

## この講義について

配布日：October 02, 2014 Version：1.1

担当教員：川平 友規 (Kawahira, Tomoki；理学部数理学科・大学院多元数理科学研究科)

担当 TA：近藤 広崇 (Kondo, Hiroataka；大学院多元数理科学研究科)

講義ウェブサイト：

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/14W-biseki.html>

配布されたプリントが pdf 形式でダウンロードできます。また、毎週の進捗状況についてコメントしていきます。

本授業の目的およびねらい (全学シラバスより)：定量的変化を記述・分析する数学の分野が解析学であり、その中心的方法は微分・積分である。これらの方法は自然科学において必須の研究手法であるが、近年はさらに社会科学などにも広く応用されている。本科目は通年講義の後半として、多変数微分積分学の基本を理解し、様々の計算に習熟して応用できるようになることを目的とする。特に多変数関数のグラフなどを通して幾何学 (空間) 的イメージ、線形代数と結び付いた理解を重視する。

講義日と授業内容 (予定)：

10月2日	多変数関数の極限と連続性：点列の極限，開集合，閉集合，多変数関数の極限・連続性。
10月9日	
10月16日	多変数関数の微分法：接平面，偏微分の定義，方向微分，合成関数の偏微分，高階偏微分，テイラーの定理。極値問題。
10月23日	
10月30日	
11月6日	
11月13日	
11月20日	
11月27日	多変数関数の積分法：重積分，累次積分，積分の順序交換，休講予定 変数変換とヤコビアン，授業予備日。 体積と面積 線積分とグリーンの定理
12月4日	
(12月11日)	
12月18日	
(1月8日)	
1月15日	
1月22日	
1月29日	期末試験

教科書および参考書：毎回教科書にあたる講義プリントを配布するが，下記の参考書のうちいずれか1冊を購入しておくことが望ましい。

- 三宅敏恒,『入門微分積分』, 培風館
- 南和彦,『微分積分講義』, 裳華房

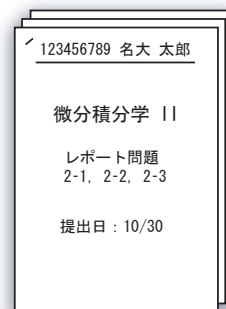
成績評価の方法：「履修取り下げ制度」を適用します。

- ほぼ毎週のレポートおよび期末試験をそれぞれ 50 点満点で評価する。
- 履修取り下げ届が提出された場合，期末試験を受験しなかった場合はそれぞれ「欠席」とし，それ以外は 59 点以下を F，60 - 69 点を C，70 - 79 点を B，80 - 89 点を A，90 - 100 点を S とする。

レポートの締め切りと提出様式: レポート問題と提出締め切りは毎週のプリントで指定します. 提出する際には, 必ず **A4 ルーズリーフ**もしくは **A4 レポート用紙**を使用し, 右図のような表紙をつけてください. また, 必ず**左上**をホチキス等でとめてください.

受講者同士で協力し合って解答してもかまいませんが, かならず協力者の名前も明記するようにしてください. (それによって減点されることはありません.)

レポートは採点して返却します. 返却が済むまで, 成績への加点の対象とはしないので注意してください.



- ・必ずA4サイズ, 表紙をつける.
- ・番号・名前は上の方に大きく書く.
- ・左上をホチキスで留める.
- ・解いた問題の番号, 提出日を書く.
- ・裏面はなるべく使わない.

**オフィスアワー:** 授業中・授業後の質問は大歓迎です. それ以外の時間に質問したい場合は, ぜひオフィスアワー (教員ごとの質問受付時間) を活用してください. 私のオフィスアワーは, 理学部数理学科内の合同オフィスアワー「Cafe David (カフェ・ダヴィド)」の時間に設定しています. Cafe David は月曜から金曜の 12:00-13:30 にオープンし, コーヒー・紅茶を無料で提供しています. 私の担当は月曜日, 場所は理 1 号館 2 階のエレベーター前です.

#### よく使う記号など: 数の集合

- |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (1) $\mathbb{C}$ : 複素数全体 | (2) $\mathbb{R}$ : 実数全体  | (3) $\mathbb{Q}$ : 有理数全体 |
| (4) $\mathbb{Z}$ : 整数全体  | (5) $\mathbb{N}$ : 自然数全体 | (6) $\emptyset$ : 空集合    |

#### ギリシャ文字

- |                               |                   |                             |                             |                                   |
|-------------------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| (1) $\alpha$ : アルファ           | (2) $\beta$ : ベータ | (3) $\gamma, \Gamma$ : ガンマ  | (4) $\delta, \Delta$ : デルタ  | (5) $\epsilon$ : イプシロン            |
| (6) $\zeta$ : ゼータ             | (7) $\eta$ : エータ  | (8) $\theta, \Theta$ : シータ  | (9) $\iota$ : イオタ           | (10) $\kappa$ : カッパ               |
| (11) $\lambda, \Lambda$ : ラムダ | (12) $\mu$ : ミュー  | (13) $\nu$ : ニュー            | (14) $\xi, \Xi$ : クシー       | (15) $\omicron$ : オミクロン           |
| (16) $\pi, \Pi$ : パイ          | (17) $\rho$ : ロー  | (18) $\sigma, \Sigma$ : シグマ | (19) $\tau$ : タウ            | (20) $\upsilon, \Upsilon$ : ウプシロン |
| (21) $\phi, \Phi$ : ファイ       | (22) $\chi$ : カイ  | (23) $\psi, \Psi$ : プサイ     | (24) $\omega, \Omega$ : オメガ |                                   |

#### その他

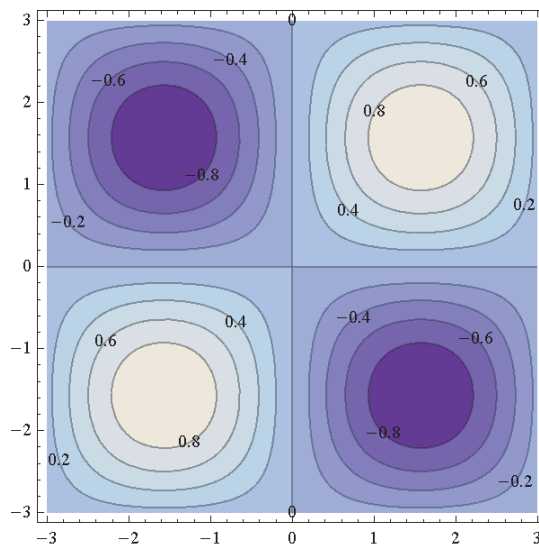
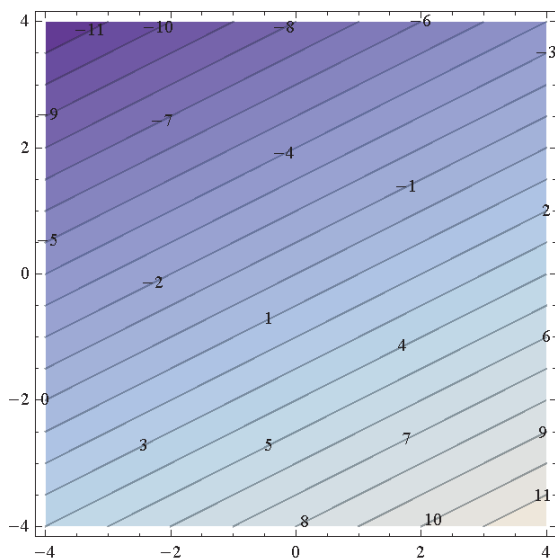
- (1)  $x \in X$  と書いたら, 「 $x$  は集合  $X$  に属する」すなわち「 $x$  は  $X$  の元」という意味.
- (2) 「...をみたす  $X$  の元全体の集合」を  $\{x \in X \mid (x \text{ に関する条件})\}$  の形で表す. たとえば「 $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ 」
- (3)  $X \subset Y$  と書いたら, 「集合  $X$  は集合  $Y$  に含まれる」という意味.
- (4)  $A := B$  と書いたら  $A$  を  $B$  で定義する, という意味. たとえば  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .
- (5) (文章 1)  $:\iff$  (文章 2) と書いたら, (文章 1) の意味は (文章 2) であることと定義する, という意味. たとえば「数列  $\{a_n\}$  が上に有界  $:\iff$  ある実数  $M$  が存在して, すべての自然数  $n$  に対し  $a_n \leq M$ .」

## 等高線グラフの練習

配布日: October 2, 2014 Version: 1.1

## 等高線グラフの例

$$z = x - 2y \text{ と } z = \sin x \sin y$$



## レポート問題

締め切りは 10 月 9 日の講義開始時とします.

**問題 1-1.** 次のページの 3 次元グラフを参考に, 次の関数の等高線グラフを  $-4 \leq x \leq 4$ ,  $-4 \leq y \leq 4$  の範囲でかけ. (グラフの形状が他の人にも理解してもらえるよう配慮しながら, 必要な数の等高線を描き入れること.)

(1)  $z = f(x, y) = x - y$

(2)  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

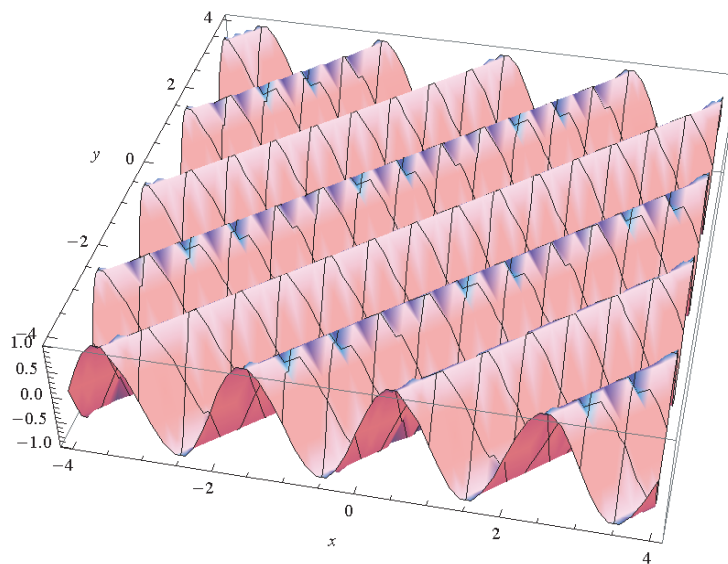
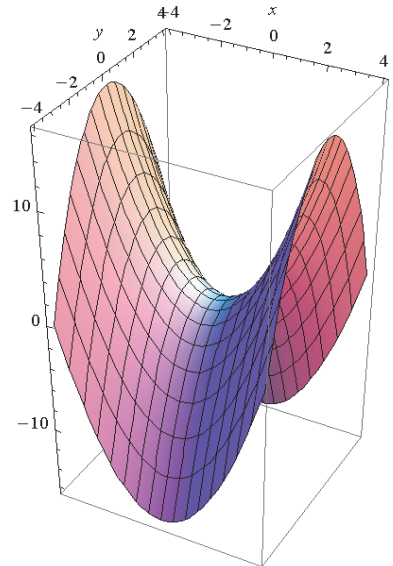
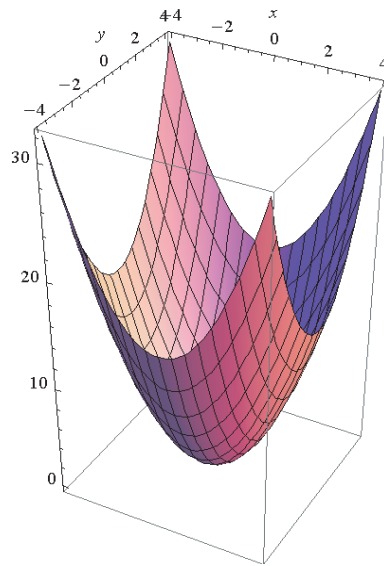
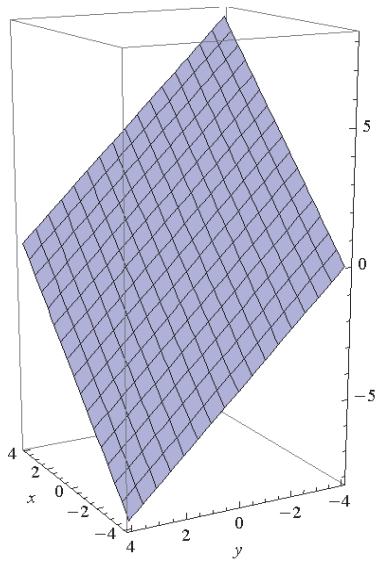
(3)  $z = f(x, y) = x^2 - y^2$

(4)  $z = f(x, y) = \sin((x - y)\pi)$

**問題 1-2.**  $xyz$  空間内で, 点  $(a, b, c)$  を通り, ベクトル  $(A, B, C) \neq \vec{0}$  と垂直な平面の方程式は

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0 \iff \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix} = 0$$

であることを示せ.



## 多変数の 1 次関数

配布日: October 9, 2014 Version: 1.1

## 前回 (10/2) のまとめと補足

## 多変数関数の例

多変数関数とは複数の変数をもつ関数のことである。身近な例としては、

- 図のような長方形の面積  $S$  と周の長さ  $L$  は

$$S = S(x, y) = xy, \quad L = L(x, y) = 2(x + y)$$

と表される。これらは  $x$  と  $y$  を変数とする **2 変数関数** である。

- 同じく図のような直方体の体積  $V$  と表面積  $A$  は

$$V = V(x, y, z) = xyz, \quad A = A(x, y, z) = 2(xy + yz + zx).$$

これらは  $x, y, z$  を変数とする **3 変数関数** である。

- 一般に  $n$  個の変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  をもつ  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の形の関数を  **$n$  変数関数** という。

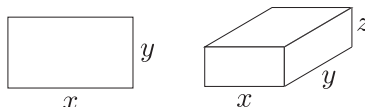


図 1: 長方形の面積, 直方体の体積は辺の長さを変数とする多変数関数。

## 多変数関数のグラフ

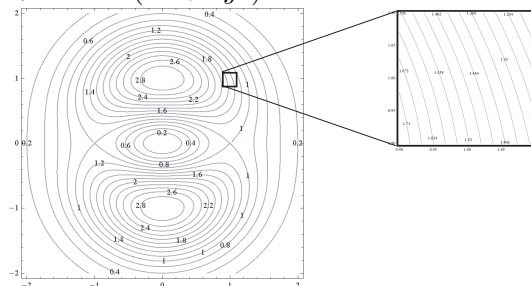
2 変数関数  $z = f(x, y)$  に関しては  $xyz$  空間  $\mathbb{R}^3$  に 3 次元グラフが描ける。しかし、結局は平面に 2 次元的に射影するので、表現力には限界があり、あまり役に立たない。

**3 次元グラフの例。** 図 2 の上段左が  $z = xy$ , 上段右が  $z = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 。

2 変数関数  $z = f(x, y)$  であれば、**等高線グラフ** のほうが有用である。例えば地形図, 気圧分布などで用いられるからなじみがあるグラフだろう。こちらのほうが数学との親和性がよいので、本講義でも頻繁に利用する。

**等高線グラフの例。** 図 2 の下段左が  $z = xy$ , 下段右が  $z = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ 。

**注意。** 滑らかな等高線グラフは、拡大すると「等間隔な線分」に見えてくる。この性質は、多変数関数の微分可能性と深く関係している。



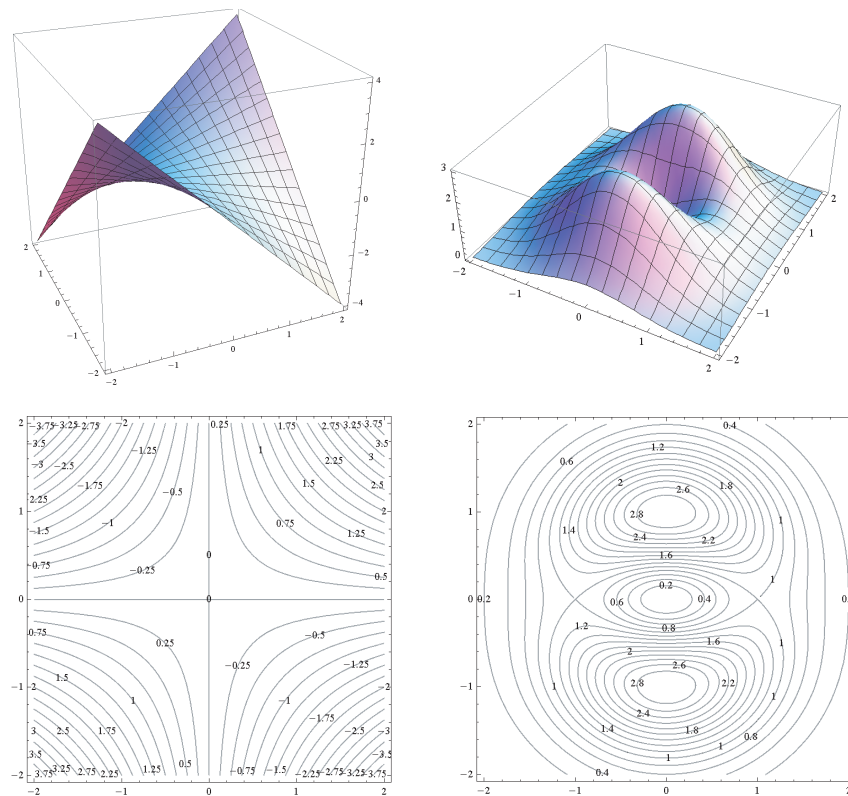


図 2: 上段：3次元グラフ. 下段：等高線グラフ.

## 1 次関数と微分

1 変数関数においては、ある点で「微分可能」であることはその点で「接線が引ける」ことだと幾何学的に解釈できる。これは、その点で「関数が 1 次関数で近似される」ことと同じ意味である。

同様に多変数関数の場合も、ある点で「微分可能」であることをその点で「関数が 1 次関数で近似される」ことだとして定式化していく。そのため、多変数関数の 1 次関数を理解することが、多変数関数の微分の理解と直結しているのである。

**1 次関数の例.** 1 次関数とは次のような形の関数である（小文字が変数，大文字が定数）：

$$1 \text{ 変数} : y = Ax + B$$

$$2 \text{ 変数} : z = Ax + By + C$$

$$3 \text{ 変数} : w = Ax + By + Cz + D$$

$$n \text{ 変数} : y = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n$$

今回はとくに 2 変数関数の 1 次関数  $z = Ax + By + C$  を完全に理解することから始めよう。

### 復習：ベクトルの内積

平面ベクトル

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

に対し, これらの内積を

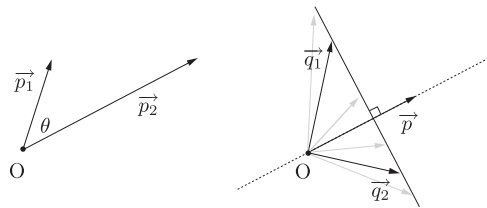
$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 := a_1 a_2 + b_1 b_2$$

と定義する. このとき, 次の重要な公式が成り立つのであった:

公式 1-1 (内積の公式)

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos \theta.$$

ただし  $|\vec{p}_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ ,  $|\vec{p}_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ ,  $\theta$  は  $\vec{p}_1$  と  $\vec{p}_2$  のなす角度である.



注意 1.  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  より,

$$-|\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \leq \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \leq |\vec{p}_1| |\vec{p}_2|$$

が成り立つ.

注意 2. 図のように  $\vec{q}_1$  と  $\vec{q}_2$  が  $\vec{p}$  と垂直な同一直線上にあるとき.

$$\vec{p} \cdot \vec{q}_1 = \vec{p} \cdot \vec{q}_2.$$

すなわち,  $\vec{p}$  と垂直な直線上にある (位置) ベクトルと  $\vec{p}$  との内積は一定値を取る.

### $z = Ax + By$ の等高線グラフ

1 次関数  $z = f(x, y) = Ax + By$  の等高線グラフを描いてみよう.  $A = B = 0$  のときこれは定数関数  $z = 0$  であるから,  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \neq \vec{0}$  の場合を考えよう. このとき,

$$z = f(x, y) = Ax + By \iff z = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と変形できることに注意しよう. これは定数ならぬ「ベクトル定数」 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  と「ベクトル変数」

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の内積である<sup>1</sup>.

等高線グラフを描くには「等高線」が必要である. それが何か定義しておこう:

定義 (等高線) 2 変数関数  $z = f(x, y)$  に対し, 集合

$$E_k = \{(x, y) \mid f(x, y) = k\}$$

を高さ  $k$  の等高線とよぶ.

<sup>1</sup>これは 1 変数の比例関数  $y = Ax$  の自然な拡張になっている.

**注意.** 等高線は「線」とは限らない. たとえば定数関数の場合は全平面であるし, 極大値をとる点 (山の頂上) では1点である.

では, 1次関数  $z = f(x, y) = Ax + By$  の等高線  $E_k$  がどのような集合になるか調べてみよう.

$$E_k = \{(x, y) \mid Ax + By = k\}$$

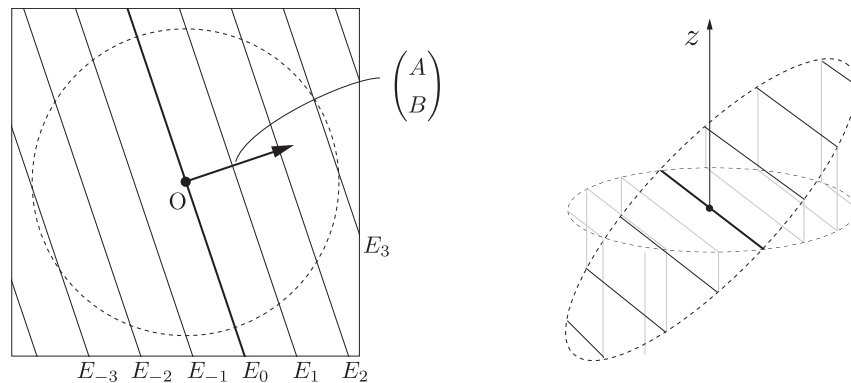
であるから, この時点で  $E_k$  は直線  $Ax + By = k$  だとわかる. また,

$$Ax + By = k \iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k$$

であるから, 等高線  $E_k$  とは「ベクトル  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  との内積が一定値  $k$  となるようなベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の集合」のことである. とくに, ベクトルの内積に関する注意2より,  $E_k$  はベクトル定数  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  に垂直な直線だとわかった.

**注意.** 1次関数の場合, 定数  $k_1, k_2, \dots$  が等間隔 (等差数列) で与えているとき, 直線  $E_{k_1}, E_{k_2}, \dots$  も等間隔に並ぶ. また, 高さはベクトル  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  と同方向に増加する. (理由を自力で考えてみよう.)

以上の考察から,  $z = Ax + By$  の等高線グラフは次のようになる.



