この講義について

配布日：April 21, 2014 Version：1.1

担当教員： 川平 友規（Kawahira, Tomoki；理学部数理学科・大学院多元数理科学研究科）

担当 TA： 近藤 広崇 (Kondo, Hirotaka；大学院多元数理科学研究科)

講義ウェブサイト： 『川平 微積』で Google 検索.
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/14S-biseki.html
配布されたプリントが pdf 形式でダウンロードできます．また，毎週の進捗状況についてコメントしていきます.

本授業の目的およびねらい（全学シラバスより）： 定量的変化を記述・分析する数学の分野が解析学であり，その中心的方法は微分・積分である．これらの方法は自然科学において必須の研究手法であるが，近年はさらに社会科学などにも広く応用されている．本科目は通年講義の前半として，一変数微分積分学の基本を理解することを目的とする．特に極限の本質を理解し，対数関数・三角関数など初等関数の自在な解析学的取扱いができるようになることを重視する.

講義日と授業内容（予定）：

4 月 14 日	休講
4 月 21 日 4 月 28 日 5 月 12 日 5 月 19 日	**数列と関数**：数列の収束・発散，実数の連続性の公理， e，級数の収束・発散， 関数の極限値，関数の連続性，ランダウの記号， 初等関数（指数・対数・三角・逆三角）etc.
5 月 26 日 6 月 2 日 6 月 9 日 6 月 16 日	**微分**：微分の定義，逆関数の微分， 初等関数の微分，平均値の定理， n 階微分，テイラー展開，ニュートン法，etc.
6 月 23 日 6 月 30 日 7 月 7 日 7 月 14 日	**積分**：リーマン和と区分求積法，定積分の定義， 不定積分，微積分の基本定理， 広義積分の収束と発散，曲線の長さ，etc.
7 月 21 日	講義予備日
7 月 28 日	期末試験

教科書および参考書： 教科書にあたる講義プリントを毎回配布するが，下記の参考書のうちいずれか 1 冊を購入しておくことが望ましい.
- 三宅敏恒,『入門微分積分』，培風館
- 南和彦,『微分積分講義』，裳華房

成績評価の方法： 「履修取り下げ制度」を適用します.

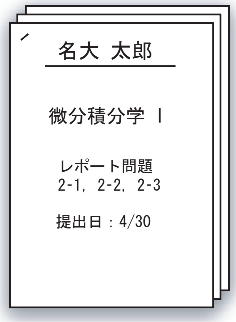
- ほぼ毎週のレポートおよび期末試験をそれぞれ 50 点満点で評価する.
- 履修取り下げ届が提出された場合，期末試験を受験しなかった場合はそれぞれ「欠席」とし，それ以外は 59 点以下を F，60 – 69 点を C，70 – 79 点を B，80 – 89 点を A，90 – 100 点を S とする.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

レポートの締め切りと提出様式： レポートの締め切りは原則として「次回の講義開始時」とします．教壇前の机に提出しておいてください．締め切りを過ぎたレポートは一切受け取らないので注意してください．提出する際には，**必ず A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙を使用し，右図のような表紙をつけて**ください．また，必ず**左上**をホチキス等でとめてください．

受講者同士で協力し合って解答してもかまいません．ただし，必ず協力者の名前も明記するようにしてください．(それによって減点されることはありません．)

レポートは採点して返却します．返却が済むまで，成績への加点の対象とはしないので注意してください．



・必ずA4サイズ，表紙をつける．
・名前は上の方に大きく書く．
・左上をホチキスで留める．
・解いた問題の番号，提出日を書く．
・裏面はなるだけ使わない．

オフィスアワー： 授業中・授業後の質問は大歓迎です．それ以外の時間に質問したい場合は，ぜひオフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を活用してください．私のオフィスアワーは，理学部数理学科内の合同オフィスアワー「Cafe David（カフェ・ダヴィド）」の時間に設定しています．Cafe David は月曜から金曜の 12:00–13:30 にオープンし，コーヒー・紅茶を無料で提供しています．私の担当は火曜，場所は多元数理棟 2 階のエレベーター前です．

よく使う記号など：**数の集合**

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体　(2) $\mathbb{R}$: 実数全体　(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体　(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体　(6) $\emptyset$: 空集合

ギリシャ文字

(1) α: アルファ　(2) β: ベータ　(3) γ, Γ: ガンマ　(4) δ, Δ: デルタ　(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ　(7) η: エータ　(8) θ, Θ: シータ　(9) ι: イオタ　(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ　(12) μ: ミュー　(13) ν: ニュー　(14) ξ, Ξ: クシー　(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ　(17) ρ: ロー　(18) σ, Σ: シグマ　(19) τ: タウ　(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ　(22) χ: カイ　(23) ψ, Ψ: プサイ　(24) ω, Ω: オメガ

その他

(1) $x \in X$ と書いたら,「x は集合 X に属する」すなわち「x は X の元 」という意味.

(2) 「$\cdots$をみたす X の元全体の集合」を $\{x \in X \mid (\ x$ に関する条件$)\}$ の形で表す．たとえば「$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ 」

(3) $X \subset Y$ と書いたら,「集合 X は集合 Y に含まれる」という意味.

(4) $A := B$ と書いたら A を B で定義する，という意味．たとえば $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

(5) （文章 1）$:\Longleftrightarrow$ (文章 2) と書いたら,（文章 1）の意味は（文章 2）であることと定義する，という意味．たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$.」

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ちからだめし

配布日：April 21, 2012　Version：1.1

レポート問題

締め切りは 4 月 28 日の講義開始時とします.

問題 1-1. $\sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ.

問題 1-2. $r > 1$ のとき，$r^n \to \infty \ (n \to \infty)$ を証明せよ．(Hint. 高校の教科書に多分証明が書いてあるが，まずは自力で考えてみよう.)

注意. ちなみに n が自然数のとき，$1 + \dfrac{1}{n} > 1$ だが $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e \ (n \to \infty)$ となり発散しない．上の問題との差を意識しよう.

数列の収束と実数の連続性

配布日：April 28, 2012　Version：1.1

＜前回 (4/21) のまとめと補足＞

（1 変数）微分積分学は高校で学んだ微分積分学の復習もしくは延長だと考えてもよいが，ところどころ，大学数学ならではの新しい視点や新しい手法を学ぶことになる．

この講義では，ひとつの理想的な到達点として，次のように概念的な目標を掲げておきたいと思う：

> **（1 変数）微分積分学の目標．** 与えられた関数 $f(x)$ に対し，
>
> (1) 与えられた x における $f(x)$ の値（よって関数のグラフの形も）
>
> (2) 方程式 $f(x)=0$ の解
>
> (3) 積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値
>
> の「真の値」もしくは「近似値」を，必要な精度で計算できるようになること．

実用の場で通用するのはすべて「近似値」であることに注意しよう．たとえば円周率 π も 3.14, 3.1416 といった「近似値」を知ってはじめて量的に意味のある数となる.「真の値」（「厳密値」ともよばれる）とは,「近似値」を生成する種（たね）にすぎないのである．

具体例を挙げてみよう.（無人島に漂着して，以下の問題に遭遇したとお考えください.）

(1) $f(x)=\sin x$ とするとき，$f(47^\circ)=\sin 47^\circ=?$

(2) 方程式 $f(x)=x^5-x^3+2=0$ に対し，$x=?$

(3) 円の面積を考えると，理論的には $\pi=4\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ と表される．π の近似値を求めるために，右辺の積分を（積分の定義にもとづき）数値的に計算できるか？[1]

このような計算も，5,60 年ほど前までは手計算で行うのが普通だったし，そのための手法が確立されている.（たとえば「微分積分の基本定理」を用いると，積分は「微分の逆演算」として厳密かつ効率的に計算できるのであった.）いまはコンピューター（パソコン）でなんでも簡単に計算できるようになったが，根底にある計算原理は今も昔も変らない．その変らない部分を学び，継承するのが私たちの任務だといえるだろう．

実数の構成

微分積分は実数に実数を対応させる関数の理論であるから，その土台となる実数とは何なのか，あらためて考えてみよう．

唐突だが，次の問題を考えてみる：

問題：方程式 $x^2-2=0$ を解け．

[1] π の計算にはもっとよい方法がある．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

期待される解答は $x = \pm\sqrt{2}$ である．中学校以来このように解答してきただろうし，疑問を抱くこともないだろう．しかし，よく考えてみていただきたい．この $\sqrt{2}$ という記号の表すものはなんだろうか？それは「2 乗したら 2 になる正の数」，すなわち「方程式 $x^2 = 2$ をみたす正の数」である．この方程式は，まだ解けていない．$\sqrt{2}$ という数の値はなにか，そもそも存在するのか，という議論がなされていないのである．私たちが虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ に対して抱くような疑念を $\sqrt{2}$ という数にも感じるべきなのだ．

直感的には，$\sqrt{2}$ という数の存在は疑いようがないように思われる[2]．$\sqrt{2}$ という数が存在すると認めると，あらゆる計算がうまくいくし，説明がつく．それは私たちも経験的に認めるところである．しかし,「説明がつく」ということと,「存在する」というのは別問題である．神サマの存在を仮定すれば世の中の万事が説明がつくが，それは神サマの存在を保証するわけではない．

歴史を紐解くと，人類は新しい数というものに対してきわめて不寛容であった．たとえば紀元前 5 世紀ごろ，ピタゴラス学派は世の中に存在するのは有理数のみだと信じていた．(のちに「単位正方形の対角線の長さが有理数ではない」ことを証明し，考えを改めたが.）また，18 世紀ごろまで，西洋では負の数ですら市民権を得ていなかった．

数学者が $\sqrt{2}$ を初めとする無理数に完全な理解を示したのは，19 世紀も後半になってからである．この時代，もっとも重要なイノベーションは，人類が初めて「実数はすでにあたりまえに存在するものではなく，人工的に構成すべきもの」と認識したことであった．

実数は次のようなステップをへて，人工的に構成される：

- **ステップ 1**：自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を構成（定義）する[3]．すなわち

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

- **ステップ 2**：$\mathbb{N}$ を拡張し，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を構成する．すなわち

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \ldots\}.$$

  この集合内では自然な和・差・積が定義できるが，商はこの集合内で自己完結しない．すなわち整数の和・差・積は整数だが，整数の商は整数とはかぎらない．[4]

- **ステップ 3**：$\mathbb{Z}$ から有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を構成する．すなわち

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p,\ q \text{ は整数},\ q \neq 0 \right\}.$$

  この集合内では自然に四則が定義され，自己完結している．すなわち，有理数の和・差・積・商はすべて有理数である．[5]

- **ステップ 4**：$\mathbb{Q}$ から実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を構成する．この部分が一番難しい．大雑把にいって,「有理数の数列が収束しうる理想的な点」として実数を定義する[6]．結果として得られる実数の集合は，自然な四則が定義され自己完結しており，しかも「極限」についても自己完結している．たとえば有理数の数列は有理数でない数（無理数）に収束することもあるが，実数の数列は実数以外には収束しない．

[2]正方形の対角線として表現できるから，というのが分かりやすい説明だろう．しかし論理的には，平面とは何か，線分とは何か，対角線というものは存在するのか，といった問いに完全な解答を与えた上でないと意味をもたない．

[3]1891 年，ペアノ（Peano, 1858 – 1932) が初めて自然数を厳密に構成した．

[4]$\mathbb{Z}$ は（代数学の用語で）「環」とよばれる構造をもつ集合の代表例．

[5]$\mathbb{Q}$ は（代数学の用語で）「体」とよばれる構造をもつ集合の代表例．次の $\mathbb{R}$ も体である．

[6]1869 年，メレ (Méray，1835 – 1911，仏) が最初に発表したとされる．実数の構成としてはデデキント (Dedekind, 1831 – 1916，独) の「切断」が有名だが，若干遅く 1872 年であった．

このようにして人工的かつ論理的に構成された実数の集合 $\mathbb{R}$ は微分積分学を初めとする解析学を支える堅牢な土台である．たとえば方程式 $x^2 - 2 = 0$ の解も，実数の範囲に存在することがわかる．

記号． 以下，よく使う記号をまとめておく．X, Y を集合とするとき，

- $x \in X \quad :\Longleftrightarrow \quad x$ は X に属する
- $X \subset Y \quad :\Longleftrightarrow \quad X$ は Y に含まれる．
- $X \subsetneqq Y \quad :\Longleftrightarrow \quad X$ は Y に含まれるが $X \neq Y$．

たとえば，$2014 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$．$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ だが，より詳細に次が成立する：

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}.$$

数列の収束

数列とは「数が一列に並んだもの」であった．ただ並ぶことが大事なのではなくて，数に 1 番目，2 番目，$\cdots$ と順番（番号）がついていることがポイントである．すなわち，

定義． **数列**とは，自然数 $1, 2, 3, \ldots$ にそれぞれ実数をひとつずつ対応させたものである．

自然数 n に実数 a_n を対応させるような数列は

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

のように表したり，簡単に $\{a_n\}$ のようにも表すのであった．この a_n の n は**添字**と呼ばれる．添字が動く範囲を明確にするために，

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \{a_n\}_{n \geq 1} \quad \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

のように書くこともある．[7]

例． 自然数 n に 2^n を対応させる数列 $2, 4, 8, 16, \ldots$ は通常 $\{2^n\}$ のように表される．

数列は次のような「グラフ」で表現することができる．(実際，数列は自然数の上で定義され実数に値をとる関数といえる.)

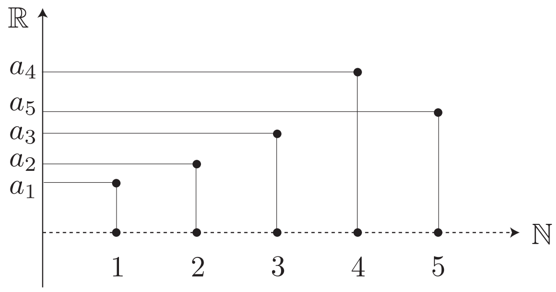


図 1: 数列の「グラフ」．

[7] 必要に応じて $n = 0$ から始まる列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ や，負の添字をもつ列 $\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ を考えることもあるが，これらもやはり数列と呼び，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ のように表す．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数列の収束． 微積分で主に扱うのは，一定の値に近づいていくような数列である．たとえば何らかの値（円周率など）を計算する過程で数列 $\{a_n\}$ が近似値として得られたとき，その精度が n の増加にともなって確実に良くなる，という状況が望ましい．これを数学の言葉で定式化したものが,「数列の収束性」である：

> **定義．** 数列 $\{a_n\}$ が**収束する**とは，ある実数 α が存在して，n が増加すると $|a_n - \alpha|$ が<u>限りなく 0 に近づく</u>ことをいう．これを
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{もしくは} \quad a_n \to \alpha \ (n \to \infty)$$
>
> と表し，この α を数列 $\{a_n\}$ の**極限** (limit) とよぶ．

「数列 $\{a_n\}$ は α に収束する」とか,「数列 $\{a_n\}$ は α を極限にもつ」ともいう．

補足． 高校数学では，上の<u>限りなく 0 に近づく</u>という部分をあいまいにしていたから，少しだけ掘り下げておこう．a_n を α の近似値だと考えたとき，$|a_n - \alpha|$ はその誤差である[8]．$\{a_n\}$ が α に収束するとき，近似値の精度目標をどんなに厳しく定めても，すなわち誤差の許容範囲をどんなに小さくしても，いつかは $|a_n - \alpha|$ がその範囲内に収まり，その後外れることはない．これを「(誤差) $|a_n - \alpha|$ が限りなく 0 に近づく」と表現しているのである．

厳密さを追求する場合は，ϵ 論法とか ϵ-N 論法とかよばれる手法を用いて定式化する．詳しくは [三宅] の 1.4 節，[南] の付録 B を参照．

注意（用語と記号）．

- 収束しない数列は，すべて**発散する**という．
- n の増加とともに a_n が「限りなく大きくなる」[9]とき，習慣的にこれを

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{もしくは} \quad a_n \to \infty \ (n \to \infty)$$

  と表す．この場合数列は「無限大に収束する」とはいわず，**（正の）無限大に発散する**という．
- 数列 $\{-a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} (-a_n) = \infty$ を満たすとき，

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{もしくは} \quad a_n \to -\infty \ (n \to \infty)$$

  と表す．こちらは**負の無限大に発散する**という．

極限の性質（補足）

> **命題 1-1（極限の四則）** 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束し $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，
>
> (1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$．
>
> (2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$．
>
> (3) $\beta \neq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$．

[8]絶対誤差とよばれる．

[9]すなわち,「目標の大きさとしてどれだけ大きな正の数 M を設定しても，a_n はいつかは $a_n > M$ を満たすようになり，その後それを下回ることはない」ということ．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数列 a_n と b_n がそれぞれ $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ の近似値であるとき，a_nb_n は $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$ の近似値といえるだろう．(2) の性質は，n が増えて近似値としての a_n と b_n の精度が上がれば，a_nb_n が $\sqrt{6}$ を近似する精度も確実に上がることを保証している．

証明のスケッチ（厳密な証明には「ϵ 論法」が必要.） 三角不等式[10]を用いる：(1)：複号 $\pm$ が $+$ の場合，$|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)| \le |a_n-\alpha|+|b_n-\beta| \to 0\ (n\to\infty)$．よって $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$. 複号の $-$ の場合も同様である．(2):$|a_nb_n-\alpha\beta| = |a_nb_n-\alpha b_n+\alpha b_n-\alpha\beta| \le |a_n-\alpha||b_n|+|\alpha||b_n-\beta|$. ここで $|b_n-\beta|\to 0$ より，n が十分大きいとき，$|b_n-\beta|$ はどんな正の定数よりも小さくできる．たとえば $|b_n-\beta|\le 1$ が成り立つ．このとき $|b_n|\le|\beta|+1$（右辺は n に依存しない定数）であり，$|a_nb_n-\alpha\beta| \le |a_n-\alpha|(|\beta|+1)+|\alpha||b_n-\beta| \to 0\ (n\to\infty)$. (3):(2) より $\lim_{n\to\infty}(1/b_n)\to 1/\beta$ を示せば十分．$|b_n-\beta|\to 0$ より，n が十分大きいとき $|b_n-\beta|$ はどんな正の定数よりも小さくできる．$|\beta|/2>0$ であるから，たとえば n が十分大きいとき $|b_n-\beta|\le|\beta|/2$ が成り立つ．このとき $|b_n|\ge|\beta|-|\beta|/2=|\beta|/2(>0)$ であるから，$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\beta}\right| = \frac{|b_n-\beta|}{|b_n\beta|} \le \frac{|b_n-\beta|}{(|\beta|/2)|\beta|} \to 0\ \ (n\to\infty)$. ■

単調性と有界性

単調な数列． 数列も関数のように増減に着目することが多い．そこで，関数にもよく使われる「単調増加（減少）」といった言葉を数列にも定義しておこう：[11]

定義（数列の単調性）．

- 数列 $\{a_n\}$ が**単調増加** $:\Longleftrightarrow$ すべての n に対し $a_n\le a_{n+1}$
- 数列 $\{a_n\}$ が**単調減少** $:\Longleftrightarrow$ すべての n に対し $a_n\ge a_{n+1}$.

単調増加は「$\forall n\in\mathbb{N},\ \ a_n\le a_{n+1}$」と略記することもできる．$\forall$ は「すべての」という意味[12]．ちなみに等号成立がなくすべての n に対し $a_n<a_{n+1}$ （$a_n>a_{n+1}$）であるとき，**真に単調増加（減少）**という．

有界な数列． つぎに数列がある範囲に収まっている状況を述べるための言葉を定義する：

定義（有界性）．

- 数列 $\{a_n\}$ が**上に有界**
  $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在し，すべての n に対し $a_n\le M$.
- 数列 $\{a_n\}$ が**下に有界**
  $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在し，すべての n に対し $a_n\ge M$.

