担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

「現代数学基礎 CIII（複素関数続論）」について

配布日：October 7, 2014 Version：1.1

担当教官： 川平 友規（かわひら ともき，理学部数理学科・大学院多元数理科学研究科）

担当 TA： 澤田 友佑 (さわだ ゆうすけ，大学院多元数理科学研究科)

講義ウェブサイト：
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/14W-kansuron.html
配布されたプリントが pdf 形式でダウンロードできます．また，毎週の進捗状況についてコメント．していきます．

本授業の目的およびねらい（コースデザインより）: 前期の複素関数論を引き継ぐかたちで講義を進める．講義の目的は大きく分けてふたつある．ひとつは，留数計算をマスターし実積分への応用方法を知ること．もうひとつは，下のキーワードのような種々の有名定理を通して，複素関数が「解析的」であることの特殊性（たとえば「滑らかな関数」との違い）を理解し，今後学ぶ解析学・幾何学への橋渡しをすることである．

講義日と授業内容（予定）:

10 月 7 日	前期の復習・ちからだめし
10 月 14 日	モレラの定理・コーシーの積分公式
10 月 21 日	グルサの公式・リュービルの定理・代数学の基本定理
10 月 28 日	一様収束とワイエルシュトラスの定理・テイラー展開
11 月 4 日	ローラン展開と留数定理
11 月 11 日	実積分への応用
11 月 18 日	一致の定理と最大値原理,
11 月 25 日	偏角の原理・ルーシェの定理
12 月 2 日	リーマン球面とメビウス変換
12 月 9 日	＜休講予定＞
12 月 16 日	有理関数と有理形関数
1 月 13 日	解析接続とリーマン面
1 月 20 日	楕円関数概説
1 月 27 日	期末試験

参考書： 教科書は使わない（講義ノートも配布する予定）．ただし，留数計算までをマスターするために，好みのテキスト（薄くて簡単なものでよい）を一冊手に入れて隅々まで読み込むことをすすめる．いくつか列挙しておくが，あくまで参考である：

- 川平友規,『複素関数の基礎のキソ』,
  http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/kansuron.pdf
- 樋口貞一ほか,『現代複素関数通論』，培風館 (1990/01)
- 小寺平治,『テキスト 複素解析』，共立出版 (2010/10).
- 志賀 浩二,『複素数 30 講 (数学 30 講シリーズ) 』，朝倉書店 (1989/04).

留数計算以降の発展的内容に関しては，次を挙げておく：

- 川平友規,『現代数学基礎 CIII』（昨年度の講義ノート），
  http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/13W-kansuron.pdf

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

- アールフォルス,『複素解析』, 現代数学社 (1982/03)
- 志賀啓成,『複素解析学 II』, 培風館 (1999/06)
- 杉浦光夫,『解析入門 II』, 東京大学出版会 (1985/04)
- 高橋礼司,『複素解析（新版）』, 東京大学出版会 (1990/01)

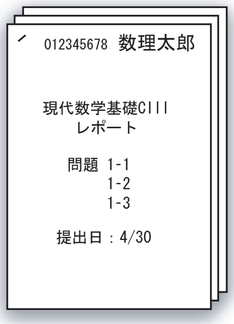
成績評価の方法：「履修取り下げ制度」を適用する．

- レポートおよび期末試験の点数の合計点をもとに評価する．
- 履修取り下げ届が提出された場合，またはレポートを 5 回以上提出しなかった場合は「欠席」とする．それ以外は評価の目安として 59 点以下を F，60 – 69 点を C，70 – 79 点を B，80 – 89 点を A，90 – 100 点を S とする．

レポートの様式：レポートの締め切りは原則として「次回の講義開始時」とします．教壇前の机に提出しておいてください．締め切りを過ぎたレポートは一切受け取らないので注意してください．提出する際には，**必ず A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙を使用し，右図のような表紙をつけて**ください．

受講者同士で協力し合って解答してもかまいませんが，必ず協力者の名前も明記するようにしてください．(それによって減点されることはありません.)

レポートは採点して返却します．返却が済むまで，成績への加点の対象とはしないので注意してください．



・番号・名前は上の方に大きく書く．
・左上をホチキスで留める．
・解いた問題の番号，提出日を書く．
・裏面はなるだけ使わない．

オフィスアワー：授業中・授業後の質問は大歓迎です．それ以外の時間に質問したい場合は，ぜひオフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を活用してください．私のオフィスアワーは，理学部数理学科内の合同オフィスアワー「Cafe David（カフェ・ダヴィド）」の時間に設定しています．Cafe David は月曜から金曜の 12:00–13:30，理 1 号館 2 階のエレベーター前にオープンし，コーヒー・紅茶を無料で提供しています．私の担当は**月曜日**です．

よく使う記号など：**数の集合**

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体	(2) $\mathbb{R}$: 実数全体	(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体	(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体	(6) $\emptyset$: 空集合

ギリシャ文字

(1) α: アルファ	(2) β: ベータ	(3) γ, Γ: ガンマ	(4) δ, Δ: デルタ	(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ	(7) η: エータ	(8) θ, Θ: シータ	(9) ι: イオタ	(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ	(12) μ: ミュー	(13) ν: ニュー	(14) ξ, Ξ: クシー	(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ	(17) ρ: ロー	(18) σ, Σ: シグマ	(19) τ: タウ	(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ	(22) χ: カイ	(23) ψ, Ψ: プサイ	(24) ω, Ω: オメガ	

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ちからだめし

配布日：October 7, 2014　Version：1.1

ちからだめし

問題 1. 複素平面内の「領域」とはどんな集合のことをいう？

以下 $D \subset \mathbb{C}$ を領域，$f : D \to \mathbb{C}$ を複素関数とする．

問題 2. 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ がある点 $\alpha \in D$ で（複素）微分可能であることの定義は何か？

問題 3. 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が正則関数であることの定義を書け．

問題 4. コーシー・リーマンの方程式を用いて，e^z が正則関数であることを示せ．

問題 5. コーシー・リーマンの方程式を用いて，$\bar{z}^2$ が正則関数でないことを示せ．

問題 6. $(-1)^i$ は正の実数であることを示せ．(注意！無限個あるよ．)

問題 7. 以下の積分の C に曲線 $C_1 : z = z(t) = (1+i)t$ $(t \in [0,1])$ および $C_2 : z = z(t) = t + it^2$ $(t \in [0,1])$ を代入して，積分値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_C z^2\,dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}\,z\,dz$　　(3) $\displaystyle\int_C \bar{z}^2 dz$

以下，$\alpha \in \mathbb{C}$，$r > 0$ にたいし α 中心半径 r の円を左回り（反時計回り）にまわる閉曲線を $C(\alpha, r)$ で表すことにする．

問題 8. m を整数，$C = C(\alpha, r)$ とするとき，線積分 $\displaystyle\int_C (z-\alpha)^m dz$ を計算せよ．

問題 9. コーシーの積分定理を書け．

問題 10. $C = C(i, 1)$ とするとき，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+2}\,dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ を示せ．

問題 11. (オマケ)

(1) 最大で時速 300 キロ出る車が平面上を気まぐれに 2 時間走り続けた．出発点からの移動距離は，最大で何キロメートルか？

(2) 正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は領域 D 上で $|f(z)| \le 300$ を満たしている．C を D に含まれる長さ 2 の滑らかな曲線とするとき，線積分の絶対値 $\left|\displaystyle\int_C f(z)\,dz\right|$ の考えうる最大の値を求めよ．

レポート問題

締切りは 10 月 14 日（火）の講義開始時とします．

問題 1-1. 上のちからだめし（問題 1〜問題 11）をもう一度解け．

問題 1-2（オプション）． 講義への意見・感想・要望があれば，自由に書いて下さい．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ちからだめしの略解（前期の復習）

配布日：October 14, 2014 Version：1.1

前回 (10/7) のまとめ：ちからだめしの略解

問題 1. 複素平面内の「領域」とはどんな集合のことをいう？

【解答】 $D \subset \mathbb{C}$ が**領域** (domain) $:\Longleftrightarrow$ D は開集合かつ連結（「連結開集合」）.
$\Longleftrightarrow$ D は開集合かつその中の任意の 2 点を D 内の折れ線で結べる. ■

以下 $D \subset \mathbb{C}$ を領域，$f : D \to \mathbb{C}$ を複素関数とする.

問題 2. 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ がある点 $\alpha \in D$ で（複素）微分可能であることの定義は何か？

【解答】 関数 $w = f(z)$ が $z = \alpha$ で**微分可能** (differentiable)
$:\Longleftrightarrow$ ある定数 $A \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = A$$

この定数 A を f の α における**微分係数** (differential coefficient) とよび，$A = f'(\alpha)$ と表す. ■

注意. 微分係数を定める極限の式から，$z \approx \alpha$ のとき

$$\frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \approx A \iff \frac{\Delta w}{\Delta z} \approx A \iff \Delta w \approx A\,\Delta z$$

を得る．とくに $A = re^{i\theta} \neq 0$ のとき，f は $z = \alpha$ のまわりの点を（ほぼ）$r = |A|$ 倍拡大・$\theta = \arg A$ 回転させながら $f(\alpha)$ のまわりに写す.

問題 3. 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が正則関数であることの定義を書け.

【解答】

関数 $w = f(z)$ が D 上で**正則** (holomorphic) $:\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ が } D \text{ 上で微分可能かつ} \\ \text{導関数 } f' \text{ が } D \text{ 上で連続} \end{cases}$ ■

注意. 念のため言葉の復習（確認）をしておく：

- 関数 $w = f(z)$ が D **上で微分可能**
  $:\Longleftrightarrow$ すべての $\alpha \in D$ において f は微分可能.
- D 上で微分可能な関数 $w = f(z)$ にたいし，点 $z \in D$ に微分係数 $f'(z)$ を対応させる関数を f の**導関数** (derivative) とよぶ.

注意. 実は「導関数 f' が D 上で連続」という条件は不要（Goursat の定理）.

問題 4. コーシー・リーマンの方程式を用いて，e^z が正則関数であることを示せ.

複素関数の正則性を「実関数の言葉で」言い換えたのが次のコーシー−リーマンの方程式である：

定理（コーシー・リーマンの方程式）. 複素関数 $f : D \to \mathbb{C}$，$w = f(z)$ の変数を $z = x + yi$，$w = u + vi$ とし $f(x + yi) = u + vi$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$ の形で表現するとき，次の (a) と (b) は同値：

(a) f は D 上で正則.

(b) u，v は D 上で C^1 級かつ方程式 (CR) $\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$ を満たす.

さらにこのとき，$f'(z) = u_x + iv_x$ が成り立つ.

注意. 方程式 (CR) を**コーシー・リーマンの方程式**（the Cauchy-Riemann equation) とよぶ.

注意. (CR) は，f を xy 平面から uv 平面への写像だと思ったとき，ヤコビ行列が

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & -\blacksquare \\ \blacksquare & \square \end{pmatrix}$$

の形になっていることを意味する.（これは回転＋拡大を表す線形変換の形.）

【解答】 上の定理を用いて証明する．$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$ より，指数関数は xy 平面から uv 平面への写像として $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$ である．ヤコビ行列を計算すると，$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$ となり，u，v は C^1 級，かつコーシー・リーマンの方程式 (CR) を満たす．x, y は任意であるから，定理（コーシー・リーマンの方程式）より f は $\mathbb{C}$ 上正則といえる． ■

ちなみに導関数は $f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$.

問題 5. コーシー・リーマンの方程式を用いて，$\bar{z}^2$ が正則関数でないことを示せ.

【解答】 先の問題と同様である．実部と虚部に分けて関数を表示すると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$ となる．ヤコビ行列は $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$ であるから，コーシー・リーマンの方程式を満たさない．よって正則関数ではない． ■

問題 6. $(-1)^i$ は正の実数であることを示せ.（注意！無限個あるよ.）

【解答】「複素数の複素数乗」の定義より $(-1)^i := e^{i \log(-1)}$ である．ここで $\log(-1)$ は $e^z = -1$ を満たす無限個の複素数を表すから，$-1 = e^{\pi i} = e^{\pi i + 2m\pi i}$ $(m \in \mathbb{Z})$ より $\log(-1) = (2m+1)\pi i$ $(m \in \mathbb{Z})$．よって

$$(-1)^i := e^{i \log(-1)} = e^{i(2m+1)\pi i} = e^{-(2m+1)\pi} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

これは $\ldots, e^{-3\pi}, e^{-\pi}, e^{\pi}, e^{3\pi}, e^{5\pi}, \ldots$ で得られる**無限個の正の実数**. ■

問題 7. 以下の積分の C に曲線 $C_1 : z = z(t) = (1+i)t$ $(t \in [0,1])$ および $C_2 : z = z(t) = t + it^2$ $(t \in [0,1])$ を代入して，積分値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_C z^2\, dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}\, z\, dz$　　(3) $\displaystyle\int_C \bar{z}^2 dz$

【解答】

練習 8-2（線積分）． $C_1 : z = z(t) = (1+i)t$ より, $dz = (1+i)\, dt$.
$C_2 : z = z(t) = t + t^2 i$ より, $dz = (1+2ti)\, dt$.

(1) $$\int_{C_1} z^2\, dz = \int_0^1 \{(1+i)t\}^2 \cdot (1+i)\, dt = (1+i)^3 \int_0^1 t^2\, dt = \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$
$$\int_{C_2} z^2\, dz = \int_0^1 (t+t^2 i)^2 \cdot (1+2ti)\, dt = \int_0^1 (t^2 + 4t^3 i - 5t^4 - 2t^5 i)\, dt = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

注意. z^2 は複素平面全体で正則なので，積分値は積分路の始点と終点だけで定まる．また，不定積分 $z^3/3$ を用いた計算 $\displaystyle\int_{C_1} = \int_{C_2} = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3}$ も意味をもつ．

(2) $$\int_{C_1} \mathrm{Re}\, z\, dz = \int_0^1 \mathrm{Re}\,\{(1+i)t\} \cdot (1+i)\, dt = \int_0^1 t \cdot (1+i)\, dt = \frac{1+i}{2}.$$
$$\int_{C_2} \mathrm{Re}\, z\, dz = \int_0^1 \mathrm{Re}\,(t+t^2 i) \cdot (1+2ti)\, dt = \int_0^1 t \cdot (1+2ti)\, dt = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i.$$

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(3) $\displaystyle\int_{C_1} \bar{z}^2\,dz = \int_0^1 \{(1-i)t\}^2 \cdot (1+i)\,dt = (1-i)^2(1+i)\int_0^1 t^2\,dt = \frac{2-2i}{3}.$

$$\int_{C_2} \bar{z}^2\,dz = \int_0^1 (t-t^2 i)^2 \cdot (1+2ti)\,dt = \int_0^1 (t^2+3t^4-2t^5 i)\,dt = \frac{14}{15} - \frac{1}{3}i. \qquad \blacksquare$$

以下，$\alpha \in \mathbb{C}$，$r > 0$ にたいし α 中心半径 r の円を左回り（反時計回り）にまわる閉曲線を $C(\alpha, r)$ で表すことにする．

問題 8. m を整数，$C = C(\alpha, r)$ とするとき，線積分 $\displaystyle\int_C (z-\alpha)^m dz$ を計算せよ．

【解答】 $z(t) = \alpha + re^{it}$ より $z'(t) = ire^{it}$．よって

$$\int_C (z-\alpha)^m\,dz \;=\; \int_0^{2\pi} (re^{it})^m \cdot (ire^{it})\,dt \;=\; ir^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,dt$$

$$= \begin{cases} ir^{m+1}\left[\dfrac{1}{(m+1)i}e^{i(m+1)t}\right]_0^{2\pi} & = 0 \quad (m \neq -1) \\ i\displaystyle\int_0^{2\pi} 1\cdot dt & = 2\pi i \quad (m = -1). \end{cases} \qquad \blacksquare$$

注意． この線積分は複素関数論の中でもっとも重要！絶対マスターすべし．公式としてまとめておこう：

基本公式 1． m を整数，$C = C(\alpha, r)$ とするとき，r の値によらず次が成り立つ：

$$\int_C (z-\alpha)^m dz \;=\; \begin{cases} 2\pi i & (m=-1) \\ 0 & (m \neq -1) \end{cases}$$

問題 9. コーシーの積分定理を書け．

【解答】 この講義では,「コーシーの積分定理」（もしくは単に「積分定理」）は次の形で与えられるとする：

コーシーの積分定理 (Cauchy's Integral Theorem)．D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域 とし，C を D 内の 単純閉曲線 とする．このとき，関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が正則であれば,

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; 0.$$

$\blacksquare$

注意． 曲線 C が自己交差しない閉曲線であるとき，**単純閉曲線** (simple closed curve, 略して s.c.c.) とよばれる．また，領域 $D \subset \mathbb{C}$ が**単連結** (simply connected) であるとは，D 内の任意の単純閉曲線 C について，その内部が D に含まれることをいう．ようするに，D に穴があいてないことをいう.（正確な定義は講義で復習する.）

問題 10. $C = C(i, 1)$ とするとき，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+2}\,dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ を示せ．

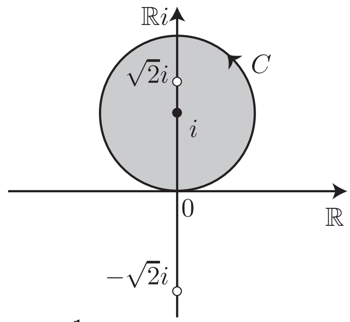
まずは次の基本公式 2 を用いる（問題 7 と積分定理からの帰結）：

基本公式 2． 任意の単純閉曲線 C にたいし，次が成り立つ：

$$\int_C \frac{1}{z-\alpha}\,dz \;=\; \begin{cases} 2\pi i & (\alpha が\ C\ の内部にあるとき) \\ 0 & (\alpha が\ C\ の外部にあるとき) \end{cases}$$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

【解答】



被積分関数を $\dfrac{1}{z^2+2}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}i}\left(\dfrac{1}{z-\sqrt{2}i} - \dfrac{1}{z+\sqrt{2}i}\right)$ のように変形すれば，

$$\int_C \frac{1}{z^2+2}\,dz \;=\; \frac{1}{2\sqrt{2}i}\left(\int_C \frac{1}{z-\sqrt{2}i}\,dz - \int_C \frac{1}{z+\sqrt{2}i}\,dz\right).$$

$\sqrt{2}i$ は C の内部，$-\sqrt{2}i$ は C の外部にあるので，基本公式より求める積分は $\dfrac{1}{2\sqrt{2}i}(2\pi i - 0) = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. ■

問題 11. (オマケ)

(1) 最大で時速 300 キロ出る車が平面上を気まぐれに 2 時間走り続けた．出発点からの移動距離は，最大で何キロメートルか？

(2) 正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は領域 D 上で $|f(z)| \le 300$ を満たしている．C を D に含まれる長さ 2 の滑らかな曲線とするとき，線積分の絶対値 $\left|\int_C f(z)\,dz\right|$ の考えうる最大の値を求めよ．

【解答】 (1) 最高速度でまっすぐ直線上を走りつづけて，$300 \times 2 = 600$ キロ．
(2) C 上を時速 1（キロ）の一定速度で移動する点 z を考えよう．すなわち C : $z = z(t)$ と表すとき，$|z'(t)| = 1$ $(0 \le t \le 2)$ とする．微小時間 Δt の間に z は C 上をだいたい $\Delta z \approx z'(t)\Delta t$ 移動するのである．

では線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_0^2 f(z(t))z'(t)dt$ を考えてみよう．$f(z)\Delta z \approx f(z(t))z'(t)\Delta t$ という量は微小時間 Δt 内に（複素数で表された）速度 $f(z(t))z'(t)$ で進んだ距離と解釈できる．積分はそのトータルの道のりである．いま $|f(z(t))||z'(t)| \le 300 \cdot 1 = 300$ であるから，(1) と同じ考え方で速度 $f(z(t))z'(t)$ が最高速度 $|f(z(t))z'(t)| = 300$ で一定（方向） のとき，積分の絶対値は最大値 600 をとる． ■

レポート問題

締切りは 10 月 21 日（火）の講義開始時とします.