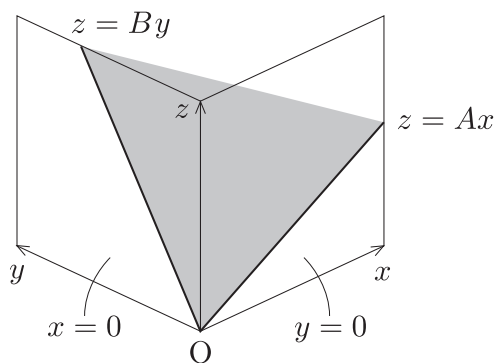
### $z = Ax + By$ の3次元グラフ

等高線の形から,  $z = Ax + By$  の3次元グラフは原点を通る平面となることがわかる. さらに,  $xz$  平面,  $yz$  平面による切り口を考えてみよう.  $z = Ax + By$  より,

- $xz$  平面:  $y = 0$  を代入して,  $z = Ax$ . これは傾き  $A$  の直線である.
- $yz$  平面:  $x = 0$  を代入して,  $z = By$ . これは傾き  $B$  の直線である.

よって  $z = Ax + By$  の3次元グラフの原点付近での様子は次の図のようになる:





## 一般の 1 次関数 (補足)

$z = Ax + By + C$  の形の 1 次関数は

$$z = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + C$$

と変形されるので, 等高線は  $z = Ax + By$  と同じで, 高さが一様に  $+C$  されるだけである. 3 次元グラフも  $z = Ax + By$  のそれを  $z$  軸方向に  $+C$  平行移動すればよい.

## レポート問題

締め切りは 10 月 15 日の講義開始時とします.

問題 2-1. つぎの極限值は存在するか? 存在する場合はその値を求めよ.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2} \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

問題 2-2. つぎの関数は原点において連続かどうか判定せよ.

$$(1) \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{|x| + |y|} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

(HINT: (2) は  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$  を用いる.)

## 多変数関数の極限と連続性

配布日: October 16, 2014 Version: 1.1

## 前回 (10/9) のまとめと補足

以下, 特に断らない限り 2 変数関数について考える. (3 変数以上の関数についても同様なので.)  
また,  $xy$  平面 (にあたる集合) を  $\mathbb{R}^2$  と表す.

## 言葉の準備

(ア). 1 変数関数は区間  $[a, b]$ ,  $(a, b)$  などに制限して考えることが多かった. 2 変数関数の場合も, 区間の考えを拡張して次のものを考える.

円板. ベクトル  $\vec{p} = (a, b)$  および  $r > 0$  に対し,  $\mathbb{R}^2$  内の集合

$$\mathbb{D}(\vec{p}, r) := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{x} - \vec{p}| < r \}$$

を  $\vec{p}$  中心半径  $r$  の円板もしくは開円板とよぶ. また, 集合

$$\bar{\mathbb{D}}(\vec{p}, r) := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{x} - \vec{p}| \leq r \}$$

を閉円板という.

区画.  $a \leq b$  かつ  $c \leq d$ , のとき,  $\mathbb{R}^2$  内の長方形集合

$$[a, b] \times [c, d] := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$$

を区画とよぶ.

(イ). 1 変数関数  $y = \sqrt{1 - x^2}$  が意味をもつのは  $-1 \leq x \leq 1$  のみである. このように, 関数とそれが意味をもつ (定義される) 変数の範囲はペアで考えなくてはならない<sup>1</sup>.

同様に 2 変数関数の場合も, 関数  $z = f(x, y)$  が意味をもつ (定義可能な)  $(x, y)$  の集合を関数  $f$  の定義域とよぶ. 例えば,

- $z = xy$  の定義域は  $\mathbb{R}^2$  全体. また,  $z = x/y$  の定義域は  $\mathbb{R}^2 - \{x \text{ 軸} \}$ .
- $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  の定義域は閉円板  $\bar{\mathbb{D}}(\vec{0}, 1)$ .

また, 実際に関数  $z = f(x, y)$  がとりうる値の集合

$$\{ k \in \mathbb{R} \mid f(x, y) = k \text{ となる } (x, y) \text{ が存在} \}$$

を  $f$  の値域とよぶ. 例えば (各自確認せよ),

- $z = xy$  と  $z = x/y$  の値域は実数全体, すなわち  $\mathbb{R}$  となる.
- $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  の値域は区間  $[0, 1]$  となる.

関数  $z = f(x, y)$  が集合  $D$  で定義されているとき,

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: (x, y) \mapsto z, \quad (x, y) \xrightarrow{f} z$$

のように表す. もし  $f$  の値域が集合  $A$  に含まれると分かっているときは,  $f: D \rightarrow A$  と表すこともある. 例えば  $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  のときは  $f: \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$  ではなく  $f: \bar{\mathbb{D}} \rightarrow [0, 1]$  と書いてもよい. こちらのほうが情報が多いため好まれる.

<sup>1</sup> 普段はそれほど神経質にならなくてもよいが, 数値実験用にプログラムを書くとき, うっかり定義域外の値を関数に代入してしまいエラーが出る, なんてことはよくある.

## 2 変数関数の極限

私たちは 2 変数関数の微分積分論を展開したいので、微分を定義しなければならない。それには、1 変数のときと同様に「極限」の概念が必要である。

まず「ベクトル変数  $(x, y)$  がベクトル定数  $(a, b)$  に限りなく近づく」という言葉を定式化しよう。

**定義.** ベクトル変数  $(x, y)$  がベクトル定数  $(a, b)$  に対し,  $(x, y) \neq (a, b)$  かつ

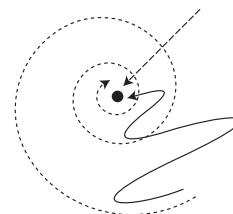
$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow 0$$

を満たすとき,

$$(x, y) \rightarrow (a, b) \text{ もしくは } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と表し,  $(x, y)$  が  $(a, b)$  に限りなく近づくという。

**注意 (近づき方はいろいろ).** 1 変数の場合と違って、近づくといってもさまざまである。あらゆる近づき方を考慮しなくてはならない。



**注意 (各成分への分解).**  $|x-a|$  と  $|y-b|$  は  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  以下なので、明らかに次が成り立つ:

$$(x, y) \rightarrow (a, b) \iff x \rightarrow a \text{ かつ } y \rightarrow b$$

**定義 (極限).** 点  $(a, b)$  の周りで定義された関数  $f(x, y)$  に対し, ある定数  $L$  が存在して

$$(x, y) \rightarrow (a, b) \text{ ならば } f(x, y) \rightarrow L$$

が成り立つとき,  $f(x, y)$  は  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  のとき  $L$  に収束するといい,

$$L = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$$

と表す. また,  $L$  はその**極限 (値)** という。

**例.**  $f(x, y) = e^{x+y}$  とおくと,  $(x, y) \rightarrow (1, 2)$  のとき  $e^{x+y} \rightarrow e^{1+2} = e^3$  である。

**例.**  $f(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$  とおくと,  $(0, 0)$  はこの関数の定義域には含まれないことに注意)  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  のとき  $f(x, y) \rightarrow 1$  である。

なぜなら,  $t = x^2 + y^2$  とおくと  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  のとき  $t \rightarrow 0$  であり, このとき  $f(x, y) = \frac{e^t - 1}{t} \rightarrow 1$ .

**ややこしい例.** 次の例題を考えてみよう。

例題. 極限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  は存在するか?

解答: 存在しない. 理由は単純.  $y = 0$  のまま  $x \rightarrow 0$  とするとき, すなわち  $(x, y)$  が水平方向から  $(0, 0)$  に近づくとき,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

同様に  $y = 0$  のまま  $x \rightarrow 0$  とするとき, すなわち  $(x, y)$  が垂直方向から  $(0, 0)$  に近づくとき,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

「近づき方によらず」一定値に近づかないといけないので, 矛盾. ■

注意.  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  (ただし  $r > 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ) と表してみよう.  $\theta$  は一定値に固定し  $r \rightarrow 0$  とした極限をとると (すなわち,  $x$  軸との角度  $\theta$  ラジアンを一定に保ちながら原点に近づく)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \cos 2\theta.$$

すなわち,  $\theta$  に依存して結果が変わってしまう.

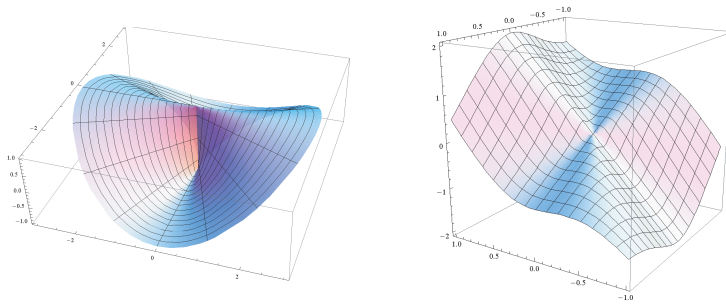


図 1: 原点中心半径 3 の閉円板上の  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  と区画  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  上の  $\frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ .

一見ややこしそうだが, そうでもない例. 次の例題はどうだろうか?

例題. 極限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$  は存在するか?

解答: 存在する.  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  とおくと  $|x| \leq r$ ,  $|y| \leq r$  が成り立つ. よって

$$0 \leq \left| \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|2x^3| + |y^3|}{|x^2 + y^2|} \leq \frac{2r^3 + r^3}{r^2} = 3r.$$

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$  のとき  $r \rightarrow 0$  であるから, 「はさみうちの原理」より

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| = \lim_{r \rightarrow 0} 3r = 0.$$

すなわち  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$ . ■

極限の性質. 2 変数の極限についても, 次が成り立つ:

公式 2-1 (極限と四則).  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \alpha$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = \beta$  であるとき,

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \{f(x,y) + g(x,y)\} = \alpha + \beta.$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)g(x,y) = \alpha\beta.$$

$$(3) \beta \neq 0 \text{ のとき, } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

### 関数の連続性

2変数関数の連続性も1変数の場合と同様に定義する.

定義 (連続性). 点  $(a,b)$  の周りで定義された関数  $f(x,y)$  に対し,

$$(x,y) \rightarrow (a,b) \text{ のとき } f(x,y) \rightarrow f(a,b)$$

すなわち

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

であるとき, 関数  $f(x,y)$  は  $(a,b)$  で連続であるという.

また, 関数  $f(x,y)$  が集合  $D$  上で連続であるとは,  $D$  内のすべての点  $(a,b)$  において  $f(x,y)$  が連続であることをいう.

例 (1次関数). すべての1次関数  $z = f(x,y) = Ax + By + C$  は  $xy$  平面  $\mathbb{R}^2$  上で連続である. 実際,  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  とするとき,

$$|f(x,y) - f(a,b)| = |A(x-a) + B(y-b)| \leq |A||x-a| + |B||y-b|.$$

$(x,y) \rightarrow (a,b)$  のとき  $x \rightarrow a$  かつ  $y \rightarrow b$  であるから, 上の式は 0 に収束する. よって  $f(x,y) \rightarrow f(a,b)$ .

関数の四則と連続性. 次の成り立つのも, 1変数の場合と同様である.

定理 2-2 (四則と連続性). 関数  $f(x,y)$  と関数  $g(x,y)$  が  $(a,b)$  で連続であるとき, 和  $f(x,y) + g(x,y)$ , 積  $f(x,y)g(x,y)$  も  $(a,b)$  で連続. さらに  $g(a,b) \neq 0$  であるとき, 商  $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$  も  $(a,b)$  で連続.

例 (多項式). 定数関数, 1次関数は連続であるから, 定理 2-2 より  $1 + xy$ ,  $1 - x^2 - 3xy^2 + y^3$  といった多項式関数も連続となる. また,  $\frac{x-y}{x^2+y^2}$  などの有理関数も分母が 0 にならない範囲で連続である.

例.  $f(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$  は原点で分母が 0 になるので関数の値が定義できないように見えるが,

$f(0,0) := 0$  と追加で定義すると  $\mathbb{R}^2$  全体で連続な関数となる.

例. 同様に  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$  と定義すると  $\mathbb{R}^2$  全体で連続な関数となる.

不連続な例. 今度は  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$  と定義してみる. この関数は  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  で連続だが, 原点では連続でない. 実際,  $f(0,0)$  としてどのような実数を割り当てても  $\mathbb{R}^2$  全体で連続な関数とはできない.

## レポート問題

締め切りは 10 月 23 日の講義開始時とします.

問題 3-1. 次の関数が与えられた点で全微分可能であることを示せ. また, そこでの接平面の方程式を求めよ.

(1)  $z = x^2 + y^2, (x,y) = (a,b)$

(2)  $z = xy, (x,y) = (1,1)$

(3)  $z = (x+y)^3, (x,y) = (1,2)$

(HINT: 一般に  $|XY| \leq (X^2 + Y^2)/2$ ,  $|X + Y|^2 \leq 2(X^2 + Y^2)$  が成り立つことは用いてよい.)

問題 3-2. 関数  $z = f(x,y) = \sin x + \sin y$  を考える.

- (1)  $\sin x$  と  $\sin y$  のテイラー展開 (漸近展開) をそれぞれ考えることで,  $f(x,y)$  は  $(a,b)$  における漸近展開

$$f(x,y) = \sin a + \sin b + (x-a)\cos a + (y-b)\cos b + o\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)$$

を持つことを示せ.

- (2) 区画  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  上で関数  $z = \sin x + \sin y$  の 3 次元グラフを考える. グラフの上にボールを静かに置いたとき, もっとも勢いよく転がるような点を与える集合を求め, 図示せよ.

## 全微分と接平面

配布日：October 23, 2014 Version：1.1

## 前回 (10/16) のまとめと補足

## 1 次近似と微分

**1 変数関数の 1 次近似.** 1 変数関数の微分を思い出そう.  $y = f(x)$  が  $x = a$  で「微分可能」であるとは, ある定数  $A$  が存在し,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow A \quad (x \rightarrow a) \quad (1)$$

が成り立つことをいうのであった. 1 章で学んだように, これは  $x \rightarrow a$  のとき

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + o(|x - a|) \quad (2)$$

と表されることと同値である. すなわち,

「 $x$  が  $a$  に近いとき  $f(x)$  は 1 次関数  $f(a) + A(x - a)$  で近似され,  
その誤差は  $o(|x - a|)$  程度」

と解釈できる. ここで 1 次関数  $f(a) + A(x - a)$  が  $f(x)$  のグラフの  $x = a$  における接線の方程式であり,

「微分可能な点ではグラフに接線が引ける」

という幾何学的事実を式で表現したことになる.

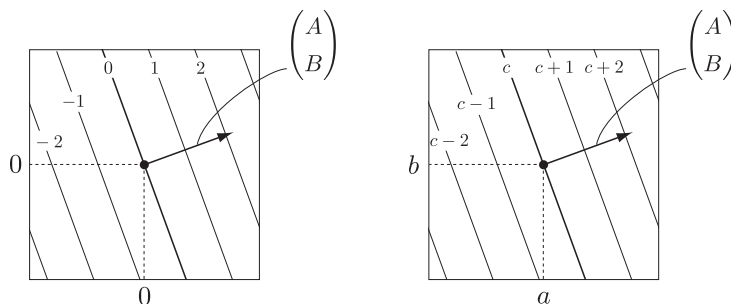
**準備：1 次関数の平行移動.** 多変数の微分に移る前に, 「接線」の 2 次元版である「接平面」の方程式にあたる 1 次関数の標準形を調べておこう.

接線の方程式は  $y = b + A(x - a)$  の形で表現される. これは, 直線  $y = Ax$  を原点が  $(a, b)$  に移るように平行移動させたものである.

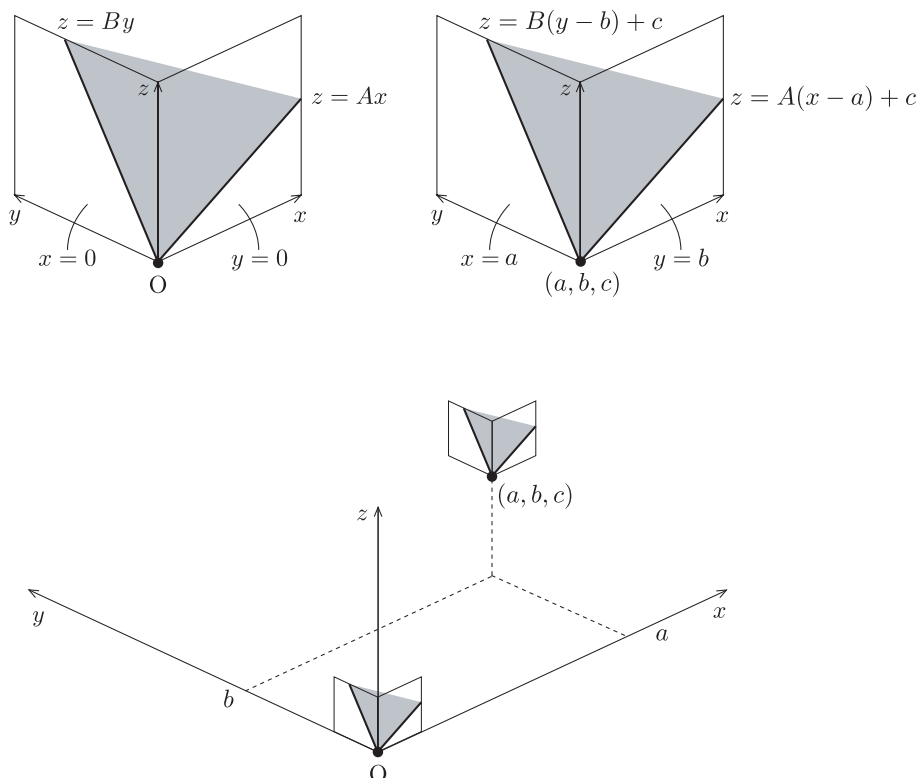
同様に, 平面  $z = Ax + By$  を原点が  $(a, b, c)$  に移るように平行移動させたものは

$$z - c = A(x - a) + B(y - b) \iff z = c + A(x - a) + B(y - b)$$

となる. 今後はこの形の方程式が重要な役割を演じることになる. とくに等高線グラフ, 3 次元グラフの形に注意しよう.



**多変数関数の 1 次近似.** 1 変数の微分可能性の式 (2) をもとにして, 2 変数関数の微分可能性を定式化しよう.



**定義 (全微分可能性).** 関数  $z = f(x, y)$  が  $(x, y) = (a, b)$  で全微分可能 (もしくは単に微分可能) であるとは, ある定数  $A, B$  が存在し,  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  のとき

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + o\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\right) \quad (3)$$

と表されることをいう.

関数  $z = f(x, y)$  が集合  $D$  上のすべての点で全微分可能であるとき,  $f(x, y)$  は  $D$  上で全微分可能であるという.

すなわち,

「 $(x, y)$  が  $(a, b)$  に十分近いとき,  $f(x, y)$  は 1 次関数  $f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$  で近似され, その誤差は  $o\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\right)$  程度」

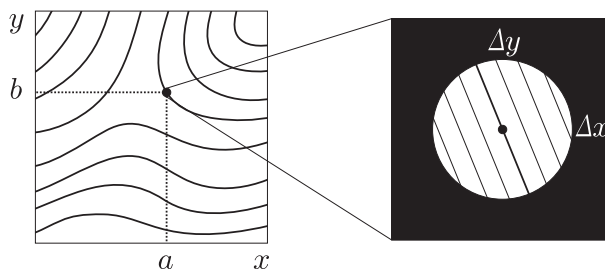
と解釈される. したがって  $f(x, y)$  の等高線グラフの  $(a, b)$  付近を拡大すると, 1 次関数  $z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$  の等高線グラフのように見える.

**誤差部分の意味.** 念のため, 1 次関数からの誤差にあたる  $o\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\right)$  の部分を正確に書いておこう. これは 2 変数関数のランダウ記号であり, 基本的な意味は 1 変数関数の場合と変わらない.

$f(x, y)$  と 1 次関数  $f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$  の誤差の正確な値は関数

$$E(x, y) := f(x, y) - \{f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)\}$$





で与えられる. この関数が  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  のとき

$$\frac{|E(x, y)|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \rightarrow 0$$

を満たすとき,

$$E(x, y) = o\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right) \quad ((x, y) \rightarrow (a, b))$$

と表すのである. 私たちはこの誤差関数  $E(x, y)$  の具体的な形には興味がない. その大きさが関数  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  に比べ相対的に早く 0 に収束するという事実だけが重要であるから, これを簡単に  $o\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)$  と表したのである.

例. 1 次関数  $z = f(x, y) = Ax + By + C$  はすべての点  $(a, b)$  で全微分可能である. 実際,

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= (Ax + By + C) - (Aa + Bb + C) \\ &= A(x - a) + B(y - b) \end{aligned}$$

であるから, 誤差ゼロで全微分可能性の式 (3) を満たす.

**例題.** 2 次関数  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  は点  $(1, 2)$  で全微分可能であることを示せ.

解答.  $\Delta x = x - 1, \Delta y = y - 2$  とおく. このとき

$$f(x, y) = (\Delta x + 1)^2 + (\Delta y + 2)^2 = 5 + 2\Delta x + 4\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$$

であるから,

$$f(x, y) = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2) + \underbrace{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}_{\text{下線部}}$$

を得る.  $f(1, 2) = 5$  であり, 下線部は  $(x, y) \rightarrow (1, 2)$  のとき

$$\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \rightarrow 0$$

を満たすので, 全微分可能性の式 (3) を満たす. ■

## 接平面

1 変数関数のグラフの「接線」にあたるものとして, 2 変数関数のグラフの「接平面」を定義しよう.

**定義 (接平面).** 関数  $z = f(x, y)$  が  $(a, b)$  において全微分可能であり (3) 式を満たすとき, 1 次関数

$$z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) \quad (4)$$

で与えられる平面を関数  $f(x, y)$  の  $(a, b)$  における接平面という.

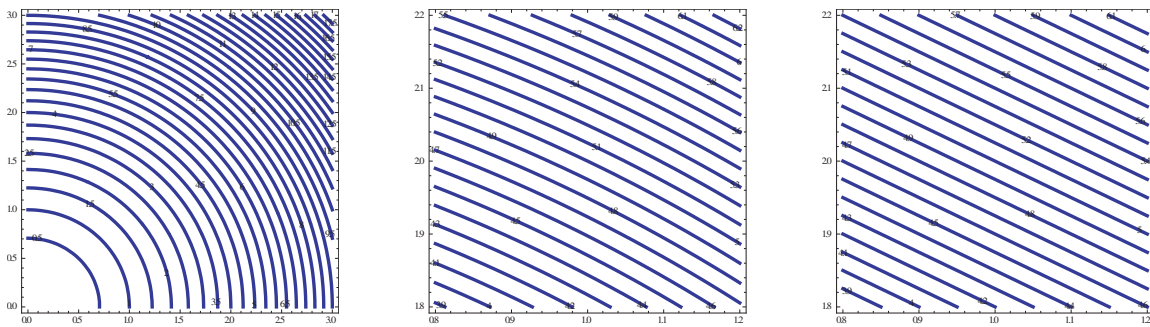


図 1: 左から,  $z = x^2 + y^2$  の区画  $[0, 3] \times [0, 3]$  上および区画  $[0.8, 1.2] \times [1.8, 2.2]$  での等高線グラフ, さらに 1 次関数  $f(x, y) = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$  の区画  $[0.8, 1.2] \times [1.8, 2.2]$  におけるグラフ.

**注意.** (4) 式を関数  $f(x, y)$  の  $(a, b)$  における接平面の方程式とよぶ. また, 1 次関数  $z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$  そのものを「接平面」とよぶこともある.

