/6 \end{aligned}$$

³いわゆる対角線論法. 例えば

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, \dots\} \\ N_1 &= \{\underline{10}, 20, 30, 40, \dots\} \\ N_2 &= \{100, \underline{200}, 300, 400, \dots\} \\ N_3 &= \{1000, 2000, \underline{3000}, 4000, \dots\} \end{aligned}$$

のとき, $M = \{10, 200, 3000, \dots\}$ となる.

とできる. E はコンパクトなので, 有限個の $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_\ell$ が存在し, すべての $z \in E$ に対してある $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ が存在して

$$z \in B(\zeta_j, \delta(\zeta_j))$$

とできる.⁴ ただし, $B(\alpha, r)$ は球面距離に関する中心 α , 半径 r の開円板である. よって $z, w \in B(\zeta_j, \delta(\zeta_j))$ のとき, 任意の $f \in \mathcal{F}$ にたいし

$$d_0(f(z), f(w)) \leq d_0(f(z), f(\zeta_j)) + d_0(f(\zeta_j), f(w)) \leq \epsilon/6 + \epsilon/6 = \epsilon/3$$

が成り立つ.

(エ): 可算集合 A は D 内で稠密であったから, (必要なら有限個の元について番号を入れ替えて) $a_j \in B(\zeta_j, \delta(\zeta_j))$ ($j = 1, 2, \dots, \ell$) としてよい. ここで, (イ) で構成した関数列 $\{f_n\}_{n \in M} = \{f_{n_{kk}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ にたいし, $g_k := f_{n_{kk}}$ とおくと, ある自然数 k_0 が存在し, $\mu, \nu \geq k_0$ のとき任意の $j = 1, 2, \dots, \ell$ にたいし

$$d_0(g_\mu(a_j), g_\nu(a_j)) \leq \epsilon/3$$

が成り立つ.

(オ): 任意の $z \in E$ にたいし, $z \in B(\zeta_j, \delta(\zeta_j))$ となる $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ を選ぶと,

$$d_0(g_\mu(z), g_\nu(z)) \leq d_0(g_\mu(z), g_\mu(a_j)) + d_0(g_\mu(a_j), g_\nu(a_j)) + d_0(g_\nu(a_j), g_\nu(z))$$

がなりたつ. 右辺第 1 項については, $g_\mu \in \mathcal{F}$ と (ウ) より

$$d_0(g_\mu(z), g_\mu(a_j)) \leq d_0(g_\mu(z), g_\mu(\zeta_j)) + d_0(g_\mu(\zeta_j), g_\mu(a_j)) < \epsilon/6 + \epsilon/6 < \epsilon/3$$

がいえる. 右辺第 3 項についても同様である. 右辺第 2 項については (エ) より, $d_0(g_\mu(a_j), g_\nu(a_j)) < \epsilon/3$ であったから, 結局

$$d_0(g_\mu(z), g_\nu(z)) < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 < \epsilon$$

が成り立つ. (よって $\{g_\mu(z)\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ はコーシー列であり, 収束列. すなわち極限が存在する. ここで $\mathbb{X}$ の完備性が必要.) $z \in E$ は任意だったので, 関数列 $\{f_n\}_{n \in M} = \{g_\mu(z)\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ は収束する.

■(⇐)

(⇒). 次に条件 (1)(2) が正規性の必要条件であることを示そう. もし正規族 $\mathcal{F}$ があるコンパクト集合 E 上同程度連続でないとすると, $\epsilon > 0$ と点の列 $z_n, z'_n \in E$, 関数列 $f_n \in \mathcal{F}$ が存在して $d(z_n, z'_n) < 1/n$ かつ $d_0(f_n(z_n), f_n(z'_n)) \geq \epsilon$ を満たすようにできる. E のコンパクト性より, $\{z_n\}$ と $\{z'_n\}$ は同じ点 α に集積するが, 必要なら部分列をとることで収束すると仮定してもよい. さらに部分列をとれば, 正規性より $\{f_n\}$ もある $f: E \rightarrow \mathbb{X}$ に E 上一様収束すると仮定してもよい. このとき

$$d_0(f_n(z_n), f_n(z'_n)) \leq d_0(f_n(z_n), f(z_n)) + d_0(f(z_n), f(z'_n)) + d_0(f(z'_n), f_n(z'_n))$$

が成り立つが, 一様収束性より右辺第 1 項と第 3 項は十分大きな n にたいし $\epsilon/3$ より小さくなる. また, f は連続関数列 f_n の一様収束極限なので連続, とくにコンパクト集合 E 上一様連続なので, 右辺第 2 項も十分大きな n にたいし $\epsilon/3$ より小さくなる. これは仮定に矛盾である. よって条件 (1) は必要条件である. 次に正規性から条件 (2) を示そう. $z \in D$ を固定し, $U = \{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\}$ の閉包がコンパクトであることをいえばよい. 任意の点列 $\{w_n\} \subset \bar{U}$ をとると, $f_n \in \mathcal{F}$ で $d_0(f_n(z), w_n) < 1/n$ を満たすものが存在する. 正規性より $\{f_n\}$ の収束部分列 $\{f_{n(k)}\}$ をとると, $\{f_{n(k)}(z)\}$ が極限をもつことから $\lim w_{n(k)}$ が存在する. すなわち $\bar{U}$ の (点列) コンパクト性が示された.