数列 $\{a_n\}$ が上にも下にも有界であるとき，単に**有界** (bounded) であるという．

「上に有界」は「$\exists M,\forall n,\ \ a_n\le M$」と略記することもできる．$\exists$ は「ある〜が存在して」という意味[13]．

[10] すべての実数 x, y について $|x+y|\le|x|+|y|$.
[11] 書籍によって数列や関数の単調性の定義はまちまちである．たとえば本書での「単調増加」は,「広義単調増加」「単調非減少」とも呼ばれる．
[12] 英語では for all と読む．
[13] 英語で there exists と読む

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

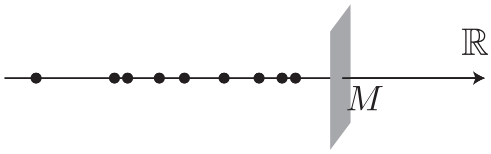


図 2: 上に有界な数列．実数 M の場所に壁があり，数列はそこより右側にはいかない．

レポート問題

締め切りは 5 月 12 日の講義開始時とします.

問題 2-1. 次の数列は有界かつ単調増加であることを示し，極限を求めよ．

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$

(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$

問題 2-2. $\alpha > 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} \alpha^{1/n} = 1$ を示そう．$\alpha = 1$ のときは明らかなので $\alpha \neq 1$ を仮定する．

(1) $\alpha > 1$ のとき，$a_n := \alpha^{1/n}$ は単調減少かつ $a_n \geq 1$ を満たす（すなわち下に有界）ことを示せ．

(2) (1) より a_n は極限 $\beta \geq 1$ を持つ．$\beta > 1$ と仮定して矛盾を導け．

(2) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \beta = 1$ である．$\alpha < 1$ のときは逆数 $1/\alpha > 1$ を考えればよい．

実数の連続性と e

配布日：May 12, 2014　Version：1.1

レポート提出のときのおねがい. 表紙をつけ，レポートの左上隅（ホッチキスのヨコあたり）に学籍番号も書いてください.

＜前回 (4/28) のまとめと補足＞

数列の収束性を保証するには？ 与えられた数列が極限を持つことを,「極限の値を知らない状態で」保証するにはどうしたらよいだろうか？

たとえば高校数学では，数列 $\left\{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ を $n = 10, 100, 1000, 10000, \cdots$ に対し計算すると

$$2.59374246..., 2.70481382..., 2.71692393..., 2.71814592...,$$
$$2.71826823..., 2.71828046..., 2.71828169..., 2.71828179..., \cdots$$

となり，一定の値に近づくように「見える」ことだけを言って，実際にある数 e に収束する，という根拠には触れない.

今回の目標は，e という数の存在を確認することである.

定義の復習（前回：数列の単調性・有界性）.

- 数列 $\{a_n\}$ が**単調増加（減少）**
  $:\Longleftrightarrow$ すべての n に対し $a_n \leq a_{n+1}$（$a_n \geq a_{n+1}$）
- 数列 $\{a_n\}$ が**上に（下に）有界**
  $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在し，すべての n に対し $a_n \leq M$（$a_n \geq M$）.

実数の連続性の公理. さて次が実数列の収束性を保証する，最も重要な「公理」である：

> **実数の連続性の公理（公理 A）**
> 『単調増加かつ上に有界な数列は，ある実数に収束する.』

数直線上の $x = M$ という場所に壁を作っておき，それを超えないが単調増加な数列 $\{a_n\}$ を考えると，ある値に収束するであろう（図 1）.

実数という集合は，この「公理」を満たすように構成された既製品のように考えてよい.

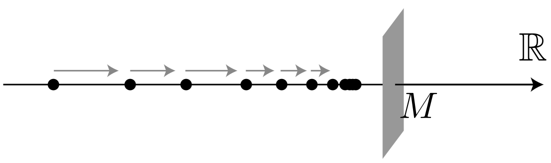


図 1: 実数の連続性の公理.

この公理を認めると,「単調減少かつ下に有界な数列」も（$a'_n = -a_n$ を考えることで）ある実数に収束することになる.

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

例（$1 = 0.9999\cdots$）.

$$a_1 = 0.9,\ a_2 = 0.99,\ a_3 = 0.999,\ \ldots$$

で与えられる数列を考える．この数列は明らかに単調増加であり，すべての n で $a_n < 1$ を満たすから上に有界．よって公理 A より，極限 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する．この極限を $0.999999\ldots$ と表すのは自然であろう．

一方 $a_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$ であるから，

$$|a_n - 1| = \frac{1}{10^n} \to 0\ (n \to \infty).$$

よって $\alpha = 1$ でなくてはならない．これは等式

$$1 = 0.9999\cdots$$

の説明のひとつである．

例題 2-1．漸化式 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1}$ で与えられる数列は収束することを示せ．また，その極限を求めよ．

解答：単調性． $a_2 = \sqrt{3} > a_1$ である．$a_{k+1} > a_k$ と仮定すると，

$$a_{k+2} - a_{k+1} = \sqrt{2a_{k+1}+1} - \sqrt{2a_k + 1} = \frac{2(a_{k+1} - a_k)}{\sqrt{2a_{k+1}+1} + \sqrt{2a_k+1}} > 0.$$

よって数学的帰納法により，すべての自然数 n について $a_{n+1} > a_n$．

有界性． 方程式 $x = \sqrt{2x+1}(> 0)$ の解を $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ とする[1]．まず $\alpha > a_1 = 1$ は明らか．$\alpha > a_k$ と仮定すると，

$$\alpha - a_{k+1} = \sqrt{2\alpha+1} - \sqrt{2a_k+1} = \frac{2(\alpha - a_k)}{\sqrt{2\alpha+1} + \sqrt{2a_k+1}} < 0.$$

よって数学的帰納法により，すべての自然数 n について $\alpha > a_n$ が示された．

収束性． 数列 $\{a_n\}$ は単調増加，上に有界であるから，公理 A より極限 $\beta = \lim_{n\to\infty} a_n$ をもつ．漸化式より $\beta = \sqrt{2\beta+1}$ を満たすから，$\beta = \alpha = 1 + \sqrt{2}$ でなくてはならない． ■

自然対数の底（ネピアの数）

「実数の連続性の公理」の応用として，次の定理を証明しよう：

定理 2-2（e **の存在と定義**）．一般項 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ で与えられる数列は収束する．その極限を**自然対数の底**もしくは**ネピアの数**とよび，e で表す．すなわち，

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (= 2.718281828459\cdots)$$

---

[1] この α は漸化式から予想される極限．実際，もし $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すると仮定すれば，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n+1} = \sqrt{2\alpha+1}$．細かいことをいうと，最後の等式では関数 $y = \sqrt{2x+1}$ が連続関数であることを使っている．

証明（定理 2-1）． $\{a_n\}$ が単調増加かつ上に有界であることを示そう．

単調性． 二項定理より

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \underline{{}_n\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k}$$

ここで下線部について，

$$\begin{aligned}
\underline{{}_n\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k} &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&< \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n+1}\right) \cdots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&= \underline{\underline{{}_{n+1}\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^k}}
\end{aligned}$$

よって最初の式の下線部を 2 重下線部で置き換えて

$$\begin{aligned}
a_n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \underline{\underline{{}_{n+1}\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^k}} &< 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \underline{\underline{{}_{n+1}\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^k}} \quad \text{（項を増やした）} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_k \cdot 1^{(n+1)-k} \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.
\end{aligned}$$

よって数列 $\{a_n\}$ は単調増加である．

有界性． すべての自然数 n にたいし，$a_n < 3$ であることを示そう．上で行った下線部の式変形から

$$\underline{{}_n\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k} = \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \le \frac{1}{k!}$$

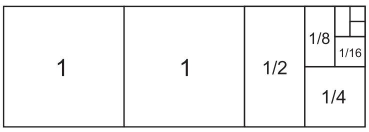
が成り立つ．さらに

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} \le \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdots 2} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

であるから，最初の式より

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \underline{{}_n\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k} \le 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 3$$

を得る．



よって数列 $\{a_n\}$ は上に有界である．

収束性． 以上の議論と公理 A から，数列 $\{a_n\}$ は極限をもつ． ■

注意． $a_1 = 2 < a_n < 3$ より，$2 < e \le 3$ が成り立つ．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

その他の極限

あとで（多分）役に立つ数列の極限をいくつか紹介しておこう．

命題 2-2. $a > 0$ を定数とするとき，

(1) $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ (2) $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ (3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

証明. (1) は前回のレポート問題.
(2) を示す．$n^{1/n} = 1 + h_n$ （ただし $h_n > 0$）とおこう[2]．このとき，

$$n = (1+h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot 1^{n-k} \cdot h_n^k = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n \geq \frac{n(n-1)}{2}h_n^2.$$

よって

$$0 < h_n^2 < \frac{2}{n-1}.$$

はさみうちの原理より，$n \to 0$ のとき $h_n \to 0$.
(3) $\frac{a}{N} < \frac{1}{2}$ すなわち $2a < N$ となる自然数 N をひとつ選んで固定する．$n > N$ のとき，

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{a}{N+1} \cdot \frac{a}{N+2} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{a^N}{N!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

レポート問題

締め切りは 5 月 19 日の講義開始時とします.

問題 3-1. 次の関数が $\mathbb{R}$ 全体で連続であることを示し，値域を区間の形で表せ.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\frac{\pi}{1+x^2}$

問題 3-2. 実数 a にたいし，$[a]$ は a を超えない最大の整数を表すものとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $f : [0,7] \to \mathbb{R}$ を $y = f(x) = [x]$ で定める．$f(x)$ のグラフを描き，f の値域を求めよ.

(2) $g : [\frac{1}{7}, 1] \to \mathbb{R}$ を $y = g(x) = [1/x]$ で定める．$g(x)$ のグラフを描き，g の値域を求めよ.

(3) $h : [\frac{1}{7}, 1] \to \mathbb{R}$ を $h(x) := \frac{1}{g(x)}$ で定める．$h(x)$ のグラフを描き，h の値域を求めよ.

ただし，グラフは手描きで，できるだけ丁寧に，大きく，正確に描くこと．また，値域は区間になるとは限らないので，必要に応じて集合の形（$\{0, 1, \sqrt{2}, \pi\}$ や $\{x \in \mathbb{R} \mid (x \text{ の条件})\}$ のような形）で表すこと.

[2] $x > 1$ のとき $x^{1/n} > 1$ であった．よって $h_n > 0$.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

関数の極限と連続性

配布日：May 19, 2014　Version：1.1

レポート提出のときのおねがい（再）． 表紙をつけ，レポートの左上隅（ホッチキスのヨコあたり）に学籍番号も書いてください．

＜前回 (5/12) のまとめと補足＞

微分積分は「関数」を解析するための道具である．そのために必要な基本的な言葉を準備しよう．

用語の定義（ア）． a と b を実数とするとき，以下の形の集合を**区間**という：

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{（開区間）}$$
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} \quad \text{（閉区間）}$$
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$$
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$$

$$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$
$$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$$
$$(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$
$$(-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$$
$$(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$$

ここで ∞ の代わりに $+\infty$ と書くこともある．

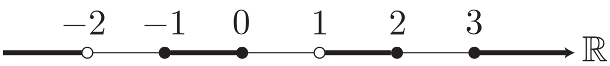


図 1: 左から $(-\infty,-2)$, $[-1,0]$, $(-1,2]$, $[3,\infty)$.

（イ）． **関数** $y = f(x)$ とは変数 x に対し実数 $f(x)$ をひとつ対応させるものであった[1)]．「数に数を対応させる」という「機能 (function)」に着目して，次のような言い回しと記号を導入しておくと便利である[2)]．

> **定義（関数）．** I を実数からなる集合とする．I の元 x それぞれに対し，ある実数 $f(x)$ をひとつずつ対応させる，その「対応付け」のことを「I 上の**関数** f」と呼び，
>
> $$f : I \to \mathbb{R}, \qquad I \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f : x \mapsto f(x), \qquad x \overset{f}{\longmapsto} f(x)$$
>
> のように表す．I としては区間（もしくは複数の区間の和集合）を選ぶことが多い．

例． たとえば $f(x) = x^2$，I として区間 $(-5,5)$ をとるとき，

$$f : (-5,5) \to \mathbb{R}, \quad f : 3 \mapsto 9, \quad 0 \overset{f}{\longmapsto} 0.$$

（ウ）． 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ において，I を関数 f の**定義域**，集合

$$f(I) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in I\}$$

を関数 f の**値域**もしくは I の f による**像**という．

1) この $y = f(x)$ は x とともに変化する変数なので，x を**独立変数**，y を**従属変数**とよぶのであった．関数 $y = f(x)$ はあとで学ぶ「多変数関数」と区別するために **1 変数関数**ともよばれる．
2) 関数は英語で function という．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

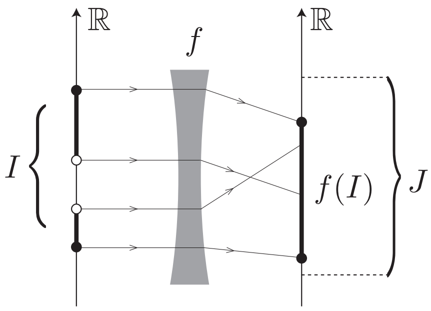


図 2: 「関数 $f : I \to J$」のイメージ図．左のスクリーンに描かれた I を f というレンズを通して右のスクリーンに投影する．その像が $f(I)$．

もし値域 $f(I)$ がある集合 J に含まれるとあらかじめ分かっているときには，関数を $f : I \to J$ のように書くこと多い[3)]．

さっきの例．$f(x) = x^2$，$I = (-5, 5)$ のとき，値域は $f(I) = [0, 25)$．$x^2 \geq 0$ だから，$f : I \to \mathbb{R}$ のかわりに

$$f : (-5, 5) \to [0, \infty) \qquad f : (-5, 5) \to [0, 25)$$

のように書いてもよい．

別の例．$[y]$ は y を超えない最大の整数とする．(いわゆるガウス記号．$k \leq y < k + 1$ を満たす整数 k と言っても同じ.）$f(x) = [x]$ と定めるとき，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ となる．また，

$$f : [-5, 5] \to \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$$

となる．

関数の極限

極限．

関数 f が <u>定数 a のまわりで定義されている</u> とする．変数 x が $x \neq a$ を満たしながら a に <u>限りなく近づく</u> とき $f(x)$ がある実数 A に <u>限りなく近づく</u> ならば,「$x \to a$ のとき関数 $f(x)$ は**極限** A をもつ」もしくは「$x \to a$ のとき関数 $f(x)$ は A に**収束する**」といい，

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to A \ \ (x \to a)$$

と表す．

注意．

- 下線部「<u>定数 a のまわりで定義されている</u>」というのは，$x = a$ で $f(a)$ が定義されていない場合も含める．(そのため，$x \to a$ には $x \neq a$ という一見不自然な条件がついている.）たとえば高校以来おなじみの
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
は $x = 0$ で $\sin 0/0 = 0/0$ となり定義できない．

3) そちらのほうが情報量が多いので好まれる．

- 下線部「限りなく近づく」はあいまいな概念だが，ϵ-δ 論法（ϵ 論法）と呼ばれる方法で厳密に定式化することができる（参考書を参照.）.
- 極限 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ は存在すれば「一意的に」決まる．たとえば別の誰かが $\lim_{x\to a} f(x) = A'$ を証明したとすると，必ず $A = A'$ が成り立つ.
- $a = \pm\infty$ のときも同様に表す．たとえば

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}.$$

- $x \to a$ のとき $f(x)$ が限りなく大きくなれば，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to \infty \ \ (x \to a)$$

と表す．$-f(x)$ が限りなく大きくなれば，同様に

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to -\infty \ \ (x \to a)$$

と表す．両者とも「$\pm\infty$ に収束する」とは言わず，$\pm\infty$ に**発散する**とよぶ．たとえば，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

参考（右極限と左極限）．変数 x が $x < a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき $f(x)$ がある実数 A に限りなく近づくならば，これを

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to A \ \ (x \to a-0)$$

と表し,「$x \to a$ のとき関数 $f(x)$ は**左極限** A をもつ」という．同様に変数 x が $x > a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき $f(x)$ がある実数 A に限りなく近づくならば，これを

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to A \ \ (x \to a+0)$$

と表し,「$x \to a$ のとき関数 $f(x)$ は**右極限** A をもつ」という.

極限の性質．以下の公式は高校のころから「あたりまえ」のように用いていると思う：

公式 3-1（極限の四則）．$\lim_{x\to a} f(x) = A$，$\lim_{x\to a} g(x) = B$ のとき，次が成り立つ：

(1) $\lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = A + B$

(2) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$

(3) $B \neq 0$ のとき $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

証明は数列の極限の公式と同様なので省略する.

関数の連続性

関数のグラフが「つながっている」「ジャンプしない」ことを表現するのが，つぎの「連続性」である：

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定義（連続性）．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ がある $a \in I$ で**連続**であるとは，$x \to a$ のとき $f(x) \to f(a)$ となることをいう．すなわち，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

また，f がすべての $a \in I$ で連続であるとき,「f は I 上の連続関数」もしくは「関数 f は I 上で連続」などという．

例． $f(x) = c$（定数関数），$g(x) = x$ は連続関数．多項式関数，三角関数，指数・対数関数などの初等的な関数はすべて連続（あとで確認する）．

例． 関数 $h(x) = \dfrac{1}{x}$ は $(-\infty, 0)$ と $(0, \infty)$ 上で連続．($a \neq 0$，$f(x) = 1$，$g(x) = x$ として公式 3-1(3) を適用すればよい.)

連続関数を新たに「作る」ときに使える命題をふたつ証明抜きで紹介しておこう．

命題 3-2（連続関数の四則）． $f(x)$，$g(x)$ が $x = a$ で連続であるとき，その和（差）$f(x) \pm g(x)$ と積 $f(x)g(x)$ は $x = a$ で連続．さらに $g(a) \neq 0$ のとき，商 $f(x)/g(x)$ も連続.

命題 3-3（連続関数の合成）． $f : I \to J$，$g : J \to \mathbb{R}$ を連続な関数とするとき，これらを合成して得られる関数 $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$，$h(x) := g(f(x))$ は連続.

例題． $\dfrac{\cos 2x}{x^2 + 1}$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.

解答． 定数関数，$x \mapsto x$，$x \mapsto \cos x$ はそれぞれ連続である（$\cos x$ については後で証明する）.

命題 3-2 より $x \mapsto 2x$，$x \mapsto x \cdot x = x^2$ も連続関数の積なので連続．$x \mapsto x^2 + 1$ は連続関数の和なので連続．命題 3-3 より $x \mapsto \cos(2x)$ は連続関数の合成なので連続．$x^2 + 1 \neq 0$ と命題 3-2 より，$x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$ は連続関数の商なので連続. ■

連続性：微妙な例 1． $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ を $f(0) := 0$，$x \neq 0$ のとき $f(x) := \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{|x|}\right]}$ と定義する．ただし，$[y]$ は y を超えない最大の整数．このとき，f は $1/x$ がちょうど整数でない限り連続．とくに $x = 0$ でも連続である！

連続性：微妙な例 2． $g : \mathbb{R} \to [0, 1]$ を $g(0) := 0$，$x \neq 0$ のとき $g(x) := \sin \dfrac{1}{x}$ で定める．このとき，g は $x \neq 0$ のとき連続だが，$x = 0$ で連続ではない．

一方，$h(x) := xg(x) = x \sin(1/x)$ とすると，$x = 0$ でも連続となる．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

逆関数（指数・対数関数/三角・逆三角関数）

配布日：May 26, 2014　Version：1.1

＜前回 (5/19) のまとめと補足＞

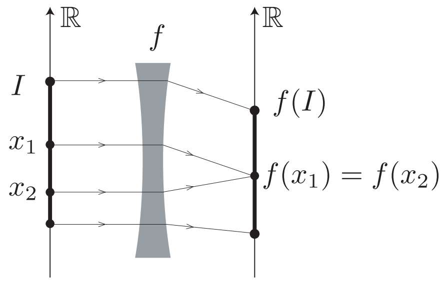
ふたつの連続関数の和・差・積・商や，それらを合成したものは（定義可能な範囲で）連続関数であることを学んだ（命題 3-2，命題 3-3）．これらは連続関数から新しい（そして有用な）関数を生成するうえで重要な操作だといえる．

今回はさらに新しい操作として,「逆関数をとる」という方法を学ぼう．具体的には，これによって指数関数と対数関数，それから逆三角関数という新しい関数を生成する．

1 対 1 関数．I を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．(多くの場合，I は区間で考える.)