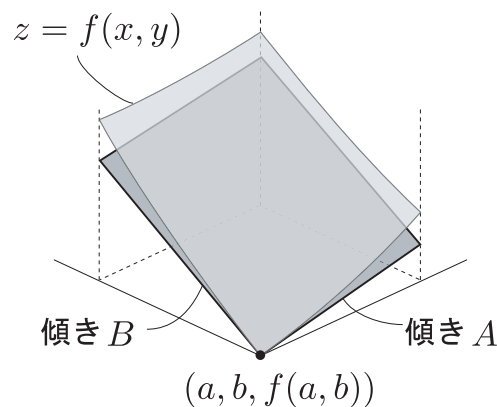


図 2:  $z = f(x, y)$  の  $(a, b)$  における接平面.

**例.** 1 次関数  $z = f(x, y) = Ax + By + C$  の点  $(a, b)$  における接平面は自分自身である. 実際, 次が成り立つ:

$$z = Ax + By + C = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b).$$

**例.** 2 次関数  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  の点  $(1, 2)$  における接平面は  $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$  である.

### 勾配ベクトル

(4) 式は

$$f(x, y) = f(a, b) + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + (\text{誤差})$$

と変形できる. 誤差部分を無視すると, 近似的に

$$f(x, y) - f(a, b) \approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \quad (5)$$

が成り立っている. この式は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{からの移動量 } \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

から

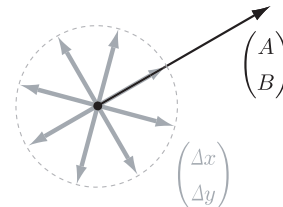
$$f(a, b) \text{からの増加量 } \Delta z := f(x, y) - f(a, b)$$

を割り出すための関係式だといえる. 改めて (5) 式を

$$\Delta z \approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

と書き直してみよう. 移動量  $(\Delta x, \Delta y)$  の絶対値を固定したとき, 増加量  $\Delta z$  を最大 (もしくは最小) にするのは, ベクトル  $(\Delta x, \Delta y)$  がどの方向を向いているときだろうか?

例えば, 山の斜面に立ち, 一步だけ移動する. このとき, 高さをもっとも増加 (もしくは減少) させるのはどの方向か? 答は簡単である. 右辺の内積を最大 (最小) にすればよいのだから, ベクトル  $(A, B)$  と移動量  $(\Delta x, \Delta y)$  が完全に同じ方向 (真逆の方向) であればよい.



すなわち, ベクトル  $(A, B)$  は「関数をもっとも増加させる移動方向」を示唆している. 山の斜面でいえば, 一步で等高線をもっともたくさんまたぐことができる方向である. それは, もっとも急勾配の方向であり, 等高線と垂直な方向である<sup>1</sup>.

このようにベクトル  $(A, B)$  には重要な意味があるので, 名前をつけておこう.

**定義 (勾配ベクトル)** (4) 式から得られる定数の組 (ベクトル)  $(A, B)$  を関数  $f(x, y)$  の点  $(a, b)$  における**勾配ベクトル** (もしくは単に**勾配**) とよび,  $\nabla f(a, b)$  もしくは  $\text{grad } f(a, b)$  と表す.

$\nabla$  は大文字のデルタ ( $\Delta$ ) をひっくり返した記号で, 「ナブラ」 (nabla) と読む. また,  $\text{grad}$  は勾配を表す単語 gradient に由来する.

例. 1 次関数  $z = f(x, y) = Ax + By + C$  はすべての点  $(a, b)$  で勾配ベクトル  $(A, B)$  をもつ.

例. 2 次関数  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  は点  $(1, 2)$  で勾配ベクトル  $(2, 4)$  をもつ.

### 多変数関数の全微分

全微分概念を一般の多変数関数の場合に拡張しておこう.  $n$  次元ベクトル  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  と  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  に対し,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &:= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ |\vec{a}| &:= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \end{aligned}$$

と定義する. ベクトル変数  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  が  $|\vec{x} - \vec{a}| \rightarrow 0$  を満たすとき,  $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$  と表す.

<sup>1</sup>もし点  $(a, b)$  にボールを置くと,  $(-A, -B)$  の方向に転がり始める. 重力の影響で, 高さをもっとも「減少させる」方向に転がり始めるからである.

**定義 (全微分可能性).** ベクトル変数  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  をもつ関数  $y = f(\vec{x})$  が点  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  において**全微分可能** (もしくは単に**微分可能**) であるとは, あるベクトル定数  $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$  が存在し,  $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$  のとき

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o(|\vec{x} - \vec{a}|) \quad (6)$$

と表されることをいう. このベクトル  $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$  を  $\vec{a}$  における**勾配ベクトル** (もしくは単に**勾配**) とよび,  $\nabla f(\vec{a})$  と表す.

$n = 1$  のとき (6) は (2) と一致し, 正しい微分の定義を与えている!

### レポート問題

締め切りは 10 月 30 日の講義開始時とします.

**問題 4-1.** 次の関数の偏導関数 ( $f_x$  と  $f_y$ ) を求めよ.

$$(1) f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (2) f(x, y) = x^2 y^4 + 2xy^2 + 1 \quad (3) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$(4) f(x, y) = e^{x+y} \quad (5) f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

**問題 4-2.** 次の関数は与えられた点で全微分可能であることを示し, そこでの勾配ベクトルを求めよ.

$$(1) f(x, y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) = (1, 1)$$

$$(2) f(x, y) = \sin(x + 2y), \quad (x, y) = (0, 0)$$

$$(3) f(x, y) = e^{x+y}, \quad (x, y) = (0, 0)$$

(HINT. 偏導関数が連続であることを確認する.)

## 偏微分

配布日：October 30, 2014 Version：1.1

## 前回 (10/23) のまとめと補足

## 全微分 (復習)

**定義 (全微分可能性, 再)**. 関数  $z = f(x, y)$  が  $(x, y) = (a, b)$  で全微分可能であるとは, ある定数  $A, B$  が存在し,  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  のとき

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + o\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\right) \quad (1)$$

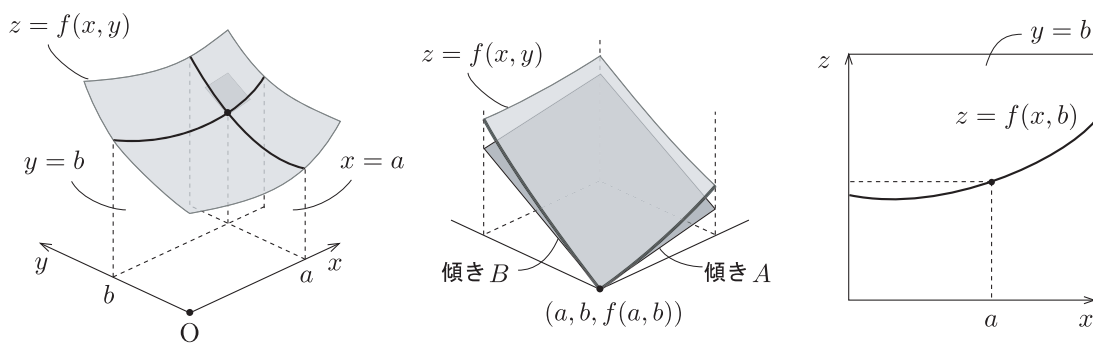
と表されることをいう.

関数  $z = f(x, y)$  が集合  $D$  上のすべての点で全微分可能であるとき,  $f(x, y)$  は  $D$  上で全微分可能であるという.

与えられた関数がある点で全微分可能かどうかを判定するとき, そのたびにわざわざ関数を式 (1) の形に変形するのも面倒である. そこで, 「式 (1) を経由しないで, 全微分可能かどうか判定する方法」を紹介しよう.

定数  $A$  と  $B$  の意味

$z = f(x, y)$  が  $(a, b)$  で全微分可能であり, (1) が成り立つと仮定する. このとき,  $z = f(x, y)$  の 3 次元グラフを  $(a, b, f(a, b))$  のあたりで拡大すると (拡大すればするほど), 接平面  $z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$  のように見えるはずである (下図).



そこで,  $z = f(x, y)$  の 3 次元グラフの平面  $y = b$  と  $x = a$  による断面に着目してみよう.

- 平面  $y = b$  による断面は曲線  $z = f(x, b)$  ( $x$  のみの関数)
- 平面  $x = a$  による断面は曲線  $z = f(a, y)$  ( $y$  のみの関数)

であることに注意すると, 接平面の方程式の係数  $A$  と  $B$  は

- $A$ : 曲線  $z = f(x, b)$  の  $(x, z) = (a, f(a, b))$  における接線の傾き (微分係数)
- $B$ : 曲線  $z = f(a, y)$  の  $(y, z) = (b, f(a, b))$  における接線の傾き (微分係数)

であり,

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \quad \text{かつ} \quad B = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

が成り立つ.

### 偏微分

そこで, (全微分可能とは限らない) 関数  $z = f(x, y)$  について, 次のように「偏微分係数」を定義する.

**定義 (偏微分).** 関数  $z = f(x, y)$  が  $(x, y) = (a, b)$  で偏微分可能であるとは, ある定数  $A, B$  が存在し,  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  のとき

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \quad \text{かつ} \quad B = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} \quad (2)$$

が成り立つことをいう. このとき,  $A$  と  $B$  を  $f(x, y)$  の  $(a, b)$  における偏微分係数とよび,

$$A = f_x(a, b), \quad B = f_y(a, b)$$

と表す. 関数  $z = f(x, y)$  が集合  $D$  上のすべての点で偏微分可能であるとき,  $f(x, y)$  は  $D$  上で偏微分可能であるという.

**注意.**  $A = f_x(a, b)$  は「 $x$  偏微分係数」,  $B = f_y(a, b)$  は「 $y$  偏微分係数」とよび区別することもある.

**定義 (偏導関数).** 関数  $z = f(x, y)$  が定義域上で偏微分可能であるとき, 関数

$$(a, b) \mapsto f_x(a, b), \quad (a, b) \mapsto f_y(a, b),$$

をともに  $f(x, y)$  の偏導関数とよび, それぞれ次のように表す:

$$\begin{aligned} z_x &= f_x(x, y) & z_y &= f_y(x, y) \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \partial_x z &= \partial_x f(x, y) & \partial_y z &= \partial_y f(x, y) \end{aligned}$$

**注意.**  $z_x = f_x(x, y)$  は「 $x$  偏導関数」,  $z_y = f_y(x, y)$  は「 $y$  偏導関数」とよび区別することもある. また, 偏微分係数  $f_x(a, b)$  も

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \partial_x f(a, b), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x, y) = (a, b)}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x, y) = (a, b)}$$

といった多様な表現が可能である.

### 偏微分の計算方法

**具体例.** 例えば  $z = f(x, y) = x^2 y^3$  としよう.  $z_x$  は「 $y$  は定数だと思って」関数  $x \mapsto f(x, y)$  を  $x$  に関して微分すればよい (偏微分の定義に戻って, 理由を考えよ). よって  $z_x = (2x)y^3 = 2x^2 y^3$ .

同様に  $z_y$  は「 $x$  は定数だと思って」関数  $y \mapsto f(x, y)$  を  $y$  に関して微分すればよい。よって  $z_y = x^2(3y^2) = 3x^2y^2$ 。

**例題.** 次の関数の偏導関数を求めよ。

$$(1) z = Ax + By + C \quad (2) z = x^2 + y^2 \quad (3) z = \sin(x^2 + y^3)$$

**解答.** (1) :  $z_x = A, z_y = B$ . (2) :  $z_x = 2x, z_y = 2y$  (3) :  $z_x = 2x \sin(x^2 + y^3), z_y = 3y^2 \sin(x^2 + y^3)$ .

### 全微分 vs. 偏微分

一般に、全微分可能であれば偏微分可能である。しかし、その逆は成り立たない。偏微分ができて、全微分ができない（接平面が存在しない）例が存在するからである<sup>1</sup>。

そこで、偏微分可能性にもう少しだけ条件を加えて、全微分可能性が得られるようにしよう。

**定理 4-1 (全微分可能  $\implies$  偏微分可能).**  $z = f(x, y)$  が点  $(a, b)$  で全微分可能であれば、偏微分可能である。とくに式 (1) が成り立つとき、

$$A = f_x(a, b) \text{ かつ } B = f_y(a, b).$$

**証明.** 点  $(a, b)$  で式 (1) が成り立つとき、 $x \rightarrow a, y = b$  とすれば

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \frac{A(x - a) + B \cdot 0 + o(\sqrt{(x - a)^2})}{x - a} = A + \frac{o(|x - a|)}{x - a} \rightarrow A.$$

よって  $f_x(a, b)$  が存在し、 $A$  と一致する。 $f_y(a, b)$  についても同様である。 ■

**定理 4-2 (偏微分可能  $+ \alpha \implies$  全微分可能).**  $z = f(x, y)$  が定義域上で

- 偏微分可能 ; かつ
- 偏導関数  $f_x(x, y)$  と  $f_y(x, y)$  が連続

ならば、定義域上で全微分可能である。とくに、 $(x, y) \rightarrow (a, b)$  のとき

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + o(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}). \quad (3)$$

**証明.**  $\Delta x := x - a, \Delta y := y - b, A = f_x(a, b), B = f_y(a, b)$  とおく。仮定のもと、 $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  ならば

$$K(x, y) := \frac{|f(x, y) - \{f(a, b) + A\Delta x + B\Delta y\}|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0$$

であることを示せばよい。 $y$  を固定して平均値の定理を用いると、

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= \frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a} + \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} \\ &= \frac{f_x(c_1, y)(x - a)}{x - a} + \frac{f_y(a, c_2)(y - b)}{y - b} \\ &= f_x(c_1, y)\Delta x + f_y(a, c_2)\Delta y \end{aligned}$$

が成り立つ（ただし  $c_1$  は  $x$  と  $a$  の間の実数、 $c_2$  は  $y$  と  $b$  の間の実数）ので、

<sup>1</sup>全微分 vs. 偏微分 vs. 連続. 一般にある点で「全微分可能ならば偏微分可能」であり、「全微分可能ならば連続」である。しかし、これらの逆は成り立たない。さらに、「連続性」と「偏微分可能性」の間には関係がない。

$$\begin{aligned}
 K(x, y) &= \frac{|(f_x(c_1, y) - A)\Delta x + (f_y(a, c_2) - B)\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \\
 &\leq |f_x(c_1, y) - A| \frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + |f_y(a, c_2) - B| \frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \\
 &\leq |f_x(c_1, y) - f_x(a, b)| \cdot 1 + |f_y(a, c_2) - f_y(a, b)| \cdot 1 \rightarrow 0. \quad ((x, y) \rightarrow (a, b))
 \end{aligned}$$

ただし、最後に偏導関数の連続性と  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  のとき  $(c_1, c_2) \rightarrow (a, b)$  であることを用いた。 ■

### $C^1$ 級関数

数学では「滑らかさ」に応じて関数に等級（クラス）をつける習慣がある。たとえば単なる連続関数は接平面が存在しないような点も許すので、グラフがガタガタしているかもしれない。これを最低レベルの「滑らかさ」とみなして「 $C^0$  級」とよぶ。その次のレベル「 $C^1$  級」は、次のように定義される。

**定義.**  $z = f(x, y)$  が  $C^1$  級であるとは、定義域上で偏導関数  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$  がそれぞれ存在し連続であることをいう。

したがって定理 4-2 は次のように述べることができる：

**定理 4-2' ( $C^1$  級  $\implies$  全微分可能).**  $z = f(x, y)$  が定義域上で  $C^1$  級ならば全微分可能である。

すなわち、 $C^1$  級関数であれば接平面が存在する程度に「滑らか」だといえる。等級はさらに「 $C^2$  級」, 「 $C^3$  級」と続き最終的には「 $C^\infty$  級」にまで上がっていくが、その定義は後で扱うことにしよう。

**例.** 多項式やそれに三角関数・指数関数を合成したような関数など、私たちが普通に目にする関数はだいたい  $C^1$  級関数である。(より一般に、「 $C^\infty$  級」であることが多い。)

### レポート問題

締め切りは 11 月 6 日 (木) の講義開始時とします。

**問題 5-1.** 次の関数  $z = f(x, y)$  と曲線  $(x, y) = (x(t), y(t))$  に対して (勾配ベクトルと速度ベクトルを用いて) 導関数  $\frac{dz}{dt}$  を求めよ。

- (1)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $(x, y) = (-t, 2t)$       (2)  $f(x, y) = x + y$ ,  $(x, y) = (\cos t, \sin t)$   
 (3)  $f(x, y) = \sin xy$ ,  $(x, y) = (t^2, t)$

**問題 5-2.** 次のように与えられた変数変換  $\Phi : (u, v) \rightarrow (x, y)$  と  $uv$  平面上の集合  $E$  に対して、その  $xy$  平面内の像  $\Phi(E)$  を図示せよ。

- (1)  $(x, y) = \Phi(u, v) = (u + v, uv)$ ,  $E = \{(u, v) \mid u > 0, v > 0\}$   
 (2)  $(x, y) = \Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u)$ ,  $E = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq \pi/2, 1 \leq v \leq 2\}$   
 (3)  $(x, y) = \Phi(u, v) = (2u + v, u - v)$ ,  $E = \{(u, v) \mid -1 \leq u \leq 3, -2 \leq v \leq 4\}$



## 合成関数と微分

配布日: October 30, 2014 Version: 1.1

## 前回 (10/30) のまとめと補足

## 合成関数の微分

一変数のとき,  $y = f(x)$ ,  $z = g(y)$  とすると,  $z = g(f(x))$  に対し合成関数の微分公式

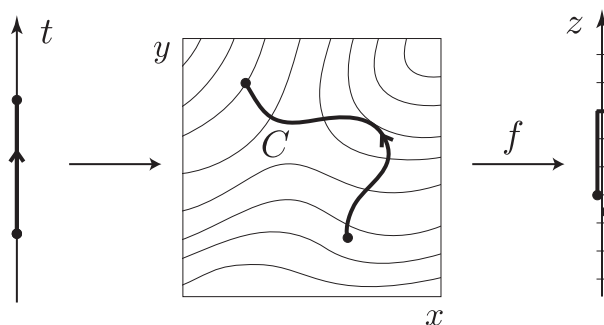
$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \iff \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

が成り立つのであった. 今回から次回にかけて, 2 変数関数について同様の公式を求めていこう.

「1 次元 → 2 次元 → 1 次元」の場合. 時刻  $t$  をパラメータにもつ  $xy$  平面内の曲線

$$C: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

を考える. さらに  $xy$  平面には関数  $z = f(x, y)$  が定義されているとしよう (下の図).



たとえば, ある列車の経路とそこでの海拔高度が与えられているような場合である. このとき, 合成関数

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(x(t), y(t)) = z$$

の, 与えられた時刻  $t_0$  における微分係数  $\frac{dz}{dt}(t_0)$  を与える公式を求めよう.

以下,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = f(x, y)$  はすべて  $C^1$  級だと仮定する (したがって定義域上ですべて全微分可能).

まず, 時刻  $t = t_0$  における曲線上の点の位置を  $(a, b) := (x(t_0), y(t_0))$  としよう. この  $(a, b)$  における  $f$  の勾配ベクトルを  $(A, B) := (f_x(a, b), f_y(a, b))$  とおく.

時刻が  $t = t_0$  から微小量  $\Delta t$  だけ変化するとき, 曲線  $C$  上での移動量 (ベクトル) を

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(t_0 + \Delta t) \\ y(t_0 + \Delta t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}$$

と表す. いま  $x(t)$ ,  $y(t)$  は微分可能なので, それぞれ時刻  $t_0$  における微分係数を

$$v_1 := \frac{dx}{dt}(t_0), \quad v_2 := \frac{dy}{dt}(t_0)$$

とすれば,  $\Delta t \rightarrow 0$  のとき

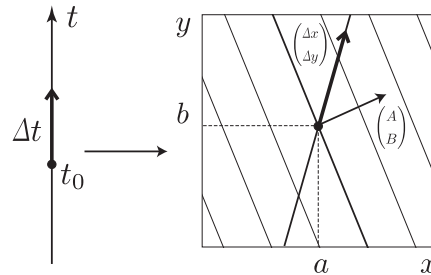
$$x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = v_1 \Delta t + o(\Delta t)$$

$$y(t_0 + \Delta t) - y(t_0) = v_2 \Delta t + o(\Delta t)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Delta t + \begin{pmatrix} o(\Delta t) \\ o(\Delta t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

が成り立つ. ここで下線部は誤差として「無視したい」部分である (以下同様).



一方,  $z = f(x, y)$  は  $(a, b)$  において全微分可能であるから,  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  のとき

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + \underline{o(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2})}.$$

すなわち,  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  であれば

$$\begin{aligned} \Delta z &:= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \\ &= A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \underline{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \underline{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})} \end{aligned}$$

が成り立つ. 下線部はやはり「無視したい」誤差部分である. (1) 式を代入して,

$$\begin{aligned} \Delta z &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Delta t + \begin{pmatrix} o(\Delta t) \\ o(\Delta t) \end{pmatrix} \right\} + \underline{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})} \\ &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Delta t + \underline{A o(\Delta t) + B o(\Delta t) + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})} \\ &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Delta t + \underline{o(\Delta t)}. \end{aligned}$$

ここで  $o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = o(\Delta t)$  であることを用いた<sup>1</sup>. ゆえに, 次の式を得る:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : \text{勾配ベクトルと速度ベクトルの内積} \\ &= \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t_0) \\ \frac{dy}{dt}(t_0) \end{pmatrix} \\ &= f_x(a, b) \frac{dx}{dt}(t_0) + f_y(a, b) \frac{dy}{dt}(t_0) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>次のようにして確認できる:

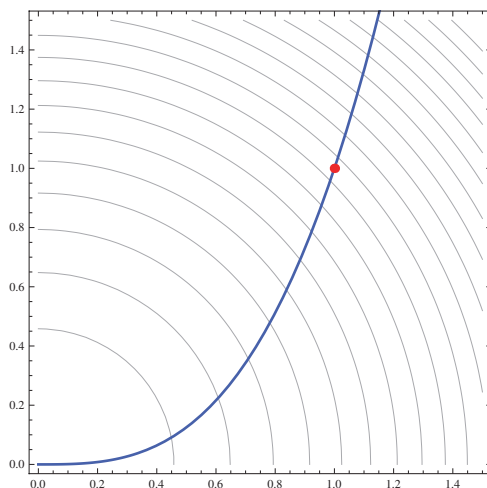
$$\frac{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})}{\Delta t} = \frac{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} = \frac{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \sqrt{(v_1^2 + v_2^2) + o(1)} \rightarrow 0.$$

覚えやすいように、冒頭の 1 変数の「合成関数の微分公式」を意識した形にまとめてみよう：

**公式 5-1.**  $(x, y) = (x(t), y(t))$ ,  $z = f(x, y)$  のとき,  $z(t) = f(x(t), y(t))$  の  $t$  による微分は,  $f$  の勾配ベクトル  $(f_x, f_y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$  と  $(x, y)$  の速度ベクトル  $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$  の内積である：

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}.$$

**例題.**  $(x, y) = (t, t^3)$  と  $z = x^2 + y^2$  のとき,  $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1}$  の値をもとめよ.



**解答.** 一般に  $(x, y)$  における  $z$  の勾配ベクトルは  $(z_x, z_y) = (2x, 2y)$  であり,  $(x, y)$  の  $t$  に関する速度ベクトルは  $(1, 3t^2)$  である.