問題 2-1. 曲線 C は単位円を左側向きにまわる曲線とする．このとき，以下の積分値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z(z-2i)}dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{4z^2+1}dz$　　(3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{2z^2+3z-2}dz$

問題 2-2. 以下の曲線 C について，積分

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

を計算せよ．ただし $C(\alpha, r) = \left\{z(t) = \alpha + re^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\right\}$ とする．

(1) $C = C(i, 1)$　　(2) $C = C(-i, 1)$　　(3) $C = C(0, 2)$　　(4) $C = C(1, 1)$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

積分定理と積分公式

配布日：October 21, 2014　Version：1.2

前回 (10/14) のまとめと補足

コーシーの積分定理 (Cauchy's Integral Theorem). D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域，C を D 内の 単純閉曲線，$f : D \to \mathbb{C}$ を 正則関数 とする．このとき，

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; 0.$$

用語の確認（ア）． 複素平面上の曲線 C とはある適当な連続関数 $x = x(t)$, $y = y(t) \in \mathbb{R}$ によって

$$C : z = z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (a \le t \le b)$$

と表されるものであった．[1]曲線 C が**滑らか** (smooth) であるとは，速度

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) + \frac{dy}{dt}(t)i$$

が $a < t < b$ で存在し，連続であり，かつゼロにならないことをいう．

（イ）． C_1, C_2 を滑らかな曲線とするとき，C_1 にそって進んだあとさらに C_2 にそって進む経路を記号 $C_1 + C_2$ で表す．鉄道で言えば「乗り継ぎ」である．[2]曲線 C が**区分的に滑らか** (piecewise smooth) であるとは，C が有限個の滑らかな曲線 C_1, $C_2, \ldots,$ C_N を順につなぎ合わせたものになっているときをいう．このとき，$C = C_1 + \cdots + C_N$ と表す．

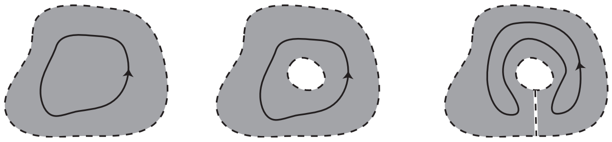
以下，曲線 C といえば「区分的に滑らかな曲線」であると仮定しよう．

（ウ）． 曲線 C が**閉曲線** (closed curve) であるとは，始点と終点が一致することをいう．すなわち C : $z = z(t)$ $(a \le t \le b)$ と表されるとき，$z(a) = z(b)$ が成り立つことをいう．

（エ）． さらに C : $z = z(t)$ $(a \le t \le b)$ が**単純閉曲線** (simple closed curve, 略して s.c.c.) であるとは，$z(a) = z(b)$ かつ $a \le t_1 < t_2 < b$ のとき $z(t_1) \ne z(t_2)$ が成り立つことをいう.（これは「自己交差しない閉曲線」ということ.）

（オ）． $\mathbb{C}$ 上に単純閉曲線 C が与えられたとき，$\mathbb{C} - C$ はふたつの領域からなる（「Jordan の曲線定理」）．[3]そのうち有界なほうを C の**内部** (interior) とよび，$\mathrm{int}(C)$ で表す．有界でないほうを C の**外部** (exterior) とよび，$\mathrm{ext}(C)$ で表す

（カ）． 領域 $D \subset \mathbb{C}$ が**単連結** (simply connected) であるとは，D 内の任意の単純閉曲線 C について，その内部 $\mathrm{int}(C)$ が D に含まれることをいう.（これは「D に穴があいてない」ということ.）



左は文句なしに単連結，中央は単連結でない，しかし右のように切り込み（スリット）をいれたものは単連結．

[1] とくに断らないかぎり，C には t の増加方向にあわせた**向き** (orientation) をあわせて考えることにする．また，$z(a)$ を C の**始点** (initial point)，$z(b)$ を**終点** (terminal point) とよぶ．

[2] ふつうは C_1 の終点が C_2 の始点と一致している場合を考える．

[3] これは自明（あたりまえ）ではなく，ちゃんと証明がつけれられている．ちなみにドーナツの表面 T の場合，うまく単純閉曲線 C をとると $T - C$ がふたつに分割されないようにできる．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

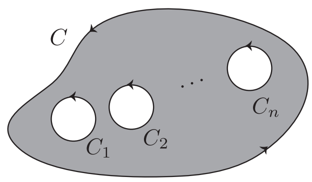
積分定理の応用

応用その 1.

定理 2-1（積分路の変更）. 一般に単純閉曲線 C と $C_1, \dots C_n$ が右図のように与えられているとき，影のついた部分を含む領域で正則な関数の積分は

$$\int_C = \int_{C_1} + \cdots + \int_{C_n}$$

をみたす.



証明のアイディア. 影のついた部分を一刀両断する切り込みを入れ，2 つの単連結領域に分割する.（その際，C と $C_1, \dots C_n$ らはそれぞれ 2 つに分割されるようにしておく.）これら単連結領域の境界線上の積分はコーシーの積分定理より 0 になるから，切り込みで相殺される部分を忘れれば

$$\int_C + \left\{ \int_{-C_1} + \cdots + \int_{-C_n} \right\} = 0 \iff \int_C = \int_{C_1} + \cdots + \int_{C_n}.$$

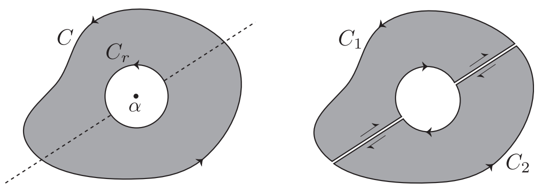
ここで $-C_k$ は C_k を逆行する積分路であり，線積分の基本性質 $\displaystyle\int_{-C_k} = -\int_{C_k}$ を用いた. ■

応用その 2. 上の方法を用いて次の基本公式を示そう：

基本公式 2（再）. 任意の単純閉曲線 C にたいし，次が成り立つ：

$$\int_C \frac{1}{z-\alpha}\, dz = \begin{cases} 2\pi i & : \alpha \in \mathrm{int}(C) \text{ のとき} \\ 0 & : \alpha \in \mathrm{ext}(C) \text{ のとき} \end{cases}$$

基本公式 2 の証明. $\dfrac{1}{z-\alpha}$ は $\mathbb{C} - \{\alpha\}$ で正則である. α が C の外部にあるときは，C の内部を少しだけ膨らませることで，C を含み α を含まない単連結領域 D を見つけることができる．よってコーシーの積分定理より，$\displaystyle\int_C = 0$.



次に α が C の内部にあるときを考える．十分小さな $r > 0$ を固定すると，$C_r := C(\alpha, r)$ は C の内部にあるとしてよい．このとき，上の定理 2-1（積分路の変更，$n = 1$）と前回の「基本公式 1」より $\displaystyle\int_C = \int_{C_r} = 2\pi i.$

■

ふたつの不等式

積分公式の証明に向けて，ものすごく頻繁に用いる不等式ふたつをまとめておこう.

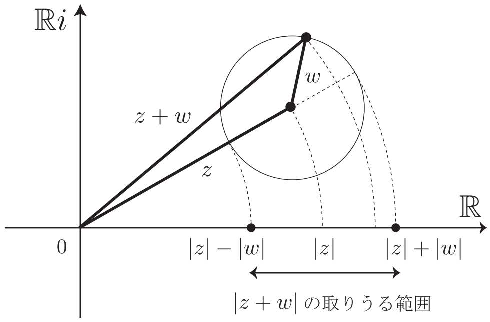
三角不等式 任意の複素数 z, w にたいし，

$$|z| - |w| \le |z + w| \le |z| + |w|.$$

不等式の成立自体は，次の図をじーっと眺めればわかると思う[4].

[4]ただし，平面のユークリッド距離が任意の点を中心とする回転について不変である，という性質を使っている．平面には種々の距離（距離関数）を考えることができるが，すべての距離がこの性質を満たすわけではない.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp



$M\ell$（エムエル）不等式. C を長さ $\ell=\ell(C)$ の曲線，関数 $f(z)$ を C 上の連続関数とする．さらに，ある定数 $M>0$ が存在し C 上 $|f(z)|\le M$ が成り立つとき，

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le M\cdot\ell.$$

証明. C の任意の分割 $\{z_k\}$ に対し，そのリーマン和の絶対値について

$$\left|\sum_k f(z_k)(z_{k+1}-z_k)\right| \le \sum_k |f(z_k)||z_{k+1}-z_k| \le M\sum_k |z_{k+1}-z_k| \le M\ell$$

が成り立つ.（最初の不等号では三角不等式を用いた．最後の不等号は，分割点を結ぶ線分の長さともとの C の長さを比較した.）上の評価式はすべての分割について成立するので，積分の絶対値も $M\ell$ 以下. ■

コーシーの積分公式

「積分定理」と同じ仮定のもと，次が成り立つ.

コーシーの積分公式 D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域，C を D 内の 単純閉曲線，$f:D\to\mathbb{C}$ が 正則関数 とする．このとき任意の $\alpha\in\mathrm{int}(C)$ に対し，

$$(*)\qquad f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz.$$

C はいわば α を囲む閉曲線である．その上をぐるっと回って $f(z)/(z-\alpha)$ を積分すると，$2\pi i f(\alpha)$ の値が得られる．したがって,「α を触らずに」$f(\alpha)$ の値が計算できてしまうのである！

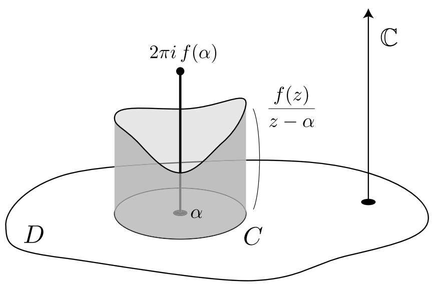


図 1: 「積分公式」のイメージ図

応用.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

例題. $C = C(0,3)$ とするとき，$I = \displaystyle\int_C \frac{e^z}{z+1}\,dz = ?$

解答. $D = \mathbb{C}$，$f(z) = e^z$, $\alpha = -1$ としてコーシーの積分公式を適用する．実際，D は単連結領域であり f は D 上正則．$-1 \in \mathrm{int}(C)$ であるから，

$$f(-1) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z+1}\,dz \iff e^{-1} = \frac{1}{2\pi i}I \iff I = \frac{2\pi i}{e}.$$

■

「積分定理」の証明. まず

$$(*) \text{ の右辺} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,dz + \underline{\frac{f(\alpha)}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-\alpha}\,dz}$$

と変形しておく．下線のついた第 2 項は，基本公式 2 より $\dfrac{f(\alpha)}{2\pi i}\cdot 2\pi i = f(\alpha)$ である．よって第 1 項が 0 になることを示せばよい．

第 1 項の被積分関数は $D-\{\alpha\}$ で正則なので，定理 2-1 の $n=1$ の場合を適用し積分路を α 中心の十分小さな半径 $r>0$ をもつ円 $C_r = C(\alpha, r)$ に変更しても積分値は変化しない．すなわち

$$\text{第 1 項} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,dz$$

が成り立つ．いま $f(z)$ は正則なので，$z=\alpha$ で微分可能である．すなわちある定数 $A = f'(\alpha)$ が存在し，

$$\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} \to A \quad (z \to \alpha)$$

が成り立つ．z が十分近いとき「平均変化率」$\dfrac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}$ と A の誤差はいくらでも小さくなるので，r を十分小さくとれば $z \in C_r$ のとき

$$\left|\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} - A\right| \le 1$$

とできる．[5]．これより $\left|\dfrac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\right| \le |A|+1$ であるから，$M\ell$ 不等式と $\ell(C_r) = 2\pi r$ より

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi}(|A|+1)\ell(C_r) = (|A|+1)r.$$

半径 r は任意に小さくできるので，第 1 項は 0 でなくてはならない． ■

高階微分の積分公式

次に「グルサ (Goursat) の公式」とも呼ばれる，高階微分に関する強力な公式を紹介しよう（証明は次回）.

グルサの公式（高階微分の積分公式）. D を $\mathbb{C}$ 内の <u>単連結領域</u>，C を D 内の <u>単純閉曲線</u>，$f : D \to \mathbb{C}$ が <u>正則関数</u> とする．このとき，任意の自然数 n と任意の $\alpha \in \mathrm{int}(C)$ に対し，

$$(*)_n \qquad f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz.$$

とくに，正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ には n 階導関数が存在する．

[5] 右辺の 1 という数字に深い意味はない．2 でも 0.777 でも何でもよい．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

積分（右辺）を計算しているうちに，いつの間にか微分（左辺）が計算される，という謎めいた公式である．

応用（正則性の遺伝）． 一般に，関数の「正則性」は導関数にまで遺伝する．すなわち,「正則関数の導関数は正則関数」なのである．正確には，次のように述べられる：

> **系 2-2（微分可能性）．** 任意の領域 D 上で定義された正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は，何回でも微分可能である．とくに，f'，f''，$f^{(3)}, \ldots$ も全て正則関数となる..

証明． 導関数 $f' : D \to \mathbb{C}$ が正則であることを言えば十分である．

任意の $\alpha \in D$ に対し，α 中心の十分小さな開円板 D_α をとりその中で α を囲む単純閉曲線 C をとれば，グルサの公式の仮定を満たすようにできる．よって $n \geq 1$ に対し $f^{(n)}(\alpha)$ の存在がわかる．

とくに 2 階導関数 $f''(z)$ が存在するから，f' は複素微分可能である．また，3 階導関数 $f^{(3)}$ も存在することから，f'' は複素微分可能，よって連続である．すなわち，f' には連続な導関数 f'' が存在するので，正則関数の定義より f' も正則である． ■

注意（実関数との比較）． 実関数の場合，微分可能であってもその導関数が微分可能とは限らない．例えば $y = |x|^{3/2}$ は連続な y' をもつが，y' 自身は $x = 0$ で微分可能でない．(一般には，微分可能でも導関数が連続になることすら保証されない.)

グルサの公式の覚え方：その１． グルサの公式の $(*)_n$ はちょっと覚え辛い．そこで，記憶する際のヒントをふたつ伝授しよう．まず $(*)_n$ を強引に

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \underline{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz} \cdot \frac{1}{(z-\alpha)^n}$$

と変形して，右端の分母にある $(z-\alpha)^n$ を頭のなかで左辺に掛けると，後述するテイラー展開の n 次の項になる．右辺の下線部は「積分公式」の右辺である．

グルサの公式の覚え方：その２． 「積分公式」$(*)$ の左辺と右辺の被積分関数 $\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ を α を変数とする関数と考えて微分していく：

$$\underline{f(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \underline{\frac{f(z)}{z-\alpha}}\,dz$$

$$\text{下線部を}\alpha\text{で微分} \implies \underline{f'(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \underline{\frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}}\,dz$$

$$\text{下線部を}\alpha\text{で微分} \implies \underline{f''(\alpha)} = \frac{1\cdot 2}{2\pi i}\int_C \underline{\frac{f(z)}{(z-\alpha)^3}}\,dz$$

$$\text{下線部を}\alpha\text{で微分} \implies \underline{f^{(3)}(\alpha)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2\pi i}\int_C \underline{\frac{f(z)}{(z-\alpha)^4}}\,dz$$

これは「積分記号下の微分」とよばれるもので，適当な条件下であれば微分と積分は交換できるのである．

参考：グリーンの定理（複素版）

コーシーの積分定理は「正則関数」特有の現象である．これを確認するために，一般の「正則とはかぎらない関数」に対して積分定理にあたるものを考えてみよう．D を $\mathbb{C}$ 内の領域とし，$f : D \to \mathbb{C}$ は C^1 級

の複素関数とする．ここで C^1 級とは，$f(x+yi) = u+vi$ $(x,y,u,v \in \mathbb{R})$ と表現したとき，u, v が x, y の関数として C^1 級であることを意味する．

「z 偏微分」と「$\overline{z}$ 偏微分」． 次のような記号を導入しよう：

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x+yi)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x+yi)$$

z と $\overline{z}$ は独立に動くわけではないので，これらは普通の意味の偏微分ではないが，とにかく形式的に記号として導入するのである．また通常の偏微分の記号にならって，$\dfrac{\partial f}{\partial z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ は $f_z(z)$, $f_{\overline{z}}(z)$ のようにも表す．

例． $f(z) = \overline{z}$ のとき，

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x-yi) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(x-yi) - i\frac{\partial}{\partial y}(x-yi)\right\} = \frac{1}{2}\{(1-0) - i(0-i)\} = 0.$$

同様にして，

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x-yi) = \frac{1}{2}\{(1-0) + i(0-i)\} = 1.$$

一般に $f(z) = \overline{z}^n$ のとき $f_z(z) = 0$, $f_{\overline{z}}(z) = n\overline{z}^{n-1}$ が成り立つ．

> **グリーンの定理（複素版）**(Green's Theorem): D を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域とし，C を D 内の単純閉曲線とする．関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が C^1 級であれば，任意の $\alpha \in \mathrm{int}(C)$ にたいし，
>
> $$\int_C f(z)\,dz = 2i \iint_{\mathrm{int}(C)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dxdy$$

例． $f(z) = \overline{z}$ としてグリーンの定理を適用してみよう．上の計算から

$$\int_C \overline{z}\,dz = 2i \iint_{\mathrm{int}(C)} 1 \cdot dxdy$$

であるから，単純閉曲線 C で囲まれる領域の面積は

$$(\mathrm{int}(C)\text{ の面積}) = \frac{1}{2i}\int_C \overline{z}\,dz$$

と，右辺の線積分で計算できることがわかる．また右辺は 0 にならないから，$\overline{z}$ に関してはコーシーの積分定理が成立しないこともわかる．もちろん，$\overline{z}$ は正則関数ではないので積分定理の仮定を満たしていないわけだが．

正則関数とグリーンの定理． グリーンの定理の面白いところは,「正則関数でない」という性質が端的に数値として現れるところにある．その理由を説明しよう．

一般の C^1 関数 $f : D \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$ を実部と虚部にわけて $u + vi = f(x+yi)$ のように表現してみよう．すると

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+vi) = \frac{1}{2}\{(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)\}$$

であるから，D 上で

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv 0 \iff u,\ v \text{ は } C^1 \text{かつコーシー・リーマンを満たす} \iff f \text{ は正則}$$

が成り立つことがわかる．したがって，グリーンの定理に f が正則であることを仮定したものが積分定理に他ならない．標語的に言えば $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ とは f の「正則性からのズレ」を表す関数であって，グリーンの定理は左辺の線積分によってそのズレをあぶり出す，という仕組みなのである．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

証明（グリーンの定理）． 実関数のグリーンの定理は仮定して証明する．実部虚部にわけた $u+vi = f(x+yi)$ の形の表記を用いて，

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u+vi)(dx+idy) \\ &= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy + v\,dx) \quad (\downarrow \text{ここで実関数グリーンの定理}) \\ &= \iint_{\mathrm{int}(C)} (-u_y - v_x)dxdy + i\iint_{\mathrm{int}(C)} (-v_y + u_x)dxdy \\ &= \iint_{\mathrm{int}(C)} \left(\frac{\partial}{\partial x}(iu - v) + \frac{\partial}{\partial y}(-u - vi)\right) dxdy \\ &= i\iint_{\mathrm{int}(C)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+vi)\,dxdy = 2i\iint_{\mathrm{int}(C)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,dxdy.\end{aligned}$$

■

「全微分」の式． C^1 級複素関数にも次のような「全微分」が存在する：

> **複素版「全微分」．** $f : D \to \mathbb{C}$ が C^1 級のとき，$\alpha \in D$ に対し $f_z(\alpha) = A$，$f_{\bar{z}}(\alpha) = B$ とおくと，$z \to \alpha$ のとき
>
> $$f(z) = f(\alpha) + A\,(z-\alpha) + B\,\overline{(z-\alpha)} + o(|z-\alpha|).$$

この式から，「f が α で微分可能 $\iff$ $f_{\bar{z}}(\alpha) = 0$」がわかる．

証明． $f(x+yi) = u+vi$ の形で表現してみよう．$\alpha = x_0 + y_0 i$, $f(\alpha) = u_0 + v_0 i$ とおき，差分をそれぞれ $\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = y - y_0$，$\Delta u = u - u_0$，$\Delta v = v - v_0$，$\Delta z = z - \alpha$ と表現しておく．このとき，$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$，$\overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta y$ となることに注意しておこう．さて f は C^1 級であるから，u，v もそれぞれ x，y について C^1 級である．よって全微分の式

$$\Delta u = p_1\Delta x + p_2\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),\quad \Delta v = q_1\Delta x + q_2\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

（ただし，$p_1 = u_x(x_0, y_0)$，$p_2 = u_y(x_0, y_0)$，$q_1 = v_x(x_0, y_0)$，$q_2 = v_y(x_0, y_0)$）が成り立つ．これより

$$\begin{aligned}f(z) - f(\alpha) = \Delta u + \Delta v i &= (p_1\Delta x + p_2\Delta y) + (q_1\Delta x + q_2\Delta y)i + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= (p_1 + q_1 i)\Delta x + (p_2 + q_2 i)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha)\cdot\frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)\cdot\frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i} + o(|\Delta z|) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) - i\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)\right)\Delta z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) + i\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)\right)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|) \\ &= A\,(z-\alpha) + B\,\overline{(z-\alpha)} + o(|z-\alpha|).\end{aligned}$$

■

参考：ポンペイユの公式

積分公式の一般化を参考までに紹介しておこう．

> **ポンペイユの公式** (Pompeiu's Formula): D を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域とし，C を D 内の単純閉曲線とする．関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が C^1 級であれば，任意の $\alpha \in \mathrm{int}(C)$ にたいし，
>
> $$f(\alpha) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz - \frac{1}{\pi}\iint_{\mathrm{int}(C)} \frac{f_{\bar{z}}(z)}{z-\alpha}\,dxdy.$$

こちらも「正則性からのズレ」が右辺第 2 項の面積分で表現される，という仕組みになっている．[6]

[6] この面積分は正確には $\mathrm{int}(C) - \{\alpha\}$ 上での広義積分であるが，値が確定するのでこのように書き表すことが多い．

証明のスケッチ． $g(z)=f(z)/(z-\alpha)$，$D(\alpha,r):=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-\alpha|<r\}$ とおく．r が十分に小さいとき，$D(\alpha,r)\subset\mathrm{int}(C)$ である．これに「基本公式」と同様にグリーンの定理（複素版）を適用すれば，

$$\int_C g(z)\,dz-\underbrace{\int_{C(\alpha,r)} g(z)\,dz}_{(1)}=2i\iint_{\mathrm{int}(C)-D(\alpha,r)}\frac{\partial g}{\partial\bar z}\,dxdy \qquad (**)$$