> **定義**．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が **1 対 1** であるとは，すべて $x_1, x_2 \in I$ に対し，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ であることをいう．

注意．「$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$」は対偶をとると「$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$」と同値．
たとえば右の図は 1 対 1 で**ない**関数の例．1 対 1 関数では，このように異なる 2 点の像が 1 点に潰れることがあってはいけない．



例．$f(x) = x^2$ で定まる関数は，$f : [0,1] \to [0,1]$ と考えた場合は 1 対 1，$f : [-1,1] \to [0,1]$ と考えた場合は 1 対 1 でない．これはグラフを描けばわかるだろう．

もうすこし範囲を広げて，$f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が 1 対 1 関数であることもわかる．なぜなら，$x_1 < x_2$ のとき $x_1^2 < x_1x_2 < x_2^2$ が成り立つので,「$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$」が結論されるからである．

この性質を一般化してみよう．

> **定義**．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が**真に単調増加**であるとは，すべての $x_1, x_2 \in I$ に対し，$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つことをいう．関数が真に単調増加であれば，1 対 1 関数となる．

注意．同様に,「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$」が成り立つとき関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は**真に単調減少**であるという[1]．この場合も f は 1 対 1 関数である．

また，真に単調増加（減少）かどうかは関数を考えている区間によって変化する．$f(x) = x^2$ の場合，$f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ のとき真に単調減少，$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ のとき真に単調増加である．

逆関数．以上を踏まえて，1 対 1 関数の逆関数を定義しよう[2]．

---

1) 関数 $y = -f(x)$ が真に単調増加であると考えてもよい．
2) 1 対 1 でない関数の逆関数は考えない．そのかわりに「逆像」や「逆対応」とよばれる概念があるが，本講義では扱わない．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定義（逆関数）． 関数

$$f : I \to f(I) = J$$

が 1 対 1 であるとき，対応

$$x \overset{f}{\longmapsto} y = f(x)$$

の逆の対応

$$y \longmapsto x$$

が定まる．これを f の**逆関数**とよび，$f^{-1} : J \to I$ と表す.

例（$\sqrt{\ }$ の定義）． 真に単調増加な関数 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$，$f(x) = x^2$ は 1 対 1 なので逆関数が定まる．$X = f(x)$ と表すとき，逆関数 $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は

$$f^{-1}(X) = \sqrt{X} \quad \text{もしくは} \quad f^{-1}(X) = X^{\frac{1}{2}}$$

と表される[3)]．

より一般に，n を自然数とするとき関数 $f(x) = x^n$ は区間 $[0, \infty)$ 上で単調増加である．この事実を用いて,「実数 x の有理数べき」を定義できる．

定義（有理数べき）． n を自然数とするとき，関数 $X = f(x) = x^n$ の区間 $[0, \infty)$ における逆関数を $\sqrt[n]{X}$ もしくは $X^{\frac{1}{n}}$ で表し，X の n **乗根**と呼ぶ.

さらに，実数 $x > 0$ と整数 p，自然数 q に対し，

$$x^{\frac{p}{q}} := \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

で定める．これを x **の** p/q **乗**とよぶ.

注意.

- （復習）: p が負の整数の場合は $a^p := 1/a^{-p}$ と定義するのであった.
- （講義の補足）: 別の P と Q が $P/Q = p/q$ を満たすとき，$x^{P/Q} = x^{p/q}$ であることを確認しなくてはいけない.

  まず $\left(x^{P/Q}\right)^{qQ} = \left(x^{1/Q}\right)^{PqQ} = x^{Pq}$ であり，同様に $\left(x^{p/q}\right)^{qQ} = \left(x^{1/q}\right)^{pqQ} = x^{pQ}$．$Pq = pQ$ より，$x^{P/Q}$ と $x^{p/q}$ はともに $x^{Pq} = x^{pQ}$ の qQ 乗根であり，同じ値となる.
- （講義の補足）: 正の数 x と有理数 r と s に対し，指数法則

  $$x^r \cdot x^s = x^{r+s}, \qquad (x^r)^s = x^{rs}$$

  が成り立つのであった（証明を考えてみよ）．これは後で用いる.

これで正の数の有理数べき（有理数乗）が定まった．つぎに無理数べき（無理数乗）を定義しよう.

3) 逆関数の定義域が $[0, \infty)$ 全体になっているかどうかは本来確認が必要である.（f の連続性と中間値の定理が必要.）このあと指数関数から対数関数，三角関数から逆三角関数を作るときも同様である.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

命題 4-1（無理数べき）． x を正の実数，α を無理数とするとき，数列 $\{r_n\}$ を

(a) すべての自然数 n で $r_n \in \mathbb{Q}$.

(b) すべての自然数 n で $r_n < r_{n+1}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$

が成り立つように取る．このとき，$\lim_{n\to\infty} x^{r_n}$ が存在し，数列 $\{r_n\}$ の取り方に依存しない．これを x^α と表し，**x の α 乗**とよぶ.

注意． 任意の実数 α に対し，(a)(b)(c) を満たす $\{r_n\}$ を見つけることは難しくない．例えば $\alpha > 0$ のときは，これを小数展開して，小数点以下第 n 位までで打ち切ったものを用いればよい.

例． $\alpha = \sqrt{2} = 1.41421356...$ のとき，

$$\{r_n\} = \{1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421, \cdots\}$$

とする．このとき，例えば

$$e^{\sqrt{2}} := \lim_{n\to\infty} e^{r_n}$$

とすることで「e の $\sqrt{2}$ 乗」が定まる.

証明（命題 4-1）． $x > 1$ のときを示す. ($0 < x < 1$ のときも同様，$x = 1$ のときは明らか.)

一般に，有理数 r と s に対し，$r < s$ ならば $x^r < x^s$ を示そう．関数 $y = x^{s-r}$ が単調増加であることに注意すると，有理数の指数法則より，$x^s - x^r = x^r(x^{s-r} - 1) > x^r(1^{s-r} - 1) = 0$．これより，$\{x^{r_n}\}$ は単調増加だとわかった．つぎに $\alpha < m$ を満たす任意の整数をとると，すべての n で $r_n < m$ が成り立つので $x^{r_n} < x^m$．よって $\{x^{r_n}\}$ は上に有界である.

以上から，極限 $\lim_{n\to\infty} x^{r_n}$ が存在することがわかった.

最後に，この極限が r_n の取り方に依存しないことを示そう．$\{s_n\}$ が (a)(b)(c) を満たすとしよう．このとき $r_n - s_n = (\alpha - s_n) - (\alpha - r_n) \to 0\ (n\to\infty)$ でなくてはならない．$x^{r_n} - x^{s_n} = x^{s_n}\{x^{r_n - s_n} - 1\}$ であるから，有理数の列 $\{q_n = r_n - s_n\}$ が $q_n \to 0\ (n \to \infty)$ を満たすとき $x^{q_n} \to 0$ を示せばよい．$|q_n| < 1/m$ となる最大の m を m_n とおくと，$m_n \to \infty\ (n\to\infty)$ である．よって命題 2-2(1) より $x^{|q_n|} < x^{1/m_n} \to 1$. $q_n < 0$ のときは $x^{|q_n|} = 1/x^{q_n}$ であるから，$\lim_{n\to\infty} x^{q_n} = 1$ が示された. ■

指数関数.

定義（指数関数）． 実数 x に e の x 乗を対応させる関数を**指数関数**とよび，$\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$，$\exp x = e^x$ のように表す.

より一般に，$a > 0$ を固定し実数 x に a の x 乗 a^x を対応させる関数を **a を底とする指数関数**とよぶ.

$a = 1$ のときは常に $a^x = 1$ となり定数関数であることに注意．また，次が成り立つ.

定理 4-2（指数関数の性質）． $a > 0$ とする．このとき，以下が成り立つ：

(1) （指数法則）任意の実数 x, y に対し，$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

(2) $a > 1$ のとき，関数 $x \mapsto a^x$ は真に単調増加かつ連続.

(3) $a < 1$ のとき，関数 $x \mapsto a^x$ は真に単調減少かつ連続.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

証明. (1)：$r_n \to r$，$s_n \to s$ となる真に単調増加な有理数列を取る．このとき $r_n + s_n$ も真に単調増加で，$r+s$ に収束する．よって有理数べきの指数法則から $\lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}a^{s_n}$ となり，求める等式をえる．
(2)$x<y$ のとき $a^y - a^x = a^x(a^{y-x}-1) > a^x(1^{y-x}-1) = 0$．よって真に単調増加．つぎに連続性を示そう．次に実数 x を任意に固定し，$y \to x$ としたときの a^y の極限を考えよう．$|y-x| < 1/n$ となる自然数 n で最大のものをとると，$y\to x$ のとき $n\to\infty$．よって命題 2-2(1) より $1 < a^{|y-x|} < a^{1/n} \to 1$．これより $y \to x+0$ のとき $0 < a^y - a^x = a^x(a^{y-x}-1) \to 0$．同様に $y \to x-0$ のとき $0 < a^x - a^y \to 0$ が成り立つので，$y\to x$ のとき $a^y \to a^x$．すなわち関数 $x \mapsto a^x$ は連続．
(3) は (2) と同様. ■

対数関数.

> **定義（対数関数）.** 定理 4-2(2) より，関数 $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$，$x \mapsto e^x$ には逆関数が存在する．それを**対数関数**（もしくは自然対数）とよび，$\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$，$x \mapsto \log x$ のように表す.
>
> 　より一般に，$a>0, a\neq 1$ を固定するとき，定理 4-2 の (2) と (3) により関数 $x \mapsto e^x$ には逆関数が存在する．それを a **を底とする対数関数**とよび，$\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$，$x \mapsto \log_a x$ のように表す．とくに，$\log_e x = \log x$ である．

$\log x$ は $\ln x$ と表すこともある．[4] また，定理 4-2 から，次の定理が導かれる．

> **定理 4-3（対数関数の性質）.** $a>0, a\neq 1$ とする．このとき，以下が成り立つ：
>
> (1) 任意の正の実数 x，y に対し，$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$.
>
> (2) $a>1$ のとき，関数 $x \mapsto \log_a x$ は真に単調増加かつ連続.
>
> (3) $a<1$ のとき，関数 $x \mapsto \log_a x$ は真に単調減少かつ連続.

三角関数.　高校以来おなじみの三角関数の定義をおさらいしておこう．

> **定義（三角関数）.** xy 平面上で $x^2+y^2=1$ で定まる単位円を考える．点 $(1,0)$ から円周を θ ラジアン進んだ点 $\mathrm{P}(\theta)$ の座標を $(\cos\theta, \sin\theta)$ と表す.
>
> 　また，$\cos\theta \neq 0$ のとき，すなわち $\theta \neq (m+1/2)\pi$ (m は整数) のとき，線分 $\mathrm{OP}(\theta)$ の傾きを $\tan\theta$ で表す．すなわち，$\tan\theta := \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.
>
> 　$\sin x$ は**正弦関数**もしくは**サイン** x，$\cos x$ は**余弦関数**もしくは**コサイン** x，$\tan x$ は**正接関数**もしくは**タンジェント** x とよばれ，これらをあわせて**三角関数**とよぶ．

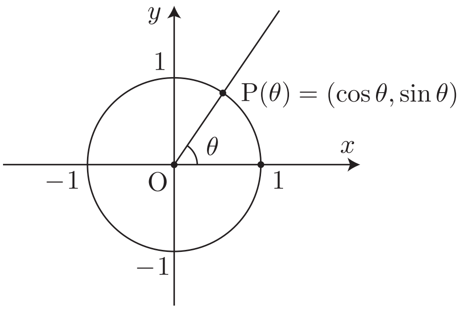
三角関数の定義より，

(S) $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ は真に単調増加

(C) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ は真に単調減少

(T) $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ は真に単調増加

である．よってそれぞれの関数には逆関数が定まる．



[4] ちなみに指数関数は英語で exponential function，対数関数は logarithmic function. ln はラテン語の logarithmus naturalis （英語に直すと natural logarithm，日本語だと「自然な対数」）.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定義（逆三角関数）．上の (S)，(C)，(T) の逆関数をそれぞれ

(S') $\mathrm{Sin}^{-1} : [-1,1] \to [-\pi/2 \to \pi/2],\ x \mapsto \mathrm{Sin}^{-1}\, x$

(C') $\mathrm{Cos}^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi],\ x \mapsto \mathrm{Cos}^{-1}\, x$

(T') $\mathrm{Tan}^{-1} : (-\infty,\infty) \to (-\pi/2 \to \pi/2),\ x \mapsto \mathrm{Tan}^{-1}\, x$

と表す．$\mathrm{Sin}^{-1}\, x$ は**逆正弦関数**もしくは**サインインバース** x，$\mathrm{Cos}^{-1}\, x$ は**逆余弦関数**もしくは**コサインインバース** x，$\mathrm{Tan}^{-1}\, x$ は**逆正接関数**もしくは**タンジェントインバース** x とよばれ，これらをあわせて**逆三角関数**とよぶ．

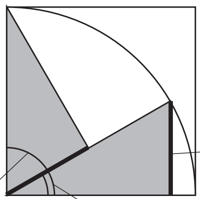
注意． $\mathrm{Sin}^{-1}\, x$，$\mathrm{Cos}^{-1}\, x$，$\mathrm{Tan}^{-1}\, x$ はそれぞれ $\mathrm{Arcsin}\, x$，$\mathrm{Arccos}\, x$，$\mathrm{Arctan}\, x$ とも書かれ，それぞれ**アークサイン** x，**アークコサイン** x，**アークタンジェント** x と呼ばれることもある（本講義では用いない）．

例． $\mathrm{Sin}^{-1}\, 0 = 0$，$\mathrm{Sin}^{-1}\, 1 = \dfrac{\pi}{4}$，$\mathrm{Sin}^{-1}\, \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$，など．

例． $x \in [0,1]$ のとき，

$$\mathrm{Sin}^{-1}\, x + \mathrm{Cos}^{-1}\, x = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．理由は次の図をぢっと眺めればわかるだろう．(グラフを見ると $x \in [-1,1]$ で正しいこともわかる．証明を考えてみよ.)



レポート問題

締め切りは 6 月 2 日の講義開始時とします．表紙をつけ，レポートの左上隅（ホッチキスのヨコあたり）に学籍番号も書いてください．

問題 5-1（双曲線関数）． 次で与えられる関数を**双曲線関数**とよぶ[5)]：

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

これらのグラフの概形を描け．また，以下を示せ：

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$（ただし $\cosh^2 x = (\cosh x)^2, \sinh^2 x = (\sinh x)^2$）

(2) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

(3) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

問題 5-2（中間値の定理の応用）． 方程式 $x^5 - 3x^4 + 1 = 0$ は $(-1,0), (0,1), (1,3)$ の各区間に解を持つことを示せ．

5) 日本語ではハイパボリック・サイン x，ハイパボリック・コサイン x，ハイパボリック・タンジェント x と読む．

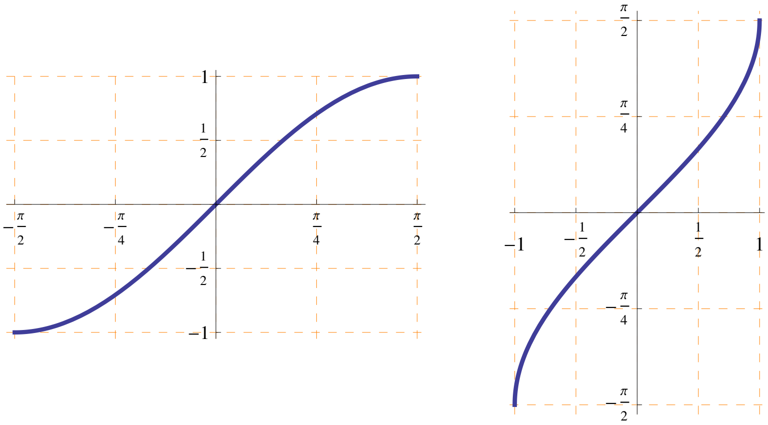


図 1: $\sin x$ と $\mathrm{Sin}^{-1}\, x$

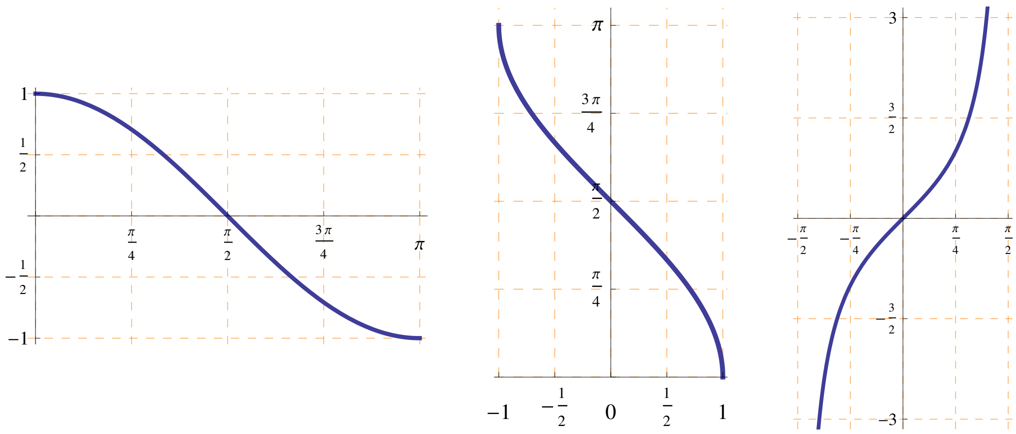


図 2: $\cos x$ と $\mathrm{Cos}^{-1}\, x$，$\tan x$

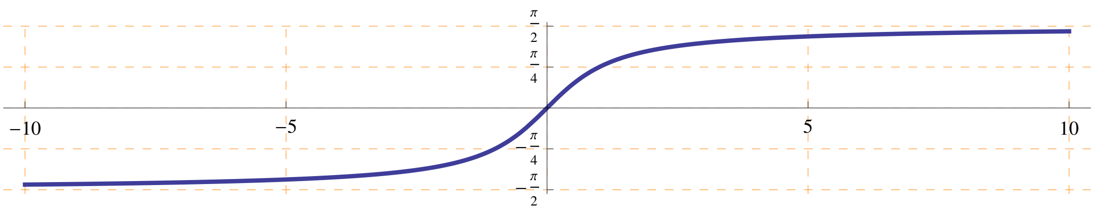


図 3: $\mathrm{Tan}^{-1}\, x$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

中間値の定理・微分可能性

配布日： June 2, 2014　Version： 1.1

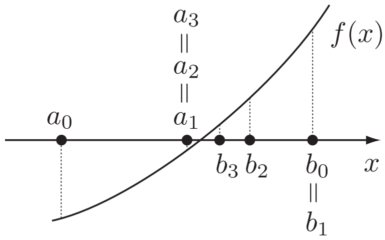
＜前回 (5/26) のまとめと補足＞

方程式の数値解法（二分法）と中間値の定理

最初にこの講義の「概念的な」目標として，与えられた関数について方程式 $f(x) = 0$ の解を任意の精度で求める，ということを掲げた．

その方法をひとつ紹介しよう．

二分法． 連続関数 $y = f(x)$ にたいし，方程式 $f(x) = 0$ の解 α を数値的に求めることを考えよう．この手の方程式の数値計算でもっとも初歩的な方法が，**二分法**と呼ばれるつぎのアルゴリズムである：



(1) $f(a_0) < 0$, $f(b_0) > 0$ となるペア a_0, b_0 を見つける．必要であれば $f(x)$ のかわりに $-f(x)$ を考えることで，$a_0 < b_0$ と仮定してよい．

(2) ペア $a_n < b_n$ $(n \geq 0)$ が与えられているとき，

- $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (\frac{a_n+b_n}{2}, b_n)$.
- $f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (a_n, \frac{a_n+b_n}{2})$.
- $f(\frac{a_n+b_n}{2}) = 0$ ならば $\alpha := \frac{a_n+b_n}{2}$，計算終了．

この (2) を繰り返すと，$\{a_n\}$ は単調増加かつ $a_n < b_0$ （上に有界），$\{b_n\}$ は単調減少かつ $a_0 < b_n$ （下に有界）より，それぞれある実数に収束する．$\alpha = \lim a_n$ とすると，$|b_n - a_n| = |b_0 - a_0|/2^n \to 0$ より $b_n = (b_n - a_n) + a_n \to 0 + \alpha = \alpha$ $(n \to \infty)$. f は連続であったから，$f(\alpha) = \lim f(a_n) \leq 0$ かつ $f(\alpha) = \lim f(b_n) \geq 0$. よって $f(\alpha) = 0$ となる．したがって，十分大きな n にたいし a_n もしくは b_n を α の近似値として用いることができる．しかも，誤差（精度）の評価式は次で与えられる：

$$\max\{|a_n - \alpha|,\ |b_n - \alpha|\} \leq |b_n - a_n| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}$$