$t = 1$  のとき,  $(x, y) = (1, 1)$  であるから, 求める微分係数は

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(1,1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \Big|_{t=1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 8.$$

検算してみよう.  $z = x^2 + y^2 = t^2 + t^6$  より,  $\frac{dz}{dt} = 2t + 6t^5$ . よって  $t = 1$  のとき  $\frac{dz}{dt} = 8$ . ■

### 11 月 6 日出題分：レポート問題 (訂正版)

締め切りは 11 月 13 日 (木) の講義開始時とします.

**問題 6-1.** 次の関数  $z = f(x, y)$  と変数変換  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$  に対して, 関数  $z = F(u, v) := f(x(u, v), y(u, v))$  とおく. このとき,

- $f$  の勾配ベクトル  $\nabla f = (f_x, f_y)$

- ヤコビ行列  $D\Phi = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$
- $F$  の勾配ベクトル  $\nabla F = (F_u, F_v)$

をそれぞれ求めよ. ただし, 行列の意味で次の公式が成り立つことを用いてよい.

$$(F_u \ F_v) = (f_x \ f_y) \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

$$(1) \ z = f(x, y) = x^2 + y^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ uv \end{pmatrix}$$

$$(2) \ z = f(x, y) = x + y, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \end{pmatrix}$$

$$(3) \ z = f(x, y) = xy, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u + v \\ u - v \end{pmatrix}$$

$$(4) \ z = f(x, y) = e^{x-2y}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 - v \\ u \end{pmatrix}$$

### 11 月 13 日出題分: レポート問題

締め切りは 11 月 20 日 (木) の講義開始時とします.

**2 次のテイラー展開 (漸近展開)**.  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  のとき,

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + P\Delta x + Q\Delta y + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + o(\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

ただし  $P = f_x(a, b)$ ,  $Q = f_y(a, b)$ ,  $A = f_{xx}(a, b)$ ,  $B = f_{xy}(a, b)$ ,  $C = f_{yy}(a, b)$ ,

**問題 7-1.** 以下の関数  $f(x, y)$  と  $(a, b)$  について, 上記の公式をもとに 2 次のテイラー展開 (漸近展開) を求めよ.

- (1)  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $(a, b) = (\alpha, \beta)$
- (2)  $z = f(x, y) = e^{xy}$ ,  $(a, b) = (1, 1)$
- (3)  $z = f(x, y) = \sqrt{3 - x^2 + y^2}$ ,  $(a, b) = (1, 1)$
- (4)  $z = f(x, y) = \sqrt{3 - x^2 + y^2}$ ,  $(a, b) = (0, 0)$

## 変数変換とヤコビ行列

配布日：November 20, 2014 Version：1.1

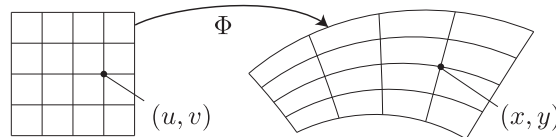
### 前回 (11/6) のまとめと補足

#### 変数変換

**定義 (変数変換)**. ベクトル変数  $(u, v)$  に対しふたつの  $C^1$  級関数  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  が定義されているとき, ベクトル  $(u, v)$  にベクトル  $(x, y)$  を対応させる写像

$$\Phi: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

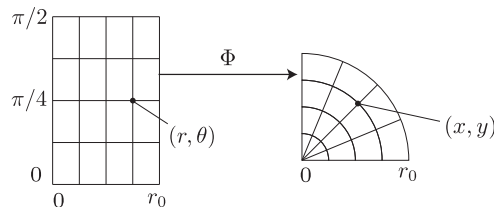
が定まる. これを**変数変換**とよぶ.



**例 (極座標変換)**. 変換式

$$\Phi: \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

は  $(x, y)$  の**極座標変換**と呼ばれる. たとえば  $E := \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$  のとき,  $\Phi(E) = D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .



**例 (1 次変換)**. 行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が与えられているとき,

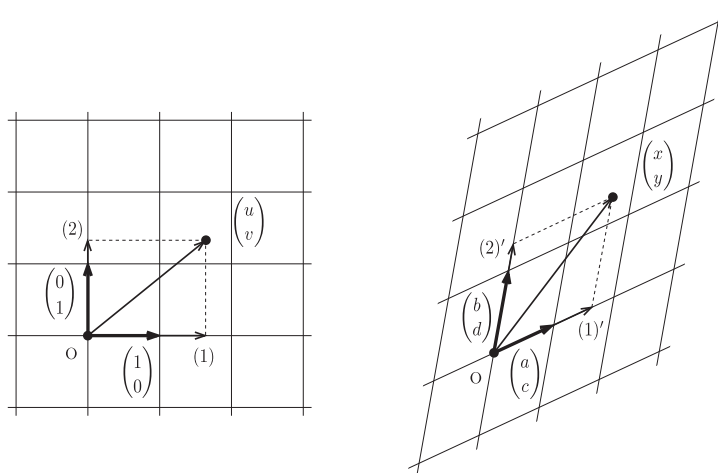
$$\Phi: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{pmatrix}$$

で定まる変数変換を**1 次変換**もしくは**線形変換**とよぶ. 1 次変換はあらゆる変数変換のなかでも基本といえるものなので, その作用はある程度理解しておく必要がある.

いま, ベクトル  $(a, c)$  と  $(b, d)$  はともにゼロベクトルではなく, 平行でもないとする (これは条件  $ad - bc \neq 0$  と同値である.). このとき,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(1)} + \underbrace{v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{(2)}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{u \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}}_{(1)'} + \underbrace{v \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}_{(2)'}$$

であるから,  $uv$  平面と  $xy$  平面は変数  $u$  と  $v$  を介して次の図のように対応する. (たとえば  $u, v$  いずれかが整数となるような点の集合は図の左のような格子をなす. その像は右のような歪んだ格子となる.)



### 変数変換の「微分」

関数のグラフが接線や接平面を表す 1 次関数で局所的に近似できるように、「変数変換は局所的に 1 次変換で近似される」ことを確認しよう.  $x = x(u, v)$  と  $y = y(u, v)$  をそれぞれ  $C^1$  級関数とし, 変数変換

$$\Phi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

を考える. とくに, 点  $(p, q)$  を固定し,  $\Phi \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(p, q) \\ y(p, q) \end{pmatrix}$  としよう. ベクトル変数  $(u, v)$  が  $(p, q)$  からわずかに移動するとき, 対応する  $(x, y)$  がどのように変化するかを記述したい. すなわち,

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} := \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) - x(p, q) \\ y(u, v) - y(p, q) \end{pmatrix}$$

の関係を表現したいのである. いま  $x = x(u, v)$  は  $C^1$  級であるから, 全微分可能である. よってある定数  $P_1, Q_1$  が存在し,  $(u, v) \rightarrow (p, q)$  のとき (すなわち  $(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)$  のとき)

$$x(u, v) = x(p, q) + P_1(u - p) + Q_1(v - q) + o(\sqrt{(u - p)^2 + (v - q)^2}) \quad (1)$$

$$\iff \Delta x = P_1 \Delta u + Q_1 \Delta v + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}) \quad (2)$$

を満たす. 関数  $y = y(u, v)$  も  $C^1$  級であるから, 同様に定数  $P_2, Q_2$  が存在し

$$\Delta y = P_2 \Delta u + Q_2 \Delta v + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}) \quad (3)$$

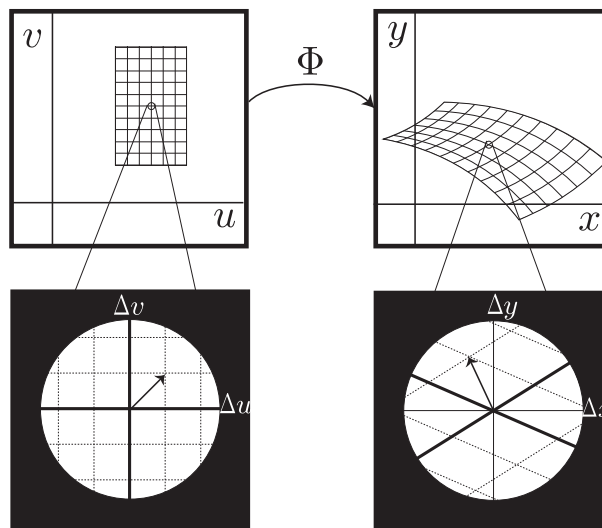
を満たしている. したがって,

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \Delta u + Q_1 \Delta v \\ P_2 \Delta u + Q_2 \Delta v \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}) \\ o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}) \end{pmatrix}}$$

下線部 (誤差項) を無視すると

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} P_1 \Delta u + Q_1 \Delta v \\ P_2 \Delta u + Q_2 \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \quad (4)$$

が成り立っている. これは, 点  $(p, q)$  を中心に拡大した顕微鏡内の  $\Delta u \Delta v$  座標系と, 点  $(a, b)$  を中心に拡大した顕微鏡内の  $\Delta x \Delta y$  座標系との関係がほぼ 1 次変換になっていることを示している.



この局所的な 1 次変換を生成する行列は全微分の式 (2)(3) に現れる偏微分係数から構成されるので

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u(p, q) & x_v(p, q) \\ y_u(p, q) & y_v(p, q) \end{pmatrix}$$

である。これが 1 次変換の「微分係数」にあたるもので、特別な名前がついている。

**定義 (ヤコビ行列)**. 変数変換  $\Phi: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$  に対し, 行列

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \tag{5}$$

を変数変換  $\Phi$  のヤコビ行列 (もしくは単に微分) とよび,  $D\Phi$  と表す. また,  $(u, v) = (p, q)$  における値

$$\begin{pmatrix} x_u(p, q) & x_v(p, q) \\ y_u(p, q) & y_v(p, q) \end{pmatrix} \tag{6}$$

を  $D\Phi(p, q)$  で表し, 点  $(p, q)$  におけるヤコビ行列という.

**いくつかの注意.**

- (5) の形のヤコビ行列  $D\Phi$  が  $\Phi$  の「導関数」に相当し, (6) の形のヤコビ行列  $D\Phi(p, q)$  が  $\Phi$  の  $(p, q)$  における「微分係数」に相当する.
- ヤコビ行列の行列式  $\det D\Phi = x_u y_v - x_v y_u$  はヤコビアンとよばれ, あとで積分の変数変換のときに大活躍する.
- ヤコビ行列は「公式」として覚えるのではなく, 全微分の式 (2)(3) を考え, そこから (4) のように導出する, という「手順」で覚えるのがよい.

**例 (極座標変換)**. 極座標変換  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$  のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

である. たとえば,  $(r, \theta) = (2, \pi/2)$  でのヤコビ行列は  $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  となる.

**例 (1 次変換)**. 1 次変換  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{pmatrix}$  のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

である. 1 次変換はいわば「導関数が定数となる」変換なのである.

**合成関数の微分公式**

**「2 次元 → 2 次元 → 1 次元」型の合成関数.**  $C^1$  級関数  $z = f(x, y)$  と, 変数  $(x, y)$  を別の変数  $(u, v)$  でパラメーター付けする変数変換

$$\Phi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

与えられているとしよう. このとき, 合成関数

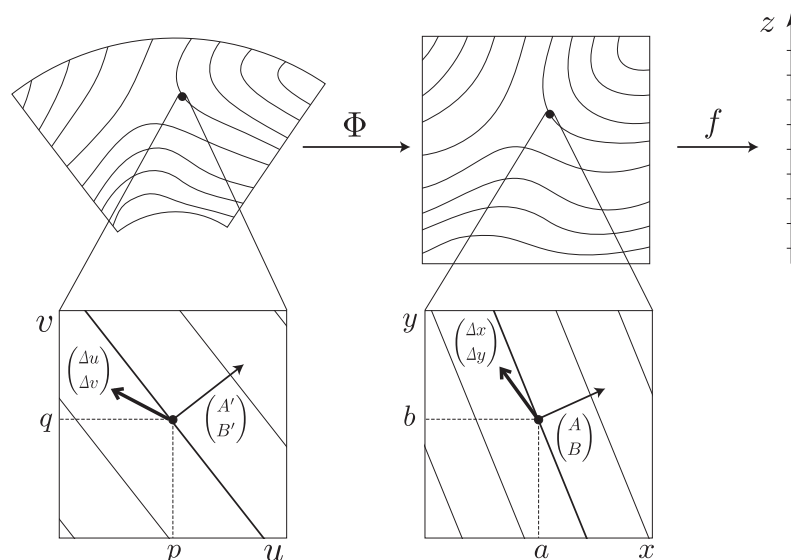
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(x(u, v), y(u, v)) = z$$

が考えられる. そこで, 関数  $z = F(u, v) := f(x(u, v), y(u, v))$  の変数  $u$  もしくは  $v$  による偏微分を計算してみよう. これは, 次の問題を考えることに相当する:

**問題.** 合成関数  $z = F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$  に対し, 与えられた点  $(p, q)$  における勾配ベクトル

$$\nabla F(p, q) = (F_u(p, q), F_v(p, q))$$

を求めよ.





もう少し具体的に問題を設定してみよう. いま, 図のように  $xy$  平面上の関数  $z = f(x, y)$  の等高線に対応して,  $uv$  平面上に関数  $z = F(u, v)$  の等高線が描ける.  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  とし,  $(x, y) = (a, b)$  における関数  $z = f(x, y)$  の勾配ベクトルが

$$\nabla f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b)) = (A, B)$$

として確定しているとしよう. このとき,  $(u, v) = (p, q)$  における関数  $z = F(u, v)$  の勾配ベクトル  $(A', B') := (F_u(p, q), F_v(p, q))$  を,  $(A, B)$  の式で表すことを目標としてみよう.

**問題への解答.** 全微分の式をもとに計算してみよう. ベクトル  $(\Delta u, \Delta v)$  および  $(\Delta x, \Delta y)$  を先ほどと同様に定義する. さらに

$$\Delta z = F(p + \Delta u, q + \Delta v) - F(p, q) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

とおこう. いま  $z = f(x, y)$  に関する全微分の式より

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad (7)$$

が  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  のときに成り立つ. 一方, 目標とする関係式は  $(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)$  のとき

$$\Delta z = A'\Delta u + B'\Delta v + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}) \approx \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \quad (8)$$

を満たす  $(A', B')$  を求めることだといえる.

そこで変数変換  $\Phi$  の  $(p, q)$  におけるヤコビ行列を  $D\Phi(p, q) = \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix}$  とおけば, (4) 式より  $(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)$  のとき  $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$  が成り立っているので, (7) より

$$\begin{aligned} \Delta z &\approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = (A \ B) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} : 1 \times 2 \text{ 行列と } 2 \times 1 \text{ 行列の積} \\ &\approx (A \ B) \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \\ &= (AP_1 + BP_2 \quad AQ_1 + BQ_2) \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AP_1 + BP_2 \\ AQ_1 + BQ_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} : \text{ベクトルの内積} \end{aligned}$$

が (誤差の部分を無視すれば) 成り立つ. したがって (8) 式と比較すれば

$$\begin{cases} A' = AP_1 + BP_2 \\ B' = AQ_1 + BQ_2 \end{cases} \iff (A' \ B') = (A \ B) \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. 覚えやすい形にまとめておこう:

**公式 6-1.** 変数変換  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$ , と関数  $z = f(x, y)$ , およびその合成関数  $z = F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$  が与えられているとき,

- $f$  の勾配ベクトル  $\nabla f = (f_x, f_y)$
- ヤコビ行列  $D\Phi = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$
- $F$  の勾配ベクトル  $\nabla F = (F_u, F_v)$

は行列の意味で関係式「 $\nabla F = \nabla f D\Phi$ 」を満たす。すなわち、次を満たす。

$$(F_u \ F_v) = (f_x \ f_y) \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \iff \begin{cases} F_u = f_x x_u + f_y y_u \\ F_v = f_x x_v + f_y y_v \end{cases}$$

成分ごとに  $z$  を用いて表すと,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

**参考 (公式 5-1 を用いた導出法).**  $F$  の  $u$  偏微分とは「 $v$  を定数だと思って」合成関数

$$u \mapsto (x(u, v), y(u, v)) \xrightarrow{f} f(x(u, v), y(u, v)) = F(u, v)$$

を  $u$  で微分することであった。とくに  $u \mapsto (x(u, v), y(u, v))$  の部分は曲線のパラメータ表示だとみなすことができるので、公式 5-1 と同じ考え方が適用できる。すなわち  $F_u$  とは勾配ベクトル  $(f_x, f_y)$  とこの曲線の速度ベクトル  $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)$  の内積であり,

$$F_u = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \iff \frac{\partial z}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

となる。これは公式 6-1 とつじつまが合っている。

**例.** 極座標変換  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$  と関数  $z = x^2 + y^2$  が与えられているとき、公式 6-1 より

$$\begin{aligned} (z_r \ z_\theta) &= (z_x \ z_y) \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} \\ &= (2x \ 2y) \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = (2r \cos \theta \ 2r \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= (2r \ 0). \end{aligned}$$

すなわち  $\frac{\partial z}{\partial r} = 2r$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$  である。

検算してみよう。  $z = x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2$  より、確かに  $\frac{\partial z}{\partial r} = 2r$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$  となっている。

## 高次偏導関数とテイラー展開

配布日: November 20, 2014 Version: 1.1

## 前回 (11/13) のまとめと補足

## 高次の偏導関数

数学では関数に「滑らかさ」に応じた等級をつけるのがならわしである。ただの連続関数（そのグラフはガタガタしているかもしれない）を最低レベルの「滑らかさ」として、

$$\text{連続} = C^0 \text{級} < C^1 \text{級} < C^2 \text{級} < \dots < C^\infty \text{級}$$

といった等級を定義しよう。

まず関数  $z = f(x, y)$  が「 $C^1$  級」とは、「偏導関数  $f_x, f_y$  が存在し、それぞれ連続」であることをいうのであった。 $f_x, f_y$  はとくに **1 次偏導関数**ともよばれる<sup>1</sup>。

さらに  $f_x, f_y$  の偏導関数  $(f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_x, (f_y)_y$  が存在するとき、これらを  $f$  の **2 次偏導関数**とよぶ。また、

$$(f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \dots$$

などはそれぞれ

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \dots$$

のように表す。2 次偏導関数もそれぞれ偏微分可能であれば、

$$f_{xxx} = ((f_x)_x)_x = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad f_{xyy} = ((f_x)_y)_y = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \quad \dots$$

など、 $2^3 (= 8)$  通りの **3 次偏導関数**が定まる。一般の  $n$  次偏導関数も同様である。

**定義** ( $C^n$  級と  $C^\infty$  級) 整数  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  に対し、

- $f(x, y)$  が  $C^n$  級であるとは、 $n$  次以下の偏導関数がすべて存在し、それらがすべて連続であることをいう。
- $f(x, y)$  が  $C^\infty$  級であるとは、任意の  $n$  について  $C^n$  級であることをいう。

例.  $z = x^2 + y^2$  のとき、 $z_x = 2x, z_y = 2y$ . よって 2 次偏導関数は

$$z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yx} = 0, \quad z_{yy} = 2.$$

これらはすべて定数なので、3 次以上の偏導関数はすべて 0 である。

例.  $z = x^3 y^5$  のとき、 $z_x = 3x^2 y^5, z_y = 5x^3 y^4$ . よって 2 次偏導関数は

$$z_{xx} = 6xy^5, \quad z_{xy} = 15x^2 y^4, \quad z_{yx} = 15x^2 y^4, \quad z_{yy} = 20x^3 y^3.$$

例.  $z = \sin xy^2$  のとき、 $z_x = y^2 \cos xy^2, z_y = 2xy \cos xy^2$ . よって 2 次偏導関数は

$$z_{xx} = -y^4 \sin xy^2, \quad z_{xy} = -2xy^3 \sin xy^2, \quad z_{yx} = -2xy^3 \sin xy^2, \quad z_{yy} = -4x^2 y^2 \sin xy^2.$$

<sup>1</sup> 「1 階偏導関数」ともよばれる。

以上の例では  $z_{xy} = z_{yx}$  が成り立っているが、これは偶然ではない:

**定理 7-1 (偏微分の順序交換: ヤングの定理)** 関数  $z = f(x, y)$  が  $C^2$  級であれば,

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

とくに,  $C^\infty$  級関数であれば偏微分の順序は自由に交換できる.

例. たとえば  $C^\infty$  級関数では

$$f_{xxyy} = f_{xyxy} = f_{yxyx} = \dots$$

などが成り立つ.  $n$  次偏導関数は  $2^n$  個存在するが, 実際には  $n+1$  通りの関数しかないのである.

**証明.**  $(a, b)$  を  $f$  の定義域から任意に選んで固定する. また,  $(a, b)$  に十分近い  $(x, y)$  に対し,  $\Delta x := x - a$ ,  $\Delta y = y - b$  とおく.

さて唐突だが,

$$\{f(x, y) - f(x, b)\} - \{f(a, y) - f(a, b)\} = \{f(x, y) - f(a, y)\} - \{f(x, b) - f(a, b)\} \quad (1)$$

という量を考えてみよう.  $K(x, y) := f(x, y) - f(x, b)$  とおくと (1) の左辺は  $K(x, y) - K(a, y)$  であり, 平均値の定理より適当な  $a'$  が  $x$  と  $a$  の間に存在して

$$K(x, y) - K(a, y) = K_x(a', y)\Delta x = \{f_x(a', y) - f_x(a', b)\}\Delta x$$

と書ける. さらに  $y \mapsto f_x(a', y)$  に平均値の定理を適用すると,

$$f_x(a', y) - f_x(a', b) = f_{xy}(a', b')\Delta y$$

となる  $b'$  が  $y$  と  $b$  の間に存在するから, 結果として (1) の左辺は  $f_{xy}(a', b')\Delta y\Delta x$  と表される.

つぎに  $L(x, y) := f(x, y) - f(a, y)$  において同様の議論を行えば, 適当な  $a''$  と  $b''$  がそれぞれ  $x$  と  $a$  の間と  $y$  と  $b$  の間に存在して, (\*) の右辺は  $f_{yx}(a'', b'')\Delta x\Delta y$  と書けることがわかる. いま  $\Delta x, \Delta y \neq 0$  を満たしつつ  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  とすれば,  $f_{xy}$  および  $f_{yx}$  の連続性 および  $(a', b'), (a'', b'') \rightarrow (a, b)$  より,  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$  を得る. ■

## 2 次のテイラー展開

1 変数関数のテイラー展開を思い出そう.  $y = f(x)$  が  $C^\infty$  級であれば, テイラー展開

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c)}{2!}(x - a)^2$$

(ただし  $c$  は  $x$  と  $a$  の間にある数) が成り立つのであった. さらに  $x \rightarrow a$  のとき, 漸近展開

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + o(|x - a|^2)$$

が成り立つのであった. これは  $\Delta x := x - a \rightarrow 0$  のとき

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

と書いても同じことである.

2 変数関数の場合でも, 同様のテイラー展開を考えよう. 以下, 関数はすべて  $C^\infty$  級であり, 何度でも好きなだけ偏微分できるものとする.