が成り立つ．ここで「$\bar z$ 偏微分」も普通の偏微分のようにライプニッツ則を満たすことから

$$\frac{\partial g}{\partial\bar z}=\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{f(z)}{z-\alpha}\right)=\frac{\partial f}{\partial\bar z}(z)\cdot\frac{1}{z-\alpha}+f(z)\cdot\underline{\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)}$$

となる．ここで $1/(z-\alpha)$ は $\mathrm{int}(C)-D(\alpha,r)$ を含む部分で正則であるから，下線部分は 0 となる．

つぎに (1) の積分を次のように変形する：

$$\underbrace{\int_{C(\alpha,r)}\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz}_{(1)}=\int_{C(\alpha,r)}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,dz-f(\alpha)\int_{C(\alpha,r)}\frac{1}{z-\alpha}\,dz$$

$|z-\alpha|=r$ であることに注意しよう．右辺第 2 項は変数変換して計算すると $2\pi i f(\alpha)$ となる．また，f は C^1 級なので，$f_z(\alpha)=A$，$f_{\bar z}(\alpha)=B$ のとき「全微分」の式 $f(z)-f(\alpha)=A(z-\alpha)+B\overline{(z-\alpha)}+o(|z-\alpha|)$（ただし $|z-\alpha|=r\to 0$）が成り立つ．よって $|z-\alpha|=r$ が十分小さいとき，$|f(z)-f(\alpha)|\le(|A|+|B|+1)|z-\alpha|$．これより，

$$\left|\int_{C(\alpha,r)}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\,dz\right|\le(|A|+|B|+1)2\pi r\to 0\quad(r\to 0)$$

を得る．以上で，$r\to 0$ のとき，$(**)$ の式の左辺の値が確定し，(したがって右辺も広義積分として値が確定し)，式を整理することでポンペイユの公式が得られる． ■

レポート問題

締切りは 10 月 28 日（火）の講義開始時とします．

問題 3-1（コーシーの積分公式）． 次の積分を求めよ．ただし，$C=C(0,2)$ とする．

(1) $\displaystyle\int_C\frac{e^z}{z-1}\,dz$　(2) $\displaystyle\int_C\frac{e^z}{z^2-1}\,dz$　(3) $\displaystyle\int_C\frac{\sin z}{(z-\pi/2)(z+\pi)}\,dz$

練習 3-2（n 階微分の積分公式）． 次の積分を求めよ．ただし，$C=C(0,2)$ とする．

(1) $\displaystyle\int_C\frac{e^z}{z^4}\,dz$　(2) $\displaystyle\int_C\frac{z+1}{(z-1)^2(z+3)}\,dz$　(3) $\displaystyle\int_C\frac{e^{-iz}}{(3z-\pi)^2}\,dz$

練習 3-3（コーシーの定理の応用 2）． 積分 $\displaystyle\int_C\frac{1}{z^2(z-1)(z+2)}\,dz$ の以下の曲線 C に沿った積分値を求めよ．

(1) $C=C(0,1/2)$　(2) $C=C(0,3/2)$　(3) $C=C(2,3/2)$　(4) $C=C(0,3)$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

積分公式の応用

配布日：October 28, 2014　Version：1.1

前回 (10/21) のまとめと補足

以下，とくに断らない限り D は $\mathbb{C}$ 内の領域とする．

グルサの公式の証明．

前回やったグルサの公式を思い出そう：

グルサの公式（n 階微分の積分公式，再）． D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域，C を D 内の 単純閉曲線，$f : D \to \mathbb{C}$ が 正則関数 とする．このとき，すべての $\alpha \in \mathrm{int}(C)$ と $n \geq 0$ に対し $f^{(n)}(\alpha)$ が存在し，次が成り立つ

$$f^{(n)}(\alpha) \;=\; \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz.$$

この公式から,「正則性は導関数に遺伝する」ことがわかるのだった．

系 2-2（再）． 正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は何回でも微分可能である．とくに，f'，f''，$f^{(3)}, \ldots$ も全て正則関数となる．

証明（グルサの公式） 帰納法を用いる．$n = 0$ のとき，$(*)_0$ は「積分公式」そのものである．そこで，$n \geq 0$ のときに $(*)_n$ が成り立つと仮定して $(*)_{n+1}$ を証明しよう．

$(*)_n$ の右辺を I_n とおく．I_n の中の被積分関数は $z = \alpha$ 以外で正則であるから，前回の定理 2-1（積分路の変形）より，十分小さな r を固定して $C = C(\alpha, r)$ の場合を証明すればよい．

また，式 $(*)_n$ の成立とは無関係に，I_n の積分自体はすべての n で値が確定していることに注意しておこう．

改めて，$(*)_n$ が成り立つと仮定する．複素変数 $\Delta\alpha$ に対し

$$E(\Delta\alpha) := f^{(n)}(\alpha + \Delta\alpha) - f^{(n)}(\alpha) - \Delta\alpha I_{n+1}$$

とおき,「ある正の定数 K が存在して，$|\Delta\alpha| \leq r/2$ であれば

$$|E(\Delta\alpha)| \leq K|\Delta\alpha|^2$$

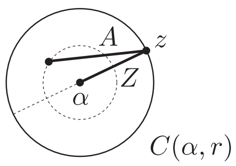
が成り立つ」ことを示そう．この式から $\Delta\alpha \neq 0$ のとき

$$\left|\frac{f^{(n)}(\alpha+\Delta\alpha) - f^{(n)}(\alpha)}{\Delta\alpha} - I_{n+1}\right| \leq K|\Delta\alpha|$$

となり， $\Delta\alpha \to 0$ のとき $(*)_{n+1}$ が導かれるのである．

積分の式を簡単にするために，

$$Z := z - \alpha, \quad A := z - \alpha - \Delta\alpha$$



とおこう．$z \in C$ かつ $|\Delta\alpha| \leq r/2$ を仮定すると，$|Z| = r$ より $r/2 \leq |A| \leq 3r/2$ が成り立つ（図 1）．

さて $E(\Delta\alpha)$ を積分で表現すると，

$$\begin{aligned} E(\Delta\alpha) =& \frac{n!}{2\pi i}\int_C \left(\frac{f(z)}{A^{n+1}} - \frac{f(z)}{Z^{n+1}}\right)dz - \Delta\alpha\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{Z^{n+2}}\,dz \\ =& \frac{n!}{2\pi i}\int_C (\ \cdots\ ) f(z)\,dz. \end{aligned}$$

ただし「 $\cdots$ 」の部分は $\Delta\alpha = Z - A$ を用いて

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A^{n+1}} - \frac{1}{Z^{n+1}} - \frac{(n+1)(Z-A)}{Z^{n+2}}\\ =&\frac{Z^{n+2} - (n+2)A^{n+1}Z + (n+1)A^{n+2}}{A^{n+1}Z^{n+2}}\end{aligned}$$

と表される．分子を Z の多項式とみなして $P(Z)$ とおくと，$P'(A) = 0$ であるからこれは $(Z-A)^2$ を因数にもつ．$P(Z) = (Z-A)^2 Q(Z)$ とおくと，$Q(Z)$ は Z と A の n 次多項式であり，$|Z| = r$ かつ $r/2 \le |A| \le 3r/2$ のとき $|Q(Z)|$ には最大値 K_0 が存在する[1]．よって

$$\begin{aligned}|\cdots| =& \left|\frac{(Z-A)^2 Q(Z)}{A^{n+1}Z^{n+2}}\right|\\ \le& \frac{|\Delta\alpha|^2 K_0}{(r/2)^{n+1} r^{n+2}} =: K_1 |\Delta\alpha|^2.\end{aligned}$$

さらに $z \in C$ のときの $|f(z)|$ の最大値を M とすれば，$\ell(C) = 2\pi r$ と $M\ell$ 不等式より

$$|E(\Delta\alpha)| \le \frac{n!}{2\pi} M K_1 |\Delta\alpha|^2 \ell(C) = n! r M K_1 |\Delta\alpha|^2.$$

よって $K := n! r M K_1$ とおけば，求める式を得る． ■

積分計算への応用． 再び $C = C(0,2)$ として，次の積分値を求めてみよう．

$$I = \int_C \frac{e^z}{(z-1)^4}\,dz$$

積分公式 2 で $D = \mathbb{C}$，$f(z) = e^z$, $\alpha = 1$, $n = 3$ としてみよう．$\alpha \in \mathrm{int}(C)$ であるから，

$$f^{(3)}(1) = \frac{3!}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{(z-1)^4}\,dz \iff I = \frac{2\pi i f^{(3)}(1)}{3!} = \frac{e\pi i}{3}.$$

ここで $f^{(3)}(z) = e^z$ を用いた．

原始関数とモレラの定理．

$f : D \to \mathbb{C}$ を領域 D 上の連続関数としよう．「コーシーの積分定理」によれば，

$$f \text{ が正則} \implies \text{任意の } \mathrm{int}(C) \subset D \text{ を満たす単純閉曲線 } C \text{ に対し，} \int_C f(z)\,dz = 0.$$

がなりたつ．じつは，その「逆」（っぽいこと）が言えるのである：

モレラ (Morera) の定理， $f : D \to \mathbb{C}$ を領域 D 上の連続関数とする．

$(*)$: D 内の任意の単純閉曲線 C に対し $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ

ならば，f は D 上で正則である．

証明（モレラ）． 次を示せば十分である：

[1] 有界閉集合上の連続関数は最大値を持つ．もしくは，$Q(Z) = \sum_{k=0}^{n} q_k Z^k A^{n-k}$ と表されるので，三角不等式より

$$|Q(Z)| \le \sum_{k=0}^{n} |q_k||Z|^k|A|^{n-k} \le \sum_{k=0}^{n} |q_k| r^k (3r/2)^{n-k}.$$

最後の項を K_0 としても以下の議論には差し支えない．

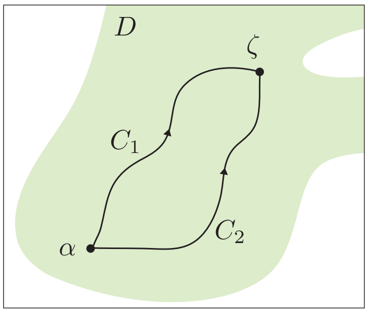
$(**)$: ある関数 $F : D \to \mathbb{C}$ が存在して，$F'(z) = f(z)$ $(z \in D)$.

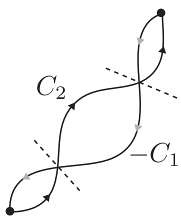
なぜなら，そのような F は D 上で連続な導関数 f をもつことになり，正則関数である．したがって系 2-2（「正則性は導関数に遺伝する」）より，f も正則関数，というわけである．

では関数 F を具体的に構成して $(**)$ を示そう．$\alpha \in D$ を任意に選び固定する．また，$\zeta \in D$ も自由に選び，さらに α から ζ にいたる D 内の経路（曲線）C_1, C_2 を自由に選ぶ．仮定 $(*)$ から，(必要なら図のように経路 $C_2 + (-C_1)$ を適当に単純閉曲線分割することで)

$$\int_{C_2+(-C_1)} f(z)\,dz = 0 \iff \int_{C_2} = -\int_{-C_1} = \int_{C_1}$$

がわかる．





これは，D 内で積分を考える限り，α から ζ にいたる経路によらず積分値がひと通りに定まることを示している．よって

$$F(\zeta) := \int_{C_1} f(z)\,dz \quad \left(= \int_{C_2} f(z)\,dz\right)$$

とおく．経路に依存しないことから，$F(\zeta) = \displaystyle\int_\alpha^\zeta f(z)\,dz$ のようにも表す．

こうして定まる関数 $F : D \to \mathbb{C}$ が f を導関数に持つことを示そう．すなわち，任意の $\zeta \in D$ に対し

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\zeta+h) - F(\zeta)}{h} = f(\zeta)$$

が成り立つことを示す．より正確には，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|h| \le \delta$ のとき

$$\left| \frac{F(\zeta+h) - F(\zeta)}{h} - f(\zeta) \right| \le \epsilon$$

を示せばよい．

いま f は連続であったから，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|z - \zeta| \le \delta$ のとき

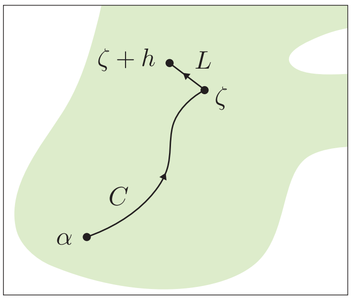
$$|f(z) - f(\zeta)| \le \epsilon$$

とできる．これを念頭に，$|h| \le \delta$ として

$$\frac{F(\zeta+h) - F(\zeta)}{h} = \frac{1}{h}\left\{ \int_\alpha^{\zeta+h} - \int_\alpha^\zeta \right\}$$

を考えよう．積分は（D 内の）経路に依存しないから，

α から ζ まで : 曲線 C （何でもよい）
ζ から $\zeta+h$ まで : 線分 L : $z(t) = \zeta + ht$ $(0 \le t \le 1)$



をとると，上の式は

$$\frac{F(\zeta+h) - F(\zeta)}{h} = \frac{1}{h}\left\{ \int_{C+L} - \int_C \right\} = \frac{1}{h}\int_L f(z)\,dz$$

となる．さらに $\int_L 1 \cdot dz = \int_0^1 h \cdot dt = h$，$\ell(L) = |h|$ （線分 L の長さ）を用いれば

$$\left| \frac{F(\zeta+h) - F(\zeta)}{h} - f(\zeta) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_L f(z)\,dz - \frac{f(\zeta)}{h} \int_L 1 \cdot dz \right|$$
$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_L (f(z) - f(\zeta))\,dz \right| \le \frac{1}{|h|} \cdot e \cdot \ell(L) = \epsilon$$

を得る．$\zeta \in D$ は任意であったから，以上で $(**)$ は示された． ■

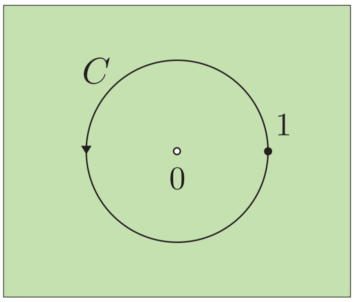
原始関数． $f : D \to \mathbb{C}$ に対し，$F : D \to \mathbb{C}$ が $F' = f$ を満たすとき，F を f の**原始関数** (primitive function) とよぶ．

- もし F_1 と F_2 がともに f の原始関数であれば，$F_1(z) - F_2(z)$ は定数関数である．(理由はレポート問題.)
- D が 単連結 かつ $f : D \to \mathbb{C}$ が正則であれば，コーシーの積分定理よりモレラの定理の仮定 $(*)$ を満たす．よって原始関数 $F : D \to \mathbb{C}$ が積分によって構成できる．

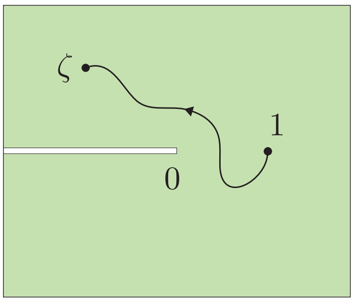
例． $f(z) = z^2$ のとき，原始関数は $F(z) = z^3/3 + C$ （C は定数）の形となる．($(z^3/3)' = z^2$ だから.)

微妙な例（対数関数）． $f(z) = \dfrac{1}{z}$ のとき，原始関数は $F(z) = \log z + C$ の形だろうか？これはおかしい．$\log z$ は多価関数だからである．

たとえば $C = C(0,1)$ とすれば，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0$ である．そもそもモレラの定理の仮定 $(*)$ を満たしてなかったのである．



$D = \mathbb{C} - \{0\}$



$D' = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$

$f(z)$ の定義域は $D = \mathbb{C} - \{0\}$ である．f はここで正則にはなっているが，D は単連結でないので,「積分定理」との相性が悪いのである．そこでスリット（切れ込み）をいれて，f を単連結領域 $D' := \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ に制限してみよう．このとき積分定理よりモレラの定理の仮定 $(*)$ が満たされるので，原始関数 $F(\zeta) = \displaystyle\int_1^\zeta f(z)\,dz$ が定まるのである．(ただし，積分経路は D' 内に限定.）この F は $\log z$ の主値（$|\mathrm{Im}\, \log z| < \pi$）にあたるものになっている．

リュービルの定理

積分公式の応用に戻ろう．正則関数でのみ成立する定理のひとつに，次のものがある：

> **リュービルの定理（Liouville's Theorem）** 複素平面全体で正則かつ有界な関数は，定数関数に限る．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

すなわち,「$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が正則かつある $M > 0$ が存在して $|f(z)| \le M$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ であれば，f は定数」だといっている．たとえば次のことがわかる：

- 指数関数 e^z，三角関数 $\sin z$，$\cos z$ は $\mathbb{C}$ 上正則．しかし定数でないので，リュービルの定理より有界ではない．たとえば実三角関数は $|\sin x| \le 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ だが，複素で $|\sin z| \le 1$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ はウソになる．
- 関数 $f(z) = \dfrac{z}{1+|z|^2}$ は $\mathbb{C}$ 上で C^1 級．このとき任意の $z \in \mathbb{C}$ で $|f(z)| \le \dfrac{|z|}{1+|z|^2} \le \dfrac{1}{2}$ が成り立つから有界かつ定数でない．リュービルの定理より，この f は正則関数ではない．

リュービルの定理の証明. 「$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が正則，かつある M が存在して $|f(z)| \le M$ $(\forall z \in \mathbb{C})$」と仮定しよう．任意に $\alpha \in \mathbb{C}$ を固定し，$C = C(\alpha, r)$ $(r > 0)$ とすると，積分公式 2 より

$$|f'(\alpha)| \;=\; \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz\right| \;\le\; \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^2}\cdot \ell(C) \;=\; \frac{M}{r}.$$

このとき，M は一定だが $r > 0$ は任意に大きくとれるので，$f'(\alpha) = 0$ でなくてはならない．α も任意なので，f は定数.（レポート問題も参照） ■

代数学の基本定理.

リュービルの定理を用いると，次の定理が証明できる：

> **代数学の基本定理（The Fundamental Theorem in Algebra）** 複素係数の方程式 $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ $(a_n \ne 0, n \ge 1)$ は，複素数解をもつ．

「複素」を「実」に変えて,「実係数の方程式は実数解をもつ」としたらウソになる．たとえば $x^2 + 1 = 0$ は実数解をもたないからである．複素数のように「係数に用いる数の体系と，解が存在するような数の体系が一致する」ことを，代数学では「複素数体は代数的に閉じている」と表現する．

「代数学の基本定理」はガウス（Gauss）が最初に証明したとされる[2]．この定理から，ある複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \;=\; a_n (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$$

が成り立つ．すなわち,「複素係数の n 次方程式は重複度込みで n 個の解をもつ.」この事実も，同様の因数分解が実数では成り立たない（たとえば，$x^2 + 1$ ）こととは対照的である．

代数学の基本定理の証明. 方程式の左辺を $f(z)$ とおく．いま $f(z) \ne 0$ がすべての $z \in \mathbb{C}$ で成り立つと仮定して矛盾を導こう．この仮定のもと，$g(z) := \dfrac{1}{f(z)}$ は $\mathbb{C}$ 上正則かつ定数関数ではないことに注意しておこう．

まず，$z \ne 0$ のとき等式

$$|f(z)| \;=\; |z|^n \underline{\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|}$$

を考える．下線部を $A(z)$ とおくと，$|z| \ge r > 0$ のとき

$$|A(z)| \le \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{z^n}\right| \le \frac{|a_{n-1}|}{r} + \cdots + \frac{|a_0|}{r^n}$$

[2] 1799 年，ガウスの学位論文．じつはこの証明には不備があり，その部分が補われたのは 20 世紀に入ってからであった．最初に満足のいく証明を与えたのはアマチュア数学者だったアルガン (1814) である．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

がなりたつ．最右辺は r を大きくすることでいくらでも 0 に近づけることができるから，$|z| \geq r_0$ のとき $|A(z)| \leq |a_n|/2$ を満たすような r_0 をみつけることができる．したがって $|z| \geq r_0$ のとき

$$|f(z)| \;\geq\; |z|^n(|a_n| - \frac{|a_n|}{2}) \;\geq\; \frac{r_0^n|a_n|}{2} \iff |g(z)| \;\leq\; \frac{2}{r_0^n|a_n|} =: M.$$

一方，閉円板 $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ は有界閉集合であるから，$|g(z)|$ は E 上で最大値 M' をもつ．以上から $|g(z)| \leq \max\{M, M'\}$ が $\mathbb{C}$ 上なりたつが，これはリュービルの定理に矛盾する． ■

レポート問題

締切りは 11 月 4 日（火）の講義開始時とします．

問題 4-1（定数になる条件）

(1) 正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が D 上 $f'(z) = 0$ であるとき，定数関数であることを示せ．

(2) 連続関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が原始関数 F_1，$F_2 : D \to \mathbb{C}$ をもつとき，ある定数 C が存在して $F_1(z) = F_2(z) + C$ を満たすことを示せ．

（Hint. コーシー・リーマンを用いる．）

問題 4-2（テイラー展開） 次の関数の $z = 0$ におけるテイラー展開を，z^4 の項までもとめよ．

(1) $\dfrac{1}{z+3}$　　(2) e^{-z^2}　　(3) $\dfrac{\cos z}{z-1}$

問題 4-3（テイラー展開その２） 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ を次の α でテイラー展開せよ．

(1) $\alpha = 0$　　(2) $\alpha = 2i$　　(3) $\alpha = 1$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

テイラー展開と一様収束

配布日：November 4, 2014　Version：1.1

前回 (10/28) のまとめと補足

テイラー展開

任意の実数は小数展開できる．たとえば $\sqrt{2}$ は

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \cdots$$

と展開できるから，近似値が欲しいときは必要な桁数で打ち切ればよい．

関数にも同様の「展開」が存在する．たとえば次の例は非常に基本的である．

例（幾何級数）． $|z| < 1$ のとき，

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

が成り立つ．ただし，この式は「$|z| < 1$ という条件下で右辺の級数は収束し，値が左辺に一致する」と解釈する[1]．

定義（べき級数）． 一般に，$\alpha \in \mathbb{C}$ を定数，z を変数として

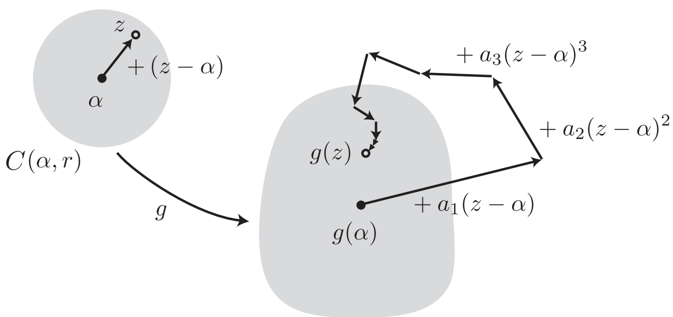
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

の形で表される級数を**べき級数** (power series) もしくは**整級数**とよぶ．

たとえば $z - \alpha = 1/10$ のときべき級数は

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} \cdots$$

となり，小数展開との類似性が見て取れる．ちなみに「べき」は漢字で「冪」と書く．常用漢字ではないため，使われなくなったようだ. (省略して「巾」のように書いていた時代もあったような...)