具体例（$\sqrt{2}$ の計算）． 実際に $f(x) = x^2 - 2$, $(a_0, b_0) = (1.0, 2.0)$ として計算したのが下の表である．a_n, b_n と真の値 $\sqrt{2}$ との誤差は $1/2^n$ 以下である．

n	a_n	b_n
0	1.0	2.0
1	1.0	1.5
2	1.25	1.5
3	1.375	1.5
4	1.375	1.4375
5	1.40625	1.4375
6	1.40625	1.42188
7	1.41406	1.42188

n	a_n	b_n
8	1.41406	1.41797
9	1.41406	1.41602
10	1.41406	1.41504
11	1.41406	1.41455
12	1.41406	1.41431
13	1.41418	1.41431
14	1.41418	1.41425
15	1.41418	1.41422

n	a_n	b_n
16	1.4142	1.41422
17	1.41421	1.41422
18	1.41421	1.41422
19	1.41421	1.41422
20	1.41421	1.41421
21	1.41421	1.41421
22	1.41421	1.41421
23	1.41421	1.41421

注意. この表は小数で表現しているが，二分法のアルゴリズムより，ここに現れる (a_n, b_n) はすべて有理数である．実数の連続性の公理を仮定しないと，最終的な無理数解 $\sqrt{2}$ の存在が保証されないことに注意しよう．

理論面での応用. 二分法は方程式の数値解法としてはあまり有用なほうではない．そのうち紹介するニュートン法など，もっと優秀なアルゴリズムが存在するからである．しかし，二分法はつぎの**中間値の定理**の実質的な証明を与えるという点で，理論面での存在価値は大きい：

定理 5-1（中間値の定理）. 連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が $f(a) \neq f(b)$ を満たすとき，任意の $f(a)$ と $f(b)$ の間の実数 ℓ に対し，$f(c) = \ell$ を満たす $c \in [a, b]$ が存在する．

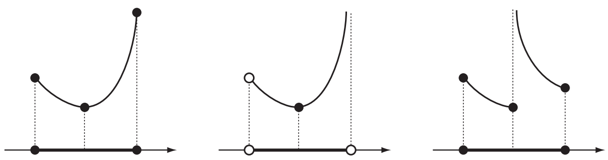
証明. $g(x) = f(x) - \ell$ に二分法を適用すると，$g(c) = 0$ を満たす $c \in [a, b]$ が見つかる． ■

注意. 中間値の定理は連続関数のグラフが「つながっている」ことのひとつの説明になっている．

閉区間上の最大値・最小値の存在. ここで連続関数の重要な性質として，次の定理を紹介しておこう．

定理 5-2 閉区間 上で定義された 連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は，最大値と最小値を持つ．

注意. 一見「あたりまえ」のことを言っているようだが,「閉区間でない」場合,「連続関数でない」場合には，最大値・最小値がその区間内で実現されない可能性があることに注意しておこう．



証明のスケッチ. 区間 $[a, b]$ を 2^n 等分（$n = 0, 1, 2, \ldots$）して得られる区間の端点の集合を X_n で表す．たとえば $n = 2$ のとき，$X_2 = \{a, (3a + b)/4, (a + b)/2, (a + 3b)/4, b\}$ である．$X_n \subset X_{n+1}$ であるから，$M_n = \max\{f(x) \mid x \in X_n\}$ は単調増加．$f(x_n) = M_n$ となる $x_n \in [a, b]$ をとると，数列 $\{x_n\} \subset [a, b]$ から単調な部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k \geq 1}$ を取ることで $x = \lim_{k\to\infty} x_{n(k)} \in [a, b]$ が存在するとしてよい．$\{M_n\}$ が有界でないと仮定すると，$M_{n(k)} = f(x_{n(k)}) \to \infty$ $(k \to \infty)$ であるが，連続性より $f(x_{n(k)}) \to f(x) < \infty$ に矛盾する．よって $\{M_n\}$ は有界であり，$M = \lim_{n\to\infty} M_n$ が存在する．また連続性より，$M = f(x)$ でなくてはならない．これが最大値であることを確認しよう．もし $f(y) > M$ となる y が存在すると，連続性より十分大きな n について，X_n の中に $f(y') > M$ を満たす y' が存在する．これは $f(y') \leq M_n \leq M$ に矛盾する． ■

逆関数の連続性

次の定理は前回，指数関数・対数関数を定義するときに暗に用いた．

定理 5-3（逆関数の連続性） $I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．関数 $f : I \to f(I) = J$ が 真に単調増加 かつ 連続 であれば，J も区間であり，$f^{-1} : J \to I$ も 真に単調増加 かつ 連続．

もちろん,「単調増加」は「単調減少」に変えてもよい．

例. $a > 1$ のとき，$f : (-\infty, \infty) \to (0, \infty), f(x) = a^x$ は真に単調増加かつ連続．よって $f^{-1} : (0, \infty) \to (-\infty, \infty), f^{-1}(x) = \log_a x$ も同様．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

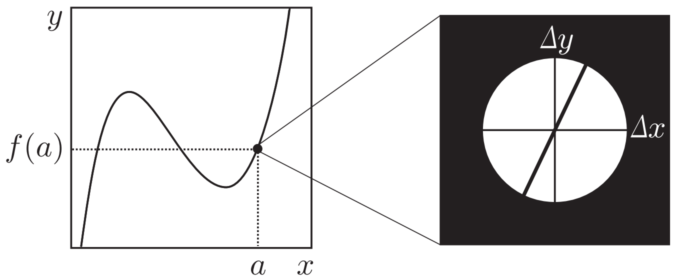
証明のスケッチ. J が区間であることは中間値の定理からわかる．また，$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ であるから，$y_1 < y_2$ ならば $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ でなくてはならない．

f^{-1} の連続性は，ϵ 論法を用いて示す（参考書 [南]，p275.）． ■

微分可能性

微分の計算には高校時代から慣れ親しんでいるだろうから，その意味について少し深めに追求してみよう．

関数が「微分可能」であるとはどういうことか．直感的な説明ではあるが，次のように解釈できる：まず，$y = f(x)$ のグラフ上の点を，顕微鏡で拡大する．拡大率が十分であれば，顕微鏡の中に現れたグラフの断片は，あたかも線分のように見えるであろう．これは，関数のグラフが局所的に,「ほぼ比例関数」になっていることを意味する．



定義（微分可能性）

- 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で**微分可能**であるとは，極限

$$A = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (*)$$

が存在することをいう．この A を a における**微分係数**と呼び，$f'(a)$ と表す．

- 関数 $y = f(x)$ が I **上で微分可能**であるとは，f が I 上で定義されており，すべての $a \in I$ で $f(x)$ が微分可能であることをいう．

- 関数 $y = f(x)$ が I **上で微分可能**であるとき，$x \in I$ に $f'(x)$ を対応させる関数 $f' : I \to \mathbb{R}$ を f の**導関数**とよび，

$$f'(x),\ y',\ \frac{df}{dx}(x),\ \frac{d}{dx}f(x),\ \frac{dy}{dx},\ Df(x)$$

のように表す.（いずれの記号もよく用いられる.）

微分可能性の意味. 式 $(*)$ で定義される微分可能性と微分係数の意味をもう少し詳しく見ておこう．先の図で「顕微鏡内の座標系」にあたるものとして，

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a)$$

と定義する．$(*)$ は

$$A = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

を意味するから，$\Delta x \approx 0$ のとき $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx A$，すなわち $\Delta y \approx A\,\Delta x$．これは「顕微鏡内ではほとんど比例関数」であることを数学的に表現したものである．

もう少し精密に「ほとんど」の部分を表現してみよう．$x \to a$ のとき平均変化率 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ は微分係数 $f'(a) = A$ を近似するから，その誤差を表す関数として

$$\begin{cases} r_a(x) := \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - A & (x \neq a) \\ r_a(a) = 0 & (x = a) \end{cases}$$

と定めると，$x \to a$ のとき $r_a(x) \to 0$ を満たす．この関数を用いると，関数 $f(x)$ は

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \underline{r_a(x)(x-a)}$$

のように表現できる．下線部について，一般に $x \to a$ のとき

$$\frac{g(x)}{x-a} \to 0$$

となる関数 $g(x)$ は $o(x-a)$ のように略記する（**ランダウの記号**）．下線部はその性質を満たすから，

$$\begin{aligned} & f(x) - f(a) = A(x-a) + \underline{o(x-a)} \\ \iff & f(x) = \underline{\underline{f(a) + A(x-a)}} + \underline{o(x-a)}. \end{aligned}$$

二重下線部は $f(x)$ の $x = a$ における接線の方程式であり，下線部が「誤差」にあたる量を表現している．このように関数を $\underline{\underline{\text{1 次関数}}}$ + $\underline{\text{誤差}}$ の形で表現するというアイディアは，後にテイラー展開や多変数関数の微分へと発展していくのである．

レポート問題

締め切りは 6 月 9 日の講義開始時とします．表紙をつけ，レポートの左上隅（ホッチキスのヨコあたり）に学籍番号も書いてください．

問題 6-1（関数の微分）． 関数の定義域に注意しつつ，以下を証明せよ．ただし $a > 0$ とする．：

(1) $\{\tan x\}' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$　　(2) $\{a^x\}' = a^x \log a$

(3) $\left\{\mathrm{Cos}^{-1}\, x\right\}' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(4) $\left\{\mathrm{Tan}^{-1}\, x\right\}' = \dfrac{1}{1+x^2}$

問題 6-2（関数の 1 次近似）． 関数の 1 次近似（接線の方程式による近似）を用いて，次の値の近似値を求めよ．また，得られた近似値と真の値との誤差が何パーセント程度か計算せよ．ただし，普通の電卓は用いてもよい．

(1) $\cos 63^\circ$（真の値は $0.4539904997\cdots$）

(2) $\sqrt[3]{28}$ （真の値は $3.0365889718\cdots$）

ただし，必要なら $\pi = 3.1415926535\cdots$，$\sqrt{3} = 1.7320508075\cdots$ を適当に四捨五入して用いてよい．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

微分と１次近似

配布日：June 9, 2014　Version：1.1

＜前回 (6/2) のまとめと補足＞

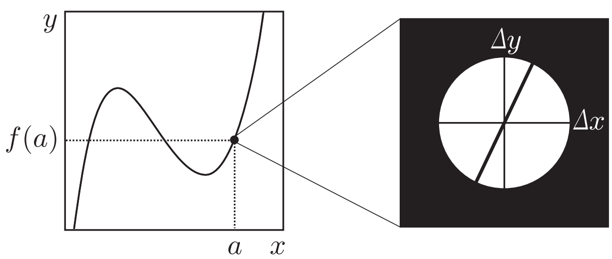
微分とは何か（復習，あるいは再解釈）

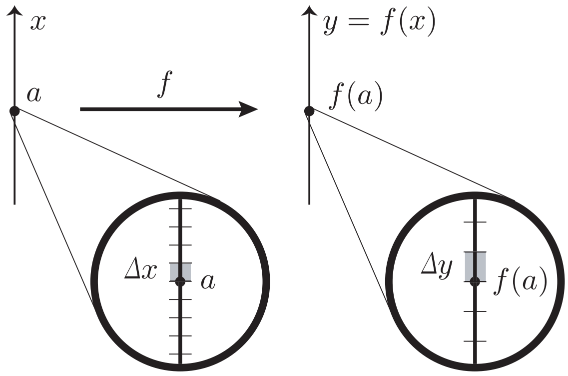
定義（微分可能性） 関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で**微分可能**であるとは，極限

$$(*)\qquad A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在することをいう．この A を a における**微分係数**と呼び，$f'(a)$ と表す．

まず，$y=f(x)$ のグラフ上の点を，顕微鏡で拡大する．拡大率が十分であれば，顕微鏡の中に現れたグラフの断片は，あたかも線分のように見えるであろう．これは，関数のグラフが局所的に，「ほぼ比例関数」になっていることを意味する．





さらに，数直線から数直線からの対応を「顕微鏡」で観察してみる．「x 軸に等間隔で打たれた目盛り」の f による像は，y 軸側でもほぼ等間隔に見えるはずである．その間隔の拡大率が微分係数になっている．

微分可能性の意味． 式 $(*)$ で定義される微分可能性と微分係数の意味をもう少し詳しく見ておこう．先の図で「顕微鏡内の座標系」にあたるものとして，

$$\Delta x=x-a,\quad \Delta y=f(x)-f(a)$$

と定義する．$(*)$ は

$$A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

を意味するから，$\Delta x\approx 0$ のとき $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\approx A$，すなわち $\Delta y\approx A\,\Delta x$．これは「顕微鏡内ではほとんど比例関数」であることを数学的に表現したものである[1]．もとの変数 x で表現すると，次のようになる[2]：

$$(**)\qquad f(x)-f(a)\approx A(x-a)\iff f(x)\approx f(a)+A(x-a)\text{：接線の方程式}$$

[1] $X\approx Y$ は「X と Y はほぼ等しい」ことを表す記号である．「ほぼ等しい」の意味はきっちりと定義されることもあるし，あいまいに読み手の解釈（誤差の許容度）に任せることもある．ここでは後者の立場で使っている．$X\simeq Y$ や $X\sim Y$ のように書かれることもある．(日本では≒を用いられることも多い．)

[2] もう少し正確に，ランダウの記号を用いると $f(x)=f(a)+A(x-a)+o(x-a)$ のようにも表される．もっと正確には，$x\to a$ のとき $r_a(x)\to 0$ となる関数を用いて $f(x)=f(a)+A(x-a)+r_a(x)(x-a)$ と表される．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

と同値であることに注意しよう．

応用．

> **例題 1．** $\sin 47^\circ$ の近似値を求めよ．

解答． $47^\circ = 45^\circ + 2^\circ = \pi/4 + \pi/90$ より，$(**)$ で $f(x) = \sin x$，$a = \pi/4$ と代入すれば，

$$f(x) \approx f(\pi/4) + f'(\pi/4)(x - \pi/4) = \sin(\pi/4) + \cos(\pi/4)(x - \pi/4).$$

これに $x = 47^\circ = \pi/4 + \pi/90$ を代入すれば，

$$\sin 47^\circ = f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \approx 0.73179\cdots.$$

（$\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$，$\pi = 3.1415926\cdots$ は既知として計算した．）これは真の値（$0.7313537\cdots$）と比べて約 0.06% ほど誤差がある．すなわち，10m にたいして 6mm，1 万円にたいして 6 円程度の誤差である．このぐらいの精度で十分，という場面も多いだろう．

> **例題 2．** $\sqrt{26}$ の近似値を求めよ．

解答． まず $\sqrt{26} = \sqrt{25+1} = 5\sqrt{1 + \frac{1}{25}}$ と変形する．$(**)$ で $f(x) = \sqrt{x}$，$a = 1$ を代入すれば，

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + \frac{1}{2}(x-1).$$

ただし $\{\sqrt{x}\}' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ を用いた[3]．よって $x = 1 + 1/25$ を代入すると，

$$\sqrt{1 + \frac{1}{25}} = f\left(1 + \frac{1}{25}\right) \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50} = 1 + \frac{1}{50}$$

．これより $\sqrt{26} \approx 5 + 1/10 = 5.1$ を得る．$(5.1)^2 = 26.01$ なので意外とよい近似になっている．実際，真の値（$5.0990195\cdots$）との相対誤差は 約 0.02%.

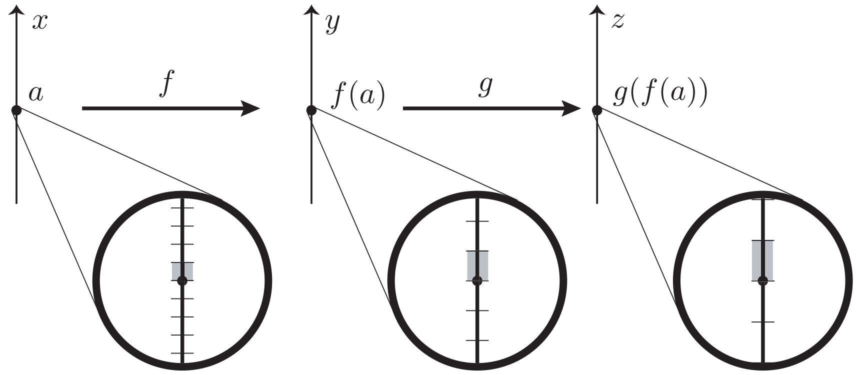
微分の公式

> **公式 6-1．** 関数 $f(x), g(x)$ が微分可能であるとき，次が（左辺の関数が定義できる範囲で）成り立つ：
>
> (1) $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$.
>
> (2) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.　　（ライプニッツ則）
>
> (3) $g(x) \neq 0$ であれば $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$.
>
> (4) $\{g(f(x))\}' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$．もし $y = f(x)$，$z = g(y)$ と表すならば，
>
> $$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

[3] 講義では $y = x^2$ の $x = 1$ での接線の傾き 2 をもとめて，f がその逆関数であることを用いて $f'(1) = 1/2$ を幾何学的に導いた．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

注意. 微分係数は，関数の局所的な拡大率を表すのであった．すなわち上の公式は $a \xmapsto{f} f(a) \xmapsto{g} g(f(a))$ という変化において，f によって局所的にほぼ $f'(a)$ 倍され，そのあと g によって局所的にほぼ $g'(f(a))$ 倍されるという事実を式で表現したものになっている．



証明（概略）． 証明のアイディアをランダウの記号で表現してみよう．$x = a$ で $f(x)$，$g(x)$ が微分可能であるとき，$x \to a$ のとき

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a),\quad g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a)$$

と表されるのであった．ふたつの式を足し合わせると

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + \{f'(a) + g'(a)\}(x-a) + o(x-a).$$

であるから[4]，$x \to a$ のとき

$$\frac{\{f(x)+g(x)\} - \{f(a)+g(a)\}}{x-a} = \{f'(a)+g'(a)\} + \frac{o(x-a)}{x-a} \to f'(a) + g'(a).$$

よって関数 $f(x) + g(x)$ の $x = a$ における微分係数は $f'(a) + g'(a)$．これは (1) を意味する．
　つぎにふたつの式を掛け合わせて整理すれば，

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \{f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)\}\{g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a)\} \\ &= f(\alpha)g(\alpha) + \{f'(\alpha)g(\alpha) + f(\alpha)g'(\alpha)\}(x-\alpha) + o(x-\alpha) \end{aligned}$$

を得る[5]．よって関数 $f(x)g(x)$ の $x = a$ における微分係数は $f'(\alpha)g(\alpha) + f(\alpha)g'(\alpha)$．これは (2) を意味する．(3) は $f(x) = 1$（定数関数）の場合にあたる $\{1/g(x)\}' = -g'(x)/g(x)^2$ を証明してから，(2) を適用すればよい．

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} = \frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)} = -\frac{g'(a)(x-a) + o(x-a)}{g(x)g(a)} = -\frac{g'(a)}{g(x)g(a)}(x-a) + o(x-a).$$

より，$x \to a$ のとき

$$\frac{1/g(x) - 1/g(a)}{x-a} = \frac{g'(a)}{g(x)g(a)} + \frac{o(x-a)}{x-a} \to \frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

　(4) は少しデリケートなのでランダウ記号でごまかさずに証明してみよう．$f(a) = b$ とおき，$y = b$ で g が微分可能であるとする．このとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a) \\ g(y) &= g(b) + g'(b)(y-b) + R(y)(y-b) \end{aligned}$$

（ただし $\lim_{x\to a} r(x) = \lim_{y\to b} R(y) = 0$）と表される．このとき，

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(a)) &= g(y) - g(b) = g'(b)(y-b) + R(y)(y-b) \\ &= g'(f(a))\{f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)\} + R(y)\{f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)\}. \end{aligned}$$

---

4) たとえば $o(x-a) \pm o(x-a)$ は $o(x-a)$ に置き換えてよい．理由はランダウ記号の定義に戻って考えればわかる．
5) たとえば $g(\alpha) \cdot o(x-a)$，$(x-a) \cdot o(x-a)$ は $o(x-a)$ に置き換えてもよい．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

すなわち
$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=g'(f(a))\,f'(a)+\underline{g'(f(a))r(x)+R(y)\{f'(a)+r(x)\}}$$
$x\to a$ のとき $y=f(x)\to b=f(a)$ であるから，下線部は 0 に収束する．よって関数 $g(f(x))$ の $x=a$ における微分係数は $g'(f(a))f'(a)$. ■

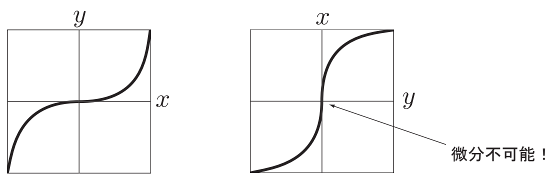
定理 6-2（逆関数の微分）．関数 $f:I\to f(I)=J$ が単調増加で，I 上微分可能かつ $f'(x)\neq 0$ であると仮定する．このとき

(1) 関数 $f^{-1}:J\to I$ も単調増加であり，J 上微分可能.