**定理 7-2 (2 次のテイラー/漸近展開)**. 関数  $z = f(x, y)$  は点  $(a, b)$  を含む円板上で  $C^\infty$  級であるとする.  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  のとき,

$$\begin{aligned} f(a + \Delta x, b + \Delta y) &= f(a, b) + P\Delta x + Q\Delta y && : 1 \text{ 次近似} \\ &+ \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) && : 2 \text{ 次近似} \\ &+ o(\Delta x^2 + \Delta y^2) && : \text{誤差} \end{aligned}$$

ただし  $P = f_x(a, b)$ ,  $Q = f_y(a, b)$ ,  $A = f_{xx}(a, b)$ ,  $B = f_{xy}(a, b)$ ,  $C = f_{yy}(a, b)$ .

例.  $z = x^2 + y^2$ ,  $(a, b) = (1, 2)$  とすると, 先ほどの例で求めた偏導関数より  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  のとき

$$\begin{aligned} &(1 + \Delta x)^2 + (2 + \Delta y)^2 \\ &= 5 + 2\Delta x + 4\Delta y + \frac{1}{2}(2\Delta x^2 + 2 \cdot 0 \cdot \Delta x\Delta y + 2\Delta y^2) + o(\Delta x^2 + \Delta y^2). \\ &= 5 + 2\Delta x + 4\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 + o(\Delta x^2 + \Delta y^2). \end{aligned}$$

最初の式をふつうに展開して計算すればわかるが, じつは下線の誤差項は 0 である.

例.  $z = e^{x+y}$ ,  $(a, b) = (0, 0)$  とする.  $z_x = z_y = e^{x+y}$  より,  $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = e^{x+y}$ . よって  $(x, y) = (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  のとき

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + o(x^2 + y^2). \\ &= 1 + (x + y) + \frac{(x + y)^2}{2!} + o(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

これは, 1 変数のテイラー展開  $e^t = 1 + t + t^2/2 + o(t^2)$  ( $t \rightarrow 0$ ) に  $t = x + y$  を代入したものと考えられる<sup>2</sup>.

**定理 7-2 の証明.** 十分に小さい  $\Delta x$  と  $\Delta y$  を固定する. このとき点  $(a, b)$  と点  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$  を結ぶ線分は関数  $f$  の定義域に入っている. その線分を時間パラメーター  $t \in [0, 1]$  を用いて

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}}_{\text{速度ベクトル}}$$

と表現しておく.

さて  $F(t) := f(x(t), y(t))$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt} F(t) = \begin{pmatrix} f_x(x(t), y(t)) \\ f_y(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} : \text{勾配ベクトルと速度ベクトルの内積} \\ &= f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y \end{aligned} \quad (\text{ア})$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt} \{F'(t)\} = \frac{d}{dt} \{f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y\} \\ &= \frac{d}{dt} \{f_x(x(t), y(t))\}\Delta x + \frac{d}{dt} \{f_y(x(t), y(t))\}\Delta y \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} f_{xx}(x(t), y(t)) \\ f_{xy}(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right\} \Delta x + \left\{ \begin{pmatrix} f_{yx}(x(t), y(t)) \\ f_{yy}(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right\} \Delta y \\ &= f_{xx}(x(t), y(t))\Delta x^2 + 2f_{xy}(x(t), y(t))\Delta x\Delta y + f_{yy}(x(t), y(t))\Delta y^2 \end{aligned} \quad (\text{イ})$$

<sup>2</sup>この場合, 厳密には誤差項  $o(t^2) = o((x + y)^2)$  が  $o(x^2 + y^2)$  であることを確認しなくてはならないが, 一般に  $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$  が成り立つので正当化できる.

が成り立つ.  $f(x, y)$  は  $C^2$  級なので, (イ) の式より  $F''(t)$  は連続である. すなわち関数  $t \mapsto F(t)$  は  $C^2$  級であるから, 1 変数のテイラー展開より, ある  $c \in (0, t)$  が存在して

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(c)}{2!}t^2$$

が成り立つ. とくに  $t = 1$  とすれば, ある  $c \in (0, 1)$  が存在して  $F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(c)}{2!}$  となる.  $(x(0), y(0)) = (a, b)$ ,  $(x(1), y(1)) = (a + \Delta x, b + \Delta y)$ , および (ア) より,

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \frac{F''(c)}{2!}. \quad (\text{ウ})$$

(イ) より,

$$\begin{aligned} F''(c) - F''(0) &= \{f_{xx}(x(c), y(c)) - f_{xx}(a, b)\} \cdot \Delta x^2 \\ &\quad + \{f_{xy}(x(c), y(c)) - f_{xy}(a, b)\} \cdot 2\Delta x\Delta y \\ &\quad + \{f_{yy}(x(c), y(c)) - f_{yy}(a, b)\} \cdot \Delta y^2. \end{aligned}$$

三角不等式および  $2\Delta x\Delta y \leq \Delta x^2 + \Delta y^2$  より

$$\begin{aligned} |F''(c) - F''(0)| &\leq |f_{xx}(x(c), y(c)) - f_{xx}(a, b)| \cdot |\Delta x^2| \\ &\quad + |f_{xy}(x(c), y(c)) - f_{xy}(a, b)| \cdot |2\Delta x\Delta y| \\ &\quad + |f_{yy}(x(c), y(c)) - f_{yy}(a, b)| \cdot |\Delta y^2| \\ &\leq |f_{xx}(x(c), y(c)) - f_{xx}(a, b)| \cdot |\Delta x^2 + \Delta y^2| \\ &\quad + |f_{xy}(x(c), y(c)) - f_{xy}(a, b)| \cdot |\Delta x^2 + \Delta y^2| \\ &\quad + |f_{yy}(x(c), y(c)) - f_{yy}(a, b)| \cdot |\Delta x^2 + \Delta y^2|. \end{aligned}$$

$f$  が  $C^2$  級であることに注意すると,  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  のとき  $(x(c), y(c)) \rightarrow (a, b)$  であるから,

$$f_{**}(x(c), y(c)) \rightarrow f_{**}(a, b) \quad (** = xx, xy, yy)$$

がいえる. よって

$$\frac{|F''(c) - F''(0)|}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0 \iff F''(c) - F''(0) = o(\Delta x^2 + \Delta y^2).$$

ゆえに (ウ) の式に  $F''(c) = F''(0) + o(\Delta x^2 + \Delta y^2)$  を代入すれば求める漸近展開を得る. ■

**注意.** 証明を見ると, 定理 7-1 は  $f$  が  $C^2$  級であれば成り立つことがわかる. さらに証明の中の (ウ) の式より, 次のことがわかる:

**定理 7-3 (2 次のテイラー展開).** 関数  $z = f(x, y)$  は点  $(a, b)$  を含む円板上で  $C^2$  級であるとする.  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$  がその円板内にあるとき, ある定数  $c \in (0, 1)$  が存在し, 次の式が成り立つ:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + P\Delta x + Q\Delta y + \frac{1}{2}(A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2)$$

ただし  $(a', b') := (a + c\Delta x, b + c\Delta y)$  とするとき,  $P = f_x(a, b)$ ,  $Q = f_y(a, b)$ ,  $A' = f_{xx}(a', b')$ ,  $B' = f_{xy}(a', b')$ ,  $C' = f_{yy}(a', b')$ .

### 一般次数のテイラー展開

3 次以上のテイラー展開も, かなり複雑だが存在する. (証明は 2 次の場合と同様である.)

**2変数のテイラー展開.** 関数  $z = f(x, y)$  は点  $(a, b)$  を含む円板上で  $C^n$  級とする.  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$  がその円板内にあるとき, ある定数  $c \in (0, 1)$  が存在し, 次が成り立つ:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)f(a, b) + \frac{1}{2!}(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^2 f(a, b) \\ + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^{n-1} f(a, b) \\ + \frac{1}{n!}(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^n f(a + c\Delta x, b + c\Delta y)$$

ただし  $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$  であり,  $(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^j$  の部分は

$$(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^2 f(a, b) = (\Delta x^2 \partial_x^2 + 2\Delta x \Delta y \partial_x \partial_y + \Delta y^2 \partial_y^2) f(a, b) \\ = \Delta x^2 f_{xx}(a, b) + 2\Delta x \Delta y f_{xy}(a, b) + \Delta y^2 f_{yy}(a, b)$$

のように計算する. また,  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  のとき, 漸近展開

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)f(a, b) + \frac{1}{2!}(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^2 f(a, b) \\ + \cdots + \frac{1}{n!}(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^n f(a, b) + o(|\Delta x^2 + \Delta y^2|^{n/2})$$

をもつ.

注.  $(a, b) = (0, 0)$  のとき, **マクローリン展開**という.

別の書き方.  $A_{i,j} := \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) = f_{x \cdots x y \cdots y}(a, b)$  ( $x$  で  $i$  回,  $y$  で  $j$  回偏微分したときの偏微分係数) とおくと,

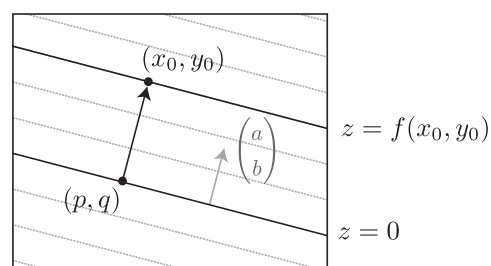
$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + A_{1,0}\Delta x + A_{0,1}\Delta y + \frac{1}{2!}\{A_{2,0}\Delta x^2 + 2A_{1,1}\Delta x\Delta y + A_{0,2}\Delta y^2\} \\ + \frac{1}{3!}\{A_{3,0}\Delta x^3 + 3A_{2,1}\Delta x^2\Delta y + 3A_{1,2}\Delta x\Delta y^2 + A_{0,3}\Delta y^3\} \\ + \frac{1}{4!}\{A_{4,0}\Delta x^4 + 4A_{3,1}\Delta x^3\Delta y + 6A_{2,2}\Delta x^2\Delta y^2 + 4A_{1,3}\Delta x\Delta y^3 + A_{0,4}\Delta y^4\} \\ + \cdots \\ + \frac{1}{n!}\{n C_0 A_{n,0}\Delta x^n + n C_1 A_{n-1,1}\Delta x^{n-1}\Delta y + \cdots + n C_n A_{0,n}\Delta y^n\} \\ + o(|\Delta x^2 + \Delta y^2|^{n/2})$$

### 参考: 点と直線の距離の公式

高校で学んだ次の公式を思い出そう:  $(x_0, y_0)$  と直線  $l: ax + by + c = 0$  の距離  $d$  は

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

分子に直線の方程式 (つぼいもの) が出てくるのが不思議に感じられたことはないだろうか? 2変数関数の勾配ベクトルを考えれば, これはごく自然なことなのだ.



点  $(x_0, y_0)$  から直線  $l$  への垂線の足を  $(p, q)$  とおく. さらに  $(\Delta x, \Delta y) = (x_0 - p, y_0 - q)$  としよう. いま, 関数  $z = f(x, y) = ax + by + c$  を考えると, とくに直線  $l$  は  $z$  が 0 で一定の等高線であるから,  $f(p, q) = 0$  である. このとき, 次が成り立つ:

$$f(x_0, y_0) - f(p, q) = a(x_0 - p) + b(y_0 - q)$$

$$\iff f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

ただし, 右辺は  $f$  の勾配ベクトルと点の移動量を表すベクトルとの内積である. これらのベクトルのなす角度  $\theta$  は定義より  $0$  または  $\pi$  であり, 右辺 =  $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right\| \cos \theta = \pm \sqrt{a^2 + b^2} d$  となる. 一方  $f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c$  であるから, 両辺の絶対値をとれば上の公式が得られるわけである.

### レポート問題

締め切りは 11 月 27 日 (木) の講義開始時とします.

**問題 8-1.** 以下の関数  $f(x, y)$  に対し, 極大値もしくは極小値をもつ点があればその座標と極値を求めよ.

- (1)  $z = f(x, y) = x^2 + 3y^2$
- (2)  $z = f(x, y) = xy$
- (3)  $z = f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x + 12y$
- (4)  $z = f(x, y) = x^2y^2$



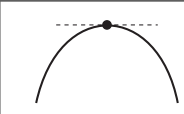
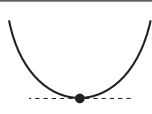
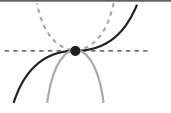
## 極大・極小と判別式

配布日：November 27, 2014 Version：1.1

前回 (11/20) のまとめと補足

## 2 変数関数の極大と極小

**1 変数関数の極大・極小.** 1 変数関数  $y = f(x)$  のが  $x = a$  で極大もしくは極小であるとき,  $f'(a) = 0$  でなくてはならない. さらに  $x = a$  のまわりでグラフが「下に凸」か「上に凸」かで極大・極小が区別できるから, 下の表のような判定基準を作ることができる:

		
$f'(a) < 0$	$f'(a) < 0$	$f'(a) = 0$
極大	極小	?

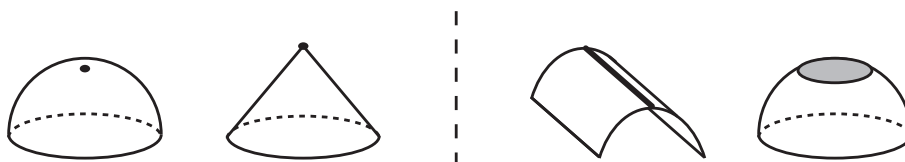
今回の目標は, 2 変数関数について同様の 2 次導関数を用いた判定基準を見つけることである.

**1 変数関数の極大・極小.** まずは極値とは何かを定義しておこう.

**定義 (極大値と極小値).**  $z = f(x, y)$  が  $(a, b)$  で極大 [極小] であるとは,  $(a, b)$  を含む十分小さな円板の上で,  $(x, y) \neq (a, b)$  のとき  $f(x, y) < f(a, b)$  [ $f(x, y) > f(a, b)$ ] が成り立つことをいう.

このとき  $f(a, b)$  の値を極大値 [極小値] とよぶ. 極大値と極小値をあわせて極値ともよばれる.

例えば下の図の場合, 左のふたつは極大値を与えているが右のふたつは極大値ではない. (極大値を与える点は局所的に最大値をとる「唯一の」点ではくてはならない.)



以下,  $f(x, y)$  は  $C^\infty$  級だとしよう. 次の命題は 1 変数のときの  $f'(a) = 0$  にあたる条件である.

**命題 8-1.**  $z = f(x, y)$  が  $(a, b)$  で極値をもつならば,

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

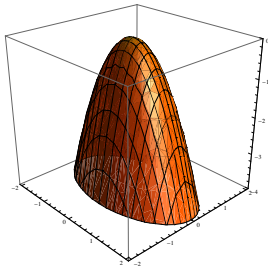
**注意.** 次の例のように,  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ . であっても極値をとるとはかぎらない.

**極値でない例.**  $z = f(x, y) = -x^2$  のとき,  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  だが, グラフは上の図の右から 2 番目のようになるので  $(0, 0)$  は極値ではない.

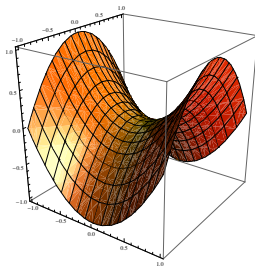
**極値でない例 2.**  $z = f(x, y) = x^2 - y^2$  のとき,  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  だが,  $y = 0$  のとき  $f(x, y) = x^2 \geq 0$ ,  $x = 0$  のとき  $f(x, y) = -y^2 \leq 0$  となるので極大でも極小でもない (いわゆる鞍点の例).

いろいろな例.

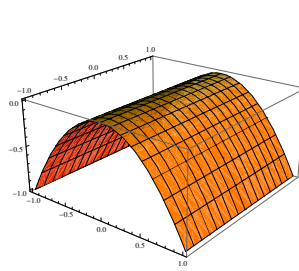
(1)  $z = -(x^2 + 3y^2)$



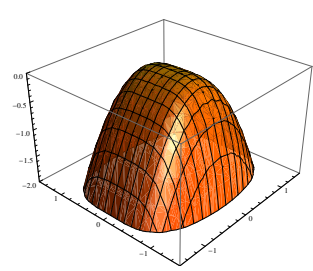
(2)  $z = x^2 - y^2$



(3)  $z = -x^2$



(4)  $z = -(x^2 + y^4)$



命題 8-1 の証明. 3次元グラフもしくは等高線グラフの  $x = a$  および  $y = b$  における切り口を考えれば明らか. ■

判別式による極値の判定法

テイラー展開を用いた考察.  $(a, b)$  が極値を取る点であれば, 命題 8-1 よりその点で  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  でなくてはならない. 2変数テイラー展開より, このとき

$$f(x, y) - f(a, b) \approx A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2$$

と近似される. ただし  $A = f_{xx}(a, b)$ ,  $B = f_{xy}(a, b)$ ,  $C = f_{yy}(a, b)$  である. したがって, たとえば  $A > 0$  かつ  $AC - B^2 > 0$  であるとき,

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = A\left(\Delta x + \frac{B\Delta y}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}\Delta y^2 > 0$$

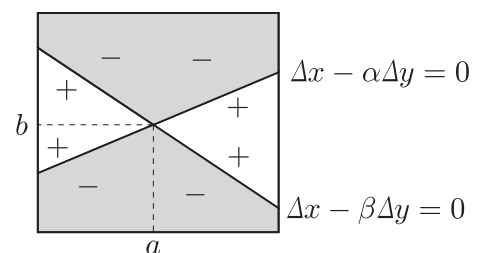
が  $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$  のとき成り立つ. これは  $(a, b)$  で  $f$  が極小値をとることを示唆している.

同様に,  $A < 0$  かつ  $AC - B^2 > 0$  であるとき,  $f$  は  $(a, b)$  で極大値をとるであろう.

また,  $A > 0$  かつ  $AC - B^2 < 0$  であるとき, 方程式  $At^2 + 2Bt + C = 0$  の異なるふたつの実数解を  $\alpha, \beta$  とおくと,

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = A(\Delta x - \alpha\Delta y)(\Delta x - \beta\Delta y)$$

と書ける. よって  $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$  のとき正の値も負の値も取りうる (右図). これは  $(a, b)$  で  $f$  が極値でない (鞍点である) ことを示唆している. このような議論を精密に行うことで, 次のような極値判定法が得られるのである.



**定理 8-2 (極値の判定) と定義 (判別).** 関数  $z = f(x, y)$  は  $(a, b)$  で  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  を満たすとす。このとき,

$$D = D(a, b) := f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \{f_{xy}(a, b)\}^2$$

を  $f$  の  $(a, b)$  における**判別式**とよび, 以下が成り立つ。

- (i)  $D > 0$ ,  $f_{xx}(a, b) > 0$  のとき,  $(a, b)$  で極小.
- (ii)  $D > 0$ ,  $f_{xx}(a, b) < 0$  のとき,  $(a, b)$  で極大.
- (iii)  $D < 0$  のとき, 極値とならない (鞍点).
- (iv)  $D = 0$  のときは, さらに調べないと分からない.

**例.** 上にあげた 4 つのグラフのうち, (1) は (i) の例, (2) は (iii) の例, (3) は (iv) かつ極値でない例, (4) は (iv) かつ極大値をとる例.

**例題.**  $f(x, y) = 1 + 2x - 3y - 2x^2 - xy - y^2$  の極値が存在すれば, すべて求めよ.

**解答.** 連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2 - 4x - y = 0 \\ f_y(x, y) = -3 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

をとくと,  $(x, y) = (1, -2)$ . よってこれが極値を与える点の唯一の候補である. また,  $f_{xx}(x, y) = -4$ ,  $f_{xy}(x, y) = -1$ ,  $f_{yy}(x, y) = -2$  より, 判別式は

$$D(1, -2) = -4 \cdot (-2) - (-1)^2 = 7 > 0.$$

よって定理 8-2 の (ii) より,  $(1, -2)$  で極大値  $f(1, -2) = 5$  をとる. ■

**例題.**  $f(x, y) = 2x^2 - y^2$  の極値が存在すれば, すべて求めよ.

**解答.** 連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x = 0 \\ f_y(x, y) = -2y = 0 \end{cases}$$

をとくと,  $(x, y) = (0, 0)$ . よってこれが極値を与える点の唯一の候補である. また,  $f_{xx}(x, y) = 4$ ,  $f_{xy}(x, y) = 0$ ,  $f_{yy}(x, y) = -2$  より, 判別式は

$$D(0, 0) = 4 \cdot (-2) - 0^2 = -8 < 0.$$

よって定理 8-2 の (iii) より,  $(0, 0)$  は極値ではない. すなわち, 関数  $f$  は極値をとらない. ■

**例題.**  $f(x, y) = x^2 + y^4$  の極値が存在すれば, すべて求めよ.

**考察.** 連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x = 0 \\ f_y(x, y) = 4y^3 = 0 \end{cases}$$

をとくと,  $(x, y) = (0, 0)$ . よってこれが極値を与える点の唯一の候補である. また,  $f_{xx}(x, y) = 2$ ,  $f_{xy}(x, y) = 0$ ,  $f_{yy}(x, y) = 12y^2$  より, 判別式は

$$D(x, y) = 2 \cdot 12y^2 - 0^2 = 24y^2.$$

よって  $D(0, 0) = 0$  となり, 定理 8-2 の (iv) より,  $(0, 0)$  が極値かどうかはさらに詳しく調べないと判定できない.

**解答.**  $(x, y) \neq (0, 0)$  のとき, 明らかに  $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$ . よって  $f$  は  $(0, 0)$  で極小値 0 をとる. ■

## 定理 8-2 の証明

以下記号を簡単にするために

$$A = f_{xx}(a, b), \quad B = f_{xy}(a, b) \quad C = f_{yy}(a, b), \quad D = AC - B^2$$

とおく.

定理 7-3 より,  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$  が  $(a, b)$  を円板内にあるとき, ある定数  $c \in (0, 1)$  が存在し, 次が成り立つ:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \frac{1}{2}(A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2)$$

ただし  $(a', b') = (a + c\Delta x, b + c\Delta y)$ ,  $A' = f_{xx}(a', b')$ ,  $B' = f_{xy}(a', b')$ ,  $C' = f_{yy}(a', b')$  である.  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  のとき  $(a', b') \rightarrow (a, b)$  であるから,

$$A' \rightarrow A, \quad B' \rightarrow B, \quad C' \rightarrow C$$

を満たす<sup>1</sup>. よって (i) の条件「 $D > 0$  かつ  $f_{xx}(a, b) = A > 0$ 」が成り立つとき,  $(\Delta x, \Delta y)$  が十分  $(0, 0)$  に近ければ  $A'C' - (B')^2 > 0$  かつ  $A' > 0$  が成り立つ. このとき

$$A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2 = A'\left(\Delta x + \frac{B'\Delta y}{A'}\right)^2 + \frac{A'C' - (B')^2}{A'}\Delta y^2 > 0$$

であるから,  $(a, b)$  において  $f$  は極小値をとる. (ii) の場合も同様である.