収束半径． べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ に対し，

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

[1] 無限級数に関する等式を見たら，必ず収束性の条件も込みで式を解釈しなくてはならない．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

をべき級数の**収束半径** (radius of convergence) とよぶ.（ただし，$1/0 = \infty$，$1/\infty = 0$ と約束しておく.）$0 < R < \infty$ のとき，円 $C(\alpha, R)$ をこのべき級数の**収束円** (circle of convergence) という．べき級数の一般論より，

$$z \in (\text{収束円の内部}) \implies \text{べき級数} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \text{ は収束}$$
$$z \in (\text{収束円の外部}) \implies \text{べき級数} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \text{ は発散}$$

が成り立つことが知られている．

テイラー展開.

定理 4-1（テイラー展開）． D は $\mathbb{C}$ 内の領域，$f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．さらに $C = C(\alpha, R)$ は D 内の円であり，$\mathrm{int}(C) \subset D$ を満たすとする．このとき，任意の $z \in \mathrm{int}(C)$ にたいして，次の等式が成り立つ：

$$f(z) \ = \ f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots$$

すなわち右辺の級数は収束し，左辺に一致．この式を $f(z)$ の α における**テイラー展開** (Taylor expansion of $f(z)$ about α) とよぶ．

正則関数のテイラー展開は無限和なので，**テイラー級数** (Talyor series) とも呼ばれる．また，グルサの公式（前回）より，

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$$

が成り立つことに注意．

例（マクローリン展開）． たとえば微分係数を計算することにより，任意の $z \in \mathbb{C}$ にたいし

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

が成り立つ．すなわち右辺の級数は収束し，左辺に一致する．実際，$\alpha = 0$ とし，$|z| < R$ となる R に対し $C = C(0, R)$ 上で定理 4-1 を適用すればよい[2]．

証明（定理 4-1）のスケッチ． $z \in (C \text{ の内部})$ を任意にとって固定する．いま ζ が変数として C 上を動くとき，$\left|\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right| < 1$ が成立する．したがって上述の幾何級数の公式から，

$$\begin{aligned}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)-(z-\alpha)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}} \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\cdot(z-\alpha)^n.\end{aligned}$$

[2] 実関数としてのマクローリン展開をそのまま拡張した形になっているが，これを「あたりまえ」と思ってはいけない．そのようになる「必然性」は現時点ではまったく説明されていないからである．

これを「積分公式」に代入して，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}(z-\alpha)^n\right\}d\zeta$$
$$=^* \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n.$$

最後の等式ではグルサの公式を用いた. ■

注意. 上記の証明のなかで，星つきの $=^*$ の部分は積分と無限和を交換している．すなわち，

$$\int_C\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)\,dz$$

の形の式変形を行っている．この部分は自明ではないので，あとで正当化する必要がある．[3]

テイラー展開の計算

定理 4-1 の主張どおりにテイラー展開を計算するのはやっかいである．関数の n 階微分など簡単には計算できないし，だからといってグルサの公式も積分計算がうまくいかないと値が求まらない．

テイラー展開が実用上有用なのは，次のような性質を持つからである：

命題 4-2（テイラー展開の一意性） 定理 4-1 と同じ条件下で，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-\alpha)^n$$

を満たすべき級数展開が見つかれば，それはテイラー展開になっている．すなわち，$b_n=\dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$ がすべての $n\geq 0$ で成り立つ．

すなわち，テイラー展開は計算方法には依存しない．どんな方法でもよいので，もっとも簡単な方法でべき級数を計算すればよいのである．この命題は次回あたりに，「ローラン展開」という拡張された形で証明する．

例. 幾何級数 $1/(1-z)=1+z+z^2+\cdots$ は 関数 $f(z)=1/(1-z)$ の原点におけるテイラー展開になっているから，（微分を計算しなくても）$f^{(n)}(0)=n!$ だとわかる．

例題. $e^z=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(z-2)^n$ を示せ．

解答. $e^z=e^2\cdot e^{z-2}=e^2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{n!}$. ■

[3]たとえば $\displaystyle\int_0^1\lim_{n\to\infty}g_n(x)\,dx\neq\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx$ が成り立つような実関数列 $\{g_n(x)\}$ が存在するのであった．同様の現象がおきないとも限らない．

例題．$f(z) = \dfrac{1}{z-2i}$ を次の点を中心に展開せよ．

(1) $z = 0$　　(2) $z = i$

答． まず (1)．補題（幾何級数）を適用するために，次のように変形する：

$$f(z) = \frac{1}{-2i} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z}{2i}}.$$

よって $\left|\dfrac{z}{2i}\right| < 1$ のとき，すなわち $|z| < 2$ のとき，

$$f(z) = \frac{1}{-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^{n+1}}z^n \quad (\text{ただし } |z| < 2)$$

つぎに (2)．基本的なアイディアは (1) と同じである[4]．まず次のように変形する：

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)-i} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-i}{i}}.$$

よって $\left|\dfrac{z-i}{i}\right| < 1$ のとき，すなわち $|z-i| < 1$ のとき，

$$f(z) = \frac{1}{-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{i}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i^{n+1}}(z-i)^n \quad (\text{ただし } |z-i| < 1)$$

■

注意（収束半径）． 上の例題の場合，(1) での収束半径は 2，(2) の収束半径は 1 である．

一様収束と積分

この先，関数の収束，とくに関数の無限和の収束性について扱うことが多い．ここでは「収束」の意味を厳格に，「一様収束」という概念で定式化し，極限についてさまざまな結果が得られることをみておこう．標語的に言えば，g_n が g に一様収束するとき，

（ア）g_n が連続なら極限 g も連続．

（イ）線積分 $\displaystyle\int_C g_n(z)\,dz$ は $\displaystyle\int_C g(z)\,dz$ に収束．

（ウ）g_n が正則なら極限 g も正則．さらに g_n' も g' に（広義）一様収束．(ワイエルシュトラス)

今回はテイラー展開の証明に必要な（ア）と（イ）だけを確認する．

定義（一様収束）．D を $\mathbb{C}$ 内の領域とする．関数列 $\{g_n : D \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ と D の部分集合 E にたいし，「g_n が E 上で関数 $g : E \to \mathbb{C}$ に**一様収束** (uniform convergence) する」とは，

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall z \in E) \quad |g_n(z) - g(z)| < \epsilon$$

が成り立つことをいう．

[4] 講義では $w = z - i$ とおいて w のべき級数展開をまず求めた．こちらのほうが計算ミスが少ないかもしれない．

すなわち，E 上での関数 g_n と g の絶対誤差が「z によらず一様に」0 に収束することをいう．一様収束は $g_n \to g\ (n \to \infty)$ もしくは $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ と表すことも多いが，普通は前後の文章で（各点収束ではなく）一様収束であることを明記するのが作法である．

例（最重要）． この先もっとも重要な具体例は次のものである：

補題（幾何級数）． $0 < r < 1$ を固定し，

$$g_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n, \qquad g(z) = \frac{1}{1-z}$$

とおくと，g_n は g に $E(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\}$ 上一様収束する．とくに，$|z| < 1$ であれば

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \cdots + z^n + \cdots$$

が成り立つ.（すなわち，右辺の級数は収束して左辺と一致.）

証明． $g_n(z) = (1 - z^{n+1})/(1-z)$ であるから，

$$|g_n(z) - g(z)| = \left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| \le \frac{r^{n+1}}{1-r} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たす．とくに，$r^{n+1}/(1-r)$ は $z \in E(r)$ に依存しないから，g_n は g に $E(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\}$ 上一様収束する．後半の主張は r を 1 に近づけることで任意の z について成立する． ■

（ア）：一様収束と連続性． 実の微積分でも学ぶ大事な命題である：

命題 4-3（一様収束極限の連続性）． <u>連続</u> な関数列 $g_n : E \to \mathbb{C}\ (n \ge 0)$ が関数 $g : E \to \mathbb{C}$ に E 上 <u>一様収束</u> するとき，g も E 上で連続.

証明． 任意に小さい $\epsilon > 0$ と任意の $\alpha \in E$ を選ぶ．このとき，ある $\delta > 0$ が存在して，$z \in E$ のとき

$$|z - \alpha| < \delta \implies |g(z) - g(\alpha)| < \epsilon$$

となることを示せばよい．

一様収束性により，ある自然数 N が存在して

$$(\forall n \ge N)(\forall z \in E) \ \ |g_n(z) - g(z)| < \epsilon/3$$

が成り立つ．とくに，$|g_n(\alpha) - g(\alpha)| < \epsilon/3$ も成立する．

ここで $m \ge N$ をひとつ固定すると，g_m は E 上（とくに $z = \alpha$ で）連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|z - \alpha| < \delta \implies |g_m(z) - g_m(\alpha)| < \epsilon/3$$

を満たす．よって $|z - \alpha| < \delta$ という条件のもと，

$$|g(z) - g(\alpha)| \le |g(z) - g_m(z)| + |g_m(z) - g_m(\alpha)| + |g_m(\alpha) - g(\alpha)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

が成り立つ． ■

（イ）：一様収束と線積分． 次に線積分の収束性を確かめよう：

命題 4-4（一様収束極限の線積分）． 曲線 C に対し <u>連続</u> な関数列 $g_n : C \to \mathbb{C}\ (n \ge 0)$ が関数 $g : C \to \mathbb{C}$ に C 上 <u>一様収束</u> するとき，

$$\int_C g_n(z)\, dz \to \int_C g(z)\, dz \ (n \to \infty).$$

証明. 命題 4-3 より g は連続であり，C 上での積分が意味をもつ．また，一様収束性より

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall z \in C) \quad |g_n(z) - g(z)| < \epsilon.$$

よって $n \geq N$ のとき $M\ell$ 不等式より

$$\left| \int_C g_n(z)\,dz - \int_C g(z)\,dz \right| = \left| \int_C \{g_n(z) - g(z)\}\,dz \right| \leq \epsilon \cdot \ell(C)$$

ここで C の長さ $\ell(C)$ は（区分的に滑らかという仮定から）有限であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_C g_n(z)\,dz = \int_C g(z)\,dz$ が示された． ■

定理 4-1 の証明（再）

$z \in (C$ の内部$)$ を任意にとって固定する．いま ζ が変数として C 上を動くとして，

$$f_n(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} \cdot \left(\frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha} \right)^n = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} \cdot (z - \alpha)^n,$$

$$g_n(\zeta) := f_0(\zeta) + \cdots + f_n(\zeta), \quad g(\zeta) := \frac{f(z)}{\zeta - z}$$

とおく．先ほどの「定理 4-1 の証明のスケッチ」と同様の幾何級数の計算で，$\zeta \in C$ を固定するごとに

$$g(\zeta) = \lim_{n\to\infty} g_n(\zeta) = f_0(\zeta) + f_1(\zeta) + f_2(\zeta) + \cdots$$

であることに注意しておこう．さらに,「g_n が C 上の g に一様収束する」ことを示したい．

まず $\beta = \beta(\zeta) := \dfrac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}$ とおく．このとき，$|\beta| = \left| \dfrac{z - \alpha}{\zeta - \alpha} \right| = \dfrac{|z - \alpha|}{R} < 1$ であり，しかも $\zeta \in \mathbb{C}$ に依存しない．C 上での $|f(\zeta)|$ の最大値を $M = M(C)$ とすると，[5]，

$$\begin{aligned} |g_n(\zeta) - g(\zeta)| = |f_{n+1}(\zeta) + f_{n+2}(\zeta) + \cdots| &= \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} (\beta^{n+1} + \beta^{n+2} + \cdots) \right| \\ &\leq \frac{M}{R} \cdot \left| \frac{\beta^{n+1}}{1 - \beta} \right| \leq \frac{M|\beta|^{n+1}}{R(1 - |\beta|)} \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

最後の項は $\zeta \in C$ の取り方に依存しないから，g_n は g に C 上一様収束する．したがって命題 4-4 より，

$$\int_C g(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_C g_n(z)\,dz$$

が成立する．これは

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \lim_{n\to\infty} \int_C \sum_{k=0}^{n} f_k(\zeta)\,d\zeta$$

を意味するから，積分公式より，

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int_C \sum_{k=0}^{n} f_k(\zeta)\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_C f_k(\zeta)\,d\zeta \quad (\because \text{有限和と積分は問題なく交換できる}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(\zeta)\,d\zeta \quad \left(\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \text{が無限和の定義}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}\,d\zeta \right) (z - \alpha)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n. \end{aligned}$$

■

[5] C のコンパクト性，f の連続性からそのような M が存在する．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

レポート問題

締切りは 11 月 11 日（火）の講義開始時とします.

問題 5-1（ローラン展開） 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$ を次の円環領域で収束するようにローラン展開せよ.

(1) $D = \{z \in C \mid |z| < 1\}$ (2) $D = \{z \in C \mid 1 < |z| < \infty\}$ (3) $D = \{z \in C \mid 0 < |z-1| < 1\}$

問題 5-2（一様収束？） 関数 g_n, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $g_n(z) := \dfrac{\sin nz}{n}$, $g(z) := 0$（定数関数）と定める.

(1) g_n は g に $\underline{\mathbb{R}\text{ 上で}}$ 一様収束することを示せ.

(2) リュービルの定理を用いて，g_n は g に $\underline{\mathbb{C}\text{ 上で}}$ 一様収束 しない ことを示せ.

注意. 実部が負になるような z を含む領域 D で g_n は g に一様収束はおろか，各点収束すらできない.（これが自力で証明できれば，なかなかの腕前.）

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ローラン展開

配布日：November 11, 2014 Version：1.1

前回 (11/4) のまとめと補足

広義一様収束とワイエルシュトラスの定理

定義（広義一様収束） D を $\mathbb{C}$ 内の領域とする．関数列 $g_n : D \to \mathbb{C}$ が $g : D \to \mathbb{C}$ に D 上**広義一様収束**（もしくは**コンパクト一様収束**）するとは，D 内の任意のコンパクト集合上で g_n が g に一様収束することをいう．

例． $g_n(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$，$g(z) = 0$ （定数関数）とするとき，g_n は単位円板 $D(0,1)$ 上 g に広義一様収束する．(「一様収束」ではない．)

例（前回の「補題」）． $g_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ は $g(z) = 1/(1-z)$ に単位円板 $D(0,1)$ 上で広義一様収束する．(こちらも「一様収束」ではない．)

べき級数の広義一様収束とテイラー展開．

定義． べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ が領域 D 上 $g(z)$ に**広義一様収束**するとは，多項式関数の列 $g_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(z-\alpha)^k$ が関数 $g(z)$ に D 上広義一様収束することをいう．

テイラー展開はつぎのように「改良」される：

定理 5-1（テイラー展開，改）． D は $\mathbb{C}$ 内の領域，$f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．このとき，べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$

は $f(z)$ に広義一様収束する．

証明は次回，ローラン展開に拡張した形で与える．

ワイエルシュトラスの定理． 前回の（ア）（イ）に引き続き，(ウ）にあたる定理を述べておこう：

定理 5-2（ワイエルシュトラスの定理）． 正則 な関数列 $g_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \geq 0)$ が関数 $g : D \to \mathbb{C}$ に D 上 広義一様収束 するとき，

(1) g も D 上正則であり，

(2) g_n' は D 上 g' に 広義一様収束する．

証明：**(1)** 任意の $\alpha \in D$ を固定する．このとき十分小さな $r > 0$ が存在し，閉円板 $E = \{z \mid |z-\alpha| \leq r\}$ が D に含まれるとしてよい．とくに E はコンパクト集合なので，g_n は E 上 g に一様収束する．

いま，g_n は $D(\alpha, r)$ 上正則である．とくに連続でもあるので，命題 4-3（前回）より g は連続となる．また，C を $D(\alpha, r)$ 内の任意の単純閉曲線とすれば，「積分定理」より $\displaystyle\int_C g_n(z)\,dz = 0$．よって命題 4-4（前回）より，$\displaystyle\int_C g(z)\,dz = 0$．$C$ は任意であるから，「モレラの定理」により g は $D(\alpha, r)$ 上で正則となる．α

は任意であったから，g は D 上正則．

(2) E を D 内のコンパクト集合（有界閉集合）としよう．このとき，E は D の境界から一定距離離れている．[1] より正確には，ある（十分小さな）$r>0$ が存在して，E を厚さ r 膨らませた集合

$$\tilde{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists w \in E,\ |w-z| \le r\}$$

が D に含まれるようにできる．この集合 $\tilde{E}$ もコンパクト集合であるから[2]，g_n は g に $\tilde{E}$ 上一様収束する．すなわち，また，g_n の一様収束性から，

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \ge N)(\forall z \in \tilde{E}) \quad |g_n(z) - g(z)| < \epsilon.$$

である．いま，$\alpha \in E$ を任意に選び $C = C(\alpha, r)$ とおくと,「グルサの公式」より

$$g_n'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g_n(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz \quad g'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz$$

が成立する．$C \subset \tilde{E}$ と $M\ell$ 不等式より，$n \ge N$ のとき，

$$|g_n'(\alpha) - g'(\alpha)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g_n(z)-g(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{\epsilon}{r^2}\ell(C) = \frac{\epsilon}{r}.$$

ϵ/r は $\alpha \in E$ に依存しないので，g_n' は g' に E 上一様収束する． ■

応用例． ワイエルシュトラスの定理から，単位円板上で

$$g'(z) = \lim_{n\to\infty} g_n'(z) \iff \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + \cdots + nz^{n-1} + \cdots$$

が結論できる．より一般に，ワイエルシュトラスの定理の系としてべき級数に関する次の系をえる：

系． べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ が領域 D 上で $g(z)$ に広義一様収束するとき，関数 $g(z)$ は D 上の正則関数である．さらに，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-\alpha)^{n-1}$ は D 上 $g'(z)$ に広義一様収束する．

証明． 前半の主張は多項式 $g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-\alpha)^k$ が正則関数であることと定理 5-2(1) から従う．後半は定理 5-2(2) からわかる． ■

注意（実関数でワイエルシュトラスは成立しない！）． たとえば $g_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$ と定義する．g_n は $g(x) = 0$（定数関数）に $\mathbb{R}$ 上一様収束するが，$g_n'(x) = \cos nx$ は $g'(x) = 0$ に（広義）一様収束しない．実は複素数で見ると，$z \in \mathbb{C}$ のとき，$g_n(z)$ は $g(z)$ に一様収束していないのである.（レポート問題）

ローラン展開

テイラー展開の拡張として正則関数のローラン展開を導入する．

記号． 以下，D を複素平面内の領域とする．また，$D(\alpha, r)$ で α 中心半径 r の開円板を表す．すなわち $D(\alpha, r) = \mathrm{int}(C(\alpha, r))$．

[1] そうでないと，点列 $\{e_n\} \subset E$ をうまく選んで e_n が ∂D から $1/n$ 以下の距離になるようにできる．コンパクト性から収束部分列 $\{e_{n(k)}\}$ が存在するが，その極限は境界点 $z \in \partial D$ でなくてはならない．一方 E は閉集合なので $z \in E$ でもある．これは $E \subset D$ と D が開集合（$D \cap \partial D = \emptyset$）であることに矛盾する．