(2) $y=f(x)$, $x=f^{-1}(y)$ と表すとき，
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\iff\frac{d}{dy}f^{-1}(y)=\frac{1}{\dfrac{d}{dx}f(x)}.$$

証明（概略）．(1) の単調増加性は前回の定理 5-3 の証明と同様なので，微分可能性を示す．$x=a$ で $y=f(x)$ が微分可能と仮定する．$b=f(a)$，$\Delta x=x-a$，$\Delta y=f(x)-f(a)=y-b$ とおくと，$\Delta x=f^{-1}(y)-f^{-1}(b)$ である．f の連続性より $\Delta x\to 0$ ならば $\Delta y\to 0$．定理 5-3 より f^{-1} も連続であるから，$\Delta y\to 0$ ならば $\Delta x\to 0$．よって
$$\frac{dx}{dy}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$
■

注意. $f'(a)=0$ となる a が存在してはいけない．たとえば $y=f(x)=x^3$，$x=g(y)=y^{1/3}$ は互いに逆関数であるが，$g'(0)$ は存在しない．



例題. 次を示せ：
$$\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|<1)$$

解答. $y=\mathrm{Sin}^{-1}x$ $(|x|<1)$ より $x=\sin y$ $(|y|<\pi/2)$．よって
$$\frac{dx}{dy}=\cos y\quad(>0)$$
$$\overset{\text{定理 6-2}}{\Longrightarrow}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
■

対数微分法.

公式 6-3. $y=f(x)\neq 0$ が微分可能であるとき，
$$\frac{d}{dx}\{\log|f(x)|\}=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{y'}{y}.$$

証明.　$z = \log|y|$ とおくと，$\dfrac{dz}{dy} = 1/y$．よって公式 6-1(4) より

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot y'.$$

■

この公式そのものはあまり使い勝手がよくないが，次の「対数微分法」とよばれる応用がある．

> **例題.**　$y = x^x$ $(x > 0)$ を微分せよ．

解答.　関数の両辺の対数をとると，$\log y = x\log x$．公式 6-3 を用いて x で微分すると，

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1.$$

ゆえに $y' = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$． ■

有名な関数の微分公式.　今後よく用いる関数の微分をまとめておく．

> **公式 6-4.**　α は実数，a は正の実数とする．
>
> $$\{x^\alpha\}' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \{e^x\}' = e^x \qquad \{\log|x|\}' = \frac{1}{x}$$
>
> $$\{\sin x\}' = \cos x \qquad \{\cos x\}' = -\sin x \qquad \{\tan x\}' = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$$
>
> $$\{\mathrm{Sin}^{-1}\,x\}' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \{\mathrm{Cos}^{-1}\,x\}' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \{\mathrm{Tan}^{-1}\,x\}' = \frac{1}{1+x^2}$$
>
> ただし $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ と $\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ の微分は $|x| < 1$ のときのみ．

注意.　$\{a^x\}' = a^x \log a$ も比較的よく用いられるが，$a = e^{\log a}$ より $a^x = e^{x\log a}$ であるから，$\{a^x\}' = e^{x\log a}\log a = a^x \log a$．覚えるまでもない．

レポート問題

締め切りは 6 月 16 日の講義開始時とします． 表紙をつけ，レポートの左上隅（ホッチキスのヨコあたり）に学籍番号も書いてください．

問題 7-1（対数微分法）.　対数微分法を用いて，次の関数を微分せよ．

(1) $(\sin x)^{\cos x}$　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}}$

(3) $x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{Sin}^{-1}\,x$　(4) $f(x)g(x)h(x)$

問題 7-2（双曲線関数の逆関数）.　関数 $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ を考える．

(1) $\sinh x$ は真に単調増加であることを示せ．

(2) その値域は $\mathbb{R}$ 全体であることを示せ．(Hint. 中間値の定理を用いる.)

(3) 逆関数 $x = \sinh^{-1} y$ の導関数を y の式で表せ．(Hint. 上の例題と $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.)

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

平均値の定理

配布日：June 16, 2014　Version：1.1

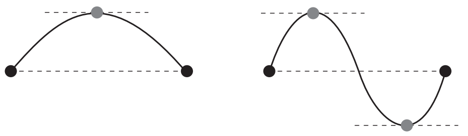
＜前回 (6/9) のまとめと補足＞

ロルの定理

前々回，次の定理を紹介した．

定理 5-2． 閉区間 上で定義された 連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は，最大値と最小値を持つ．

いま $f(a)=f(b)$ を仮定しよう．さらに開区間 (a,b) 上で微分可能であれば，最大値もしくは最小値を実現する点では微分係数が 0 になっているように思われる．すなわち，



定理 7-1（ロルの定理）．

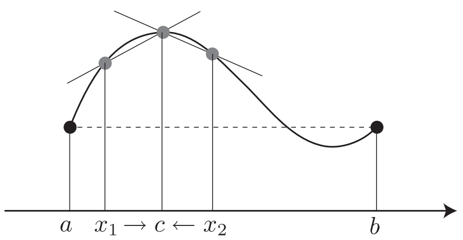
- 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続で，
- (a,b) 上で微分可能とする．さらに
- $f(a)=f(b)$ が成り立つとき，

$f'(c)=0$ となる c が区間 (a,b) に（少なくともひとつ）存在する．

証明． f が定数関数のとき定理は明らかなので，f は定数関数でないと仮定する．関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続なので最大値 M と最小値 m を持つが（定理 5-2），定数関数でないので $m<M$ を満たしている．$m\le f(a)=f(b)<M$ のとき，最大値 $f(c)=M$ を実現する c が区間 (a,b) に存在する．いま $x_1\to c-0$ かつ $x_2\to c+0$ のとき，$f(x_1)\le f(c)$ かつ $f(c)\ge f(x_2)$ より

$$f'(c)=\lim_{x_1\to c}\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c}\ge 0 \quad \text{かつ} \quad f'(c)=\lim_{x_2\to c}\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}\le 0$$

が成り立つ．よって $f'(c)=0$．$m<f(a)=f(b)\le M$ の場合は最小値 $f(c)=m$ を実現する c が区間 (a,b) に存在するので，同様の議論で $f'(c)=0$ がわかる． ■



定義（極大と極小）．

- $x=c$ の十分近くで「$x\ne c$ ならば $f(x)<f(c)$」が成り立つとき，$f(x)$ は $x=c$ で**極大**であるといい，$f(c)$ を**極大値**とよぶ．
- $x=c$ の十分近くで「$x\ne c$ ならば $f(x)>f(c)$」が成り立つとき，$f(x)$ は $x=c$ で**極小**であるといい，$f(c)$ を**極小値**とよぶ．
- 極大値と極小値をあわせて**極値**とよぶ．

ロルの定理のアイディアで，高校以来「おなじみ」の事実を証明してみよう．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

例題. 微分可能な関数 $f(x)$ が $x=c$ で極大もしくは極小であるとき，$f'(c)=0$ となることを示せ．

略解. まず $x=c$ で極大と仮定する．$x=c$ を含む十分小さな区間上で $x \neq c$ のとき $f(x)<f(c)$．ロルの定理の証明と同様に議論に左右からの平均変化率の極限を取ることで $f'(c) \geq 0$ かつ $f'(c) \leq 0$ を得る．よって $f'(c)=0$．極小の場合は $-f(x)$ を考えればよい． ■

注意. $f'(c)=0$ でも極大・極小とならない場合もある．具体的には，定数関数や $f(x)=x^3$ の $x=0$ など．

平均値の定理

定理 7-2（平均値の定理）

- 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続で，
- (a,b) 上で微分可能とする．このとき，

$$(*) \qquad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を満たす c が区間 (a,b) に（少なくともひとつ）存在する．

図形的な意味は，「点 $(a,f(a))$ と点 $(b,f(b))$ を結ぶ線分と平行な接線をもつ点 $(c,f(c))$ が存在する」ということである．また，$(*)$ の式は

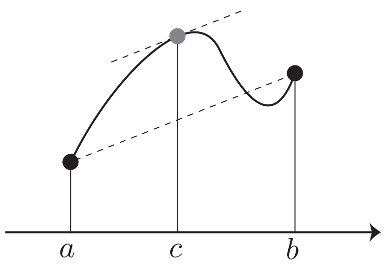
$$(**) \qquad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

の形で用いられることが多い[1]．

証明. 点 $(a,f(a))$ と点 $(b,f(b))$ を結ぶ線分 ℓ の傾きを $A=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ とおく．さらに関数 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ を

$$F(x):=f(x)-\{A(x-a)+f(a)\}$$

とおく（中括弧内は線分 ℓ の方程式である．）このとき $F(x)$ はロルの定理の仮定をすべて満たすから，$F'(c)=0$ を満たす c が区間 (a,b) に存在する．$F'(x)=f'(x)-A$ より，$f'(c)=A$． ■



関数の増減への応用

次の定理はグラフを描くときに重宝する，高校以来おなじみの結果である．

定理 7-3（微分係数と増減） 関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で連続かつ，(a,b) 上で微分可能とする．このとき，(a,b) 上で

(1) $f'(x)>0 \implies f(x)$ は真に単調増加

(2) $f'(x)<0 \implies f(x)$ は真に単調減少

(3) $f'(x)=0$（定数） $\implies f(x)$ は定数関数

[1] じつは次回学ぶテイラー展開の特別な場合になっている．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

証明． $a \le x_1 < x_2 \le b$ を満たす x_1 と x_2 を任意に選び，関数 $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ に平均値の定理を適用しよう．すなわちある c が区間 (x_1, x_2) に存在して，(**) より

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

を満たす．$x_2 - x_1 > 0$ より，左辺の符号は $f'(c)$ の符号で決まる．とくに区間 (a, b) で $f'(x) = 0$ であれば，$f'(c) = 0$ となり $f(x_1) = f(x_2)$ を得る．x_1，x_2 は自由に選べるので定理を得る． ■

応用． 不等式の証明に応用してみよう．

> **例題 1**． $x > 0$ のとき $x > \log(1 + x)$ を示せ．

解答． $f(x) = x - \log(1+x)$ とおくと，f は $x > -1$ のとき連続．さらに $x > 0$ のとき $f'(x) = 1 - 1/(1+x) > 0$ であり，f は真に単調増加．すなわち $f(x) > f(0) = 0$．これは $x > \log(1 + x)$ を意味する． ■

ロピタルの定理

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ のとき，$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ の値は存在するだろうか？このような極限は $\dfrac{0}{0}$ 型の**不定形**の極限とよばれ，さまざまなパターンがありうる．たとえば，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x} = 0, \quad \lim_{x\to \pm 0} \frac{\sin x}{x^2} = \pm\infty,$$

といった具合である．不定形の極限を計算する「技術」として有名なのが，次の「ロピタルの定理」である[2)]．

> **定理 7-4（ロピタルの定理）**． 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $x = a$ の近くで定義されており，微分可能とする．さらに，
>
> (a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$；かつ
>
> (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する
>
> ならば，$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ が存在して $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

説明や証明は後回しにして，応用例を見ていこう．

> **例題**． $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - \cos x}{x} = 2$ を示せ．

解答． $f(x) = e^{2x} - \cos x$，$g(x) = x$ とおくと，$x \to 0$ のとき $f(x) \to 0$ かつ $g(x) \to 0$．さらに

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2e^{2x} + \sin x}{1} \to 2$$

であるから，ロピタルの定理の条件 (a)，(b) を満たす．よって $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 2$. ■

---

2) この定理を証明したのは（ヨハン・）ベルヌーイ (Johann Bernoulli, 1667-1748) であったが，その教え子にあたるロピタル（Guillaume de l'Hôpital, 1661-1704）が自著に載せたことで，「ロピタルの定理」として定着してしまった．

バリエーション．　この定理は

$$\text{(a)'} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \pm \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

の場合でも成り立つ．ただし，複号は自由に選んで，いずれかが成り立てばよい．(これは $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形と呼ばれる．) さらに，定理中すべての $\lim_{x\to a}$ を

$$\lim_{x\to\infty},\quad \lim_{x\to-\infty},\quad \lim_{x\to a+0},\quad \lim_{x\to a-0}$$

のいずれかに置き換えてもよい．

例題． $\lim_{x\to+0} x^x = 1$ を示せ．

解答． $y = x^x$ とおき対数をとると，$\log y = x\log x = \dfrac{\log x}{1/x}$. $f(x) = \log x$，$g(x) = 1/x$ とおくと，$x \to +0$ のとき $f(x) \to -\infty$ かつ $g(x) \to +\infty$．さらに $x \to +0$ のとき

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1/x}{-1/x^2} = -x \to 0$$

であるから，ロピタルの定理の「バリエーション」に関して条件 (a)'，(b) を満たす．よって $\lim_{x\to+0}\log y = \lim_{x\to+0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$. すなわち $y = x^x \to 1$ $(x \to +0)$. ■

ヘンな例（ロピタルの定理に関する警告）．　$f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x$ に対して $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を計算したいとしよう．ロピタルの定理を適用すると，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ となってしまい極限が存在しないが，すなおに

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

とやれば計算ができる．

別の例．$f(x) = \cos x$, $g(x) = 1 + x$ に対して $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を計算したいとしよう．ロピタルの定理を適用すると，$\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{1} = 0$ だが，すなおに計算すると

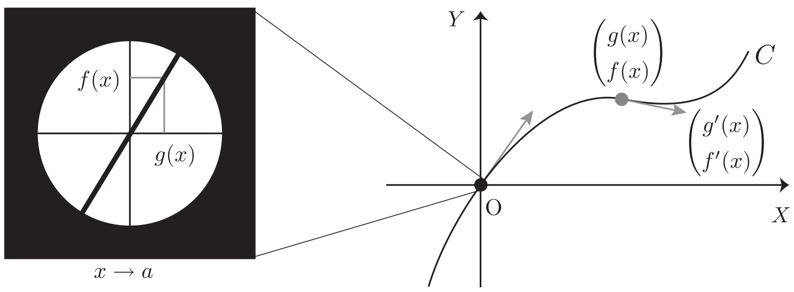
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+x} = 1 \neq \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

このふたつの例について，どこがおかしいか気がつかないようであれば，ロピタルの定理は使わないほうがよい． 変数変換やテイラー展開によって，多くの極限は問題なく求められるからである．

ロピタルの定理の証明

ロピタルの定理を直感的に説明してみよう：まず x をパラメーターとする平面ベクトル $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x) \\ f(x) \end{pmatrix}$ が定める曲線 C を考える．条件 (a) から，$x = a$ のとき曲線 C は原点まで連続に伸び

る．また微分可能性から $\dfrac{d}{dx}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$ は速度ベクトルを与えるが，条件 (b) はその速度ベクトルの「傾き」が $x = a$ で一定の値に近づくことを意味するから，曲線 C は原点で接線を持つ．したがって $\begin{pmatrix} g(x) \\ f(x) \end{pmatrix}$ とそこでの速度ベクトル $\begin{pmatrix} g'(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$ は $x \to a$ のとき限りなく平行に近づき，X 座標と Y 座標の比は極限で一致するのである．



ロピタルの定理の証明． まず，次の定理を用いる：

定理 7-6（コーシーの平均値定理）． 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は

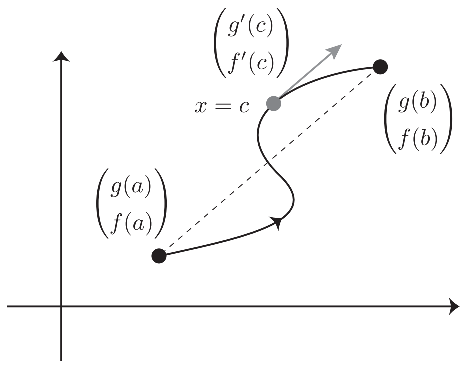
- $[a, b]$ で連続，かつ
- (a, b) で微分可能とする．さらに
- $g(a) \neq g(b)$ かつ (a, b) 上で $g'(x) \neq 0$ が成り立てば，

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

を満たす c が区間 (a, b) 内に（少なくともひとつ）存在する．

図形的な意味は，「点 $(g(a), f(a))$ と点 $(g(b), f(b))$ を結ぶ線分と平行な接線をもつ点 $(g(c), f(c))$ が存在する」ということである．

証明． $B = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ とおき，$F(x) := \{f(x) - f(a)\} - B\{g(x) - g(a)\}$ はロルの定理を条件を満たす．よって $F'(c) = 0$ を満たす c が区間 (a, b) 内に存在する．$F'(x) = f'(x) - Bg'(x)$ より，$0 = f'(c) - Bg'(c)$．$g'(c) \neq 0$ より求める等式を得る． ■



注意． (a, b) 上で $g'(x) \neq 0$ が成り立てば，そこでの g の単調性がいえるので $g(a) \neq g(b)$ は自動的に得られる．

注意． f と g それぞれに平均値の定理を適用して (∗∗) の商を計算しても，求める式は得られない．c の値が分子と分母で違ってしまうからである．

証明（ロピタルの定理）． いま $f(a) = g(a) = 0$ とおけば，関数 f も g も $x = a$ において連続と仮定してよい．また，$g(x)$ は $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するという仮定から，$x = a$ のまわりで定数関数 $g(x) \equiv 0$ となることはできない．このことから，a に十分近い x についてコーシーの平均値定理

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

が適用できて，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が x と a の間に存在する．$x \to a$ のとき $c \to a$ であるから，上の式の極限をとれば定理の式を得る．■

レポート問題

締め切りは 6 月 23 日の講義開始時とします． 表紙をつけ，レポートの左上隅（ホッチキスのヨコあたり）に学籍番号も書いてください．

問題 8-1（不等式の証明）． 微分を用いて次の不等式を示せ．

(1) $\sin x < x < \tan x \quad (0 < x < \pi/2)$　　(2) $1 + x < e^x < \dfrac{1}{1-x} \quad (0 < x < 1)$