次に (iii) の条件を満たすとき, 関数  $F(t) = At^2 + 2Bt + C = 0$  は正負いずれの値をとることもできる. そこで  $F(t_0) > 0$  となる  $t_0$  を固定し,  $(\Delta x, \Delta y)$  を  $\Delta x = t_0\Delta y \neq 0$  を満たすようにとる. このとき

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = \Delta y^2 F(t_0) > 0$$

を満たすことに注意しよう. 定理 7-2 (2 次の漸近展開) より,  $\Delta y \rightarrow 0$  (よって  $\Delta x = t_0\Delta y \rightarrow 0$ ) のとき

$$\begin{aligned} f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) &= \frac{1}{2}(A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2) + o(\Delta x^2 + \Delta y^2) \\ &= \Delta y^2 F(t_0) + o(\Delta y^2) = \Delta y^2 \left( F(t_0) + \frac{o(\Delta y^2)}{\Delta y^2} \right) \end{aligned}$$

を満たす.  $\Delta y \rightarrow 0$  のとき  $\frac{o(\Delta y^2)}{\Delta y^2} \rightarrow 0$  なので,  $F(t_0) > 0$  より十分小さな  $\Delta y$  に対し下線部は正. すなわち,  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  の近くで  $f(a, b)$  よりも大きな値を取る.

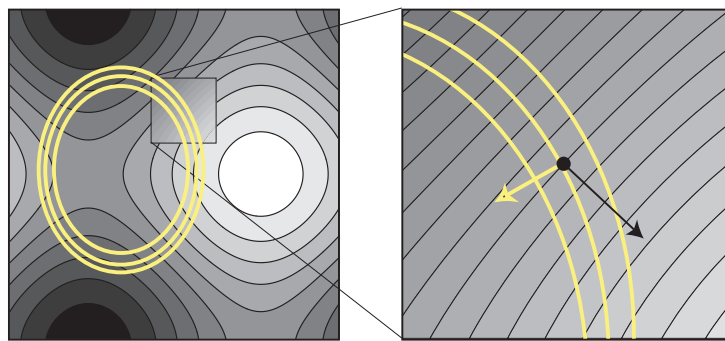
$F(t_0) < 0$  となる  $t_0$  を固定して同様の議論を行えば,  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  の近くで  $f(a, b)$  よりも小さな値を取ることがわかる. すなわち,  $f(a, b)$  は極値ではない. ■

## 参考：ラグランジュの未定乗数法（参考書 [三宅]p 104, [南] p181）の直感的説明

「 $x^2 + 2y^2 = 1$  という条件のもとで  $xy$  の最大値（極値）を求めよ」といった問題を考えてみよう. このとき有効なのが, **未定乗数法**と呼ばれる手法である.

一般に  $C : g(x, y) = 0$  という条件下で,  $z = f(x, y)$  の極値を考えてみよう (条件つき極値問題).  $z = g(x, y)$  という関数を考えると,  $C$  はこの関数の等高線である. もしある点  $(a, b) \in C$  で, そこでの  $f$  の等高線と  $g$  の等高線が図のように交差していたら,  $C$  上の点  $(a, b)$  の近くでは  $f$  の値は単調に増加もしくは減少することになり, 極値ではない. よって, **もし  $(a, b) \in C$  で極値をとるならば, そこでの  $f$  の等高線と  $g$  の等高線はほぼ平行であろう.**

<sup>1</sup>ここで  $f$  が  $C^2$  級であることが必要. しかし私たちは  $C^\infty$  を仮定したのだった.



すなわち、そこでの  $f$  の勾配ベクトルは  $g$  の勾配ベクトルと平行であろう。したがって適当な  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$  が存在して、

$$\begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix}$$

が成立するはずである。以上のことから、「極値を与える点の候補」は  $a, b, c$  に関する連立方程式

$$g(a, b) = 0, \quad f_x(a, b) - \alpha g_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) - \alpha g_y(a, b) = 0.$$

によって与えられる。この条件は 3 変数関数  $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$  を用いると次のように書きかえることができる：

$$F_\lambda(a, b, \alpha) = F_x(a, b, \alpha) = F_y(a, b, \alpha) = 0.$$

ただしこの連立方程式は必要条件であって、十分条件ではない。方程式を解いたら、その点が本当に極値を与えるか、改めてチェックしなければならない。

### レポート問題

今週のレポートはお休みです。その分、これまでの復習をしっかりとっておきましょう。

## 重積分

配布日：November 27, 2014 Version：1.1

## 前回 (11/27) のまとめと補足

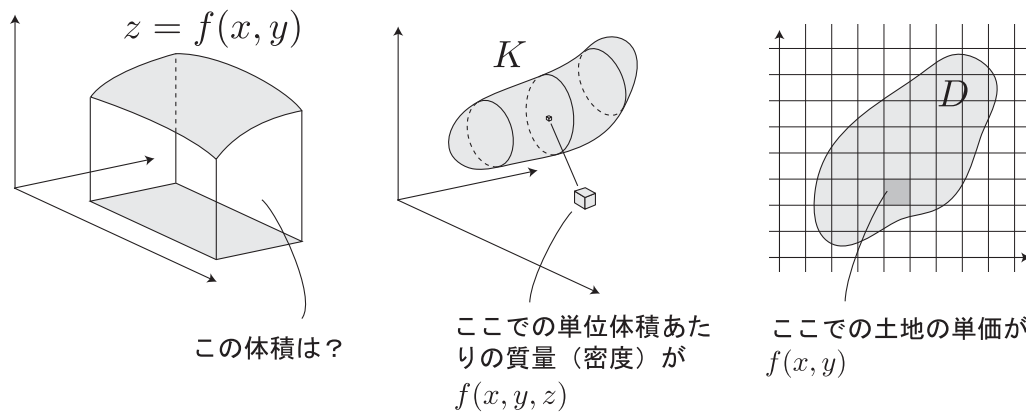
## 多変数の積分の目的

1 変数関数の積分は長さや面積の計算に有効であった。多変数関数の積分（重積分ともよばれる）ではどのような量が計算できるか、具体例を挙げておこう。

**体積.** 与えられた関数  $z = f(x, y)$  に対し、そのグラフと  $xy$  平面 ( $z = 0$ ) が囲む部分の体積は重積分によって表される（下図左）。

**質量.** 3次元空間内に、点  $(x, y, z)$  における単位体積あたりの質量（密度）が  $w = f(x, y, z)$  で与えられるような物体  $K$  があるとき、 $K$  の質量もまた重積分によって表される（下図中央）。

**土地の値段.** 平面上の点  $(x, y)$  における地価（単位面積あたりの土地の値段）が  $z = f(x, y)$  で与えられているとき、土地  $D$  の値段も重積分によって表される（下図右）。



## 重積分の定義

(ア)．「区画」という言葉の定義を思い出しておこう。数直線  $\mathbb{R}$  上の閉区間  $[a, b], [c, d]$  に対し、

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

と表される集合を**区画**とよび、 $D = [a, b] \times [c, d]$  と表す。

以下、(少なくとも) 区画  $D$  上で定義された関数  $z = f(x, y)$  の積分（重積分）を定義しよう。

(イ)．区間  $[a, b]$  を  $m$  分割する点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

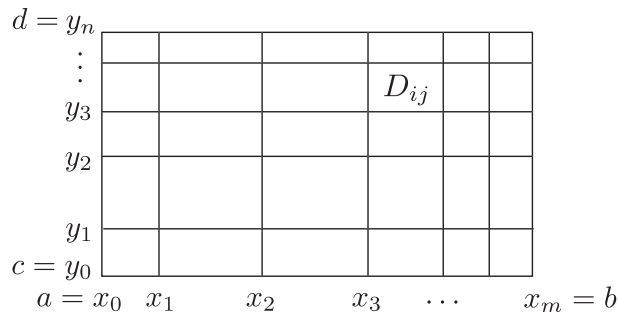
と区間  $[c, d]$  を  $n$  分割する点

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

をとる。これによって、区画  $D = [a, b] \times [c, d]$  はさらに  $mn$  個の区画に分割される（図）。それぞれを

$$D_{ij} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

(ただし  $1 \leq i \leq m$  かつ  $1 \leq j \leq n$ ) とおく。



(ウ) . それぞれの  $D_{ij}$  から、代表点  $(x'_{ij}, y'_{ij}) \in D_{ij}$  を自由に選んで、

$$\Sigma := \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x'_{ij}, y'_{ij}) \times (x_i - x_{i-1}) \times (y_j - y_{j-1})$$

とおく. この量はリーマン和とよばれている. 私たちが計算しているのが土地代だとすれば,  $f(x'_{ij}, y'_{ij})$  は区画  $D_{ij}$  の「単価」であり,  $(x_i - x_{i-1}) \times (y_j - y_{j-1})$  は  $D_{ij}$  の「広さ」を表す. リーマン和  $\Sigma$  は  $D$  の土地代を表現しているが, 分割点  $\{x_i \mid 1 \leq i \leq m\}$  および  $\{y_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ , 代表点  $\{(x'_{ij}, y'_{ij}) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  をうまく選ぶと土地代を高く見積もったり低く見積もったりできるので, 不満に思う人もいるかもしれない.

(エ) . 誰もが納得する値を得るためには, 区画  $D$  の分割をより細かくするのがよいだろう. そこで, 次のように定義する:

**定義 (区画上の重積分)**. 関数  $z = f(x, y)$  が区画  $D$  上で積分可能であるとは, リーマン和  $\Sigma$  を計算するときの分割点の数を増やし, 分割の最大幅

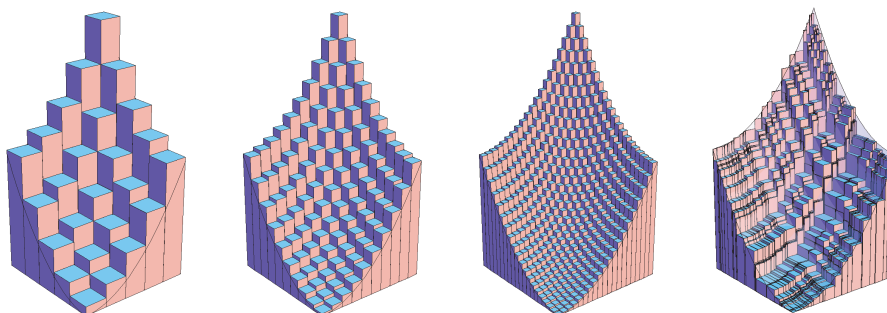
$$\max\{|x_2 - x_1|, \dots, |x_m - x_{m-1}|, |y_2 - y_1|, \dots, |y_n - y_{n-1}|\}$$

が 0 に近づくようにするとき, そのような分割点の選び方, 代表点  $\{(x'_{ij}, y'_{ij}) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  の選び方に依存せず一定の実数値  $I$  に近づくことをいう. このとき,

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

と表す. また  $D$  を積分領域,  $f(x, y)$  を被積分関数とよぶ.

例. 1次元の積分が直感的には「短冊の面積和」であったように, 2次元の積分は「細かい角材を寄せ集めた体積和」のように解釈できる. たとえば下の図は,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  に対し, 区間  $[0, 1]$  の分割点として5等分, 10等分, 20等分と増やしたときの「角材」の様子である. また, 右端の図は分割点・代表点をランダムに選んだものである.



(オ).  $D$  が区画でない有界集合のときの積分は次のように定義する.

**定義 (有界領域上での重積分).** 有界集合  $D$  上の関数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  が  $D$  上で積分可能であるとは,  $D$  を含む十分大きな区画  $\tilde{D}$  をとり, 関数  $\tilde{f}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

と定義するとき,  $\tilde{f}$  が  $\tilde{D}$  上で積分可能となることをいう. このとき,

$$\iint_D f(x, y) dx dy := \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(x, y) dx dy$$

と定義する.

(カ). 積分の応用として, 「面積」の厳密な定義を与えることができる.

**定義 (面積).** 有界な平面集合  $D$  の面積  $\text{Area}(D)$  を次の積分で定義する:

$$\text{Area}(D) := \iint_D 1 dx dy.$$

**注意.** この右辺は定数関数  $f(x, y) = 1$  の積分  $\iint_D 1 dx dy$  のことである. この積分値が存在するとき, すなわち定数関数 1 が  $D$  上積分可能であるとき, 集合  $D$  は**面積確定**とよばれる<sup>1</sup>.  
たとえば, 次の定理が知られている (証明は略.)

**定理 9-1 (積分値の存在)** 集合  $D$  は面積確定な有界閉集合であり,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  は連続であるとする. このとき  $f$  は  $D$  上積分可能である.

ちなみに  $D$  が「有界閉集合」であるとは, ある十分大きな区画  $\tilde{D}$  の中に収まり,  $D$  の境界点がすべて  $D$  自身に含まれているような集合である. 例えば  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  および  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  は閉集合であるが,  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$  は閉集合ではない. こちらは開集合とよばれる.

以下で扱う有界な積分領域はすべて面積確定であることを仮定する. また, 具体例として取り上げる積分領域もすべて面積確定であることが知られているものばかりである.

ともあれ, 一般には定義どおりに重積分を計算するのは極めて難しいので, 上手に 1 変数関数の積分に帰着させて計算することになる.

## 重積分の性質

重積分の基本的な性質を述べておこう.

<sup>1</sup>ある意味, 土地の値段で土地の広さを測っていることになる. ちなみに, 「面積確定」でない集合も存在するが, 数学者が無理矢理ひねり出したような例ばかりである. したがって, 実用上は与えられた集合が「面積確定」かどうかを判定する必要はない.



公式 9-2 (重積分の性質) 以下,  $D, D_1, D_2$  は有界な閉集合とする.

(1)  $\text{Area}(D_1 \cap D_2) = 0$  のとき,

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy.$$

(2)  $D$  上  $f(x, y) \leq g(x, y)$  であれば,

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx dy.$$

(3)  $\alpha, \beta$  を定数とするとき,

$$\iint_D \{\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\} \, dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) \, dx dy + \beta \iint_D g(x, y) \, dx dy.$$

### レポート問題

締め切りは 12 月 18 日 (木) の講義開始時とします (12 月 11 日は休講です.) .

問題 10-1 (累次積分) . 以下の累次積分を求めよ.

$$(1) I = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x^2 + y^2 + 1) dy$$

$$(2) I = \int_1^2 dy \int_0^{y^2} \frac{x}{y} dx$$

$$(3) I = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 y \sqrt{1+x^3} dx \quad (\text{HINT. 順序交換!})$$

問題 10-2 (重積分) . 与えられた領域  $D$  における関数  $f(x, y)$  の積分  $I = \iint_D f(x, y) \, dx dy$  を計算せよ.

$$(1) D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}, f(x, y) = x^2 y.$$

$$(2) D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}, f(x, y) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$(3) D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, f(x, y) = x^2 y.$$

## 累次積分と積分の順序交換

配布日: December 8, 2014 Version: 1.1

## 前回 (12/4) のまとめと補足

## タテ線領域・ヨコ線領域と累次積分

前回述べたように、重積分を定義どおり計算することは難しいので、より簡単な 1 次元の積分に帰着させて計算できる場合を考えよう。

**タテ線・ヨコ線.** 平面集合で

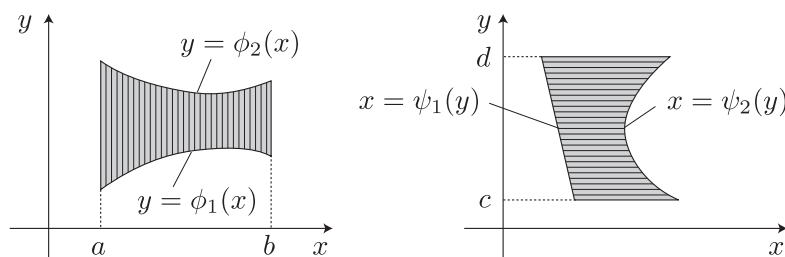
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

(ただし  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  は区間  $[a, b]$  上の連続関数) の形のことを**タテ線領域**とよぶ<sup>1</sup>。

同様に、**ヨコ線領域**とは

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

の形の集合をいう。



**定理 10-1 (タテ線・ヨコ線領域での累次積分)** 上のように与えられるタテ線領域  $D$  上の連続関数  $z = f(x, y)$  は  $D$  上で積分可能であり、次の公式が成り立つ:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (1)$$

また、ヨコ線領域についても同様の公式が成り立つ。

## 注意.

- 右辺のような積分を**累次積分**とよび、

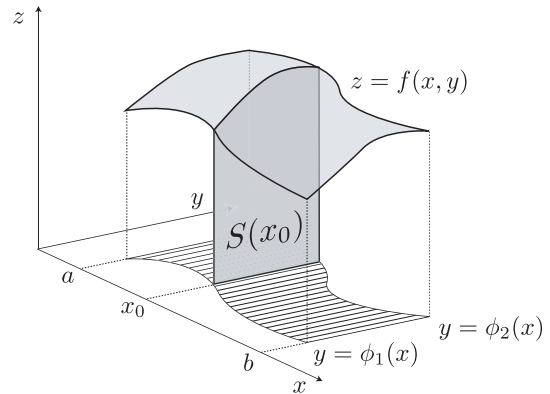
$$\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$$

のように表すことも多い。

- (1) 式右辺の計算: 括弧内の  $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$  を計算するときは、 $x$  を一旦定数だと思って変数  $y$  に関する積分として計算する。結果は  $x$  を含む式 (関数) となるので、それをふつうに  $x$  で積分すればよい。(次の例題を参照せよ。)

<sup>1</sup>もちろん「縦線領域」と書いてもよいが、見易さと書きやすさを考慮して「タテ線」にしている。

- (1) 式右辺の直感的な意味：この積分は関数  $z = f(x, y)$  の 3 次元グラフと、 $xy$  平面で囲まれる部分  $K$  の体積を計算していることになる。この  $K$  の平面  $x = x_0$  での切り口の面積  $S(x_0)$  は積分  $\int_{\phi_1(x_0)}^{\phi_2(x_0)} f(x_0, y) dy$  で与えられるから、(1) の累次積分は  $K$  の体積が  $\int_a^b S(x) dx$  で与えられる、という高校でもおなじみの事実を示唆している。

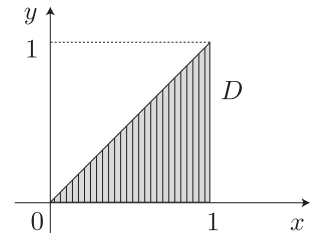


ひとつ計算例をみてみよう。

**例題.** 関数  $z = f(x, y) = xy$  を領域  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$  上で積分せよ。

**解答.**  $f(x, y) = xy$  は  $D$  上で連続なので、定理 10-1 より ( $\phi_1(x) = 0$  (定数関数),  $\phi_2(x) = x$  とおいて)

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^x xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{xy^2}{2} \right]_0^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \left[ \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$



次に、高校でおなじみの公式を確認しよう。

**例題.** タテ線領域  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$  の面積は

$$\int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\} dx$$

で与えられることを示せ。

**解答.**  $f(x, y) = 1$  は  $D$  上で連続なので、定理 10-1 を適用して

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \iint_D 1 \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_a^b \left[ y \right]_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dx \\ &= \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\} dx \end{aligned}$$

### 積分の順序交換

タテ線領域であり、かつヨコ線領域でもある集合上での積分は累次積分の順序が 2 通り考えられる。その性質を利用すると、積分計算がうまくいく場合がある。

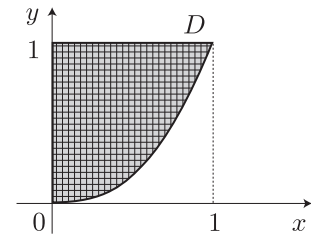
**例題.** 次の積分を求めよ。

$$I = \iint_D x e^{-y^2} \, dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$$

失敗例.  $D$  はタテ線領域なので, 定理 10-1 を適用して

$$I = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^1 x e^{-y^2} dy \right) dx = \int_0^1 x \left( \int_{x^2}^1 e^{-y^2} dy \right) dx$$

関数  $e^{-y^2}$  は不定積分 (原始関数) が初等関数で表現できないことが知られており, これ以上の計算を進めることはできない.



解答.  $D$  はヨコ線領域

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

とみなすこともできるので, 定理 10-1 のヨコ線領域に適用して

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{y}} x e^{-y^2} dx \right) dy = \int_0^1 e^{-y^2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y}{2} dy = \left[ -\frac{e^{-y^2}}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{4}(e^{-1} - 1) = \frac{1 - 1/e}{4}. \end{aligned}$$

例題. ヨコ線領域  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y - 1 \leq x \leq 1 - y\}$  上の連続関数  $f(x, y)$  の積分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx$$

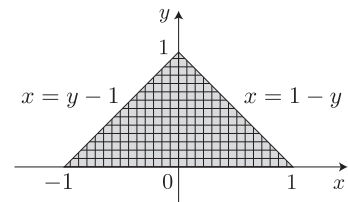
をタテ線領域上の積分として表せ.

解答.  $D$  はふたつのタテ線領域

$$D_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq x + 1\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x + 1\}$$

の和集合  $D_1 \cup D_2$  と表現できるので, 公式 9-2 より



$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

レポート問題

締め切りは次回 1 月 15 日 (木) の講義開始時とします.

問題 11-1 (変数変換). 変数変換を用いて以下の積分を求めよ.

(1)  $I = \iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy, D = \{(x, y) \mid \pi/2 \leq x^2 + y^2 \leq \pi\}$

(2)  $I = \iint_D (x + y)e^{x-y} dx dy, D = \{(x, y) \mid 0 \leq x - y \leq 1, x + y \leq 1\}$

(3)  $I = \iint_D xy dx dy, D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, y \geq 0 \right\}$

## 重積分の変数変換

配布日: December 8, 2014 Version: 1.1

## 前回 (12/18) のまとめと補足

## 変数変換

積分領域  $D$  がタテ線領域もしくはヨコ線領域でない場合、重積分の値を厳密に計算をすることは難しい。しかし「変数変換」によって積分領域を別のタテ線領域  $E$  に変換できれば、積分がうまく計算できるかもしれない。

そこで、次の条件を満たす変数変換  $\Phi: E \rightarrow D$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$  を考えよう。

- $E$  および  $D$  を区分的に滑らかな境界をもつ (面積確定な) 閉領域。
- $x = x(u, v)$  と  $y = y(u, v)$  は  $C^1$  級。
- ヤコビ行列  $D\Phi = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$  に対し、そのヤコビアンを

$$\det D\Phi = x_u y_v - x_v y_u$$

で定義する。この  $\det D\Phi$  は  $E$  の境界以外で 0 にならない。

- $\Phi$  による  $E$  の像は、境界以外では 1 対 1。すなわち、その像が境界以外で重なることはない。

このとき、次が成り立つ：

**定理 11-1 (変数変換)**.  $f$  が  $D$  上積分可能であるとき、上の変数変換について

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |\det D\Phi| du dv. \quad (1)$$

この定理の証明は (難解というわけではないが) とても長いので割愛する。かわりに直感的な説明を試みてみよう。

**説明.** 実用上  $E$  はタテ線領域であることが期待されているが、話を単純にするために  $E$  は区画であるとしてしよう。

$\Phi$  は局所的にはほぼ 1 次変換のように見えるのだった。その 1 次変換を表現する行列がヤコビ行列  $D\Phi$  である。この局所的な 1 次変換によって、面積がどのくらい拡大されるのかを確認してみよう。

一般に 1 次変換  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  が与えられているとき、ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  で張られる正方形はベクトル  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  で張られる平行四辺形に写される。この平行四辺形の面積は  $|ad - bc|$  によって与えられる<sup>1</sup>。面積 1 の正方形が面積  $|ad - bc|$  の平行四辺形に写るのだから、

1 次変換  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  は  $uv$  平面上の図形の面積を  $|ad - bc| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$  倍する。

ことがわかった。一般の変数変換  $\Phi$  においても、局所的には同様に面積が拡大 (ときには縮小) されていることになる。

以上の考察をふまえて、区画  $E$  を (重積分を定義したときのように) 十分細かな区画  $E_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) に分割する。さらに、区画  $E_{ij}$  から代表点  $(u_{ij}, v_{ij})$  を自由に選んでおく。このとき、 $D_{ij} := \Phi(E_{ij})$ ,  $J_{ij} := D\Phi(u_{ij}, v_{ij})$ ,  $(x_{ij}, y_{ij}) := (x(u_{ij}, v_{ij}), y(u_{ij}, v_{ij}))$  とおけば、面積に関する近似式

$$\text{Area}(D_{ij}) \approx |\det J_{ij}| \text{Area}(E_{ij})$$

<sup>1</sup>高校では「 $(0, 0)$ ,  $(a, c)$ ,  $(b, d)$  を頂点にもつ三角形の面積は  $|ad - bc|/2$ 」という形で公式として学んだと思う。

が成立している.