[2] $\tilde{E}$ が有界であることは明らか．あとは $\mathbb{C} - \tilde{E}$ が開集合であることを示す．

定理 5-3（ローラン展開）． $\alpha \in \mathbb{C}$ とし，円環領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-\alpha| < R_2\}$ 上で関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は正則であるとする．さらに $C = C(\alpha, R)$ (ただし $R_1 < R < R_2$) を選び，すべての整数 n にたいし定数 a_n を

$$a_n \ := \ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta$$

と定める．このとき，任意の $z \in D$ にたいして，次の等式が成り立つ：

$$f(z) \ = \ \underline{\underline{\cdots + \frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \frac{a_{-1}}{z-\alpha}}} + \underline{a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \cdots}.$$

すなわち，右辺の 2 重下線部と下線部の級数はそれぞれ収束し，その和は左辺に一致する．この式を $f(z)$ の α における**ローラン展開** (Laurent expansion about α) とよぶ．

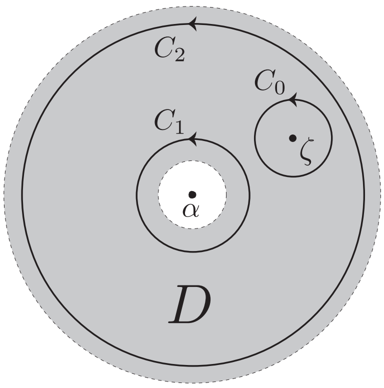
注意． $R_1 = 0$ もしくは $R_2 = \infty$ の場合も許す．

注意． 「積分定理」より，a_n の値は $R \in (R_1, R_2)$ の取り方に依存しない．

注意． $f(z)$ がじつは（円環領域の穴をうめた）円板 $D(\alpha, R_2)$ 内で正則であれば,「積分定理」より $m \in \mathbb{N}$ のとき $a_{-m} = 0$ となって定理 5-3 のローラン展開はテイラー展開そのものとなる．この意味で，ローラン展開はテイラー展開を含む．

定理 5-3（ローラン展開）の証明． $z \in D$ を固定する．また，円 $C_0 := C(z,\epsilon)$, $C_1 := C(\alpha, r_1)$, $C_2 = C(\alpha, r_2)$ を次を満たすように選ぶ：

- $\epsilon > 0$ は十分小さい．
- $R_1 < r_1 < |z-\alpha| < r_2 < R_2$
- 右の図のように，C_0, C_1, C_2 は互いに交わらない．



いま，積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

である．さらに「積分定理」より，

$$\int_{C_2} = \int_{C_0} + \int_{C_1} \iff \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_2} - \int_{C_1}\right)$$

が成り立つ．したがって次を証明すればよい：

- 2 重下線部：$-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1} = \sum_{m\ge 1}\frac{a_{-m}}{(z-\alpha)^m}$，ただし $a_{-m} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{-m+1}}d\zeta$
- 下線部：$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_2} = \sum_{n\ge 0} a_n(z-\alpha)^n$ ，ただし $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta$

2 重下線部を示そう．$\zeta \in C_1$ のとき $|\zeta - \alpha| < |z-\alpha|$ であるから，テイラー展開のときの式変形を参考にすると，

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{z-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{z-\alpha}\sum_{n\ge 0}\left(\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\right)^n d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\sum_{n\ge 0}\left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{-n}}\cdot\frac{1}{(z-\alpha)^{n+1}}\right)d\zeta \end{aligned}$$

ここで無限和で表現された関数が C_1 で一様収束することをテイラー展開のときと同様に確認できる．よっ

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

て無限和と積分が交換できて，

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geq 0}\left(\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{-n}}d\zeta\right)\cdot\frac{1}{(z-\alpha)^{n+1}} = \sum_{n+1=m\geq 1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{-m+1}}d\zeta\right)\cdot\frac{1}{(z-\alpha)^{m}}.$$

ここで右辺の積分路 C_1 は，積分定理より C に変えてもよい．よって 2 重下線部が得られた．

下線部の計算はテイラー展開と同様なので省略する． ■

命題 5-4（ローラン展開の一意性） 定理 5-3 と同じ条件下で，$f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-\alpha)^n$ を満たすべき級数展開が見つかれば，それはローラン展開になっている．すなわち，$b_n=a_n$ がすべての $n\in\mathbb{Z}$ で成り立つ．

証明は次回行う[3]

具体例 1． 関数 $\dfrac{e^z}{z^2}$ は $D=\{0<|z|<\infty\}$ で正則であるから，$\alpha=0$ においてローラン展開ができる．命題 5-4 より，次のように計算すればローラン展開が得られる：

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\cdots\right)=\underline{\underline{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}}}+\underline{\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots}.$$

例題． 関数 $\dfrac{1}{z(z^2-1)}$ を次の円環領域でローラン展開せよ．

(1) $\{0<|z|<1\}$　　(2) $\{1<|z|<\infty\}$

解答． (1)：$|z|<1$ より

$$\frac{1}{z(z^2-1)}=\frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-z^2}=-\frac{1}{z}\cdot(1+z^2+z^4+\cdots)=-\frac{1}{z}-z-z^3-\cdots.$$

命題 5-4 より，これはローラン展開になっている．

(2)$|z|>1$ より $|1/z|<1$．よって

$$\frac{1}{z(z^2-1)}=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1-1/z^2}=\frac{1}{z^3}\cdot\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^7}+\cdots.$$

命題 5-4 より，これはローラン展開になっている． ■

レポート問題

締切りは 11 月 18 日（火）の講義開始時とします．

問題 6-1（留数） 以下の関数のすべての特異点における留数を求めよ．

(1) $\dfrac{e^z}{z-\pi i}$　(2) $\dfrac{2z^2+1}{(z-1)^2}$　(3) $z^2\exp\left(-\dfrac{1}{z}\right)$　(4) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$　(5) $\dfrac{1}{e^z-1}$

(5) には無限個の極があることに注意．

[3] この命題は意外と重要な意味を持っている．ローラン展開の係数は積分で定義されるので，直接値が計算できることはまれである．そのかわり，この命題よりローラン展開は計算方法には依存しないことが保証されている．したがって，たとえば式変形（代数的な計算）を用いるなどして，もっとも簡単な方法でべき級数を計算すれば，それは自動的にローラン展開になっているのである．この性質がのちの留数計算に活かされて，積分への華々しい応用へとつながる．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

留数定理

配布日：November 18, 2013 Version：1.1

前回 (11/11) のまとめと補足

ローラン展開の広義一様収束性

定理 5-3（再：ローラン展開）． $\alpha \in \mathbb{C}$ とし，円環領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-\alpha| < R_2\}$ 上で関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は正則であるとする．さらに $C = C(\alpha, R)$ (ただし $R_1 < R < R_2$) を選び，すべての整数 n にたいし定数 a_n を

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta$$

と定める．このとき，任意の $z \in D$ にたいして，次の等式が成り立つ：

$$f(z) = \underline{\underline{\cdots + \frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \frac{a_{-1}}{z-\alpha}}} + \underline{a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \cdots}. \qquad (*)$$

すなわち，右辺の 2 重下線部と下線部の級数はそれぞれ収束し，その和は左辺に一致する．この式を $f(z)$ の α における**ローラン展開** (Laurent expansion about α) とよぶ．

さらに，次が成り立つ：

定理 6-1（ローラン展開の広義一様収束性）． 定理 5-3 のローラン展開 $(*)$ は円環領域 D 上で $f(z)$ に広義一様収束する．

証明には次の重要な補題を用いる．

補題 6-2（べき級数の広義一様収束）． べき級数 $F(w) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n w^n$ が $w = w_0 \neq 0$ で収束するならば，$F(w)$ は円板 $D(0, |w_0|)$ 上で広義一様収束する．

証明． いま $F(w_0) = A_0 + A_1 w_0 + \cdots + A_n w_0^n + \cdots$ は収束するから，$A_n w_0^n \to 0$ $(n \to \infty)$ でなくてはならない．(←理由を考えよ．) よってある $M > 0$ が存在し，すべての $n \geq 0$ で $|A_n w_0^n| \leq M$ が成り立つ．

さて $r < |w_0|$ を満たす任意の r を固定し，$E(r) := \{|w| \leq r\}$ とおく．$w \in E(r)$ に対し $|A_n w^n| = |A_n w_0^n| \cdot \left|\dfrac{w}{w_0}\right|^n \leq M \cdot \left(\dfrac{r}{|w_0|}\right)^n$ であるから，

$$|A_0| + |A_1 w_0| + \cdots + |A_n w_0^n| \leq M\left\{1 + \frac{r}{|w_0|} + \cdots + \left(\frac{r}{|w_0|}\right)^n\right\} \leq M\frac{1}{1 - r/|w_0|}.$$

これは任意の n で成り立つので，$F(w)$ は絶対収束する．したがって $F(w)$ は収束する．$r\,(< |w_0|)$ は任意であったから，$|w| < |w_0|$ のとき $F(w)$ は収束することが示された．

つぎに $D(0, |w_0|)$ での広義一様収束性を示そう．それには，閉円板 $E(r)$ $(r < |w_0|)$ 上での一様収束性を確認すれば十分である．$w \in E(r)$ にたいし，

$$|F(w) - F_n(w)| = |A_{n+1}w^{n+1} + A_{n+2}w^{n+2} + \cdots| = \lim_{N\to\infty} |A_{n+1}w^{n+1} + \cdots + A_{n+N}w^{n+N}|$$

であるが，上と同様にして

$$|A_{n+1}w^{n+1} + \cdots + A_{n+N}w^{n+N}| \leq M\left\{\left(\frac{r}{|w_0|}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{r}{|w_0|}\right)^{n+N}\right\} \leq M\frac{(r/|w_0|)^{n+1}}{1 - r/|w_0|}.$$

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

が任意の N で成り立つ．よって $|F(w)-F_n(w)| \le M\dfrac{(r/|w_0|)^{n+1}}{1-r/|w_0|}$. この右辺は $w \in E(r)$ に依存せず，かつ $n \to \infty$ のとき任意に小さくできるから，$E(r)$ 上で F は一様収束する． ■

系（べき級数の正則性）． べき級数 $F(w)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n w^n$ は収束円の内部で正則.

証明． 収束半径を R とすると，任意の $w_0 \in D(0,R)$ においてべき級数 $F(w_0)$ は収束する．補題 6-2 より，$D(0,|w_0|)$ 上で $F(w)$ は広義一様収束する．部分和 $F_n(w) := A_0 + A_1 w + \cdots + A_n w^n$ は多項式なので $D(0,|w_0|)$ 上正則である．よってワイエルシュトラスの定理（定理 5-2，その系も参照せよ）より，$F(w)$ も $D(0,|w_0|)$ 上正則．$|w_0|$ は好きなだけ R に近くとれるので，F は $D(0,R)$ 上で正則． ■

定理 6-1 の証明． ローラン展開について，次の (a) と (b) を示せば十分．

(a) 2 重下線部（主要部）は $\{|z-\alpha|>R_1\}$ で広義一様収束

(b) 下線部は $\{|z-\alpha|<R_2\}$ で広義一様収束

まず (b) を示す．$\{|z-\alpha|<R_2\}$ 内の任意のコンパクト集合 E に対し，R_2 に十分近い $r \in (R_1,R_2)$ をとれば，$E \subset \{|z-\alpha|<r\}$ とできる．定理 5-3 より，$|z_0-\alpha|=r$ となるような z_0 において $\displaystyle\sum_{n\ge 0} a_n(z_0-\alpha)^n$ は収束する．よって補題 6-2 より（$w_0 = z_0-\alpha$ と考えて）ローラン展開の下線部 $\displaystyle\sum_{n\ge 0} a_n(z-\alpha)^n$ は $D(\alpha,r)$ 上広義一様収束する．したがって E 上一様収束する．

次に (b) を示す（議論は (a) とほとんど同様である.）$\{|z-\alpha|>R_1\}$ 内の任意のコンパクト集合 E に対し，R_1 に十分近い $r \in (R_1,R_2)$ をとれば，$E \subset \{|z-\alpha|>r\}$ とできる．定理 5-3 より，$|z_0-\alpha|=r$ となるような z_0 において $\displaystyle\sum_{m\ge 1}\frac{a_{-m}}{(z_0-\alpha)^m}$ は収束する．よって補題 6-2 より（$w_0 = 1/(z_0-\alpha)$ と考えて）ローラン展開の 2 重下線部 $\displaystyle\sum_{m\ge 1}\frac{a_{-m}}{(z-\alpha)^m}$ は $\{|z|>r\}$ 上広義一様収束する．したがって E 上一様収束する． ■

命題 5-4（再：ローラン展開の一意性） 定理 5-3 と同じ条件下で，$f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n$ を満たすべき級数展開が見つかれば，それはローラン展開になっている．すなわち，$b_n = a_n$ がすべての $n \in \mathbb{Z}$ で成り立つ．

証明． 定理 6-1 の証明と同様の議論により，べき級数 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n$ は D 上広義一様収束することがわかる．したがって任意の整数 N を固定するとき，$\dfrac{f(z)}{(z-\alpha)^{N+1}} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-\alpha)^{n-N-1}$ も D 上で広義一様収束する．とくに，定理 5-3 のように選んだ円 $C=C(\alpha,R)$ 上では一様収束する．よって

$$
\begin{aligned}
a_N &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{N+1}}\right\} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-\alpha)^{n-N-1}\right\} dz \\
&=_* \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-\alpha)^{n-N-1}\,dz =_{**} \frac{b_N}{2\pi i}\int_C (z-\alpha)^{-1}\,dz = b_N.
\end{aligned}
$$

ただし $=_*$ のところで，一様収束性と項別積分を用いた．また，$=_{**}$ では基本公式 1 を用いた． ■

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

特異点の分類

ある点 $\alpha \in \mathbb{C}$ にたいし，関数 f は領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-\alpha| < R\}$（穴あき円板）で正則と仮定する．

このとき，定理 5-3(ローラン展開) によって，$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-\alpha)^n$ とローラン展開できるのであった．その主要部の形に応じて,「穴」に当たる点を次の 3 つに分類するするのがならわしである．

(1). 主要部が存在しないとき. すなわち,「任意の $m \in \mathbb{N}$ にたいし $a_{-m} = 0$」であり，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ と表されるとき，α は**除去可能特異点** (removable singularity) と呼ばれる．

例． 例えば $z \neq 0$ にたいし

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

とすると，これは領域 $\mathbb{C} - \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$ で正則な関数を与える．ここでのローラン展開は

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$

となり，負べきの項をもたない．よって $z = 0$ は f の除去可能特異点である．この例の場合 $f(0) := 1$ と定義すれば，f を $\mathbb{C}$ 上で正則な関数に拡張できることは「みえみえ」であろう．[1]

(2). 主要部が有限個の項からなるとき. すなわち，ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して，$a_{-k} \neq 0$ であり，

$$f(z) \;=\; \frac{a_{-k}}{(z-\alpha)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

と表されるとき，α は k **位の極** (pole of order k) と呼ばれる．

例． 例えば $z \neq 0$ にたいし

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2}$$

とすると，これも領域 $\mathbb{C} - \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$ で正則な関数を与える．ここでのローラン展開は

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \cdots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \cdots$$

となるので，$z = 0$ は 2 位の極.

(3). 主要部が 0 でない無限個の項からなるとき. すなわち，$a_{-k} \neq 0$ となる $k \in \mathbb{N}$ が無限個存在するとき．この場合，α は f の**真性特異点** (essential singularity) と呼ばれる．

たとえば

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

は $\mathbb{C} - \{0\}$ で正則であり，$z = 0$ は真性特異点である．

以上，(1)(2)(3) をまとめて**孤立特異点** (isolated singularity) もしくは単に**特異点**とよぶ.

[1] $f(z) = \sin z/z$ という表現には $z = 0$ を代入できないので「特異」に見えるけど，調べてみたらそんなことはなかったよ，という一連のなりゆきを「除去可能特異点」と少し大袈裟な言葉で呼んでいる．この例ではどこか「わざとらしさ」が漂っているが，たとえば関数 $g(z) = \dfrac{e^z - z - \cos zi}{\sin(\sin z) - z}$ のような例はどうだろうか？$z = 0$ は除去可能特異点である．しかし確認には多少の計算を要するし，除去可能性も「みえみえ」とはまではいえないだろう．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問. $f(z) = \dfrac{1}{\sin(\pi/z)}$ の定義域は何か？また，その孤立特異点は？

答. 定義域は $\mathbb{C} - \{0, \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \ldots\}$ である．また，$\{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \ldots\}$ が孤立特異点である．実際，これらの点のどれをとっても，その点を中心に小さな穴あき円板をとれて，そのうえで f は正則．よってローラン展開できる．[2]

一方，$z = 0$ を中心にどんなに小さな円板をとっても，無限個の孤立特異点（そこでは f の値が定義できない）が含まれているので，ローラン展開できない．このような点は「集積特異点」と呼ばれる．

留数と積分

> **定理 6-3（積分と留数）** D を $\mathbb{C}$ 内の穴あき円板 $\{0 < |z - \alpha| < R\}$ とし，関数 $f(z)$ は D 上で正則とする．そこでのローラン展開を $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ とするとき，任意の $C = C(\alpha, r)$ $(0 < r < R)$ に対し
> $$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot a_{-1}.$$

a_{-1} はローラン展開の $\dfrac{1}{z-\alpha}$ の係数であり，多くの場合代数的な計算（要するに式変形）だけで求めることができる．また，この α は極かもしれないし，そうでないかもしれない．いずれにしろ定理は成立するのである．

証明. 定理 5-3 における a_n の定義より，

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{-1+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz.$$

■

別証明. C の半径 r に依存せず，$n \neq -1$ のとき $\displaystyle\int_C (z-\alpha)^n\,dz = 0$，$n = -1$ のとき $\displaystyle\int_C (z-\alpha)^n\,dz = 2\pi i$ であった（基本公式 1）．よってローラン展開を用いて

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-\alpha)^n\right) dz =^* \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(a_n \int_C (z-\alpha)^n\,dz\right) = 2\pi i \cdot a_{-1}.$$

ただし，$=^*$ の部分はローラン展開が C 上で一様収束することを用いた（定理 6-1）． ■

留数. 「別証明」からわかるように，$f(z)$ を特異点の回りでローラン展開してから積分すると，a_{-1} の項のみが「留まり」，それ意外の項の消え去ってしまう．この a_{-1} を，すなわち $(z-\alpha)^{-1}$ の係数を f の α における**留数**（りゅうすう，residue) と呼び，$\mathrm{Res}(f(z), \alpha)$ と表す．よって定理 6-3 の式は $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z), \alpha)$ と格好よく表される．

例と積分への応用 1. $\dfrac{e^z}{z^2}$ の $z = 0$ における留数を求めてみよう．さきほど計算したローラン展開 $\dfrac{e^z}{z^2} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + \cdots$ より $\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^z}{z^2}, 0\right) = 1$．たとえば $C = C(0,1)$ とすれば，定理 6-3 より $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2}\,dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$.

例と積分への応用 2. 同じく $C = C(0,1)$ にたいし，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2(z-2)}\,dz$ を計算しよう．被積分関数

[2] じつは，すべてが 1 位の極である．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

は $D=\{0<|z|<2\}$ で正則であるから，定理 6-3 より $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2(z-2)}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2(z-2)},0\right)$.