■(⇒)

⁴ E の開被覆 $\bigcup \{B(\zeta, \delta(\zeta)) \mid \zeta \in E\}$ から有限開被覆 $\{B(\zeta_j, \delta(\zeta_j))\}$ を選べばよい.

モンテルの定理

$\mathbb{X} = \mathbb{C}$ かつ関数族 $\mathcal{F}$ が正則な場合, 次のモンテルの定理を得る:

モンテルの定理 (Montel's Theorem) 正則関数の族 $\mathcal{F} \subset C^0(D, \mathbb{C})$ にたいし,
 $\mathcal{F}$ が正規族 $\iff (2)'$ すべてのコンパクト集合 $E \subset D$ 上で $\mathcal{F}$ は一様有界

(2)' は $f \in \mathcal{F}$ によらないコンパクト集合 $K = K(E)$ が存在して, すべての $f \in \mathcal{F}$ にたいし $f(E) \subset K$ が成り立つことをいう.

証明. AAT より, 条件 (2)' から AAT の条件 (1)(2) が得られることを示せばよい. (2)' なら (2) であることは明らかなので, (2)' の仮定のもと, 全ての $\alpha \in D$ で $\mathcal{F}$ が同程度連続であることを示せばよい.

$\alpha \in D$ を固定し十分小さな $r > 0$ を取ると, $D(\alpha, r) \subset D$ とできる. いま任意の $f \in \mathcal{F}$ と $\zeta, \zeta' \in D(\alpha, r/2)$ を取り, $C = C(\alpha, r)$ とする. このとき, コーシーの積分公式より

$$|f(\zeta) - f(\zeta')| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \zeta'} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)(\zeta - \zeta')}{(z - \zeta)(z - \zeta')} dz \right|$$

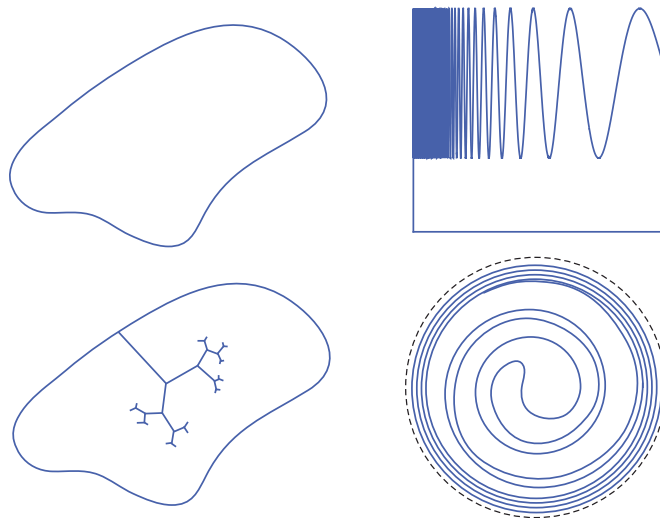
が成り立つ. 条件 (2)' より, ある f によらない $M > 0$ が存在して C 上 $f(z) < M$ が成立する. また, $z \in C$ のとき $|z - \zeta| \geq r/2$ かつ $|z - \zeta'| \geq r/2$ であるから,

$$|f(\zeta) - f(\zeta')| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M|\zeta - \zeta'|}{(r/2)(r/2)} \cdot \ell(C) = \frac{4M}{r} |\zeta - \zeta'|.$$

ただし $\ell(C)$ は C の長さ $2\pi r$ である. r も M も $f \in \mathcal{F}$ には依存しないから, $\zeta' = \alpha$ とすることで $\mathcal{F}$ の同程度連続性が言えた. ■

リーマンの写像定理

領域 $D \subset \mathbb{C}$ が単連結であるとは, 任意の D 内の単純閉曲線 C について, その内部 $\text{int}(C)$ が D に含まれることをいうのであった. 直感的には, 「穴のない領域」である. 「穴がない」といっても, 境界部分にはかなりワイルドな形状も考えられる.



それにもかかわらず, 単連結領域には単位円板 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ からの正則同相写像が存在するのである:

リーマンの写像定理 (the Riemann Mapping Theorem, RMT)

D を $\mathbb{C}$ 内の有界な単連結領域とする. このとき, 正則な上への同相写像 $\psi: D \rightarrow \mathbb{D}$ が存在する.

注意.

- D が有界でない単連結領域であっても, $D \neq \mathbb{C}$ であるかぎり定理は正しい. (証明ではうまく写像を合成して有界な場合に帰着させる.)
- D 上では $\psi'(z) \neq 0$ となるので, 等角写像 (局所的な角度を保つ写像) になっている.