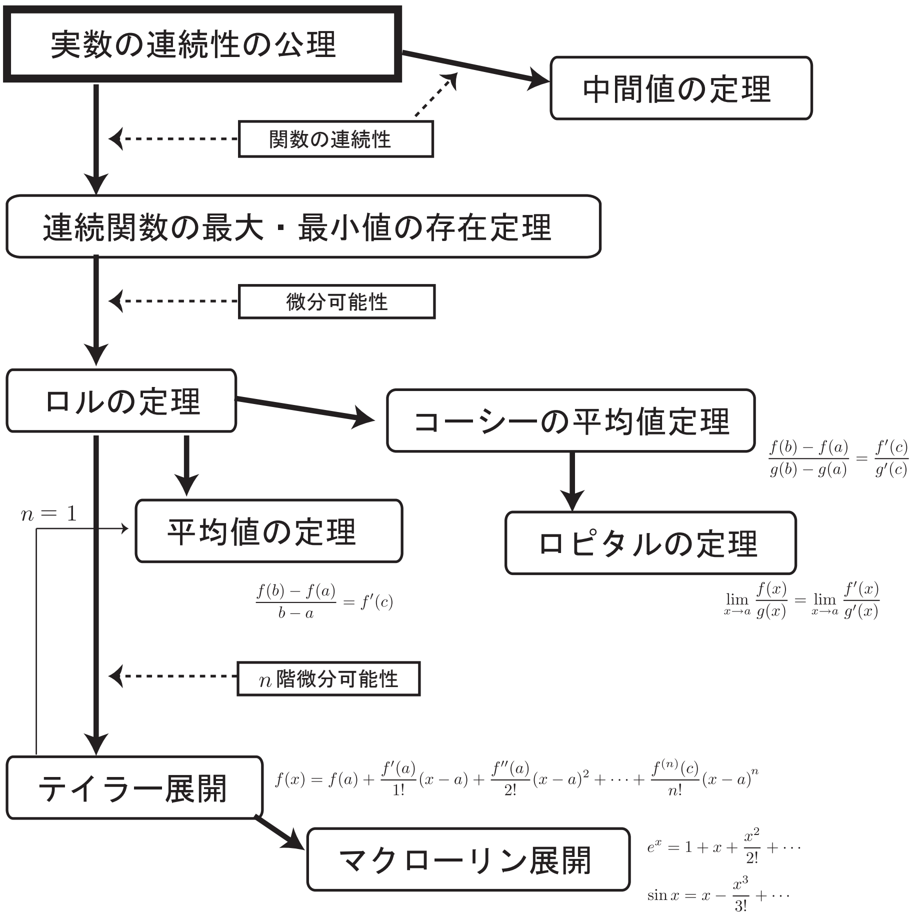
問題 8-2（ロピタルの定理）． ロピタルの定理を用いて次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$

（Hint．必要に応じて，ロピタルの定理を複数回用いる．また，対数をとってからロピタルを適用する.）

テイラー展開への道のり



担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

テイラー展開

配布日：June 23, 2014　Version：1.1

＜前回 (6/16) のまとめと補足＞

n 階導関数

$y = f(x)$ を繰り返し微分して得られる関数（「高階導関数」とも呼ばれる）を考えよう．具体的には，漸化式

$$f^{(0)}(x) := f(x), \quad f^{(n+1)}(x) := \left\{ f^{(n)}(x) \right\}'$$

によって得られる関数 $f^{(n)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は $f(x)$ の n **階導関数**もしくは n **回微分**と呼ばれ，

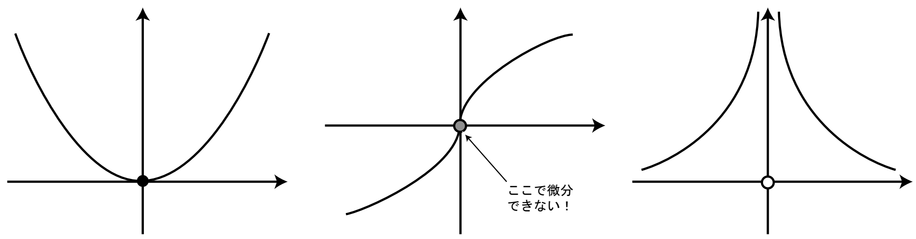
$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x), \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad D^n f(x)$$

のように表される．また，$f^{(2)}(x) = f''(x)$，$f^{(3)}(x) = f'''(x)$ のような記号もよく用いられる．

ただし，関数にいつでも $f^{(n)}(x)$ が存在するとは限らない．$f^{(n)}(x)$ が存在するとき，$f(x)$ は n **回微分可能**であるといい，さらにその $f^{(n)}(x)$ が連続であるとき，$f(x)$ は n **回連続微分可能**もしくは $f(x)$ は C^n **級**であるという[1]．すべての自然数 n で $f(x)$ が微分可能であるとき，f は**滑らか**もしくは C^∞ **級**と呼ばれる．

例． $y = x^k$，$y = e^x$，$\sin x$，$\log x$ などは滑らか（C^∞ 級）．

例． $y = |x|^{3/2}$ は 1 回連続微分可能（C^1 級）だが，2 回微分可能ではない．(ただし，$x = 0$ を除けば滑らか.)



参考． 高階導関数について次の公式が知られている：

> **ライプニッツの公式** $\{fg\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(n)} g^{(n-k)}$

証明は数学的帰納法による．

テイラー展開

実数の小数展開，たとえば $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ は，級数

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots$$

にほかならない．和を有限項で打ち切ると，$\sqrt{2} \approx 1.41$ といった近似が得られるわけである．

[1] 「n 回連続微分可能」は「n 回連続で微分できる」という意味ではないので注意.「n 回微分できて，結果が連続」ということ．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

これと同じことを関数 でやってみよう．たとえば $f(x)=x^3$ を

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

のように変形してみる．さらに $x = 1.1 = 1 + 1/10$ とおけば，

$$(1.1)^3 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3} = 1.331$$

と計算できる．同様に $x = 1.02$ とおくと，

$$\begin{aligned}(1.02)^3 &= 1 + 3\times 0.02 + 3\times(0.02)^2 + (0.02)^3 \\ &= 1 + 0.06 + 0.0012 + 0.000008 \\ &= 1.061208\end{aligned}$$

を得るが，必要な精度にあわせて計算する項を打ち切って「1 次近似」1.06.「2 次近似」1.0612.「3 次近似」1.061208 のいずれかを選ぶのが実用的だろう．

一般の関数を計算するときにも，同様の多項式展開ができれば単純な四則だけで満足のいく近似値が得られれると期待される．次の定理はそのような期待に応えるものである：

定理 8-1（テイラー展開）．

- I は開区間，$a \in I$ とする．
- 関数 $f: I \to \mathbb{R}$ は n 回微分可能であるとき，

すべての $x \in I$ に対して

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \tag{1}$$

$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{2}$$

を満たす（正体不明の） c が a と x の間に存在する．

上の式を $f(x)$ の $x=a$ における（n 次）**テイラー展開**とよぶ．とくに $a=0$ のとき，（n 次）**マクローリン展開**とも呼ばれる．また，(1) の部分を $(n-1)$ **次テイラー多項式**，(2) の部分を**剰余項**とよぶ．(2) を「誤差項」として無視することで，関数の多項式近似が得られるわけである．

注意（c の表現）． $a=x$ の場合はたとえば $c=a$ とすればよい．$a \neq x$ の場合，大小関係として $a<c<x$ の場合と $x<c<a$ の場合が考えられる．いずれの場合も c は a と x の内分点なので，ある $0<\theta<1$ が存在して

$$c = (1-\theta)a + \theta x \iff c = a + \theta(x-a)$$

と表される（θ はやはり正体不明だが）．

注意． $n=1$ の場合は平均値の定理（定理 7-2）になっている．実際，$x=b$ とすればテイラー展開は

$$f(a) = f(b) + f'(c)(b-a) \iff f(a) - f(b) = f'(c)(b-a).$$

例． $f(x)=x^3$ の例をふたたび見てみよう．$I=(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$，$a=1$ として（4 次）テイラー展開すると，

$$f'(x) = 3x^2,\quad f''(x) = 6x,\quad f'''(x) = 6,\quad f^{(4)}(x) = 0$$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

より（この場合ほとんど無意味だが）ある c が x と 1 の間に存在して

$$
\begin{aligned}
f(x) = x^3 &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4 \\
&= 1 + 3(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \frac{0}{4!}(x-1)^3 \\
&= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3.
\end{aligned}
$$

これは先ほどと同じ多項式表示である[2)].

例（指数関数と三角関数） もう少し有用な例を挙げよう．$f(x) = e^x$，$I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$，$a = 0$ として（n 次）テイラー展開してみよう．$f^{(n)}(x) = e^x$ であるから，ある c が x と 0 の間に存在して

$$
\begin{aligned}
& e^x = e^0 + e^0(x-0) + \frac{e^0}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{e^0}{(n-1)!}(x-0)^{n-1} + \frac{e^c}{n!}(x-0)^n \\
\iff\ & e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n
\end{aligned}
$$

を満たす．これはちょうど $a = 0$ の場合なので，指数関数の「マクローリン展開」と呼ばれる．

同様に三角関数についても，ある c_1, c_2 が x と 0 の間に存在して，次の等式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + \frac{(-1)^m \sin c_1}{(2m)!}x^{2m} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \frac{(-1)^{m+1} \sin c_2}{(2m+1)!}x^{2m+1}
\end{aligned}
$$

これが三角関数の「マクローリン展開」である．

例（マクローリン級数の応用） 指数関数のマクローリン展開において，$-|x| < c < |x|$ であるから剰余項について

$$
\left| \frac{e^c}{n!}x^n \right| \le e^{|x|} \cdot \frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad (n \to 0)
$$

が成り立つ（命題 2-2 参照）．よって等式

$$
\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots}
$$

が成立する.（すなわち右辺の級数は収束し，左辺と一致する.）この式は指数関数の**マクローリン級数**とも呼ばれる．とくに $x = 1$ のとき，等式

$$
\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots}
$$

が成立する．e の値を計算するときには，右辺の級数展開を用いたほうが圧倒的に早い．次の表は有効数字 10 桁で $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ と $b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ と誤差を比較したものである．

[2)] 一般に多項式関数が $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ の形に変形できたら，$a_k = f^{(k)}(a)/k!$ を満たす．すなわち，この変形は $x = a$ でのテイラー多項式になっている．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

n	a_n	$\|a_n - e\|$	b_n	$\|b_n - e\|$
1	2.000000000	0.7182818285	2.000000000	0.7182818285
2	2.250000000	0.4682818285	2.500000000	0.2182818285
3	2.370370370	0.3479114581	2.666666667	0.05161516179
4	2.441406250	0.2768755785	2.708333333	$9.948495126 \times 10^{-3}$
5	2.488320000	0.2299618285	2.716666667	$1.615161792 \times 10^{-3}$
6	2.521626372	0.1966554567	2.718055556	$2.262729035 \times 10^{-4}$
7	2.546499697	0.1717821314	2.718253968	$2.786020508 \times 10^{-5}$
8	2.565784514	0.1524973145	2.718278770	$3.058617775 \times 10^{-6}$
9	2.581174792	0.1371070367	2.718281526	$3.028858530 \times 10^{-7}$
10	2.593742460	0.1245393684	2.718281801	$2.731266076 \times 10^{-8}$

三角関数についても，$|\sin c| \le 1$ であるから剰余項が $m \to 0$ のとき 0 に収束することがわかる．よって次のマクローリン級数を得る．

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{m}}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

たとえば $\sin x$ のマクローリン級数において $x = \pi$ とおくと，

$$0 = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \cdots$$

であるから，ちょっと変った等式

$$\frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^7}{7!} + \frac{\pi^{11}}{11!} + \cdots = \pi + \frac{\pi^5}{5!} + \frac{\pi^9}{9!} + \cdots$$

を得る[3]．

定理 8.1（テイラー展開）の証明

証明にはロルの定理（定理 7-1）を用いる．すこし技巧的なので，証明を理解したい場合は $n = 3$ ぐらいで本当に計算してみるといいだろう．$x = a$ のとき定理は明らかなので，$x \neq a$ の場合を示す．また，(便宜的に定理の中の x を b に置き換えた上で）$b \neq a$ のとき

$$\frac{f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}{(b-a)^n} = \frac{f^{(k)}(c)}{n!}$$

を満たす c が a と b の間に存在することを示せば十分である．この左辺を A とおき，I 上の関数 $F(x)$ を

$$F(x) := f(b) - \left\{ f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + A(b-x)^n \right\}$$

とおく．$f(x)$ は n 回微分可能なので，$F(x)$ は 1 回微分可能である．また，$F(a) = F(b) = 0$ が成り立っている．そこで， a と b の大小に応じて $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ もしくは $F : [b, a] \to \mathbb{R}$ にロルの定理を適用しよう．

[3] これらの級数は「絶対収束」とよばれるいい性質を持っているので，このように無限個の項を移項しても等式が成立する．「絶対収束」でない場合このような計算は許されないので，素人には危険かもしれない．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

すなわち，ある c が開区間 (a,b) もしくは (b,a) に存在し，$F'(c)=0$ を満たしている．F の微分をまじめに計算すると，

$$\begin{aligned}F'(x) &= -\left\{f'(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k-\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}\right)+nA(b-x)^{n-1}\right\}\\ &= \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}-nA(b-x)^{n-1}\end{aligned}$$

であるから，$x=c$ を代入して求める等式 $A=f^{(n)}(c)/n!$ を得る． ■

レポート問題

締め切りは 6 月 30 日の講義開始時とします．表紙をつけ，レポートの左上隅（ホッチキスのヨコあたり）に学籍番号も書いてください．

問題 9-1（高階導関数）． 以下で与えられる x の関数に対し，n 回導関数を求めよ．ただし，n は自然数，a は実数．

(1) $\dfrac{1}{x-a}$　　(2) $\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

(3) $\sin x$　　(4) xe^x

（Hint. (2) は部分分数展開を用いて (1) を活用する.）

問題 9-2（テイラー展開）． 次の関数の $x=0$ における n 次テイラー展開を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$　　(2) $\sin x$　　(3) $\cos x$　　(4) xe^x

（答えだけではなく，計算過程を記すこと．剰余項もちゃんと求めること.）

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

テイラー展開の応用

配布日：June 30, 2014 Version：1.1

＜前回 (6/23) のまとめと補足＞

定理 8-1（前々回：テイラー展開）．

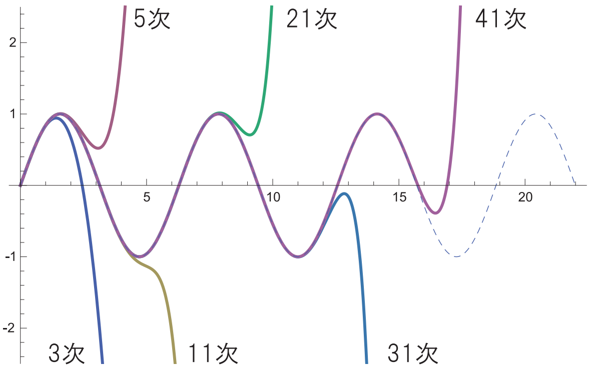
- I は開区間，$a \in I$ とする．
- 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は n 回微分可能であるとき，

すべての $x \in I$ に対して

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \quad (1)$$
$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \quad (2)$$

を満たす（正体不明の） c が a と x の間に存在する．

上の式を $f(x)$ の $x=a$ における（n 次）**テイラー展開**とよぶ．また，(1) の部分を $(n-1)$ **次テイラー多項式**，(2) の部分を**剰余項**とよぶ．
右の図は $x=0$ における $\sin x$ のテイラー多項式をグラフにして比べたものである．



応用．e の計算． パソコンの関数電卓機能を用いれば自然対数の底 e の値も簡単に求まるが，ここでは無人島に行ったつもりで近似値と誤差の評価式を手計算で求めてみよう．

指数関数 e^x の $x=0$ でのテイラー展開（マクローリン展開）は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n$$

であった．ここで c は 0 と x の間の数である．いま $x=1, n=6$ としてみよう．このとき

$$e = \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}}_{(2)} + \underbrace{\frac{e^c}{6!}}_{(2)} \quad (0 < c < 1)$$

であり，(1) の部分を e の近似値として採用した場合の誤差が (2) となる．(1) を計算すると，

$$1 + 1 + \frac{60+20+5+1}{120} = 2 + \frac{43}{60} = 2.716666\cdots.$$

(2) の部分は，$0 < c < 1$ より $0 < e^c < e \le 3$ なので[1)]

$$0 < \frac{e^c}{6!} \le \frac{3}{720} = \frac{1}{240} = 0.041666\cdots$$

1) $e = \lim_n (1+1/n)^n$ を示すときに $e \le 3$ は示した．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

である．以上から，評価式 (1) $< e \le$ (1) $+ 1/240$ すなわち

$$2.716666\cdots < e < 2.72083333\cdots$$

を得る．近似値としての (1) と e の相対誤差はわずかに 0.06% 程度である．ちなみに $(1+1/n)^n$ で $n=6$ としても $2.5216\cdots$ 程度にしかならない．(前回のプリントの数表で比較せよ.)

応用 2．極限の計算.

例題． すべての自然数 k に対し， $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=0.$

解答 たとえば $k=2$ のときを示そう．$x>0$ とする．指数関数の 4 次のマクローリン展開より

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{e^c}{4!}x^4 \quad (0<c<x)$$

であるから，

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}.$$

よって

$$\frac{x^2}{e^x} < \frac{x^2}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}} \to 0 \quad (x\to\infty).$$

k が 3 以上の場合もまったく同様である． ■

対数関数の展開

対数関数 $\log x$ の展開は次の形がもっとも使い勝手がよい：

対数関数のテイラー展開． $x>-1$ のとき，c は 0 と x の間の数 c が存在して

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-2}x^{n-1}}{n-1}+\underline{\frac{(-1)^{n-1}}{nc^n}x^n}.$$

下線部は $-1<x\le 1$，$n\to\infty$ のとき 0 に収束することが知られている．すなわち漸近展開

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

が成り立つ．とくに $x=1$ のとき

$$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

二項展開

いわゆる二項展開

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+\frac{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n}x^n \quad (n\in\mathbb{N})$$

の拡張として，次が成り立つ：

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

二項展開. $\alpha \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ のとき，

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

ここで，$\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ は $\dbinom{\alpha}{n}$ と書かれることが多い．α が自然数で $0 \le n \le \alpha$ のとき $\dbinom{\alpha}{n}$ は ${}_\alpha\mathrm{C}_n$ と一致する．

この展開式を得るには，まず $(1+x)^\alpha$ をまじめにテイラー展開して，剰余項（$\dbinom{\alpha}{n}(1+c)^{\alpha-n}x^n$ の形）が $n \to \infty$ のとき 0 に収束することを示す．

例. $\alpha = 1/2$ のとき，

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots$$

この式を用いて再度 $\sqrt{26}$ を計算してみよう．(以前得られた近似値は 5.1 だった．) $x = 1/25$ とすると，

$$\sqrt{1+\frac{1}{25}} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{25^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{25^3} = 1 + \frac{2\cdot 100^2 - 2\cdot 100 + 4}{100^3}$$

より，

$$\sqrt{26} = 5\sqrt{1+\frac{1}{25}} \approx 5 + \frac{10\cdot 100^2 - 10\cdot 100 + 20}{100^3} = 5 + \frac{9902}{10^5} = 5.09902.$$

真の値は $\sqrt{26} = 5.09901953\cdots$ であるから，単純な計算の割には驚異的な精度になっている．

ランダウの記号

まずつぎの**ランダウの記号**を思い出しておこう．n を 0 以上の整数とし，$x \to a$ のとき $f(x) \to 0$ となる関数が

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} \to 0 \quad (x \to a)$$

を満たすとき，

$$f(x) = o((x-a)^n) \qquad (x \to a)$$

と表す[2)]．標語的には「$f(x)$ のほうが $(x-a)^n$ よりも速く 0 に収束する」ことを意味する式である．

ちなみに，$x \to a$ のとき $f(x) \to 0$ であれば無条件に $f(x) = o(1)$ と表される．これは $n = 0$ のときである．

例題. $x \to 0$ のとき次を示せ．

(1) $2014x^2 + x^3 = o(x)$. (2) $\sin x = o(1)$ (3) $x - \sin x = o(x^2)$

解答. 定義どおり確かめていく．(1)：$\dfrac{2014x^2 + x^3}{x} = 2014x + x^2 \to 0 \ (x \to 0)$.
(2)：これは $n = 0$ の場合に対応する．$\dfrac{\sin x}{1} \to 0 \ (x \to 0)$.
(3)：ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2} = 0.$ ■

2) 右側の $(x \to a)$ は文脈から判断できる場合には省略することがある．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

例題. $f(x) = o(x^2)$，$g(x) = o(x^3)$ $(x \to 0)$ のとき次を示せ．
(1) $x^2 f(x) = o(x^4)$.　(2) $f(x) + g(x) = o(x^2)$　(3) $f(x)g(x) = o(x^5)$

解答. こちらも定義どおり確かめていく．(1)：$\dfrac{x^2 f(x)}{x^4} = \dfrac{f(x)}{x^2} \to 0$ $(x \to 0)$.
(2)：$\dfrac{f(x)+g(x)}{x^2} = \dfrac{f(x)}{x^2} + x \cdot \dfrac{g(x)}{x^3} \to 0$ $(x \to 0)$.
(3)：$\dfrac{f(x)g(x)}{x^5} = \dfrac{f(x)}{x^2} \cdot \dfrac{g(x)}{x^3} \to 0$ $(x \to 0)$. ■