ローラン展開を求めると

$$f(z)=\frac{1}{-2z^2}\cdot\frac{1}{1-z/2}=\frac{1}{-2z^2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right)=-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{4z}+\cdots$$

であるから，$\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{z^2(z-2)},0\right)=-\dfrac{1}{4}$. よって求める積分は $2\pi i\cdot\dfrac{-1}{4}=-\dfrac{\pi i}{2}$

別解. じつは留数など知らなくても，特異点が「極」であればこの積分は計算できる．$g(z)=\dfrac{1}{z-2}$ とすると，これは C とその内部で正則となるから，グルサの公式より

$$g'(0)=\frac{1!}{2\pi i}\int_C\frac{g(z)}{z^2}\,dz \iff \int_C\frac{1}{z^2(z-2)}\,dz=2\pi i\cdot g'(0)=2\pi i\cdot\frac{-1}{4}=-\frac{\pi}{2}\cdot i .$$

例と積分への応用 3. 同じく $C=C(0,1)$ にたいし，$\displaystyle\int_C z^3e^{1/z}\,dz$ を計算しよう．特異点は明らかに $z=0$ のみである（真性特異点）．

$$z^3e^{1/z}=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z}+\cdots\right)=\cdots+\frac{1}{4!z}+\cdots$$

より，$\mathrm{Res}(z^3e^{1/z},0)=\dfrac{1}{24}$. よって求める積分は $\displaystyle\int_C z^3e^{1/z}\,dz=\frac{2\pi i}{24}=\frac{\pi i}{12}$.（真性特異点の場合，上の例のような「別解」は存在しない.）

留数定理

では次の例題を考えてみよう：

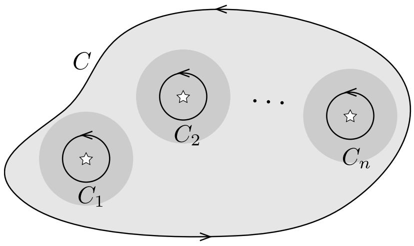
> **例題**. $C=C(0,3)$ にたいし，$I=\displaystyle\int_C\frac{1}{z^2(z-2)}\,dz$ を求めよ．

C の内部にはふたつの特異点 $z=0$ と 2 が含まれているので，定理 6-3 はそのままでは適用できない．そこで，次のように一般化したものを考える：

> **定理 6-4（留数定理）**. D を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域，f は D から互いに異なる n 点 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ を除いた領域で正則とする．また，C は D 内の単純閉曲線，であり，内部に $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ を含むものとする．
> このとき，
> $$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z),\alpha_k).$$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

証明．$r > 0$ を十分に小さく取り，$D_k := D(\alpha_k, r)$ とすれば，$D_1, \ldots, D_n$ はすべて C の内部に含まれ，互いに交わらないとしてよい．また，各 $D_k - \{\alpha_k\}$ 上では定理 5-3 のようなローラン展開をもつ．



各 D_k 内に円 $C_k := C(\alpha_k, r/2)$ をとれば,「積分定理」より

$$\int_C = \int_{C_1} + \cdots + \int_{C_n}$$

が成り立つ．定理 6-3 より $\displaystyle\int_{C_k} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \alpha_k)$ であるから，求める等式が得られた． ■

例題の解答．留数定理において $D = \mathbb{C}$，$C = C(0,3)$，$f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-2)}$ とおけば

$$\int_C \frac{1}{z^2(z-2)}\,dz = 2\pi i\{\operatorname{Res}(f(z),0) + \operatorname{Res}(f(z),2)\}.$$

先ほどの例で $\operatorname{Res}(f(z),0) = -1/4$ と計算できているから，$\operatorname{Res}(f(z),2)$ を求めよう．$w = z-2$ とおくと，

$$f(z) = \frac{1}{(w+2)^2 w} = \frac{1}{4w}\cdot\frac{1}{(1+w/2)^2} = \frac{1}{4w}\left(1 - \frac{w}{2} + \frac{w^2}{4} - \cdots\right)^2 = \frac{1}{4w} + \cdots$$

であるから，$\operatorname{Res}(f(z),2) = 1/4$．よって求める積分は

$$I = 2\pi i\{\operatorname{Res}(f(z),0) + \operatorname{Res}(f(z),2)\} = 2\pi i\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

■

レポート問題

締切りは 11 月 25 日（火）の講義開始時とします．

問題 8-1（留数定理）． 留数定理によって以下の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{1}{\sin z}\,dz$　(2) $\displaystyle\int_{C(0,3)} \frac{z}{(z-1)(z+2)}\,dz$　(3) $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)}\,dz$

(4) $\displaystyle\int_{C(1,2)} \frac{1}{z^2(z^2-4)}\,dz$　(5) $\displaystyle\int_{C(1,2)} \frac{e^z}{z^2(z^2-4)}\,dz$　(6) $\displaystyle\int_{C(i,1)} \frac{1}{z^4-1}\,dz$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

留数定理の実積分への応用

配布日：November 25, 2014　Version：1.1

前回 (11/18) のまとめと補足

留数定理による積分計算.　まずは留数定理を思い出しておこう：

定理 6-4（留数定理）. D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域，f は D から互いに異なる n 点 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ を除いた領域で 正則 とする．また，C は D 内の 単純閉曲線，であり，内部に $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ を含むものとする．このとき，

$$\int_C f(z)\,dz \ = \ 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), \alpha_k).$$

特異点 α における**留数** $\mathrm{Res}(f(z), \alpha)$ とは，α を中心とする穴あき円板でローラン展開したときの $(z-\alpha)^{-1}$ の係数のことであった．

この留数定理から，複素積分計算の最終形は次のようにまとめることができる：

積分計算の手順.　積分 $I = \displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を計算するには，

(i) $f(z)$ の特異点（極）で C の内部にあるもの $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を探す．

(ii) そこでの留数 $\mathrm{Res}(f(z), \alpha_k)$ をそれぞれ計算する．

(iii) $I = 2\pi i \ \times$ (留数の和) を計算する．

留数計算いろいろ.　一般に，(ii) のステップが一番面倒である．定義どおりローラン展開を頑張るのもありだが（慣れてくるとこれが一番早い），便利な公式を利用する手もある．具体例を通して比較してみよう．

例題. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ のとき，留数 $\mathrm{Res}(f(z), i)$ を求めよ．

留数の求め方，その１：ローラン展開を頑張る.　留数の定義から，実際にローラン展開をして，$(z-\alpha)^{-1}$ の係数を求めてみる．

$w = z - i$ とおくと，$z = w + i$ より，

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{i(w+i)}}{(w+i)^2+1} = \frac{e^{-1}e^{iw}}{2iw+w^2} = \frac{1}{2ei}\cdot\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{w}{2i}}\cdot e^{iw} \\ &= \frac{1}{2ei}\cdot\frac{1}{w}\cdot\left\{1+\left(-\frac{w}{2i}\right)+\left(-\frac{w}{2i}\right)^2+\cdots\right\}\cdot\left(1+iw+\frac{(iw)^2}{2!}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{2ei}\cdot\frac{1}{w} + (0\text{ 次以上の項}) \end{aligned}$$

と計算できる．よって $\mathrm{Res}(f(z), i) = 1/(2ei)$．

留数の求め方，その２：公式に頼る.　次のような便利な公式がある：

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

公式 7-1（留数の計算公式）． $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-\alpha)^k}$ $(k \geq 1)$，$g(z)$ は $z = \alpha$ のまわりで正則なとき，

$$\mathrm{Res}(f(z), \alpha) \;=\; \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(\alpha).$$

とくに $k = 1$ のとき，

$$\mathrm{Res}(f(z), \alpha) \;=\; g(\alpha).$$

α が k 位の極であれば，$g(\alpha) \neq 0$ となるように g と k を選ぶとよい．

証明． $r > 0$ を十分小さくとり $C = C(\alpha, r)$ とすれば，留数定理とグルサの公式より

$$\mathrm{Res}(f(z), \alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{(z-\alpha)^k}\,dz = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(\alpha).$$

■

この公式 7-1 を用いて例題の留数 $\mathrm{Res}(f(z), i)$ を計算してみよう．

まず $g(z) = \dfrac{e^{iz}}{z+i}$ とおくと，g は $z = i$ の周りで正則であるから公式 7-1 より $\mathrm{Res}(f(z), i) = g(i) = \dfrac{e^{-1}}{2i}$.

留数の求め方，その 2'：やはり公式に頼る． 次のような公式もある：

公式 7-2（留数の計算公式 2）． $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ とし，

- $g(z)$，$h(z)$ は $z = \alpha$ のまわりで正則であり，
- $g(\alpha) \neq 0,\ h(\alpha) = 0,\ h'(\alpha) \neq 0$

とする．このとき，

$$\mathrm{Res}(f(z), \alpha) \;=\; \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}.$$

$h(\alpha) = 0,\ h'(\alpha) \neq 0$ という条件は，α が方程式 $h(z) = 0$ の重解ではないことを意味する．また，この条件下で α は 1 位の極となる．

証明． いま，

$$\frac{(z-\alpha)g(z)}{h(z)} = \frac{z-\alpha}{h(z)-h(\alpha)} g(z) \to \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)} \quad (z \to \alpha)$$

が成り立つことに注意する．すなわち，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し，

$$|z-\alpha| < \delta \implies \left| \frac{(z-\alpha)g(z)}{h(z)} - \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)} \right| < \epsilon$$

が成り立つ．そこで $r < \delta$ を十分小さく選び，$C = C(\alpha, r)$ とおけば，

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{Res}(f(z), \alpha) - \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz - \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-\alpha}\,dz\right| \quad (\because \text{留数定理と基本公式 1})\\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{1}{z-\alpha}\left(\frac{(z-\alpha)g(z)}{h(z)} - \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}\right) dz\right|\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\epsilon}{r}\cdot \ell(C) = \epsilon. \quad (\because M\ell\text{不等式，ここで } \ell(C) = 2\pi r)\end{aligned}$$

ϵ は任意に小さくとれるので，求める公式を得る． ■

この公式 7-2 を用いて留数 $\mathrm{Res}(f(z), i)$ を計算してみよう．$\alpha = i$，$g(z) = e^{iz}$，$h(z) = z^2+1$ とおけば，$h'(z) = 2z$ より $g(\alpha) \neq 0,\ h(\alpha) = 0,\ h'(\alpha) \neq 0$ を満たす．よって $\mathrm{Res}(f(z), i) = \dfrac{g(i)}{h'(i)} = \dfrac{e^{-1}}{2i}$.

実積分への応用 1（三角関数の積分）.

まずは三角関数の積分に応用してみよう．[1]

例題. 次を示せ．

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Step 1. 一般に $z = e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ とおくと，z は単位円 $C = C(0,1)$ 上を左回りに動き，

$$\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dz = ie^{i\theta}d\theta \iff d\theta = \frac{dz}{i\,z}.$$

Step 2. もとの積分に代入すれば

$$I = \int_C \frac{1}{5 + 3 \cdot \dfrac{z+z^{-1}}{2}} \cdot \frac{dz}{i\,z} = \frac{2}{i}\int_C \frac{1}{3z^2+10z+3} dz$$

のように，有理関数の積分に書き直すことができる．

Step 3. 右辺の被積分関数を $f(z)$ とおくと，$f(z) = \dfrac{1}{3(z+1/3)(z+3)}$ より，単位円の中の極は $z = -1/3$ のみである．よって留数定理より

$$I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(f(z), -\frac{1}{3}\right).$$

ここで公式 7-1 を用いる．$\alpha = -1/3$，$g(z) = \dfrac{1}{3(z+3)}$，$k = 1$ とすれば，

$$\mathrm{Res}\left(f(z), -\frac{1}{3}\right) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8}.$$

よって $I = \dfrac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{2}$. ■

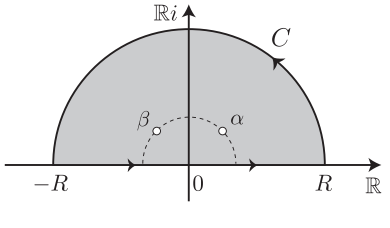
実積分への応用 2（有理関数の積分）.

次に有理関数の広義積分を計算してみる：[2]

例題. 次を示せ．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

右図のような経路 C および $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ にたいし，線積分 $\displaystyle\int_C = \int_C \frac{1}{1+z^4}dz$ 考える．C 内の特異点（すなわち方程式 $z^4+1=0$ の解）は $\alpha := e^{\pi i/4}$，$\beta := e^{3\pi i/4}$ なので，留数定理より



$$\int_C = 2\pi i \cdot \{\mathrm{Res}(f(z),\alpha) + \mathrm{Res}(f(z),\beta)\}.$$

[1] $t = \tan\theta/2$ とおくと有理関数の実積分に帰着されるので初等的に計算することもできる．
[2] これも有理関数なので部分分数展開をもちいれば原理的には不定積分を計算できる．*Mathematica* によれば，$\{-\log(x^2-\sqrt{2}x+1)+\log(x^2+\sqrt{2}x+1)-2\tan^{-1}(1-\sqrt{2}x)+2\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)\}/(4\sqrt{2})$

公式 7-2 で $g(z)=1,\ h(z)=z^4+1$ とおけば，

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4},\alpha\right) = \frac{1}{4\alpha^3} = -\frac{\alpha}{4} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}.$$

（ここで $\alpha^4=-1$ を用いた.）同様にして

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4},\beta\right) = \frac{1}{4\beta^3} = -\frac{\beta}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

よって

$$\int_C = 2\pi i\left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}}+\frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

さてこの積分から実積分 I の値を引き出そう．経路 C を次のように分割する：

$$\begin{aligned} J_R &:= \{z=x \mid -R\le x\le R\} \\ C_R &:= \left\{z=Re^{i\theta} \mid 0\le\theta\le\pi\right\} \\ C &= J_R + C_R. \end{aligned}$$

このとき，$\displaystyle\int_C = \int_{J_R}+\int_{C_R} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ より，$\underline{R\to\infty \text{ のとき } \displaystyle\int_{C_R}\to 0 \text{ であれば，}}$

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{J_R} = \lim_{R\to\infty}\left(\int_C - \int_{C_R}\right) = \int_C - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

を得る．

下線部を証明しよう．$|z|=R>1$ のとき，三角不等式より

$$|z^4+1| \ge |z|^4-1 = R^4-1>0$$

であるから，C_R 上 $|f(z)|\le \dfrac{1}{R^4-1}$ が成り立つ．したがって，

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{\ell(C_R)}{R^4-1} = \frac{\pi R}{R^4-1} \to 0 \quad (R\to\infty).$$

以上で $I=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ が示された． ■

実積分への応用３.

これまでの例は複素積分を用いなくても計算可能であるが，次の例は初等的な関数では表現できないと思われる[3]：

例題．次を示せ．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}.$$

[3]その分技巧的なので，解法を覚える必要は全くない．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

Step 1. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ とおき，応用 2 と同じ経路 C について線積分 $\displaystyle\int_C=\int_C f(z)\,dz$ 考える．すなわち，

$$C=C_R+J_R,\quad C_R:=\left\{z=Re^{it}\mid 0\le t\le\pi\right\},\quad J_R:=\{z=t\mid -R\le t\le R\}.$$

C 内の特異点（極）は $z=i$ のみなので，留数定理より

$$\int_C \;=\; 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f(z),i).$$

先の例題で何度も計算したように $\mathrm{Res}(f(z),i)=\dfrac{e^{i\cdot i}}{i+i}=\dfrac{e^{-1}}{2i}$ であるから，$\displaystyle\int_C=2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{2i}=\frac{\pi}{e}$.

Step 2. 次に応用 2 と同様に,「$R\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_{C_R}\to 0$」を示す．まず $|z|=R>1$ のとき，$|z^2+1|\ge|z|^2-1=R^2-1>0$ が成り立つ．さらに $z=x+yi\in C_R$ とおくと，$y\ge 0$ より

$$|e^{iz}| \;=\; |e^{i(x+yi)}| \;=\; e^{-y} \;\le\; 1.$$

よって C_R 上 $|f(z)| \;=\; \left|\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}\right|\le\dfrac{1}{R^2-1}$ が成り立つ．したがって，

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \;\le\; \frac{\ell(C_R)}{R^2-1} \;=\; \frac{\pi R}{R^2-1} \;\to\; 0 \;\;(R\to 0).$$

Step 3. いま $\displaystyle\int_{J_R}=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx=\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx+i\underline{\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{1+x^2}\,dx}$ だが，$\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ は奇関数なので下線部の積分は 0．ゆえに

$$I=\lim_{R\to\infty}\int_{J_R}=\lim_{R\to\infty}\left(\int_C-\int_{C_R}\right)=\int_C-\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}=\frac{\pi}{e}.$$

■

レポート問題

締切りは 12 月 1 日（火）の講義開始時とします.

問題 8-1（実積分への応用）.

(1) $\displaystyle I=\int_0^\infty\frac{1}{x^6+1}\,dx$ を求めよ．(HINT：応用 2 と同様.)

(2) $\displaystyle I=\int_0^\infty\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{4e}$ を示せ．(HINT：応用 3 と同じ積分路で $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{(z^2+1)^2}$ を考える.)

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

実積分への応用２・偏角の原理

配布日： December 2, 2014　Version：1.1

前回 (11/25) のまとめと補足

実積分への応用４.

次の積分を計算する：

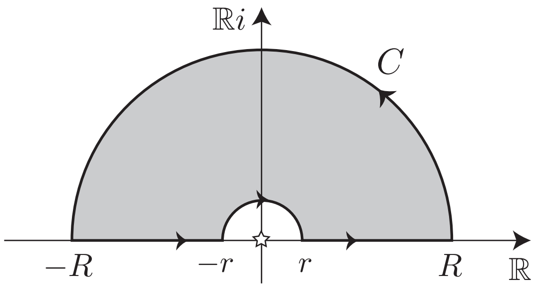
$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

注意.

- 被積分関数 $\sin x/x$ には $x=0$ を代入できないから，正しくは $I = \lim_{\substack{r\to+0 \\ R\to\infty}} \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$ という形の広義積分を考えていることになる．
- この積分は絶対収束しないが収束する広義積分の典型例．[1]

積分計算のスケッチ：（ア）． $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ とおき，次の積分路 C を考える：

$$\begin{aligned}
C &= C_1 + J_1 + C_2 + J_2 \\
C_1 &:= \left\{z = Re^{it} \mid 0 \le t \le \pi\right\} \\
J_1 &:= \{z = t \mid -R \le t \le -r\} \\
C_2 &:= \left\{z = re^{i(\pi - t)} \mid 0 \le t \le \pi\right\} \\
J_2 &:= \{z = t \mid r \le t \le R\}
\end{aligned}$$



ただし $r < R$ であり，あとで $r \to 0$, $R \to \infty$ とする．

いま $\mathrm{int}(C) \cup \mathbb{C}$ 内で f は正則であるから，積分定理より

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \iff \int_{C_1} + \int_{J_1} + \int_{C_2} + \int_{J_2} = 0 \iff \int_{J_1} + \int_{J_2} = -\left(\int_{C_1} + \int_{C_2}\right).$$

（イ）． ここで

$$\begin{aligned}
\int_{J_1} + \int_{J_2} &= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t}\,dt = \int_R^r \frac{e^{-ix}}{-x}(-\,dx) + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx \\
&= \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{ix}}{x}\,dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx.
\end{aligned}$$

よって

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i}\left(\int_{J_1} + \int_{J_2}\right) = \frac{i}{2}\left(\int_{C_1} + \int_{C_2}\right).$$

となる．よって，求めたい積分値は本質的に右辺の積分から得られるはずである．

[1] すなわち $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$.

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

（ウ）． $\left|\int_{C_1}\right| \to 0\ (R \to \infty)$ を示そう．

いま $C_1:\ z = Re^{it}\ (0 \le t \le \pi)$ より，$dz = iRe^{it}dt = iz\,dt \iff dz/z = idt$．よって

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_0^\pi e^{iRe^{it}} idt\right| \\ &= \left|\int_0^\pi e^{iR(\cos t + i\sin t)}dt\right| = \left|\int_0^\pi e^{-R\sin t}e^{iR\cos t}dt\right| \\ &\le_{(*)} \int_0^\pi e^{-R\sin t}dt \\ &\to 0.\ \ (R \to 0)\quad \text{：最後のここはレポート問題.}\end{aligned}$$

ここで $\le_{(*)}$ の部分について簡単に説明しておこう．積分 $\int_0^\pi e^{-R\sin t}e^{iR\cos t}dt$ は，時刻 t に速度ベクトル $e^{-R\sin t}e^{iR\cos t}$ をもつような動点が時刻 0 に原点から出発したときの時刻 π での位置にである．$e^{-R\sin t}$ は速度の大きさを決める要素であり，$e^{iR\cos t}$ は速度の方向を決める要素だが，原点からの距離を稼ぐには方向を変えずに進むのがよい．このとき，最大で $\int_0^\pi e^{-R\sin t}dt$ 進むことができるわけである．

（エ）． $\int_{C_2} = -\pi i\ (r \to 0)$ を示そう．そのために，次の補題を使う：

> **補題 8-1** $\alpha \in \mathbb{C}$ とし，関数 f はある穴あき円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-\alpha| < R\}$ で正則，かつ α は 1 位の極とする．このとき，半円形の積分路 $C_r := \left\{z = \alpha + re^{it} \mid 0 \le t \le \pi\right\}$ にたいし，次が成り立つ：
>
> $$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} f(z)\,dz \ = \ \pi i\,\mathrm{Res}(f(z), \alpha).$$

注意． 半円 C_r のかわりに $C = C(\alpha, r)$ を積分路にした場合（$r \to 0$ の極限をとるまでもなく）

$$\int_C f(z)\,dz \ = \ 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z), \alpha)$$

が成り立つ．このちょうど半分の値が半円 C_r 上の積分の $r \to 0$ とした極限として得られる，というのが補題の主張である．

証明（補題 8-1）． α を中心にローラン展開すれば，$f(z) = \dfrac{a_{-1}}{z-\alpha} + g(z)$（ただし $g(z)$ は $z = \alpha$ の周りで正則）の形になる．そこで積分

$$\int_{C_r} f(z)\,dz = \underline{\int_{C_r} \frac{a_{-1}}{z-\alpha}\,dz} + \underline{\underline{\int_{C_r} g(z)\,dz}}$$

を考えよう．

下線部は（r によらず）

$$\int_0^\pi \frac{a_{-1}}{re^{it}} ire^{it}\,dt = \pi i a_{-1} = \pi i\,\mathrm{Res}(f(z), \alpha)..$$

次に 2 重下線部を計算しよう．$g(z)$ は $z = \alpha$ の周りで連続なので，r が十分小さいとき C_r 上で $|g(z) - g(\alpha)| \le 1$ とできる．よって C_r 上 $|g(z)| \le |g(\alpha)| + 1$ が成り立つ．これより

$$\left|\underline{\underline{\int_{C_r} g(z)\,dz}}\right| = (|g(\alpha)| + 1)\,\ell(C_r) = (|g(\alpha)| + 1)\,\pi r \to 0. \quad (r \to +0)$$