また,  $D_{ij}$  は閉領域  $D$  を細分したもののなので, (1) 式右辺の積分の近似式

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i, j} f(x_{ij}, y_{ij}) \text{Area}(D_{ij})$$

を得る (ただしシグマの  $i, j$  は  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  の範囲で可能な  $mn$  個の組み合わせをすべて取る). 各  $D_{ij}$  が十分に小さければ, この近似はいくらでもよくなると期待される. さらに上の面積に関する近似式を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_{i, j} f(x_{ij}, y_{ij}) \text{Area}(D_{ij}) &\approx \sum_{i, j} f(x_{ij}, y_{ij}) |\det J_{ij}| \text{Area}(E_{ij}) \\ &= \sum_{i, j} f(x(u_{ij}, v_{ij}), y(u_{ij}, v_{ij})) |\det J_{ij}| \text{Area}(E_{ij}) \\ &\approx \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |\det D\Phi| du dv. \end{aligned}$$

を得る. 結局,  $E$  の分割  $E_{ij}$  が十分に細かければこれらの近似式は限りなく等式に近くなり, 求める等式 (1) が得られるのである.

定理 11-1 の証明は複雑だが, 本質的にはこの考察を精密にただけである. ■

## 1 次変換と極座標変換

もっとも基本的な変数変換である 1 次変換と極座標変換について具体例を計算してみよう.

**例題 (1 次変換).**  $D = \{(x, y) \mid |x + 2y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$  とするとき, 積分

$$I = \iint_D (x - y)^2 dx dy$$

を求めよ.

重積分の計算においてまず重要なことは, 積分領域を図示することである. タテ線領域かヨコ線領域であることが確認できれば, 累次積分によって計算できるだろう. そうでなければ, 複数個のタテ線もしくはヨコ線領域に分割するか, 変数変換を考えなくてはならない.

この例の場合,  $D$  は平行四辺形となるから, 複数個のタテ線領域に分割することができる. したがって累次積分も可能だが, 「正方形は 1 次変換で平行四辺形に写る」という事実を用いて次のように計算するほうが簡単である.

**解答.**  $u = x + 2y, v = x - y$  とおくと, 平行四辺形  $D$  は  $uv$  平面内の正方形

$$E = \{(u, v) \mid |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$$

に写る. 逆に  $x$  と  $y$  について解くと  $x = \frac{u + 2v}{3}, y = \frac{u - v}{3}$  であるから, 変数変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u + 2v \\ u - v \end{pmatrix}$$

によって積分を書き換えよう.  $D\Phi = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$  より,  $\det D\Phi = -\frac{1}{3}$ . よって変数変換の公式 (1) より

$$\begin{aligned} I &= \iint_E v^2 \cdot \left| -\frac{1}{3} \right| du dv = \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 \frac{v^2}{3} dv \right) du \\ &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{v^3}{9} \right]_{-1}^1 du = \int_{-1}^1 \frac{2}{9} du = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

■

**例題 (極座標変換).**  $R > 0$ ,  $D_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  とするとき, 積分

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$$

を求めよ.

**解答.** 極座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

により,  $r\theta$  平面内の長方形

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

は積分領域  $D$  に写る. このとき  $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$  より,  $\det D\Phi = r \leq 0$ . よって変数変換の公式 (1) より

$$I = \iint_E e^{-r^2} \cdot r \, dudv = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r e^{-r^2} dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r e^{-r^2} dr$$

2重下線部は  $\theta$  を変数として含まないので (すなわち定数なので) 下線部とは独立に計算できる. したがって

$$I = \underline{\underline{2\pi}} \cdot \left[ \underline{\underline{-\frac{e^{-r^2}}{2}}} \right]_0^R = 2\pi \left( -\frac{e^{-R^2}}{2} - \left( -\frac{1}{2} \right) \right) = \pi(1 - e^{-R^2}). \quad \blacksquare$$

## ガウス積分

重積分を用いて, 応用上重要な次の広義積分を計算してみよう.

### 定理 11-2 (ガウス積分)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ちなみに, 重積分を用いない計算方法もある. **証明.** 正方形の区画  $Q_R := [-R, R] \times [-R, R]$  は包含関係

$$D_R \subset Q_R \subset D_{\sqrt{2}R}$$

を満たしている. よって公式 9-2 より,

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

先の例題より,

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \pi(1 - e^{-2R^2})$$

が成り立つ. よって  $R \rightarrow \infty$  のとき, 「はさみうちの原理」により,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi.$$

一方,  $Q_R$  はタテ線領域なので,

$$\iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-R}^R dy \int_{-R}^R e^{-x^2-y^2} dx = \int_{-R}^R e^{-y^2} dy \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2.$$

(下線部と2重下線部はそれぞれ定数であり, 独立に計算できることに注意.) よって  $I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . ■

## レポート問題

締め切りは次回 1 月 22 日 (木) の講義開始時とします。

問題 12-1 (曲面積?) . 変数変換を用いて以下の積分を求めよ.

$$(1) I = \iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy, D = \{(x, y) \mid \pi/2 \leq x^2 + y^2 \leq \pi\}$$

$$(2) I = \iint_D (x + y)e^{x-y} dx dy, D = \{(x, y) \mid 0 \leq x - y \leq 1, x + y \leq 1\}$$

$$(3) I = \iint_D xy dx dy, D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, y \geq 0 \right\}$$



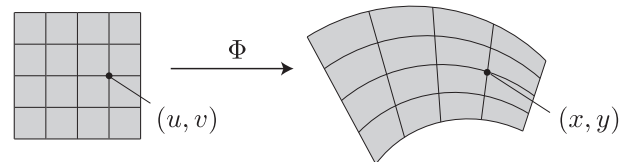
## 重積分の変数変換

配布日：January 15, 2014 Version：1.1

## 前回 (12/18) のまとめと補足

## 変数変換

積分領域  $D$  がタテ線領域もしくはヨコ線領域でない場合，重積分の値を厳密に計算することは難しい．しかし「変数変換」によって積分領域を別のタテ線領域  $E$  に変換できれば，積分がうまく計算できるかもしれない．



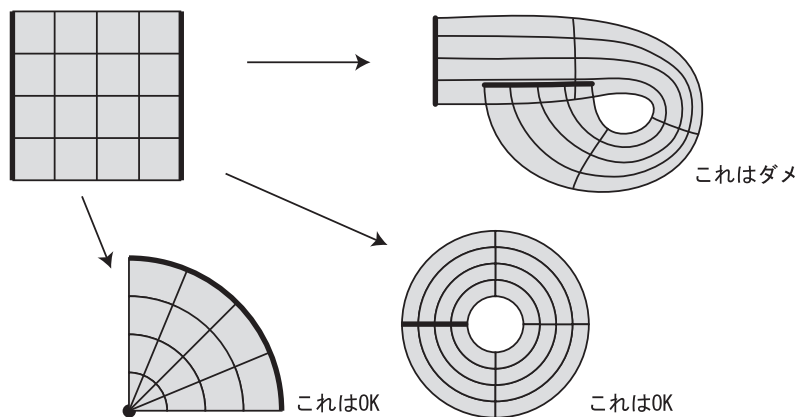
そこで，次の条件を満たす変数変換  $\Phi: E \rightarrow D$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$  を考えよう．

- $E$  および  $D$  を区分的に滑らかな境界をもつ（面積確定な）閉領域．
- $x = x(u, v)$  と  $y = y(u, v)$  は  $C^1$  級．
- ヤコビ行列  $D\Phi = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$  に対し，そのヤコビアンを

$$\det D\Phi = x_u y_v - x_v y_u$$

で定義する．この  $\det D\Phi$  は  $E$  の境界以外で 0 にならない．

- $\Phi$  による  $E$  の像は，境界以外では 1 対 1．すなわち，その像が境界以外で重なることはない．



このとき，次が成り立つ：

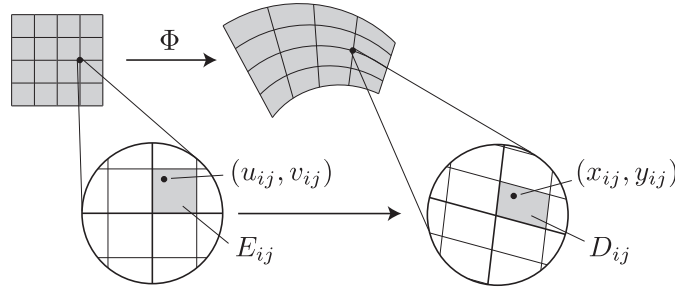
**定理 11-1 (変数変換)**． $f$  が  $D$  上積分可能であるとき，上の変数変換について

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |\det D\Phi| du dv. \quad (1)$$

この定理の証明は（難解というわけではないが）とても長いので割愛する．かわりに直感的な説明を試みてみよう．

**説明．** 実用上  $E$  はタテ線領域であることが期待されているが，話を単純にするために  $E$  は区画であるとしてしよう．

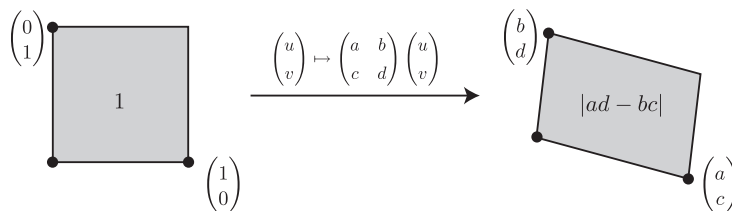
$\Phi$  は局所的にはほぼ 1 次変換のように見えるのだった。その 1 次変換を表現する行列がヤコビ行列  $D\Phi$  である。この局所的な 1 次変換によって、面積がどのくらい拡大されるのかを確認してみよう。



一般に 1 次変換  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  が与えられているとき、ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  で張られる正方形はベクトル  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  で張られる平行四辺形に写される。この平行四辺形の面積は  $|ad - bc|$  によって与えられる<sup>1</sup>。面積 1 の正方形が面積  $|ad - bc|$  の平行四辺形に写るのだから、

$$1 \text{ 次変換 } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ は } uv \text{ 平面上の図形の面積を } |ad - bc| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| \text{ 倍する。}$$

ことがわかった。一般の変数変換  $\Phi$  においても、局所的には同様に面積が拡大（ときには縮小）されていることになる。



以上の考察をふまえて、区画  $E$  を（重積分を定義したときのように）十分細かな区画  $E_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) に分割する。さらに、区画  $E_{ij}$  から代表点  $(u_{ij}, v_{ij})$  を自由に選んでおく。このとき、 $D_{ij} := \Phi(E_{ij})$ ,  $J_{ij} := D\Phi(u_{ij}, v_{ij})$ ,  $(x_{ij}, y_{ij}) := (x(u_{ij}, v_{ij}), y(u_{ij}, v_{ij}))$  とおけば、面積に関する近似式

$$\text{Area}(D_{ij}) \approx |\det J_{ij}| \text{Area}(E_{ij})$$

が成立している。

また、 $D_{ij}$  は閉領域  $D$  を細分したものなので、(1) 式右辺の積分の近似式

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \approx \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \text{Area}(D_{ij})$$

を得る（ただしシグマの  $i, j$  は  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  の範囲で可能な  $mn$  個の組み合わせをすべて取る。）。各  $D_{ij}$  が十分に小さければ、この近似はいくらでもよくなると期待される。さらに上の面積に関する近似式を用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \text{Area}(D_{ij}) &\approx \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) |\det J_{ij}| \text{Area}(E_{ij}) \\ &= \sum_{i,j} f(x(u_{ij}, v_{ij}), y(u_{ij}, v_{ij})) |\det J_{ij}| \text{Area}(E_{ij}) \\ &\approx \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |\det D\Phi| \, du dv. \end{aligned}$$

を得る。結局、 $E$  の分割  $E_{ij}$  が十分に細かければこれらの近似式は限りなく等式に近くなり、求める等式 (1) が得られるのである。

定理 11-1 の証明は複雑だが、本質的にはこの考察を精密にただけである。 ■

<sup>1</sup>高校では「 $(0, 0), (a, c), (b, d)$  を頂点にもつ三角形の面積は  $|ad - bc|/2$ 」という形で公式として学んだと思う。

1 次変換と極座標変換

もっとも基本的な変数変換である 1 次変換と極座標変換について具体例を計算してみよう。

**例題 (1 次変換)**.  $D = \{(x, y) \mid |x + 2y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$  とするとき, 積分

$$I = \iint_D (x - y)^2 dx dy$$

を求めよ.

重積分の計算においてまず重要なことは, 積分領域を図示することである. タテ線領域かヨコ線領域であることが確認できれば, 累次積分によって計算できるだろう. そうでなければ, 複数のタテ線もしくはヨコ線領域に分割するか, 変数変換を考えなくてはならない.

この例の場合,  $D$  は平行四辺形となるから, 複数のタテ線領域に分割することができる. したがって累次積分も可能だが, 「正方形は 1 次変換で平行四辺形に写る」という事実を用いて次のように計算するほうが簡単である.

**解答.**  $u = x + 2y, v = x - y$  とおくと, 平行四辺形  $D$  は  $uv$  平面内の正方形

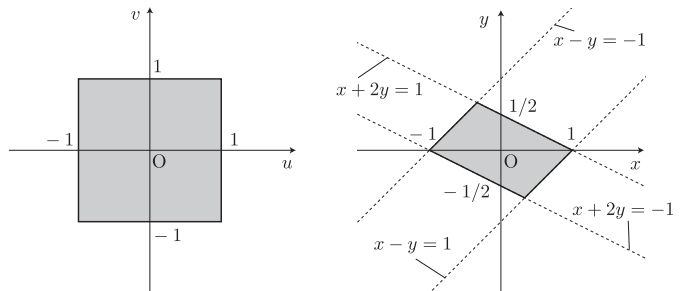
$$E = \{(u, v) \mid |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$$

に写る. 逆に  $x$  と  $y$  について解くと  $x = \frac{u + 2v}{3}$ ,  $y = \frac{u - v}{3}$  であるから, 変数変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u + 2v \\ u - v \end{pmatrix}$$

によって積分を書き換えよう.  $D\Phi = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$  より,  $\det D\Phi = -\frac{1}{3}$ . よって変数変換の公式 (1) より

$$\begin{aligned} I &= \iint_E v^2 \cdot \left| -\frac{1}{3} \right| du dv = \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 \frac{v^2}{3} dv \right) du \\ &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{v^3}{9} \right]_{-1}^1 du = \int_{-1}^1 \frac{2}{9} du = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$



**例題 (極座標変換)**.  $R > 0, D_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  とするとき, 積分

$$I = \iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy$$

を求めよ.

**解答.** 極座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

により,  $r\theta$  平面内の長方形

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

は積分領域  $D$  に写る. このとき  $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$  より,  $\det D\Phi = r \leq 0$ . よって変数変換の公式

(1) より

$$I = \iint_E e^{-r^2} \cdot r du dv = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r e^{-r^2} dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r e^{-r^2} dr$$

2 重下線部は  $\theta$  を変数として含まないので (すなわち定数なので) 下線部とは独立に計算できる. したがって

$$I = \underline{2\pi} \cdot \underline{\left[ -\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^R} = 2\pi \left( -\frac{e^{-R^2}}{2} - \left( -\frac{1}{2} \right) \right) = \pi(1 - e^{-R^2}). \quad \blacksquare$$

## ガウス積分

重積分を用いて, 応用上重要な次の広義積分を計算してみよう<sup>2</sup>.

### 定理 11-2 (ガウス積分)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

証明. 正方形の区画  $Q_R := [-R, R] \times [-R, R]$  は包含関係

$$D_R \subset Q_R \subset D_{\sqrt{2}R}$$

を満たしている. よって公式 9-2 と  $e^{-x^2-y^2} > 0$  より,

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

先の例題より,

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \pi(1 - e^{-2R^2})$$

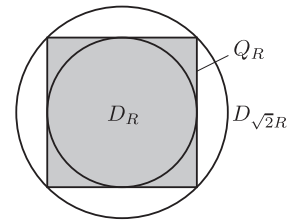
が成り立つ. よって  $R \rightarrow \infty$  のとき, 「はさみうちの原理」により,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi.$$

一方,  $Q_R$  はタテ線領域なので,

$$\iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-R}^R dy \int_{-R}^R e^{-x^2-y^2} dx = \int_{-R}^R e^{-y^2} dy \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2.$$

(下線部と 2 重下線部はそれぞれ定数であり, 独立に計算できることに注意.) よって  $I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . ■



## レポート問題

締め切りは次回 1 月 22 日 (木) の講義開始時とします.

問題 12-1 (曲面積). 以下で与えられる関数  $f(x, y)$  と領域  $D$  に対し,  $D$  上の 3 次元グラフの面積を求めよ.

(1)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$

(2)  $f(x, y) = xy$ ,  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$

問題 12-2 (楕円体). 楕円体  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  で囲まれる部分の体積を求めよ. また,  $a = b$  のとき,  $E$  の表面積を求めよ.

<sup>2</sup>重積分を用いない計算方法もいくつか知られている.

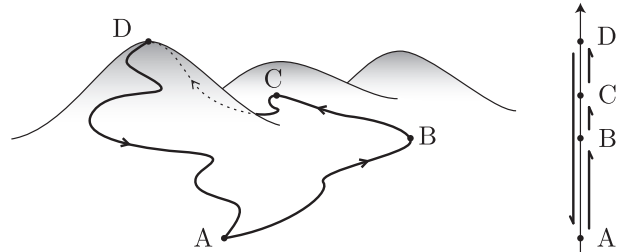
## 線積分とグリーンの定理

配布日: January 22, 2015 Version: 1.1

## 今回 (1/22) のまとめと補足

## ハイキングの原理

ある日、ハイキングに行ったとしよう。点 A からスタートし野山を歩き回り、再び点 A に戻るとき、私たちの足元の海拔高度 (標高) は上下を繰り返り、再び点 A と同じ高さに戻るようになる。ごく「あたりまえ」のことだが、この事実を数学的に定式化してみよう。



## 勾配ベクトル場

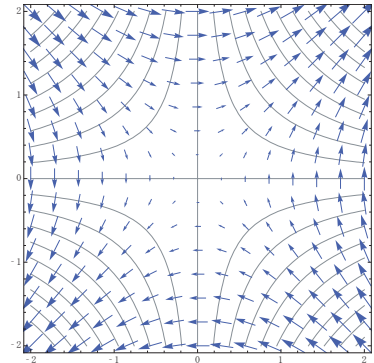
$z = f(x, y)$  を  $C^1$  級関数とする。また、 $\vec{p} = (x, y)$  をベクトル変数とし、 $z = f(\vec{p})$  とも表すことにする。

いま、各 (位置) ベクトル  $\vec{p} = (x, y)$  に対し勾配ベクトル

$$\vec{V}_f(\vec{p}) := \nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

を対応させたものを関数  $f$  の勾配ベクトル場とよぶ。

右の図は  $f(x, y) = xy$  の区画  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  における勾配ベクトル場を図示したものである。



例.  $f(\vec{p})$  がある地域の海拔高度を表す関数であるとき、勾配ベクトル場は「その点に置いたボールが転がり始める向き」の「逆方向」を表現する。

また、 $f(\vec{p})$  がある地域、ある時刻の気圧を表す関数であるとき、勾配ベクトル場は「その点における風の向き」の「逆方向」を表現する。

## 勾配ベクトル場の線積分

(ア). 以下、 $z = f(x, y)$  はある区画  $D$  で定義された  $C^1$  級関数であるとする<sup>1</sup>。

(イ). いま  $D$  上に定点  $A$  と  $A'$  をとり、その座標をベクトル変数で  $\vec{q} = (a, b)$ ,  $\vec{q}' = (a', b')$  とおく。さらに、点  $A$  と点  $A'$  を区画  $D$  内で結ぶ  $C^1$  級曲線  $C$  を

$$\begin{cases} C: \vec{p} = \vec{p}(t) = (x(t), y(t)) & (0 \leq t \leq 1) \\ \text{ただし } \vec{p}(0) = \vec{q}, \vec{p}(1) = \vec{q}' \end{cases}$$

と定める。

(ウ). 区間  $[0, 1]$  を  $N$  分割する点

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = 1$$

<sup>1</sup> $D$  が区画であるという条件は便宜的なもので、たとえば円板でもよい。具体的には、「穴が空いてない領域」(いわゆる単連結領域) であればよい。

を考える. この値をもとに曲線  $C$  を  $N$  分割する点

$$\vec{p}_k = (x_k, y_k) := \vec{p}(t_k) \quad (0 \leq k \leq N)$$

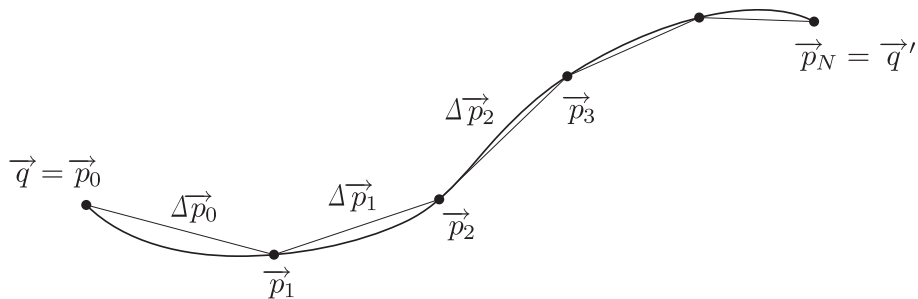
が定まる. さらに

$$\begin{cases} \Delta \vec{p}_k := \vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k = (x_{k+1} - x_k, y_{k+1} - y_k) \\ \Delta f_k := f(\vec{p}_{k+1}) - f(\vec{p}_k) = f(x_{k+1}, y_{k+1}) - f(x_k, y_k) \end{cases}$$

とおくと,  $f$  は定義域上で全微分可能なので

$$\begin{aligned} \Delta f_k &= \begin{pmatrix} f_x(x_k, y_k) \\ f_y(x_k, y_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} + \frac{o(\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2})}{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}} \\ &\approx \vec{V}_f(\vec{p}_k) \cdot \Delta \vec{p}_k. \end{aligned}$$

が成り立つ. (すなわち, 下線の誤差部分は無視.)