RMT の証明. (ア): $z_0 \in D$ を任意にとる. 有界性より, ある十分小さな $r > 0$ が存在し, アファイン写像 $T(z) = r(z - z_0)$ による D の像 $T(D)$ は単位円板 $\mathbb{D}$ に含まれるとしてよい. したがって, 以後は $0 \in D \subset \mathbb{D}$ の場合に RMT を証明すれば十分である.

(イ): 関数族 $\mathcal{F}$ を次の (1)~(3) を満たす $f: D \rightarrow f(D)$ の全体とする:

- (1) $f(D) \subset \mathbb{D}$
- (2) $f(0) = 0$
- (3) $f: D \rightarrow f(D)$ は正則な全単射

例えば $f_0(z) = z$ (恒等写像) はこの 3 条件を満たすので, $f_0 \in \mathcal{F}$ である. また, 任意の $z \in D$ と $f \in \mathcal{F}$ にたいし $f(z) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{D}$ であるから, $\mathcal{F}$ は一様有界である. よってモンテルの定理から, $\mathcal{F}$ は正規族となっている.

(ウ) いま, $M := \sup\{|f'(0)| \mid f \in \mathcal{F}\}$ とおく. $f_0 \in \mathcal{F}$ であるから, $M \geq 1$ である. また, $\sup$ の定義から, 任意の増加列 $M_n \nearrow M$ ($n \rightarrow \infty$) にたいし, ある $f_n \in \mathcal{F}$ が存在し, $M_n \leq |f'_n(0)| < M$ を満たす. $\mathcal{F}$ は正規族であったから, 必要なら部分列を取ることによって $\{f_n\}$ は D 上広義一様収束するとしてよい. その極限を ψ とおくと, $|\psi'(0)| = M$ が成り立つことに注意しよう.⁵

(エ): $\psi \in \mathcal{F}$ を示す.⁶ 任意の $z \in D$ にたいし, $|f_n(z)| \leq 1$ より $|\psi(z)| \leq 1$ がわかるが, 最大値原理より $|\psi(z)| < 1$ でなくてはならない. よって (1) は満たしている. 次に (2) は $\psi(0) = \lim f_n(0) = 0$ よりわかる. (3) は単射であることをいえばよい: 単射でないと仮定すると, ある異なる $a, b \in D$ が存在し, $\psi(a) = \psi(b) =: p \in \mathbb{D}$ である. ここで $F_n(z) := f_n(z) - p$, $\Psi(z) := \psi(z) - p$ とおいてみよう. いま D は単連結なので, その中にうまく単純閉曲線 C をとって, $\text{int}(C)$ に a と b が含まれ, かつ C 上には Ψ の零点が存在しないようにできる. (一致の定理より零点は孤立しているから.) $\Psi(a) = \Psi(b) = 0$ と偏角の原理より $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} dz \geq 2$ であるが, 一方で F_n の単射性から F_n の零点は高々 1 点であり,

$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F'_n(z)}{F_n(z)} dz \leq 1$ である. ワイエルシュトラスの定理から F_n および F'_n は C 上 Ψ および Ψ' に一様収束するから, 積分 $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F'_n(z)}{F_n(z)} dz$ は $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} dz$ に収束する. これは矛盾である.

(オ): 最後に $\psi(D) = \mathbb{D}$ を示そう. そうでないと仮定して矛盾を導く. その前に, 任意の $\alpha \in \mathbb{D}$ に対し, メビウス変換 $T_\alpha: w \mapsto \frac{w - \alpha}{1 - \bar{\alpha}w}$ は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ の上への正則な同相写像を与えることに注意する.⁷

さて $\alpha \in \mathbb{D} - \psi(D)$ として, 写像

$$\phi(z) := \sqrt{\frac{\psi(z) - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\psi(z)}} \quad (= \sqrt{T_\alpha(\psi(z))})$$

を考える. ($\psi(0) = 0$ より $\alpha \neq 0$ である.) 根号の中は 0 にならないので, 適当な分枝をとればこれは正則な同相写像 $\phi: D \rightarrow \phi(D) \subset \mathbb{D}$ を与える. さらに

$$\Phi(z) := \frac{\phi(z) - \phi(0)}{1 - \overline{\phi(0)}\phi(z)} = \frac{\phi(z) - \sqrt{-\alpha}}{1 - \sqrt{-\alpha}\phi(z)} \quad (= T_{\phi(0)}(\phi(z)))$$

とおくと, $\Phi \in \mathcal{F}$ であることがわかる. ところが, 原点での微分を計算すると, $|\alpha| \neq 0, 1$ より

$$|\Phi'(0)| = \frac{1}{2} \left(\sqrt{|\alpha|} + \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \right) \cdot |\psi'(0)| > |\psi'(0)| = M$$

となる. これは M の定義に矛盾する. ■

⁵ワイエルシュトラスの定理. 正則関数の (広義) 一様収束極限は正則であり, 導関数も (広義) 一様収束する.

⁶講義では省略した.

⁷確かめてみよ.