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

■

この補題を $f(z)=e^{iz}/z$, $\alpha=0$ として適用しよう．0 でのローラン展開は

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\cdots\right)=\frac{1}{z}+(0\text{ 次以上の項})$$

なので，$\mathrm{Res}(f(z),0)=1$．ゆえに（$C_r=-C_2$ に注意せよ），

$$\lim_{r\to+0}\int_{C_2}f(z)\,dz=\lim_{r\to+0}\int_{-C_r}f(z)\,dz=-\pi i\,\mathrm{Res}(f(z),0)=-\pi i.$$

（オ）．（イ）（ウ）（エ）の結果を合わせると，$r\to+0$，$R\to\infty$ のとき

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\substack{r\to+0\\R\to\infty}}\frac{i}{2}\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}\right)=\frac{i}{2}\{0+(-\pi i)\}=\frac{\pi}{2}.$$

偏角の原理

有理型関数． D を $\mathbb{C}$ 内の領域とする．「D 上で正則な関数」の概念をすこしだけ拡張しよう．

定義（有理型関数）． 関数 f が D 上で**有理型** (meromorphic) であるとは，

- 点の集合 $P:=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\}\subset D$ が存在して，f は $D-P$ 上で正則；かつ
- 各 α_k はそれぞれ f の極（除去可能特異点でも真性特異点でもない）．

ことをいう．ただし $P=\emptyset$ の場合も許し，この場合 f は D 上で正則な関数である．

注意． ふたつ目の条件から，各 α_k は P の孤立点である．(そうでないと α_k のまわりでローラン展開できないから）すなわち P は D 内に集積点をもたない．また，ふたつ目の条件は $\lim_{z\to\alpha_k}|f(z)|=\infty$ と同値であることが知られている．

例． $f(z)=\dfrac{e^z}{z+z^2}$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数．実際，f は $P=\{0,-1\}$ のみで極をもち，$\mathbb{C}-P$ 上正則．

例． $f(z)=\dfrac{1}{\sin\pi z}$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数．実際，f は $P=\mathbb{Z}$ のみで（1 位の）極をもち，$\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ 上正則．

零点と極の位数． 関数 $f(z)$ にたいし，$f(\alpha)=0$ となる α を f の**零点** (れいてん，ゼロてん，zero) とよぶ．

いま，f が $z=\alpha$ を含む領域で有理型であると仮定しよう．

- α が零点のとき，ある自然数 k が存在してテイラー展開が

$$f(z)=a_k(z-\alpha)^k+a_{k+1}(z-\alpha)^{k+1}+\cdots$$

  の形で書ける．このとき，k を**零点 α の 位数** (order) とよぶ．

- α が極のとき，ある自然数 k が存在してテイラー展開が

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-\alpha)^k}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-\alpha}+c_0+a_1(z-\alpha)+\cdots$$

  の形で書ける．このとき，k を**極 α の位数** (order) とよぶ．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

α が零点のとき，位数 k は「方程式 $f(z)=0$ の解の重複度」に他ならない．α が極のときも，位数 k は（適切な定式化のもとで）「方程式 $f(z)=\infty$ の解の重複度」と解釈できる．[2]

例． $f(z)=\dfrac{z^3(z-2)}{(z^2+1)^2}$ のとき，零点は 0 と 2 で位数はそれぞれ 3 と 2．極は i と $-i$ で位数はともに 2．(本来はテイラー/ローラン展開して確認すべきだが，見かけで判断できてしまう．→レポート問題)

偏角の原理． 有理型関数に関しては，次が成り立つ：

> **定理 8-2（偏角の原理）．** D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域，C を D 内の 単純閉曲線 とする．関数 f は D 上の 有理型関数 であり，とくに C 上で零点も極ももたないと仮定する．このとき，
>
> $$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = (C\text{ の内部にある零点の数}) - (C\text{ の内部にある極の数}).$$
>
> ただし「C の内部の零点（極）の数」とは,「C の内部に含まれる零点（極）の位数の和」のことである．すなわち，重複度込みで零点（極）を数えたものである．

この定理には重要な応用がいくつかある．応用例と「偏角の原理」という名前の由来は次回に回すことにして，まずは計算例と証明を済ませておこう．

例． $f(z)=\dfrac{z^3(z-2)}{(z^2+1)^2}$ のとする．$C=C(0,3)$ のとき，$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=(3+1)-(2+2)=0.$
また，$C=C(0,3/2)$ のとき，$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=3-(2+2)=-1.$

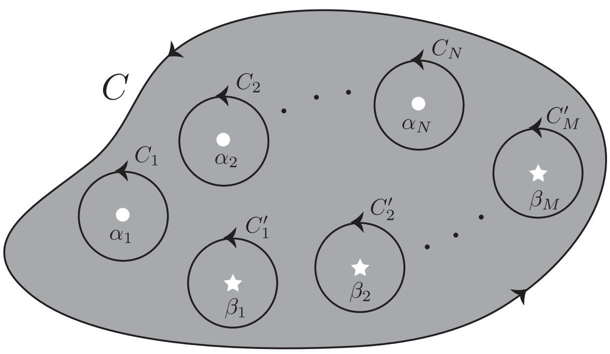
零点と極の有限性． まずは証明に利用する次の事実を確認しておこう：

> **命題 8-3．** 定理 8-1 の仮定のもと，$\mathrm{int}(C)$ 内に含まれる零点および極はそれぞれ有限個である．

証明． $E=\mathrm{int}(C)\cup C$ とおくと，これはコンパクト集合である．もし極が $\mathrm{int}(C)$ 内に無限個あれば，集積点が E 上に存在するはずである．そのような点は D に含まれるから（極・極でないに関わらず）その点中心の穴あき円板でローラン展開できるはずだが，それは極の集積点であることに矛盾する．

零点が $\mathrm{int}(C)$ 内に無限個あるときも同様に E 内に集積点をもつ．これは，あとで学ぶ「一致の定理」に矛盾する． ■

証明（偏角の原理）． 命題 8-3 より $\mathrm{int}(C)$ 内の零点を $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$，極を $\beta_1,\ldots,\beta_M$ とする．



[2]次回以降,「リーマン球面」を導入して正当化する．

ただし，これらの重複は許さず，互いに異なる点とする．さらに十分小さな $r>0$ を選んで固定し，

$$C_n := C(\alpha_n, r), \quad D_n := D(\alpha_n, r) \quad (1 \le n \le N)$$
$$C'_m := C(\beta_m, r), \quad D'_m := D(\beta_m, r) \quad (1 \le m \le M)$$

とおく．ただし r はこれらの円および開円板が互いに共通部分をもたず，すべて $\mathrm{int}(C)$ に含まれるようにとる（図）．

このとき，$f'(z)/f(z)$ は

$$\widetilde{D} := \mathrm{int}(C) - \bigcup_{n=1}^{N} D_n - \bigcup_{m=1}^{M} D'_m$$

の点上で正則である．[3]ゆえにコーシーの積分定理から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \;=\; \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz}_{(1)} \;+ \underbrace{\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_m} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.}_{(2)}$$

(1) の計算（零点の位数のカウント）． $n=1,\ldots,N$ にたいし，α_n は位数 k_n をもつとする．このとき D_n 上で正則な関数 $g=g_n$ で $g(\alpha_n)\neq 0$ を満たすものが存在し，

$$f(z) = (z-\alpha_n)^{k_n} g(z)$$

と表される.（f のテイラー展開から g のテイラー展開は具体的に決まる.）．よって

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_n(z-\alpha_n)^{k_n-1}g(z) + (z-\alpha_n)^{k_n}g'(z)}{(z-\alpha_n)^{k_n}g(z)} = \frac{k_n}{z-\alpha_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

ここで $g(\alpha_n)\neq 0$ と g の連続性より（必要なら r を十分小さく取り直して）D_n 上で $g(z)\neq 0$ と仮定してよい．よって $g'(z)/g(z)$ は $C_n \cup D_n$ 上正則である．したがって基本公式と積分定理より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{k_n}{z-\alpha_n}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = k_n + 0 = k_n.$$

ゆえに

$$(1) = \sum_{n=1}^{N} k_n = (C \text{ の内部に含まれる零点の位数の和}).$$

(2) の計算（極の位数のカウント）． (1) の計算とほぼ同様である．$m=1,\ldots,M$ にたいし，β_m は位数 l_m をもつとする．このとき D'_m 上で正則な関数 $h=h_m$ で $h(\beta_m)\neq 0$ を満たすものが存在し，

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-\beta_m)^{l_m}}$$

と表される.（今度は f のローラン展開から h のテイラー展開が具体的に決まる.）．よって

$$f'(z) = \frac{-l_m}{(z-\beta_m)^{l_m+1}}h(z) + \frac{1}{(z-\beta_m)^{l_m}}h'(z)$$

より

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-l_m}{z-\beta_m} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

ここで，(1) の g のときと同様にして，$h(\beta_m)\neq 0$ より $h'(z)/h(z)$ は $C'_m \cup D'_m$ 上正則と仮定してよい．よって基本公式と積分定理より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_m} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_m} \frac{l_m}{z-\beta_m}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_m} \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz = -l_m + 0 = -l_m.$$

ゆえに

$$(2) = \sum_{m=1}^{M} (-l_m) = -(C \text{ の内部に含まれる極の位数の和}).$$

■

[3]実際，$\widetilde{D}$ 上で f は正則，よって f' も正則．また，$\widetilde{D}$ 上で f は零点をもたないので，$1/f$ も $\widetilde{D}$ 上正則．よって f' と $1/f$ の積 は $\widetilde{D}$ 上正則．地味な議論の積み重ねだが，数学は正確さが命．このような議論は綿密に行う習慣をつけよう．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

レポート問題

締切りは 12 月 16 日（火）の講義開始時とします.

問題 9-1（応用 4 の詰め）

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}dt$ を示せ.

(2) $t \in [0, \pi/2]$ のとき $\sin t \geq 2t/\pi$ であることを用いて，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}dt \to 0 \quad (R \to 0)$ を示せ.

問題 9-2（位数）． $f(z) = \dfrac{z^3(z-2)}{(z^2+1)^2}$ のとき，零点は 0 と 2 で位数はそれぞれ 3 と 2．極は i と $-i$ で位数はともに 2 であることを実際にテイラー展開・ローラン展開を求めて確認せよ.

問題 9-3（偏角の原理）． 積分 $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{2z+a}{z^2+az+b}\,dz$ がちょうど $2\pi i$ となるような実数 (a, b) の範囲を求め，図示せよ.（Hint. α が実数係数の方程式の解であれば，$\overline{\alpha}$ も解.）

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ルーシェの定理・一致の定理 1

配布日：December 16, 2014　Version：1.1

前回 (12/2) のまとめと補足

復習：有理型関数.　D を $\mathbb{C}$ 内の領域とする．関数 f が D 上で**有理型** (meromorphic) であるとは，

- 点の集合 $P := \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\} \subset D$ が存在して，f は $D - P$ 上で正則；かつ
- 各 α_k はそれぞれ f の極（除去可能特異点でも真性特異点でもない）.

ことをいう．ただし $P = \emptyset$ の場合も許し，この場合 f は D 上で正則な関数である．

復習：偏角の原理.　有理型関数に関して，次が成り立つ：

> **定理 8-2（偏角の原理）.** D を $\mathbb{C}$ 内の 単連結領域，C を D 内の 単純閉曲線 とする．関数 f は D 上の 有理型関数 であり，とくに C 上で零点も極ももたないと仮定する．このとき，
>
> $$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = (C \text{ の内部にある零点の数}) - (C \text{ の内部にある極の数}).$$

名前の由来.　定理 8.2 がなぜ「偏角の原理」と呼ばれるか，その由来を解説しよう．簡単にいえば，

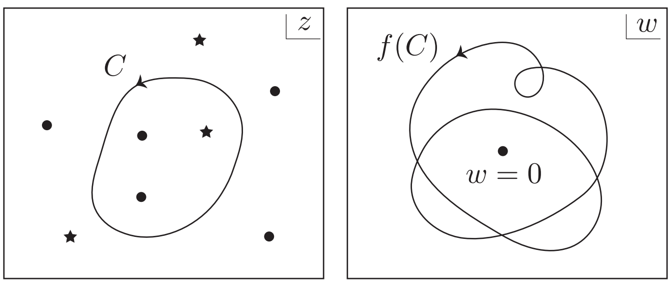
『左辺の積分は $w = f(z)$ が $f(C)$ 上を移動したときの偏角 $\arg w$ の積分になっている』

からで，それが右辺のような「位数の数え上げ」を与えるのが定理の面白いところだといえる．

さて $w = f(z)$ とおいたとき，$dw = f'(z)dz$ より[1]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f(C)} \frac{1}{w}\,dw$$

をえる．じつは右辺の積分は，「w 平面で閉曲線 $f(C)$ が $w = 0$ を（実質）何回まわるか」を計算していることを確認しよう．



いま C 上に f の零点も極もないので，$f(C)$ は $\mathbb{C} - \{0\}$ に含まれる閉曲線である．よって任意の $w \in f(C)$ は $w = e^{x+yi}$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$ と書き表すことができる．より正確には，$f(C)$: $w(t) = e^{x(t)+i\,y(t)}$ $(0 \le t \le 1)$ とパラメーター表示できる．ただし，$x(t)$，$y(t)$ は t の連続関数となる

[1] このような複素線積分の変数変換は初めてやるので，一瞬「いいのかな…」と思うかもしれない．心配であれば，C : $z = z(t)$，$f(C)$: $w = f(z(t))$ とパラメーター表示して t の積分に変換してから両辺を比べればよい．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ように選んでおく．（じつはここが重要なポイント．さらに C^1 関数と仮定しておく．）このとき，$\arg w(t) = y(t)$ が成り立つことに注意しておこう．

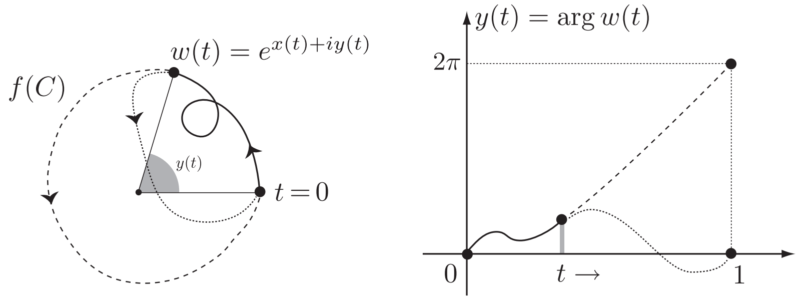
さて適当に t と微小時間変化 Δt を固定し $\Delta x := x(t+\Delta t) - x(t)$，$\Delta y := y(t+\Delta t) - y(t)$，とすれば，

$$w(t+\Delta t) = e^{x(t+\Delta t)+i\,y(t+\Delta t)} = e^{(x(t)+i\,y(t))+\Delta x+i\,\Delta y} = w(t)\cdot \underline{e^{\Delta x}}\cdot e^{i\,\Delta y}$$

下線部は正の値であるから，両辺の偏角を比べると

$$\arg w(t+\Delta t) = \arg w(t) + \Delta y$$

が成り立つのである．



さて $w = e^{x+yi}$ の全微分を考えると（正確には「dt で割って」微分係数の関係式だと思えばよい）

$$dw = e^{x+iy}dx + e^{x+iy}i\,dy \iff \frac{dw}{w} = dx + i\,dy$$

であるから，もとの積分は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f(C)} \frac{1}{w}\,dw = \underline{\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} dx}_{(1)} + \underline{\frac{1}{2\pi}\int_{C'} dy}_{(2)}$$

となる．ただし C' は $w(t) = e^{x(t)+i\,y(t)} \in f(C)$ に対応する $x(t) + i\,y(t) \in \mathbb{C}$ が描く曲線である．（こちらは閉曲線とは限らない．）(1) の下線部の積分は 0 になる．なぜなら，偏角の原理から左辺の積分は整数（実数）となるので，下線部が 0 にならないとつじつまがあわないからである．偏角の原理を仮定しない理由付けもできる：$\displaystyle\int_{C'} dx = \int_0^1 x'(t)\,dt = x(1) - x(0)$ となるが，C' に対応する $f(C)$ は閉曲線なので $w(0) = w(1)$．この絶対値をとれば $e^{x(1)} = e^{x(0)} \iff x(1) = x(0)$ が成り立つ．(2) の下線部も (1) と同様に，$\displaystyle\int_{C'} dy = \int_0^1 y'(t)\,dt = y(1) - y(0)$ が成り立つから，$e^{i\,y(1)} = e^{i\,y(0)}$ より一般に $y(1) = y(0) + 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ が成り立つ．ここで現れる $2m\pi$ は $w(t)$ が $f(C)$ 上を動くときの偏角 $y(t) = \arg w(t)$ の実質的な変化量だといえる．[2]（上の図は $m = 1$（破線）になる場合と $m = 0$ （点線）になる場合の $y(t)$ のグラフ．）

以上をまとめると，偏角の原理の積分は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f(C)} \frac{1}{w}\,dw = m \quad : \ w = 0 \text{ のまわりを } f(C) \text{ が回った回数}$$

となる．

[2] $y = \arg w$ より，形式的に $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{C'} dy = \frac{1}{2\pi}\int_{f(C)} d\arg w$ と表現されることもある．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ルーシェ（Rouché）の定理. 偏角の原理の応用としてもっとも有名（有用）なものが次の定理である：

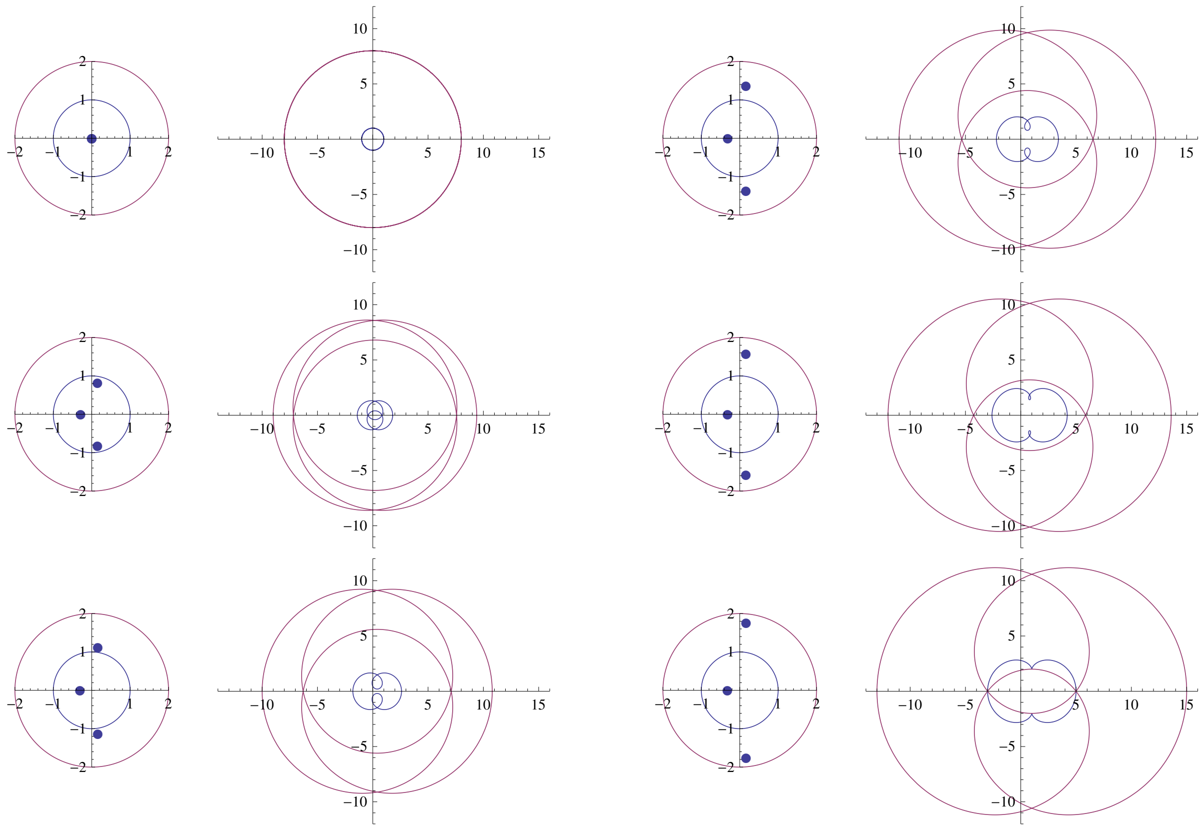
> **定理 9-1（ルーシェの定理）.** D を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域，C を D 内の単純閉曲線，$f,\ g: D \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．C 上で $|f(z)| > |g(z)|$ ならば，次が成り立つ：
>
> $$(C \text{ の内部の } f(z)+g(z) \text{ の零点の数}) = (C \text{ の内部の } f(z) \text{ の零点の数})$$