注意. $f(x) = o(x)$，$g(x) = o(x)$ のとき，$f(x) - g(x) = 0$ としてはいけない．正しくは $f(x) - g(x) = o(x) - o(x) = o(x)$ である．

定理 9-1（漸近展開）. $f(x)$ が $x = a$ のまわりで定義されており，C^n 級（すなわち，$f^{(n)}$ が存在し連続）であるとする．このとき，

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \to a).$$

解答. x が a に近いとき，n 次のテイラー展開ができて

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

ただし c は x と a の間の数である．これより，

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$x \to a$ のとき $c \to a$ であるから，$f^{(n)}(c) \to f^{(n)}(a)$．よって $\dfrac{[\text{上の式の右辺}]}{(x-a)^n} \to 0$ $(x \to a)$. ■

例. 指数関数は C^∞ 級なので，$x \to 0$ のとき

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) = 1 + x + o(x) = 1 + o(1). \end{aligned}$$

例（あまり上手ではない計算例）. $e^x \sin x = x + x^2 + o(x^2)$ を示そう．先ほどの計算と $\sin x = x - x^3/3! + o(x^3)$ より

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= (1 + x + o(x))\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \\ &= x \underline{- \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} + x^2 \underline{- \frac{x^4}{3!} + o(x^4) + o(x^2) + o(x^4) + o(x^4)} \\ &= x + x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

途中，下線部は $o(x^2)$ としてまとめた．この計算の場合，最初から $\sin x = x + o(x)$ としても同じ結果が得られる（確認してみよ）．$x^3 = o(x^2)$ であるから，$\sin x$ の展開の 3 次以上の項は無駄になってしまうのである．必要な次数（精度）を予測して計算量を減らす工夫をしよう．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

例題. 漸近展開を用いて次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$

解答. (1)：先ほどの計算より $\dfrac{e^x\sin x - x}{x^2}=\dfrac{x+x^2+o(x^2)-x}{x^2}=1+\dfrac{o(x^2)}{x^2}=1\ \ (x\to 0)$.
(2)：$\dfrac{\log(1+x)-x}{x^2}=\dfrac{x-x^2/2+o(x^2)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{o(x^2)}{x^2}=-\dfrac{1}{2}\ \ (x\to 0)$. ■

例題. 漸近展開を用いて $\cos x=\sqrt{1-x^2}+o(x^2)\ \ (x\to 0)$ を示せ．

解答. 二項展開より $\sqrt{1+t}=1+t/2+o(t)$ なので，$t=x^2$ を代入して $\sqrt{1+x^2}=1+x^2/2+o(x^2)$. 一方 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ より，$\cos x-\sqrt{1+x^2}=o(x^2)-o(x^2)=o(x^2)$. ■

補足 1：ランダウの記号（小さな o と大きな O）

ランダウ記号はより一般に次のように定義される：

定義. $x=a$ のまわりで定義された関数 $f(x),g(x)$ に対し，

- $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ であるとき，$f(x)=o(g(x))\ \ (x\to a)$ と表す．
- ある定数 $M>0$ が存在して，x が a に近いとき $|f(x)|\le M|g(x)|$ が成り立つとき，$f(x)=O(g(x))\ \ (x\to a)$ と表す．

これらのを o と O は**ランダウの記号**（スモール・オーとラージ・オー）と呼ばれる．

例. $\sin x=x-x^3/6+o(x^3)\ \ (x\to 0)$ より $\sin x=x+O(x^3)$ が成り立つ．なぜなら，$|\sin x-x|=|x^3||1/6+o(1)|$ だが，$o(1)\to 0\ \ (x\to 0)$ より x が十分 0 に近いとき $|1/6+o(1)|\le 1$ が成り立っている．よって $|\sin x-x|=1\cdot|x^3|$ となり，$\sin x-x=O(x^3)$.

補足：ニュートン法

与えられた関数 $y=f(x)$ に対し，$f(\alpha)=0$ となる α を数値的に求めたいとしよう．すなわち，方程式 $f(x)=0$ の解を数値的に，できれば任意の精度で求めたい．

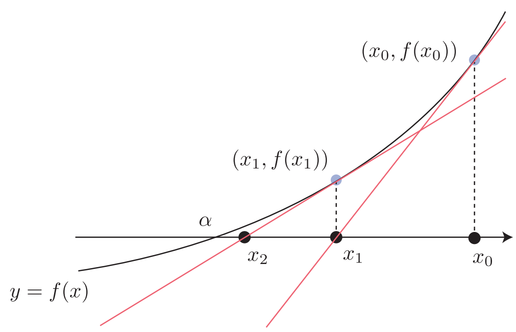
たとえば，以前に紹介した「二分法」（区間縮小法）は典型的なアルゴリズムである．ここではもっと高速に解の近似値を得られる「ニュートン法」を紹介しよう．

ニュートン法のアルゴリズム.

(1) 関数のグラフ $y=f(x)$ を描き，グラフの x 軸との交点を見つけて解の位置に見当をつける．

(2) 解 α（まだ正確な値はわからない）から**ある程度近い数** x_0 を選ぶ．

(3) $n\ge 0$ に対し，グラフ上の点 $(x_n,f(x_n))$ から接線を引き，x 軸との交点を $(x_{n+1},0)$ とする．これを繰り返す．



担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定理 9-2（ニュートン法.） 上のような方法で与えられる数列 x_n $(n = 0, 1, \ldots)$ は，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

を満たす．さらに，方程式 $f(x) = 0$ の解 α に対し，ある $\delta = \delta(f, \alpha) > 0$ が存在して，初期値 x_0 が $|x_0 - \alpha| \leq \delta$ を満たせば x_n は α に収束する．

たとえば参考書の [三宅] 定理 2.3.3(p43)，[南] の 2.2.6 節（p50）も参照せよ．

具体例

ここでは具体例として，方程式 $f(x) = x^2 - 2 = 0$ に対し上記のアルゴリズムを適用してみよう．たとえば $x_0 = 2$ としてみる．公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

より，x_6 までを数値的に求めたものが以下の表である．

ステップ	x_n	x_n と $\sqrt{2}$ の誤差
0	2.00000000000000000000	0.586
1	1.50000000000000000000	0.0858
2	1.41666666666666666667	0.00245
3	1.41421568627450980392	2.12×10^{-6}
4	1.41421356237468991063	1.59×10^{-12}
5	1.41421356237309504880	8.99×10^{-25}
6	1.41421356237309504880	2.86×10^{-49}

このように，1 ステップごとに有効数字が 2 倍程度増える非常に速いアルゴリズムであることが分かる．一般に，α が重根でなければ $|x_{n+1} - \alpha| = O(|x_n - \alpha|^2)$ となる定数 C が存在することが証明できる．

レポート問題

締め切りは 7 月 7 日の講義開始時とします．表紙をつけ，レポートの左上隅（ホッチキスのヨコあたり）に学籍番号も書いてください．

問題 10-1. e^x のテイラー展開を用いて，任意の正の実数 α に対し $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t^\alpha} = 0$ を示せ．

問題 10-2（極限）. 漸近展開を利用し次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 + x^2}}{x^4}$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定積分と不定積分

配布日： July 7, 2014　Version : 1.1

＜前回 (6/30) のまとめと補足＞

定積分

連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ のグラフと軸で囲まれた部分の面積を求めよう.

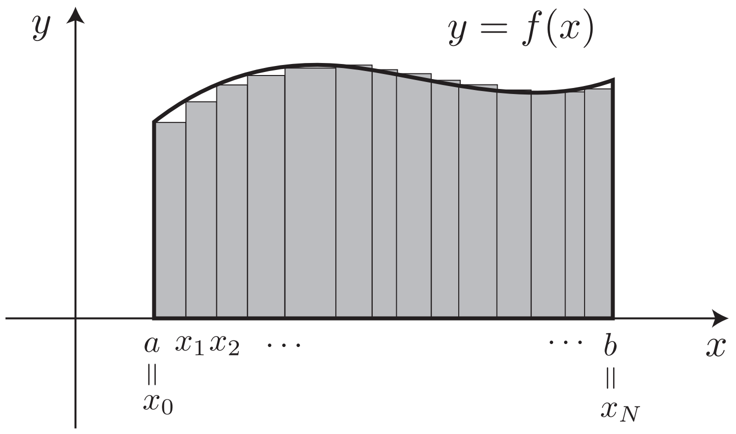


図 1: 短冊（たんざく）による近似

Step 1.　区間 $[a, b]$ から分割点 $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

となるように選ぶ.

Step 2.　求めたい面積を図 1 のように N 個の短冊で近似すると,

$$[\text{求めたい面積}] \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

となる. ここで, $f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ は左から k 番目（$0 \le k < N$）の短冊の符号つき面積であり, 0 以下の値を取る可能性もある. この右辺の「近似値」を分割 $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ に関する**リーマン和**とよぶ.

Step 3.　分割点 $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ を

- 点の個数を増やす. すなわち $N \to \infty$; かつ
- 分割の幅を一様に細かくする. すなわち $\displaystyle\max_{0 \le k < N} |x_{k+1} - x_k| \to 0$

となるように変化させるとき, リーマン和はある一定の値 I に収束することが知られている[1]. これを

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

と表し, $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における**定積分**とよぶ.

[1] とくに, I は分割点の変化のさせ方には依存しない. この事実の証明はすこし面倒なので省略する. 参考書 [三宅]3.4 章（p 73）もしくは [南]3 章 (p 82) を参照せよ.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

注意． f が連続でないときには，Step 1〜3 の方法では一定の積分値 I が定まらない可能性がある．一般にこの方法で積分値が確定する（連続とは限らない）関数を**積分可能**な関数とよぶ．

数値計算との関係． Step 1 と Step 2 によってリーマン和を計算すれば，そのまま積分の近似値が得られる．たとえば N 個の分割点を区間を等分割するようにとるとき，近似値（リーマン和）と積分値との誤差は少なくとも $1/N$ に比例する．

定積分の性質． 以下，$f(x)$，$g(x)$ は連続関数とし，α, β を実数とする．また，$a > b$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$$

と定義する．このとき，次が成り立つ．

公式 10-1（定積分の性質）．

(1) $\displaystyle\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx.$

(2) $a \le x \le b$ で $f(x) \le g(x)$ のとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

(3) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_b^c f(x)\,dx.$

不定積分と微積分の基本定理

I を区間とし，連続関数 $f : I \to \mathbb{R}$ を考える．$a \in I$ を定数，$x \in I$ を変数として得られる

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

の形の関数をを $f(x)$ の**不定積分**とよぶ[2)]．

次の定理は「微積分の基本定理」とよばれ，(互いに独立に定義される)「微分」と「積分」の関係を明らかにするものである：

定理 10-2（微積分の基本定理）． f が連続であるとき，不定積分 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は微分可能であり，$F'(x) = f(x)$ を満たす．すなわち，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad \text{：「積分の微分はもとの関数」}$$

証明． $\Delta x > 0$ のとき，区間 $[x, x+\Delta x]$ における $f(x)$ の最小値と最大値をそれぞれ $m_x(\Delta x)$，$M_x(\Delta x)$ と表すと，$m_x(\Delta x) \le f(t) \le M_x(\Delta x)$ $(x \le t \le x+\Delta x)$．よって公式 10-1(2) より

$$\begin{aligned}
&\int_x^{x+\Delta x} m_x(\Delta x)\,dt \le \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \le \int_x^{x+\Delta x} M_x(\Delta x)\,dt \\
\Longrightarrow\ & m_x(\Delta x)\Delta x \le F(x+\Delta x) - F(x) \le M_x(\Delta x)\Delta x \\
\Longrightarrow\ & m_x(\Delta x) \le \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \le M_x(\Delta x)
\end{aligned}$$

2) 積分区間が変化し，不定だからこのようによばれる

$f(x)$ の連続性より，$\Delta x \to +0$ のとき $m_x(\Delta x), M_x(\Delta x) \to f(x)$．よって $\displaystyle\lim_{\Delta x \to +0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$.
$\Delta x < 0$ のときも同様の議論で $\displaystyle\lim_{\Delta x \to -0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$ が示される． ■

原始関数

連続関数 $f(x)$ に対し，$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**とよぶ．微分可能であれば連続なので，原始関数は連続関数である．また，次が示される：

命題 10-3（原始関数の性質）． $F(x)$ と $G(x)$ が同じ $f(x)$ の原始関数であるとき，$F(x) - G(x)$ は定数関数．

証明． $\{F(x) - G(x)\}' = f(x) - f(x) = 0$．よって $F(x) - G(x)$ は定数． ■

系 10-4（原始関数と不定積分）． 連続関数 $f(x)$ の原始関数はすべて

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C \quad (a,\ C : \text{定数})$$

の形で表される．

証明． 「微積分の基本定理」より，不定積分 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は $f(x)$ の原始関数である．あとは命題 10-3 を適用する． ■

不定積分の表記． 系 10-4 が成り立つことを根拠として，「原始関数」は「不定積分」の同義語とみなされる．また，一般に連続関数の $f(x)$ の原始関数（のひとつ）を $\displaystyle\int f(x)\,dx$ と表す．

例． $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ (C : 定数)．この定数 C は実数であれば何でもよい．原始関数（不定積分）に付随するこのような定数は**積分定数**とよばれる．

定積分の計算． 定積分を定義式どおりに計算すると，分割数に比例して計算量が増えて大変である．しかしこれまでの結果（とくに，「微積分の基本定理」）を用いると，原始関数を探すことで簡単かつ正確に積分計算ができることがわかる：

定理 10-5（定積分の計算）． 連続関数 $f(x)$ の原始関数のひとつを $F(x)$ とするとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\, F(x) \,\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

証明． 系 10-4 より不定積分として $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt + C$ を用いると，

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t)\,dt + C\right) - \left(\int_a^a f(t)\,dt + C\right) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

■

例題（定積分の計算）． $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

解答. 微分の知識が役に立つ：$(\mathrm{Sin}^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より，

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\,\mathrm{Sin}^{-1}x\,\Big]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

■

計算テクニックその１：置換積分

公式 10-6（置換積分）. $x = x(t)$ を $\alpha \le t \le \beta$ で単調かつ微分可能な関数とし，$a = x(\alpha)$，$b = x(\beta)$ とする．このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt.$$

例題（置換積分の不定積分版）. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Sin}^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\Big) + C$ (C : 定数) を示せ.

解答. $x = \sin t$ $(|t| \ge \pi/2)$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = \cos t$ より

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt \\
&= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) + C \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Sin}^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\Big) + C.
\end{aligned}$$

■

計算テクニックその２：部分積分

公式 10-7（部分積分）. $f(x)$，$g(x)$ が微分可能かつ連続（すなわち C^1 級）であるとき，

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[\,f(x)g(x)\,\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

例題（積分の漸化式：不定積分版）. $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\,dx$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ と表すとき，

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \ge 2).$$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

解答.

$$\begin{aligned}
I_n = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx &= \cos^{n-1} x \cdot \sin x - \int \cos^{n-1} x \cdot \sin x \; dt \\
&= \cos^{n-1} x \cdot \sin x - \int (n-1) \cos^{n-2} x(-\sin x) \cdot \sin x \; dt \\
&= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x) \, dt \\
&= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n).
\end{aligned}$$

あとは式変形すれば題意の式を得る． ■

適用例. $I_0 = \int 1 \, dx = x + C$，$I_1 = \int \cos x \, dx = \sin x + C$ より

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2} \cos x \, \sin x - \frac{1}{2} x + C \\
I_3 &= \frac{1}{3} \cos^2 x \, \sin x - \frac{2}{3} \sin x + C
\end{aligned}$$

などが得られる．

適用例 2. $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ とおくと，$J_0 = \pi/2$，$J_1 = 1$．$n \geq 2$ のとき，$J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}$ が成り立つことから次がわかる：

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 3 \cdot 1}{n \cdot (n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n : \text{偶数}) \\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 2}{n \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 1} & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

レポート問題（最終回）

締め切りは 7 月 14 日の講義開始時とします． 表紙をつけ，レポートの左上隅（ホッチキスのヨコあたり）に学籍番号も書いてください．

問題 11-1. 次の不定積分を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$　　(2) $\displaystyle\int \mathrm{Sin}^{-1} x \, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx$　　(4) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx$

（Hint. (2) は $1 \cdot \mathrm{Sin}^{-1} x$ と思う．(3) は $t = x + \sqrt{a^2 + x^2}$ とおく．(4) は $1 \cdot \sqrt{a^2 + x^2}$ と思って部分積分．）

問題 11-2. 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{2x} \, dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e x \log x \, dx$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定積分の計算と応用

配布日：July 14, 2014　Version：1.1

＜前回 (7/7) のまとめと補足＞

有理式の積分

多項式の商として書かれた

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0}$$

のような式を x の**有理式**とよぶ[1]．有理式は次のような性質をもつ：

> **定理 11-1（有理式の分解）．** すべての有理式は
>
> (1) 多項式
>
> (2) $\dfrac{a}{(x+b)^m}$ $(m \in \mathbb{N})$
>
> (3) $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$ $(n \in \mathbb{N},\ c^2 - 4d < 0)$
>
> の形の式の有限和で表される．

証明は省略する．具体例を見ておこう．

例 1.

$$\frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{(x+1)^2-1}{x+1} = \underline{x+1}_{(1)} + \underline{\frac{1}{x+1}}_{(2)}.$$

これより不定積分は

$$\int \frac{x^2+2x}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \log|x+1| + C.$$

ただし C は定数である（今後は省略する.）

例 2.

$$\frac{5x-4}{2x^2+x-6} = \underline{\frac{1}{2x-3}}_{(2)} + \underline{\frac{2}{x+2}}_{(2)}.$$

これは左辺を $\dfrac{a}{2x-3} + \dfrac{b}{x+2}$ と置き，係数比較することで求めることができる．

これより不定積分は

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|x - \frac{3}{2}\right| + 2\log|x+2|.$$

有理式の不定積分． このように，(1) と (2) の形の式だけで表現できる場合は，簡単に原始関数を求めることができる．(3) の形の式を含む場合も，(原理的には) 次の方法で原始関数を求めることができる．

まず (3) で $u = x + c/2$ と変数変換すると，

$$\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} = \frac{a(x+c/2) - ac/2 + b}{((x+c/2)^2 - c^2/4 + d)^n} = \frac{au+b'}{(u^2+c')^n} = a\frac{u}{(u^2+c')^n} + b'\frac{1}{(u^2+c')^n}.$$

[1] ふつうは約分を済ませて，共通因数をもたない多項式の商として表したものを考える．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ただし

$$b' = -\frac{ac}{2} + b, \quad c' = \frac{4d - c^2}{4} > 0.$$

よって $c' > 0$ を $c > 0$ に置き換えて $\int \frac{u}{(u^2+c)^n} du$ および $\int \frac{1}{(u^2+c)^n} du$ の原始関数が見つかればよい．前者は比較的簡単である：

$$\int \frac{u}{(u^2+c)^n} du = \int \frac{1}{2} \frac{(u^2+c)'}{(u^2+c)^n} du = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(u^2+c) & (n=1) \\ \frac{1}{2}\frac{1}{(-n+1)(u^2+c)^{n-1}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

後者は $t = \sqrt{c} \cdot u$ とおき

$$\int \frac{1}{(u^2+c)^n} du = \frac{\sqrt{c}}{c^n} \underline{\int \frac{1}{(t^2+1)^n} dt}$$

と変形する．下線部の積分を I_n とおくと，部分積分により漸化式

$$I_{n+1} = \frac{t}{2n(t^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \quad (n \geq 1)$$

を満たすことが分かる．$n = 1$ のときは $t = \tan\theta$ と置くことで

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+1} dt = \int \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int d\theta = \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\, t.$$

よって（原理的には）すべての自然数 n について原始関数を書き下すことができる．したがって定積分の計算ができる．以上を定理の形にまとまておこう．

定理 11-2（有理式の積分）．すべての有理式に対して，原始関数を見つけることができる．

無理関数の積分

根号を含んだ式も，適当な変数変換により有理式に帰着できる場合がある．

例 1. 積分 $I = \int \frac{1}{x + 2\sqrt{x-1}} dx$ が有理式に帰着できることを確認してみよう．$t = \sqrt{x-1}$ とおくと，$t^2 + 1 = x$ より $2t\, dt = dx$．ゆえに

$$I = \int \frac{2t}{t^2+1+2t} dt.$$

例 2. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ を求めよう．非常に巧妙なので覚える必要はない．$t = x + \sqrt{x^2+1}$ とおくと，$(t-x)^2 = x^2+1$ より $x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$．よって $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{t-x} = \frac{2t}{t^2+1}$ かつ $dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt$ を得る．求めたい不定積分に代入して，$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