(工). いま

$$\vec{q}' = \vec{q} + \Delta \vec{p}_0 + \Delta \vec{p}_1 + \cdots + \Delta \vec{p}_{N-1}$$

より

$$f(\vec{q}') = f(\vec{q}) + \Delta f_0 + \Delta f_1 + \cdots + \Delta f_{N-1}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} f(\vec{q}') - f(\vec{q}) &= \sum_{k=0}^{N-1} \Delta f_k \quad : \text{点 } A' \text{ と点 } A \text{ の標高の差} \\ &\approx \sum_{k=0}^{N-1} \vec{V}_f(\vec{p}_k) \cdot \Delta \vec{p}_k \end{aligned} \quad (*)$$

という近似式を得る.

(オ). このとき, 曲線  $C$  の分割数  $N$  を増やし, 分割の最大幅

$$\max \{ |\Delta \vec{p}_k| \mid 0 \leq k < N \}$$

が 0 に近づくようにすれば, (\*) の値は「一定の実数値」に近づくことが知られている. この値を記号

$$\int_C \vec{V}_f(\vec{p}) \cdot d\vec{p}$$

で表し (勾配) ベクトル場  $\vec{V}_f(\vec{p})$  の曲線  $C$  に沿った線積分とよぶ.

この場合、「一定の実数値」とは「標高の差」 $f(\vec{q}') - f(\vec{q})$  にほかならない。よって  $f$  の勾配ベクトル場  $\vec{V}_f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p})$  に関して、次の定理を得る:

**定理 13-1 (ハイキングの原理)**.  $z = f(x, y)$  を区画  $D$  上の  $C^1$  級関数,  $\nabla f(\vec{p})$  をその勾配ベクトル場とする. また,  $\vec{q}, \vec{q}' \in D$  を固定し,  $D$  内でこれらの点を結ぶ  $C^1$  曲線  $\vec{p} = \vec{p}(t)$  (ただし  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\vec{p}(0) = \vec{q}$ ,  $\vec{p}(1) = \vec{q}'$ ) を選ぶ.

このとき,

$$f(\vec{q}') - f(\vec{q}) = \int_C \nabla f(\vec{p}) \cdot d\vec{p}.$$

とくに, 右辺の線積分の値は端点  $\vec{q}, \vec{q}' \in D$  のみに依存し, 積分経路  $C$  の取り方に依存しない.

**注意.** この定理は「微積分の基本定理」の一般化になっている. 実際, 以上の議論をすべて  $x$  軸 ( $y = 0$ ) 上に制限すれば「微積分の基本定理」そのものが得られる.

### 一般のベクトル場の線積分

勾配ベクトル場を一般化して, 各ベクトル  $\vec{p} = (x, y)$  にベクトル

$$\vec{V}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

(ただし,  $u, v$  は  $(x, y)$  の  $C^1$  級関数) を対応させたものを単にベクトル場という.

**線積分.** 先ほどの (イ), (ウ) で構成した曲線  $C$  とその分割点  $\vec{p}_k = (x_k, y_k)$  に対し,

$$\Delta \vec{p}_k = \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \vec{V}(\vec{p}_k) \cdot \Delta \vec{p}_k &= \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} u(x_k, y_k) \\ v(x_k, y_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} u(x_k, y_k) \Delta x_k + v(x_k, y_k) \Delta y_k \end{aligned} \quad (**)$$

このとき先ほどの (オ) と同様に, 曲線  $C$  の分割数  $N$  を増やし, 分割の最大幅

$$\max \{ |\Delta \vec{p}_k| \mid 0 \leq k < N \}$$

が 0 に近づくようにすれば, (\*\*) の値は「一定の実数値」に近づくことが知られている. この値を記号

$$\int_C \vec{V}(\vec{p}) \cdot d\vec{p} = \int_C u(x, y) dx + v(x, y) dy$$

で表し (勾配) ベクトル場  $\vec{V}_f(\vec{p})$  の曲線  $C$  に沿った線積分とよぶ. また,  $C$  をこの線積分の積分経路とよぶ.

**例.**  $\vec{V}(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$  のとき,

$$\int_C \nabla f(\vec{p}) \cdot d\vec{p} = \int_C f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

と表される.

**計算公式.** 定義のままでは計算が難しいから, 普通の 1 次元の積分に帰着させる公式を紹介しておこう.

**公式 13-2 (線積分の計算公式).**  $C: \vec{p}(t) = (x(t), y(t))$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) に対し,

$$\int_C u(x, y) dx + v(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{u(x(t), y(t))x'(t) + v(x(t), y(t))y'(t)\} dt.$$

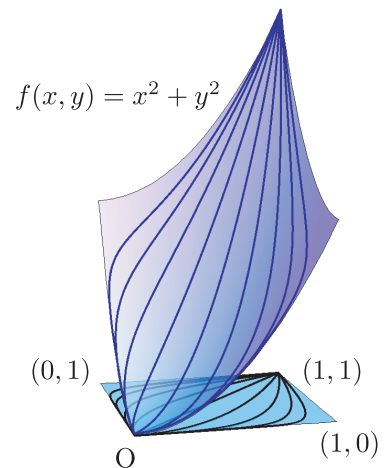
証明は置換積分の公式と同様である.

**例題 (線積分).** ベクトル場  $\vec{V}(\vec{p}) = (2x, 2y)$  および定数  $\alpha > 0$  に対し, 積分路  $C = C_{\alpha}: \vec{p}(t) = (t, t^{\alpha})$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) に沿った線積分の値を求めよ.

**解答.** 公式 13-2 より

$$\int_C 2x dx + 2y dy = \int_0^1 (2t \cdot 1 + 2t^{\alpha} \cdot \alpha t^{\alpha-1}) dt = \left[ t^2 + t^{2\alpha} \right]_0^1 = 2.$$

この値は  $\alpha$  に依存しない! 実際,  $f(x, y) = x^2 + y^2$  とすると  $\vec{V}(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p})$  であるから, 勾配ベクトル場になっている. 定理 13-2 より, この線積分の値は積分路のとり方に (したがって  $\alpha$  にも) 依存しないのである. ■

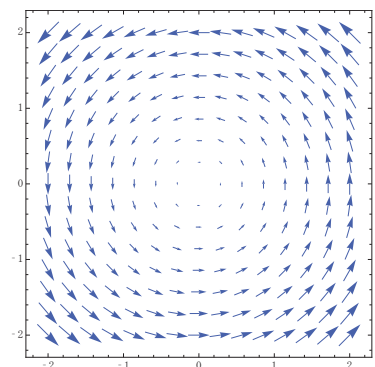


**例題 (勾配ベクトル場でない例).** ベクトル場  $\vec{V}(\vec{p}) = (-y, x)$  および定数  $r > 0$  に対し, 円周  $C = C_r: \vec{p}(t) = (r \cos t, r \sin t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) に沿った線積分の値を求めよ. また, このベクトル場は勾配ベクトル場ではないことを示せ.

**解答.** 公式 13-2 より

$$\begin{aligned} \int_C -y dx + x dy &= \int_0^{2\pi} \{-r \sin t \cdot (-r \sin t) + r \cos t \cdot r \cos t\} dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r^2. \end{aligned}$$

もし  $\vec{V}(\vec{p})$  がある関数  $f$  の勾配ベクトル場であれば, 定理 13-3 (ハイキングの原理) より積分値は  $f(\vec{p}(1)) - f(\vec{p}(0)) = 0$  となるはずである. しかし上の積分計算から  $2\pi r^2 = 0$  となり  $r > 0$  に矛盾する. したがってベクトル場  $\vec{V}(\vec{p})$  は勾配ベクトル場ではない. ■

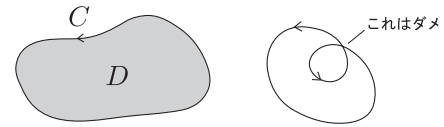


## グリーンの定理

応用上極めて重要なグリーンの定理について紹介しよう.



**単純閉曲線.**  $C^1$  級曲線 (もしくは  $C^1$  級曲線をいくつかつないだもの, たとえば長方形の境界など)  $C: \vec{p} = \vec{p}(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) が単純閉曲線であるとは, 始点と終点が一致し, かつ自己交差しないことをいう. すなわち,  $\vec{p}(0) = \vec{p}(1)$  かつ  $0 \leq t < s < 1$  のとき  $\vec{p}(t) \neq \vec{p}(s)$  であればよい.



単純閉曲線  $C$  で囲まれる有界な領域を  $D$  と表そう.  $t$  を時間パラメーターと考えると曲線には自然な「進行方向」が定まるが, 必要なら  $\vec{p}(t)$  を  $\vec{p}(1-t)$  で入れ替えて, 「進行方向」の左側に  $D$  があると仮定してよい. このとき, 次が成り立つ:

**定理 13-3 (グリーンの定理).** 関数  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  は上の  $C$  と  $D$  を含む領域上で定義された  $C^1$  級関数とする. このとき,

$$\int_C u dx + v dy = \iint_D (v_x - u_y) dx dy. \quad (1)$$

**例 (ハイキング).**  $f(x, y)$  を  $C^2$  級関数とするとき,  $u = f_x$ ,  $v = f_y$  は  $C^2$  級関数である. このとき  $v_x - u_y = (f_y)_x - (f_x)_y = 0$ . よってグリーンの定理より, 単純閉曲線  $C$  に対し

$$\int_C f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = 0.$$

これは「ハイキングの原理」(定理 13-1) の特別な場合で, 野山を一周して帰ってきたらもとの海拔高度に戻る, というあたりまえの事実を表現している.

**面積の公式.**  $(u, v) = (0, x)$  もしくは  $(u, v) = (-y, 0)$  とすれば,  $v_x - u_y = 1$  より  $D$  の面積を与える公式を得る:

**系 13-4 (単純閉曲線で囲まれる面積)**

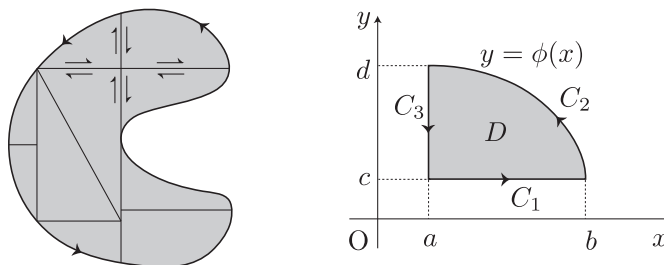
$$\text{Area}(D) = \int_C x dy = \int_C -y dx.$$

**例題 (楕円の面積).** 長径  $a$ , 短径  $b$  の楕円の面積は  $\pi ab$  で与えられることを示せ.

**解答.**  $C: \vec{p}(t) = (a \cos t, b \sin t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) とおくと, 系 13-4 より

$$\text{Area}(D) = \int_C x dy = \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t dt = ab \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi ab. \quad \blacksquare$$

**定理 13-3 (グリーンの定理) の証明.** 必要ならタテ・ヨコの線分で領域  $D$  を分割して, 図の右側のような領域 ( $C = C_1 + C_2 + C_3$ ) について定理を証明すればよい. なぜなら, 分割線上の積分は相殺されるし, 領域を分割したら面積分も分割されるからである.



図のような領域はタテ線領域でありヨコ線領域でもあるから、積分の計算と相性がよい。いま、 $C_2$  のグラフは  $y = \phi(x)$  と表されるとしよう。このとき、たとえば  $u = u(x, y)$  の場合、

$$\begin{aligned}
 \int_C u \, dx &= \int_{C_1} u \, dx + \int_{C_2} u \, dx + \int_{C_3} u \, dx \\
 &= \int_a^b u(x, c) \, dx + \int_b^a u(x, \phi(x)) \, dx + \int_a^a u(a, y) \, dx \\
 &= - \int_a^b \{u(x, \phi(x)) - u(x, c)\} \, dx + \underline{0} \\
 &= - \int_a^b \left\{ \int_c^{\phi(x)} u_y(x, y) \, dy \right\} \, dx \\
 &= - \iint_D u_y \, dx \, dy
 \end{aligned}$$

となる。下線部では  $x$  を固定して、「微積分の基本定理」を用いた。同様の計算で

$$\int_C v \, dy = \iint_D v_x \, dx \, dy$$

も得るから、グリーン の 定理 が 成 り 立 つ。 ■

参考. グリーン の 定理 におい て  $\vec{V}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  として定まるベクトル場に対し、

$$\text{rot } \vec{V}(\vec{p}) := -u_y(x, y) + v_x(x, y) \in \mathbb{R}$$

で定まる関数をベクトル場  $\vec{V}(\vec{p})$  の回転とよぶ。この記号を用いると、グリーン の 定理 は

$$\int_C \vec{V}(\vec{p}) \cdot d\vec{p} = \iint_D \text{rot } \vec{V}(\vec{p}) \, dx \, dy$$

と表現される。

## 曲面積

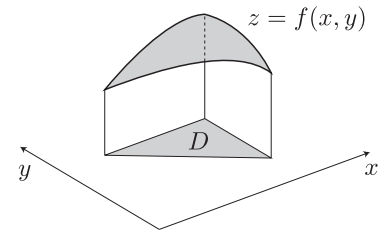
配布日: January 22, 2015 Version: 1.1

## 前回 (1/15) のまとめと補足

## 曲面積

平面集合の「面積」は重積分を用いて定義された. その考え方を一般化して, 平面でない曲面の面積 (「曲面積」) を重積分を用いて定義してみよう.

今回の目標は  $C^1$  級関数  $z = f(x, y)$  が領域  $D$  上で定義されているとき, その 3 次元グラフの曲面積を定義し, 値を計算することである.

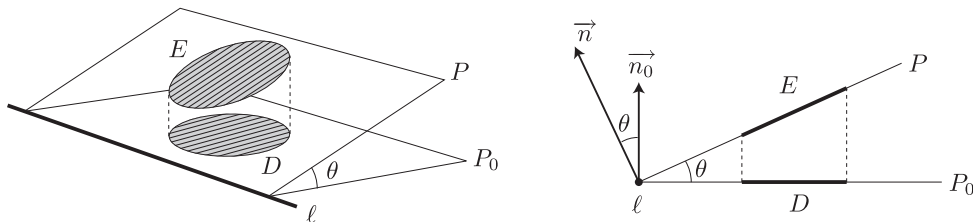


**準備.**  $xy$  平面  $z = 0$  を  $P_0$  で表す. また, 方程式  $z = Ax + By + C$  で表される平面を  $P$  で表す.

いま, 平面  $P$  内の領域  $E$  に対し, それを  $P_0$  に「射影」した集合を  $D$  とする. すなわち,  $(x, y, z) \in E$  から平面  $P_0$  に下ろした垂線の足は  $(x, y, 0)$  であるから,

$$D := \{(x, y, 0) \mid (x, y, z) \in E\}$$

と定義される集合である.



いま平面  $P$  と平面  $P_0$  のなす角を  $\theta$  (ただし  $0 \leq \theta < \pi/2$ ) とするとき,

$$\text{Area}(E) \cos \theta = \text{Area}(D) \iff \text{Area}(E) = \text{Area}(D) \cdot \frac{1}{\cos \theta} \quad (1)$$

が成り立つ. (理由は単純で, 図のように  $E$  と  $D$  を同じ幅の短冊に裁断してから面積を比較すればよい.)

さらに  $\cos \theta$  は定数  $A$  と  $B$  を用いて表現できる: いま  $P$  の法線ベクトルとして  $\vec{n} = \pm(A, B, -1)$  を,  $P_0$  の法線ベクトルとして  $\vec{n}_0 = (0, 0, 1)$  を選ぶ<sup>1</sup>.  $\vec{n}$  の複号 ( $\pm$ ) は,  $\vec{n}$  と  $\vec{n}_0$  のなす角がちょうど  $\theta$  になるようにあとで選ぶことにする.

このとき,

$$\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}_0}{|\vec{n}| |\vec{n}_0|} = \frac{\pm(A \cdot 0 + B \cdot 0 + (-1) \cdot 1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\pm(-1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}$$

となるが,  $\theta \in [0, \pi/2)$  より  $\cos \theta > 0$ . よって複号はマイナスを選ぶのが正解である. (1) とあわせると, 次の関係式を得る:

$$\text{Area}(E) = \text{Area}(D) \sqrt{A^2 + B^2 + 1}. \quad (2)$$

<sup>1</sup> $P$  の方程式は  $Ax + By - z + C = 0 \iff \begin{pmatrix} A \\ B \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} \right\} = 0$  と表現できるのであった.

## 曲面積の定義

以上の考察をふまえて, グラフの曲面積を次のように定義しよう.

**定義 (3次元グラフの曲面積).** 閉領域  $D$  上で定義された関数  $z = f(x, y)$  が  $C^1$  級であるとき, そのグラフ

$$K = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

の曲面積 (もしくは単に面積) を

$$\text{Area}(K) := \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dx dy$$

と定義する.

**定義の正当化.** この積分がグラフ  $K$  の「面積」として妥当な量であることをいくつかのステップに分けて確認しよう.

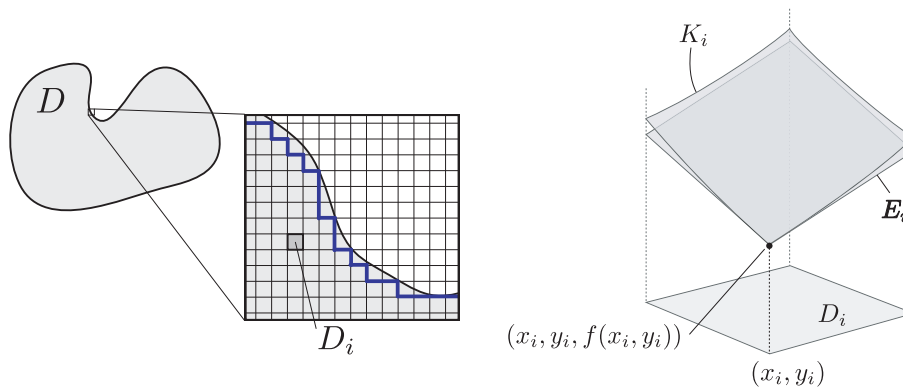
(ア). まず十分に小さい  $r > 0$  を選び, 幅  $r$  の升目の方眼紙を  $xy$  平面に敷く. これを用いて, 閉領域  $D$  を図のように大量の正方形で近似する.

(イ). これらの正方形を  $D_1, D_2, \dots, D_N$  とする. このとき, 各  $D_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) の右下隅の点を  $(x_i, y_i)$  とすれば, 区画の記号をもちいて

$$D_i = [x_i, x_i + r] \times [y_i, y_i + r]$$

と表される.

(ウ). グラフ  $K$  を区画  $D_i$  の上に制限した「断片」を  $K_i$  と表す. このとき,  $K_i$  はグラフ  $K$  の  $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$  における接平面  $P_i$  によって近似されるであろう ( $f$  は  $C^1$  級なので  $D$  上全微分可能だから). より正確に, 接平面  $P_i$  を区画  $D_i$  の上に制限した「断片」を  $E_i$  と表すと,  $K_i$  は  $E_i$  で近似されることになる.



(エ).  $A_i := f_x(x_i, y_i)$ ,  $B_i := f_y(x_i, y_i)$  とおくと, 接平面  $P_i$  の方程式は

$$z = f(x_i, y_i) + A_i(x - x_i) + B_i(y - y_i) \iff z = A_i x + B_i y + f(x_i, y_i) - A_i x_i - B_i y_i$$

であるから, (ウ) と式 (2) より

$$\text{Area}(E_i) = \text{Area}(D_i) \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + 1}.$$

(オ). よってグラフ  $K$  の考える「面積」の近似値として「各  $K_i$  を近似した  $E_i$  の面積の総和」

$$\sum_{i=1}^N \text{Area}(E_i) = \sum_{i=1}^N \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + 1} \cdot \text{Area}(D_i)$$

を取るのが妥当であろう。昇目の大きさ  $r$  を小さくすれば  $N$  は増大するが近似は良くなると考えられるから、

$$\iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dxdy = \lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + 1} \cdot \text{Area}(D_i)$$

を  $K$  の「面積」と定義するのである。 ■

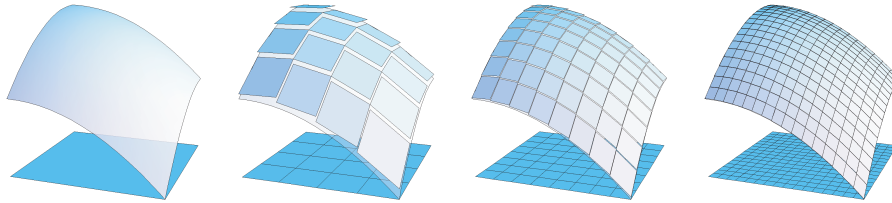


図 1: 区画  $[0, 1] \times [0, 1]$  上で  $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)/2$  のグラフを接平面の断片で近似する様子。

### 具体例

まずはおなじみの「球面の面積」の公式を確認してみよう。

**例題 (球の面積)**. 半径  $R$  の球面の曲面積は  $4\pi R^2$  であることを示せ。

解答. 原点中心半径  $R$  の球面の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \iff z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

なので, 上半分にあたる関数  $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , グラフの曲面積を 2 倍すればよい. このとき,

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

より,  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  とおくと

$$\begin{aligned} (\text{求める面積}) &= 2 \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dxdy = 2 \iint_D \sqrt{\frac{(-x)^2 + (-y)^2 + (R^2 - x^2 - y^2)}{R^2 - x^2 - y^2}} \, dxdy \\ &= 2R \iint_D \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dxdy \end{aligned}$$

ここで極座標変換  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  を用いると,  $D$  は  $r\theta$  平面の区画  $E = [0, R] \times [0, 2\pi]$  を変換したもののなので

$$\begin{aligned} (\text{求める面積}) &= 2R \iint_E \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} r \, dr \, d\theta = 2R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr \\ &= 2R \cdot 2\pi \cdot \left[ -\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 4\pi R \cdot R = 4\pi R^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

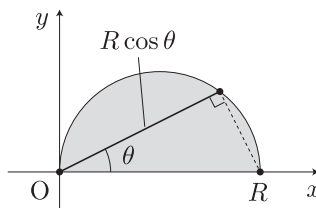
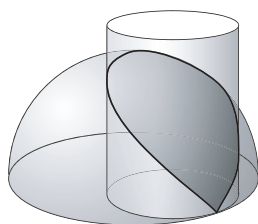
例題. 半径  $R$  の半球面

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$$

内で, 円柱

$$\left\{ (x, y, z) \mid \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4} \right\}$$

で囲まれる部分の面積を求めよ.



解答. 先の例題と同じく  $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , とおき, 積分領域として半円板

$$D = \left\{ (x, y) \mid \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}, y \geq 0 \right\}$$

をとる. このとき,

$$(\text{求める面積}) = 2 \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dx dy = 2R \iint_D \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy.$$

ここで極座標変換  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  を用いると,  $D$  は  $r\theta$  平面のヨコ線領域

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq R \cos \theta\}$$

を変換したものになるので,

$$\begin{aligned} (\text{求める面積}) &= 2R \iint_E \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr d\theta = 2R \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{R \cos \theta} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \right) d\theta \\ &= 2R \int_0^{2\pi} \left[ -\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^{R \cos \theta} d\theta \\ &= 2R \int_0^{2\pi} (-R \sin \theta + R) d\theta \\ &= 2R \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) = R^2 (\pi - 2). \end{aligned}$$

■