三角関数の有理式

三角関数からなる式も有理式に帰着できる場合がある．いちばん汎用性が高い方法は，$u = \tan x/2$ とおき，関係式

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \tan x = \frac{2u}{1-u^2}$$

および $dx = \dfrac{2\,du}{1+u^2}$ を用いる方法である．

例． $I = \displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$ を求めよう．上のような変数変換を行うと，

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2\,du}{1+u^2} = \int \frac{1+u^2+2u}{2} \cdot \frac{2\,du}{1+u^2} \\ &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{2u}{1+u^2}\right) du = \frac{u}{2} + \log(1+u^2) = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \log\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

曲線の長さ

パラメーター t でパラメーター表示された集合

$$C_0 : \overrightarrow{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (A \le t \le B)$$

を考える．関数 $x \mapsto x(t)$, $y \mapsto y(t)$ が連続かつ $A < t < B$ のとき C^1 級関数であるとき[2)]，C を**滑らかな曲線**とよぶことにする．このとき，任意の閉区間 $[a,b] \subset (A,B)$ 上で $x'(t) := \dfrac{dx}{dt}(t)$, $y'(t) := \dfrac{dy}{dt}(t)$ は連続であることに注意しよう．

C_0 の一部分を切り取った曲線 $C = C[a,b]$ を

$$C = C[a,b] : \overrightarrow{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (a \le t \le b)$$

と定義する．このとき，次のことがいえる：

> **定理 11-3（曲線の長さ）** このとき，滑らかな曲線 C の長さ $\ell(C)$ は
>
> $$\int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}\,dt$$
>
> で与えられる．

注意． 「曲線の長さ」とは何かまだ定義をしていないが，この積分値を滑らかな曲線の長さの定義だと思えばよい[3)]

説明． 被積分関数は t の連続関数なので，積分値は存在する．その値が「曲線の長さ」として正当な意味を持つことを直感的に理解しよう．時刻の分割点 $\{t_k\}_{k=0}^N$ を $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$ とし，

[2)] すなわち微分可能であり導関数が連続

[3)] 正方形の境界線や扇形の境界線のように，急激に折れ曲がる点をもった曲線の長さを考えたい場合もあるだろう．そのときは曲線を適当に分割して滑らかな曲線をつなぎ合わせたものとみなし，それぞれの長さの和を曲線の長さを定義すればよい．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

$\vec{p}_k := \vec{p}(t_k) = \begin{pmatrix} x(t_k) \\ y(t_k) \end{pmatrix}$ とおく．このとき，$C = C[a,b]$ を曲線の分割点 $\{\vec{p}(t_k)\}_{k=0}^{N}$ を線分で結んだ「折れ線」で近似していると考えるのである．すると,「曲線の長さ」は「折れ線の長さ」

$$\sum_{k=0}^{N-1} \|\vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k\|$$

の分割点を細かくしていった極限だと考えるのが自然であろう．いま

$$\|\vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k\| = \sqrt{\{x(t_{k+1}) - x(t_k)\}^2 + \{y(t_{k+1}) - y(t_k)\}^2}$$

だが，平均値の定理より $c_k, d_k \in (t_{k+1}, t_k)$ が存在して

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = x'(c_k)(t_{k+1} - t_k), \quad y(t_{k+1}) - y(t_k) = y'(d_k)(t_{k+1} - t_k)$$

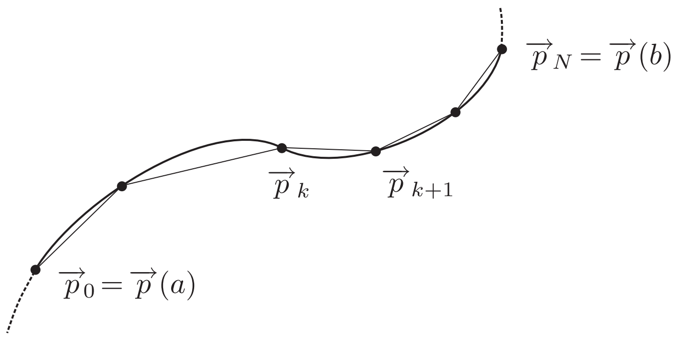
を満たしている．よって

$$\|\vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k\| = \sqrt{\{x'(c_k)\}^2 + \{y'(d_k)\}^2} \cdot (t_{k+1} - t_k).$$

分割点を $N \to \infty$，$\max_{0 \le k < N} |t_{k+1} - t_k| \to 0$ となるように変化させると，

$$\begin{aligned}
[\text{折れ線の長さ}] &= \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\{x'(c_k)\}^2 + \{y'(d_k)\}^2} \cdot (t_{k+1} - t_k) \\
&\to \int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}\, dt
\end{aligned}$$

となる．この極限を曲線 C の長さだと考えるのである．



放物線の長さ.

> **例題.** $y = x^2$ のグラフの $0 \le x \le 1$ の部分 C の長さを求めよ．

解答. $\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$ として定理 11-3 を適用すれば,

$$\ell(C) = \int_0^1 \sqrt{1 + (2t)^2}\, dt.$$

$u = 2t$ として変数変換すれば,

$$\ell(C) = \int_0^2 \sqrt{1+u^2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\Big[\, u(1+u^2) - \log(u + \sqrt{1+u^2})\,\Big]_0^2 = \frac{1}{2}\Big\{2\sqrt{5} + \log(2+\sqrt{5})\Big\}.$$

一般に関数のグラフについては次が成り立つ：

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定理 11-3（曲線の長さ） 滑らかな関数 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ におけるグラフの曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx.$$

注意. 細かいことだが，被積分関数は積分される区間の端点まで連続でなくてはならない．そのためには，$f'(x)$ が区間の端点まで連続な関数である必要がある．

円周率の定義.

例題. 半径 r の円 C_r の長さとその直径の比は半径 r に依存しない一定の値になることを示せ.（これを**円周率**とよび，π と表すのである.）

解答. 半径 r の円の方程式は $x^2 + y^2 = r^2$ すなわち $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ で表される．直線 $y = x$ に関する対称性より $0 \le x \le r/\sqrt{2}$ の範囲で関数 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ が定める円弧の長さを計算して 8 倍すれば円周の長さとなる．定理 11-4 より，

$$\ell(C_r) = 8\int_0^{r/\sqrt{2}} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 8\int_0^{r/\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 8\int_0^{r/\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

$u = rx$ として変数変換すれば，

$$\ell(C_r) = 8r\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

よって

$$\frac{[C_r\text{の長さ}]}{[C_r\text{の直径}]} = \frac{\ell(C_r)}{2r} = 4\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du$$

この値は r に依存しない．

注意（三角関数の定義）. 三角関数 $\sin x$，$\cos x$ は単位円周にそって $(1, 0)$ から x ラジアン進んだ点として定義された．ラジアン（弧度法）は円弧の長さによって決まるものだから，それは積分を用いて定義されるべきものである．すなわち高校以来おなじみの三角関数も積分→弧長→角度→三角関数という順序をへて初めて厳密に定式化（正当化？）されるのである．

ちなみに，積分を使わずに，$\sin x$，$\cos x$ のマクローリン級数を定義だとみなす方法もある．しかし，それでは三角関数の幾何学的な意味がよくわからない．

ほかにも，定積分 $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt$ を $\mathrm{Sin}^{-1}\, x$ の定義として採用し，その逆関数として $\sin x$ を定義する，という方法もある（$\cos x$ は $\sin(\pi/2 - x)$ とすればよい.）．こちらも「まずは積分ありき」であり，しかも幾何学的な意味はいまひとつ明解でない．

そのうち「卵が先か，ニワトリが先か」のような議論になってしまいそうだが，最終的に得られるものは同じなので，結局は私たちの趣味の問題である．

注意. 定理 11-3 と同じアイディアで，空間内の曲線

$$C = C[a, b] : \overrightarrow{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (a \le t \le b)$$

の長さは

$$\int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt$$

で与えられる．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定積分の計算と応用

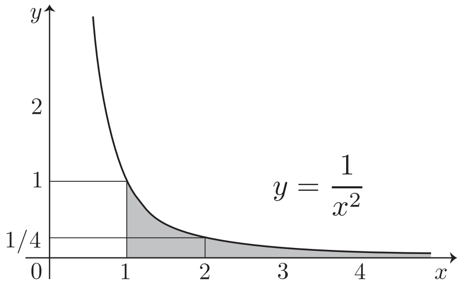
配布日： July 14, 2014　Version： 1.1

＜ 7/14 のまとめと補足＞

広義積分

これまで考えてきた定積分は閉区間上の連続関数に限定してきた．しかし，たとえば次の図のように，$y = 1/x^2$ の区間 $[1, +\infty)$ の部分と x 軸で囲まれる部分の面積を考えることはできないだろうか？

この場合，$\beta > 1$ として閉区間 $[1, \beta]$ における定積分を考えると



$$\int_1^\beta \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x} \Big]_1^\beta = -\frac{1}{\beta} + 1$$

となる．よって $\beta \to \infty$ のとき，

$$\lim_{\beta \to \infty} \int_1^\beta \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\beta \to \infty} \left(-\frac{1}{\beta} + 1 \right) = 1.$$

よって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ だと言いたくなる．

定義（半開半閉区間での積分）． $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ が連続関数であり（$b = +\infty$ も許す），極限

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

がある実数値に収束するとき，「$f(x)$ は $[a, b)$ 上で**積分可能**」もしくは「**広義積分** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は**収束する**」という．そうでないとき積分は**発散する**という．

注意． 同様に関数 $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ の $(a, b]$ 上の積分可能性も定義される．一般に，閉区間以外の区間での積分を**広義積分**とよぶ．

例． 上の計算より，$f(x) = 1/x^2$ は $[1, +\infty)$ 上で積分可能であり，計算はしばしば

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x} \Big]_1^\infty = 0 + 1 = 1$$

のように lim を使わずに書かれる．

例． $f(x) = 1/x^2$ は $(0, 1]$ 上で積分可能ではない．なぜなら，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{\alpha \to +0} \int_\alpha^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\alpha \to +0} \left(-1 + \frac{1}{\alpha} \right) = +\infty.$$

となり，積分は発散するからである．

基本公式と応用． 広義積分の収束・発散の判定に便利なのが，次の定理である（証明は簡単なので省略）：

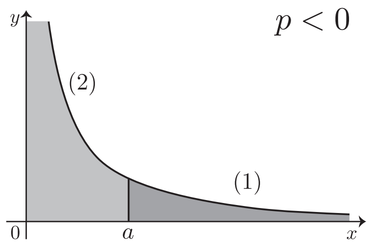
担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

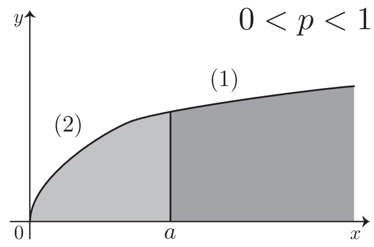
定理 12-1. $a > 0$ のとき，

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_a^{\infty} x^p\,dx$ が収束 $\iff$ $p < -1$.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{a} x^p\,dx$ が収束 $\iff$ $p > -1$.

(1) と (2) の積分の表す面積を $p < 0$ と $0 < p < 1$ の場合に図示すると次のようになる．$p = 0$, $p \geq 1$ の場合も同様に考えてみよ．





応用. 広義積分の考え方を用いると級数の収束性を判定することができる．

例題. 級数 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$ は発散するが，級数 $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots$ は収束することを示せ．

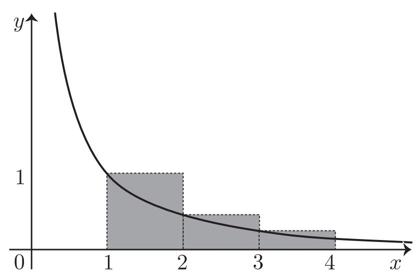
解答. 図のように級数を長方形の面積和と思うと，

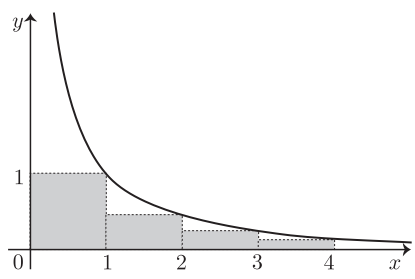
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \to \infty \quad (n \to \infty).$$

よって級数 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$ は発散する．同様にして

$$a_n := 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

だが，定理 12-1 より最右辺の広義積分は収束する．数列 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ は単調増加かつ有界であるから，収束する． ■





開区間での広義積分

開区間 (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ での広義積分は，任意に $c \in (a, b)$ を選び

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\beta \to b-0} \int_c^\beta f(x)\,dx$$

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

とふたつの広義積分の和で定義する．

例題． $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi$ を示せ．

解答． $\displaystyle\int_{-1}^{1} = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1}$ と分割すると，

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,\Big]_{-1}^{1} = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

および

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,\Big]_{0}^{1} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

より題意の等式をえる． ■

広義積分の収束・発散の判定

このあと紹介するガンマ関数のように，広義積分で定義される重要な関数もたくさんある．そのとき，広義積分の値は確定できなくても，収束性だけでも確認しておけば関数が安全に定義される．

そこで，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が収束するための十分条件を与えよう．0 以上の値をとる関数 $g(x)$ が $f(x)$ の**優関数**であるとは，2 条件

- 積分区間上で $|f(x)| \le g(x)$; かつ
- $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ は収束

を満たすときをいう．じつは，次が成り立つ（証明略）：

定理 12-2（優関数と収束） $f(x)$ に対し優関数 $g(x)$ が存在すれば，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．

注意． 広義積分 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ が収束すれば $|f(x)|$ は明らかに $f(x)$ の優関数であり，定理 11-4 より広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は**絶対収束する**というのがならわしである．

例題． 次の広義積分は収束することを示せ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^{3/2}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

解答． (1)：$\displaystyle\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$ と分割する．$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^{3/2}}\,dx$ は閉区間上の連続関数の積分なので普通の定積分．よって値が確定する．$x > 0$ のとき $\displaystyle\frac{1}{1+x^{3/2}} \le \frac{1}{x^{3/2}}$ であり，定理 12-1 より $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ は収束するから，$\displaystyle\frac{1}{x^{3/2}}$ は優関数である．よって定理 12-2 より，$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^{3/2}}\,dx$ も収束する．

(2)： $|\sin x| \leq 1$ より $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$．$t = 1-x$ とおくと $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{t}}(-dt) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$. 定理 12-1 より，この積分は収束する．すなわち $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ は優関数である．定理 12-2 より，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ は収束する．

■

ガンマ関数

正の実数 s に対し，広義積分

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

で定まる s の関数 $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を**ガンマ関数**という（Γ は γ の大文字）．あとで確認するように，ガンマ関数は階乗（$n!$）を拡張したものになっていて，定義は大変だが使い勝手のよい関数である．

命題 12-3. $s > 0$ のとき広義積分 $\displaystyle\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は収束する．

証明. $f(x) = e^{-x}x^{s-1}$ とおく．$s > 0$ に対しある十分大きな c が存在し，

(i) $[c,\infty)$ 上で $g(x) = x^{-2}$ は $f(x)$ の優関数；かつ

(ii) $(0,c]$ 上で $h(x) = x^{s-1}$ は $f(x)$ の優関数

であることを示そう．

(i): $\dfrac{|f(x)|}{g(x)} = \dfrac{e^{-x}x^{s-1}}{x^{-2}} = \dfrac{x^{s+1}}{e^x}$. $s+1 < N$ となる自然数 N を取ると $x \geq 1$ のとき $\dfrac{x^{s+1}}{e^x} \leq \dfrac{x^N}{e^x}$. プリント 10-2 の例題と同様の議論により $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^N}{e^x} = 0$. よって適当な $c \geq 1$ が存在し，$x \geq c$ のとき $\dfrac{|f(x)|}{g(x)} \leq 1$, すなわち $|f(x)| \leq g(x)$. 定理 12-1 より $\displaystyle\int_c^\infty x^{-2}\,dx$ は収束するから，$g(x) = x^{-2}$ は $f(x)$ の優関数．したがって $\displaystyle\int_c^\infty f(x)\,dx$ も収束する．

(ii): $x > 0$ のとき $e^{-x} < 1$ より，$f(x) = e^{-x}x^{s-1} < x^{s-1}$. $s-1 > -1$ と定理 12-1 より $\displaystyle\int_0^c x^{s-1}\,dx$ は収束するから，より，$h(x) = x^{s-1}$ は $f(x)$ の優関数．$\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ も収束する．

(iii) 以上の議論から，広義積分 $\displaystyle\Gamma(s) = \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$ は収束する． ■

命題 12-4（ガンマ関数の性質）. $s > 0$ のとき $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. とくに，$s = n = 0, 1, 2, \ldots$ のとき，$n! = \Gamma(n+1)$.

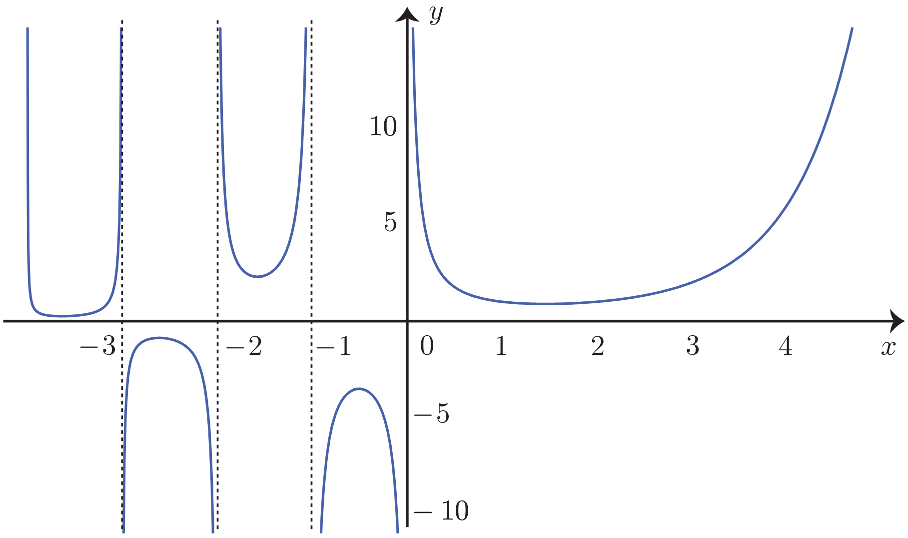
証明. 部分積分より，

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^s\,dx = \Big[-e^{-x}x^s\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}sx^{s-1}\,dx = 0 + s\Gamma(s).$$

$\displaystyle\Gamma(1) = \int_0^s e^{-x}\,dx = 1$ は簡単に計算できるので，$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ より帰納的に $n! = \Gamma(n+1)$ を得る． ■

注意. 関係式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を用いると，ガンマ関数を「0 以下の整数でない」実数 s にまで拡張できる．グラフは次のようになる：

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp



参考．ベータ関数

$p > 0,\ q > 0$ に対し，広義積分

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

で定まる（2 変数の）関数を**ベータ関数**と呼ぶ（B は β の大文字）．

練習問題． ベータ関数を定める広義積分は収束することを示せ．

ベータ関数の性質と応用． ベータ関数は次の性質をもっている．

(1) $B(p,q) = B(q,p)$.

(2) $B(p+1,q) = \dfrac{p}{p+q}B(p,q),\quad B(p,q+1) = \dfrac{q}{p+q}B(p,q)$

(3) $B(1,1) = 1,\quad B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$

(4) $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\cos x)^{2p-1}(\sin x)^{2q-1}\,dx$

(5) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.（証明には重積分が必要.）

たとえば，

$$\int_0^{\pi/2}(\cos x)^9(\sin x)^7\,dx = \frac{B(5,4)}{2} = \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{2\Gamma(9)} = \frac{4!\cdot 3!}{2\cdot 8!} = \frac{1}{560}.$$

練習問題． ベータ関数の性質 (1)〜(4) を示せ．