標語的にいうと,『f に C 上で「f より小さい g」（$|f| > |g|$）を加えても，内部の零点の数は変化しない』ということである．

具体例. 方程式 $z^3+3z+1=0$ の解の個数を考えよう．$f(z)=z^3$，$g(z)=3z+1$ とする．$|z|=2$ のとき，$|f(z)|=8$，$|g(z)|=|3z+1| \le 3|z|+1=7$．よって $C=C(0,2)$ についてルーシェの定理を適用できて,「$|z|<2$ を満たす $f(z)+g(z)$ の零点の数」は「$|z|<2$ を満たす $f(z)$ の零点の数」と同じである．$f(z)=z^3$ の零点は 3 位の零点 $z=0$ のみであるから,「$|z|<2$ を満たす方程式 $z^3+3z+1=0$ の解の数」は（重複度込みで）3 だとわかる．$z^3+3z+1=0$ は 3 次方程式だから，解の全てが開円板 $D(0,2)$ 内にあることがわかった．

もっと具体例. $|z|=1$ のとき，$|g(z)|=|3z+1| \ge 3|z|-1=2$．$|f(z)|=1$．よって $C=C(0,1)$ についてルーシェの定理を適用すると,「$|z|<1$ を満たす $g(z)+f(z)$ の零点の数」は「$|z|<1$ を満たす $g(z)$ の零点の数」と同じである．$g(z)=3z+1$ の零点は 1 位の零点 $z=-1/3$ のみであるから,「$|z|<1$ を満たす方程式 $z^3+3z+1=0$ の解の数」は 1 だとわかる．

もし $|z|=1$ を満たす零点があれば $f(z)+g(z)=0$ より $|f(z)|=|g(z)|$ である．しかし $|g(z)|>|f(z)|$ なので $|z|=1$ 上に零点はない．よって残りの 2 つの解は $1<|z|<2$ で表される円環領域内にあることもわかった．



担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

上の図は $w = h_t(z) := f(z) + tg(z)$ $(0 \le t \le 1)$ の「零点の位置（z 平面）」「半径 1 の円と半径 2 の円の h_t による像（w 平面）」のペアの図を描いたものである．左側 3 段は $t = 0, 0.2, 0.4$，右側 3 段は $t = 0.6, 0.8, 1.0$ に対応する．

さらなる具体例． 方程式 $z^{100} - 5z^3 + 1 = 0$ は単位円板内にいくつ解をもつだろうか?$f(z) = -5z^3$, $g(z) = z^{100} + 1$ とおくと，$|z| = 1$ のとき $|f(z)| = 5$，$|g(z)| \le |z^{100}| + 1 = 2$ より求める解の個数は「単位円板内の $f(z) = 0$ の零点の個数」と同じである．よって 3 個.（残りの 97 個の解は一体どこにあるのか，それはレポート問題としよう.）

証明（ルーシェの定理）． $z \in C$ としよう．このとき $|f(z)| > |g(z)| \ge 0$ より，C 上に $f(z)$ の零点はないことに注意しよう．そこで $f(z) + g(z) = f(z)\left(1 + \dfrac{g(z)}{f(z)}\right)$ と変形し， $h(z) = 1 + \dfrac{g(z)}{f(z)}$ とおく．偏角の原理より，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\{f(z)h(z)\}'}{f(z)h(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

を示せばよい．さらに

$$\text{左辺} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{h'(z)'}{h(z)}\right) dz = \text{右辺} + \underline{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz}$$

であるから，下線部が 0 になることを示そう．

$w = h(z)$ $(z \in C)$ とおいてみると，

$$|w - 1| = |h(z) - 1| = \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$$

であるから，曲線 C の h による像 $h(C)$ は w 平面の $w = 1$ 中心半径 1 の開円板内に含まれる．その上で関数 $w \mapsto 1/w$ は正則であるから，コーシーの積分定理より[3]

$$\underline{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz} = \frac{1}{2\pi i}\int_{h(C)} \frac{1}{w}\,dw = 0.$$

■

フルビッツ (Hurwicz) の定理． ルーシェの定理の系として，次の定理を得る：

> **系 9-2（フルビッツの定理）** D を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域，C を D 内の単純閉曲線，$f : D \to \mathbb{C}$ を C 上に零点をもたない正則関数とする．いま，正則関数の列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ が D 上で $f : D \to \mathbb{C}$ に広義一様収束するとき，十分大きな n について
>
> $$(C \text{ の内部の } f_n(z) \text{ の零点の数}) = (C \text{ の内部の } f(z) \text{ の零点の数}).$$

証明． C 上 $f(z) \ne 0$ より，ある $M > 0$ が存在して C 上 $|f(z)| > M$ が成り立つ．$f_n(z) = f(z) + g_n(z)$ とおくと，仮定より $g_n(z)$ は D 上広義一様に定数関数 0 に収束する．よって n が十分大きいとき，C 上では $|f(z)| > M > |g_n(z)|$ が成り立つ．よってルーシェの定理が適用できる． ■

注意． 実関数の場合，零点の個数は一様収束によって保存されな．すなわち，フルビッツの定理は正則関数のもつ特殊な性質である．

[3] ここで，すこしごまかしている部分がある．われわれの積分定理は単純閉曲線にのみ適用可能な形で述べていた．しかし $h(C)$ は一般に閉曲線だが単純閉曲線とは限らない．そのような場合，適当に積分路を分割することで単純閉曲線の和にできるから，そのあとで積分定理を適用すればよい．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

一致の定理

二人の人物がじつは同一人物であることを確認するには，どのくらいの情報（データ，たとえば身長，座高，体重など）が必要だろうか?

「人物」を「関数」に置き換えて，次のような問題を考えてみよう．

問題 (a) 与えられた関数 $f(z)$ と $g(z)$ が「異なる関数」であることを示すには?

問題 (b) 与えられた関数 $f(z)$ と $g(z)$ が「同じ関数」であることを示すには?

問題 (a) のほうは $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ となる α をひとつでも見つければよい．一方，問題 (b) のほうは「すべての」 α で $f(\alpha) = g(\alpha)$ を確認しないといけないので，一般には難しい．

ところが，正則関数の世界では意外と簡単に「同じ」であることが確認できるのである．

多項式版の一致の定理． ウォーミングアップとして，「ふたつの多項式がじつは同じ多項式」であるための条件を考えてみよう．

定理 9-3（多項式の一致の定理）． $f(z)$，$g(z)$ を n 次多項式とする．ある互いに異なる $n+1$ 個の点 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ が存在して $f(\alpha_k) = g(\alpha_k)$ $(k = 1, \ldots, n+1)$ が成り立つとき，じつは全ての $z \in \mathbb{C}$ で $f(z) = g(z)$ が成り立つ．

したがってふたつの多項式が一致するかを確認するには，（次数＋ 1）個の点での値を「測定」すればよいことになる．

証明． $h(z) := f(z) - g(z)$ とおくと，これは n 次以下の多項式である．$h(\alpha_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n+1)$ より，因数定理を繰り返し用いることで

$$h(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{n+1}) Q(z)$$

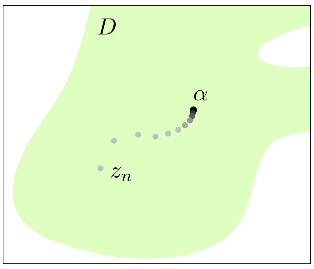
（ただし $Q(z)$ は多項式）の形で書ける．$Q(z)$ 以外の部分は $n+1$ 次式になっているから，両辺で次数のつじつまがあうためには $Q(z) = 0$ （定数関数）しかありえない． ■

正則関数の一致の定理． では，「ふたつの正則関数がじつは同じ関数」であるための条件はなんだろうか?一般の正則関数は（局所的に）テイラー展開で表現できる．テイラー展開は無限次数の多項式のお化けのようなものだから，すくなくとも無限個の点で値を確認しないといけないだろう．

定理 9-4（一致の定理，Identity Theorem）．

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$，$g(z)$ にたいし，ある $\alpha \in D$ と点列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset D - \{\alpha\}$ が存在し，

- $z_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$
- $f(z_n) = g(z_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$



が成り立つとき，じつは全ての $z \in D$ で $f(z) = g(z)$ が成り立つ．

証明は次回に行う．

応用． ある「C^∞ 級関数」$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + yi \mapsto f(x + yi)$ が

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = e^x$$

を満たすと仮定する．このとき，f の具体的な形としては

$$f(x+yi) = e^{x+2yi}, \quad f(x+yi) = e^x(1+yi), \quad f(x+yi) = e^x \cos y, \quad \cdots$$

などなど，さまざまな候補が考えられる．しかし「f は正則関数」と仮定すると，これらの候補はすべて落選して

$$f(x+yi)=e^{x+yi} \quad \text{すなわち} \quad f(z)=e^z$$

だけに決まってしまうのである．(たとえば $g(z)=e^z$, $z_n=1/n\in\mathbb{R}$, $\alpha=0$ として一致の定理を用いればよい.) したがって,「実指数関数の正則関数への拡張はひとつしかない」ことがわかる．やはり正則関数は特殊なのである．

注意. 一致の定理から，ある D 内の円板，線分，曲線上など，収束点列が取れる集合上で f と g が一致していれば,

- 一致している場所（円板，線分，曲線など）がどんなに小さくとも
- もとの領域 D がどんなに大きくても，たとえ無限の彼方まで広がる $\mathbb{C}$ であっても

f と g は D 全体で一致する．[4]

ヘンな例?. $f(z)=\sin\dfrac{\pi}{z}$, $g(z)=0$（定数関数）とおくとき，$f(1/n)=g(1/n)$, $1/n\to 0\ (n\to 0)$ であるが，$f(z)$ は明らかに定数関数 $g(z)$ と一致しない．なぜか?

レポート問題

締切りは 1 月 13 日（火）の講義開始時とします.

問題 10-1（ルーシェの定理）.

(1) 方程式 $z^3-4z^2+1=0$ は円板 $D(0,1/3)$ 内に解を持たないことを示せ．また，単位円板 $D(0,1)$ 内には（重複度込みで）いくつの解をもつか?

(2) 複素数 a, b が $|a|+|b|<1$ を満たすとき，2 次方程式 $z^2+az+b=0$ の解はすべて単位円 $D(0,1)$ 内に含まれることを示せ.

問題 10-2（ルーシェの定理） $z^{100}-5z^3+1=0$ の単位円板内の解は 3 個であった．残りの 97 個の解は $1\le|z|<1.02$ を満たすことを示せ．ただし，必要であれば $\log_{10}1.02=0.0086$, $\log_{10}7=0.845$ として計算せよ．

[4] 生物には細胞ひとつひとつに遺伝子が仕込まれていて，個体全体を決定する情報が記述されている．一致の定理はそれを彷彿とさせる定理である．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

一致の定理 2・最大値原理

配布日：January 13, 2015　Version : 1.1

前回 (12/16) のまとめと補足

「一致の定理」と，その応用として「最大値原理」を証明する．いずれも正則関数特有の著しい性質である．

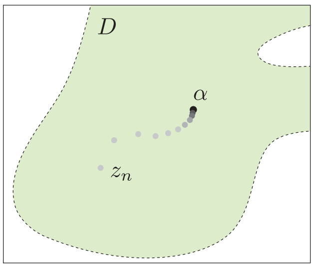
一致の定理の証明.

一致の定理（定理 9-4, Identity Theorem）.

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$, $g(z)$ に対し，ある $\alpha \in D$ と点列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset D - \{\alpha\}$ が存在し，

- $z_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$
- $f(z_n) = g(z_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$

であるとき，じつはすべての $z \in D$ で $f(z) = g(z)$ が成り立つ．



まず，次の補題を示す：

補題 10-1. もしある $\alpha \in D$ が存在してすべての $n = 0, 1, 2, \cdots$ について $f^{(n)}(\alpha) = 0$ であれば，D 上で $f(z) \equiv 0$.

以後は便宜的に，集合 E の任意の元 z について $f(z) = 0$ であるとき，「E 上 $f \equiv 0$」と表すことにする．[1]

補題 10-1 の証明：**（ア）** $\beta \in D$ を任意にとる．さらに D 内で α と β を結ぶ有限折れ線

$$C: \ z = z(t), \ (0 \le t \le 1); \quad z(0) = \alpha, \ z(1) = \beta$$

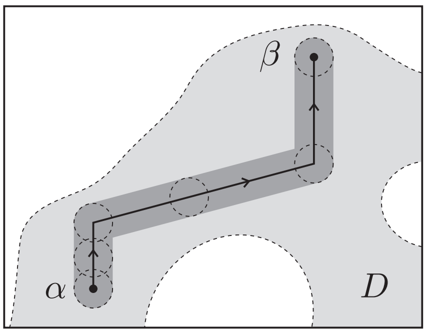
を取る.（すなわち，折れ線の曲がり角の数は有限個．領域＝連結開集合の定義よりそのような折れ線が存在する.）

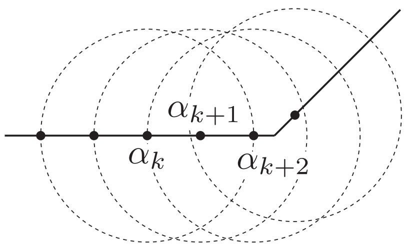
このとき，ある $R > 0$ が存在し，任意の $t \in [0, 1]$ に対し $D(z(t), R) \subset D$ とできる.（理由を考えよ.）

（イ） $\alpha_0 := \alpha$ とおくと，$D(\alpha_0, R)$ 上 f は正則であるから，この開円板上でテイラー展開ができて

$$\forall z \in D(\alpha_0, R_0), \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha_0)}{n!}(z - \alpha_0)^n$$

が成り立つ．よって $\alpha_0 = \alpha$ および $f^{(n)}(\alpha) = 0$ より，$D(\alpha_0, R_0)$ 上 $f \equiv 0$ でなくてはならない．





[1] 日本語では「E 上で恒等的に 0」と言ったりする．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

（ウ） いま，$k \geq 0$ に対し開円板 $D(\alpha_k,\ R)$ 上で $f \equiv 0$ が成り立つと仮定する．このとき，α_{k+1} を α_k から折れ線 C の進行方向（α から β に進む向き）に長さ $R/2$ 分進んだ点とする．

このとき $\alpha_{k+1} \in D(\alpha_k,\ R)$ なので，任意の $n \geq 0$ に対し $f^{(n)}(\alpha_{k+1}) = 0$．よって開円板 $D(\alpha_{k+1}, R)$ 上のテイラー展開は

$$\forall z \in D(\alpha_{k+1}, R),\quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha_{k+1})}{n!}(z - \alpha_{k+1})^n = 0.$$

よって $D(\alpha_{k+1},\ R)$ 上でも $f \equiv 0$.

（エ） C の長さは有限なので,（ウ）を繰り返せばある $N \in \mathbb{N}$ が存在し $\beta \in D(\alpha_N, R)$ となる．このとき $f(\beta) = 0$ となる．β は任意なので補題の主張を得る． ■(補題 10-1)

一致の定理の証明. 「多項式の一致の定理」のときと同様に $h(z) = f(z) - g(z)$ を考えて，

『$n \to \infty$ のとき $z_n \to \alpha$, $(\forall n \in \mathbb{N})\ f(z_n) = 0 \implies (\forall z \in D)\ \ f(z) = 0$』

を示せばよい.

f は D 上正則なので，連続である．よって

$$f(\alpha) = f(\lim_{n\to\infty} z_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0.$$

ここで,「D 上 $f \equiv 0$ でない」と仮定しよう．補題 10-1 の対偶を用いると，ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し，$f^{(k)}(\alpha) \neq 0$ となる．そのような k で最小のものをとれば，α のまわりでのテイラー展開から

$$f(z) = (z - \alpha)^k g(z)$$

(ただし $g(z)$ は α の周りで正則，$g(\alpha) \neq 0$）と表される．ここで $z = z_n$ を代入すると，$z_n \neq \alpha$ より

$$0 = f(z_n) = (z_n - \alpha)^k g(z_n) \iff g(z_n) = 0$$

を得る．したがって $g(z)$ の連続性から

$$g(\alpha) = g(\lim_{n\to\infty} z_n) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = 0.$$

これは $g(\alpha) \neq 0$ に矛盾する．

よって仮定は否定されて，D 上 $f \equiv 0$ が示された． ■

応用. 一致の定理から，次の基本的な系がわかる（じつは以前，偏角の原理の証明に用いた.）:

> **系（零点は孤立）.** $f : D \to \mathbb{C}$ を定数でない正則関数とする．このとき，D 内の f の零点の集合
>
> $$Z := \{z \in D \mid f(\alpha) = 0)\}$$
>
> は <u>D 内に</u> 集積点をもたない.

下線部についての注意. D の境界には集積点を持つことがある．たとえば，$f(z) = \sin(1/z)$, $D = \mathbb{C} - \{0\}$ のとき集合 Z は原点を集積点にもつ.

証明. Z が D 内に集積点をもつならば，一致の定理より D 上 $f \equiv 0$．これは仮定に反する． ■

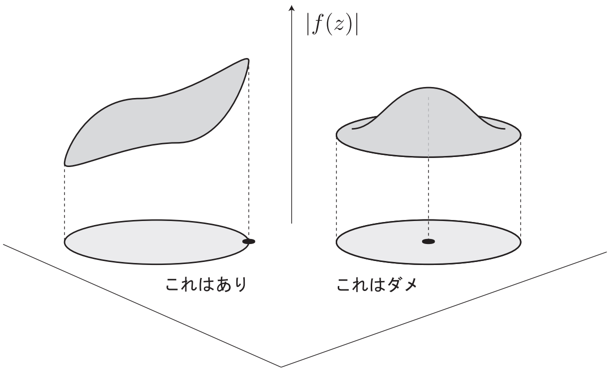
最大値原理.

次の定理は非常に強力で，応用も多い：

> **定理 10-3(最大値原理，Maximum Principle).** $f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．ある $\alpha \in D$ が存在し，
>
> $$(\forall z \in D),\quad |f(\alpha)| \geq |f(z)|$$
>
> であれば，f は D 上で定数関数となる.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

「最大値原理」は「最大絶対値の原理（Maximum Modulus Principle）」とも呼ばれる．証明はあとまわしにして，さきに重要な系を紹介しよう：



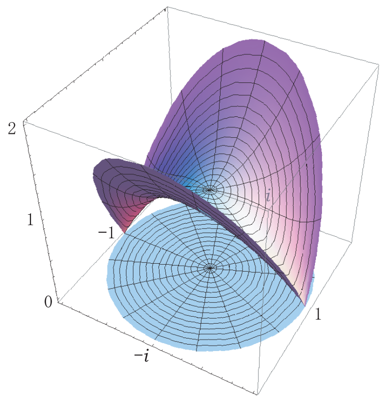
系 10-4（境界で最大）． $f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．任意のコンパクト集合 $E \subset D$ に対し，その上での関数 $z \mapsto |f(z)|$ の最大値は境界 ∂E で実現される．すなわちある $\alpha \in \partial E$ が存在し，

$$(\forall z \in E),\quad |f(\alpha)| \ge |f(z)|.$$

例． 関数 $f(z) = 1 - z^2$ を考え，$E = \overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ としてみよう．ここでは（三角不等式より）

$$|f(z)| \le |1| + |-z^2| \le 2$$

であるから，等号成立条件を精査すると $z = \pm i$ のときに限って最大値 $|f(z)| = 2$ が成り立つことがわかる．$\pm i \in \partial E$ であるから，これは最大値原理とその系の主張に合致する．



つぎに，この関数 $f(z) = 1 - z^2$ を実数に制限して，$x \in (-1,1)$ で考えてみよう．この場合 $0 < f(x) \le f(0) = 2$ であるから,（絶対値の）最大値は区間 $(-1,1)$ の内部にある $x = 0$ で実現される．しかし $f(x)$ は定数でないから，最大値原理の主張は実関数の世界では成立しない．

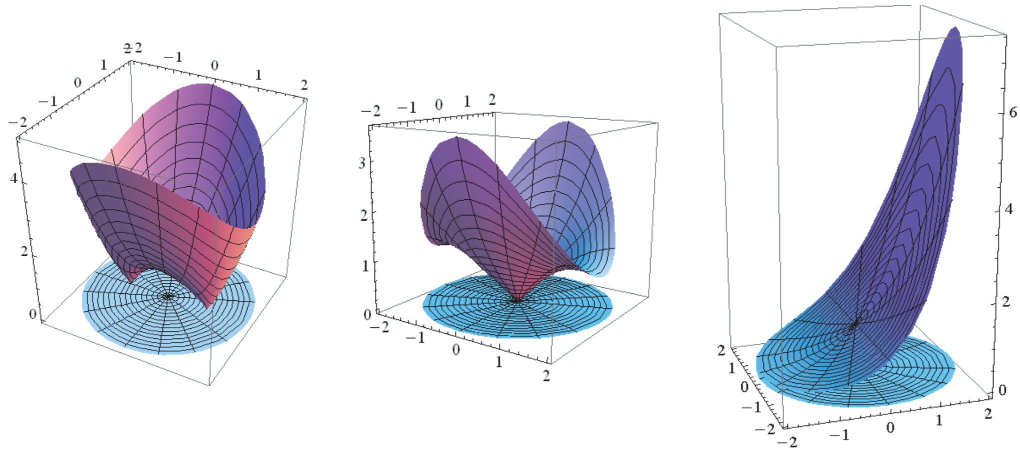
正則でない例． 今度は $f(z) = \dfrac{z}{z\bar{z} + 1}$ とする．このとき

$$|f(z)| = \frac{|z|}{|z|^2 + 1} \le \frac{1}{2}$$

であり（たとえば相加・相乗平均の不等式からわかる），等号は $|z| = 1$ のときに限り成立する．すなわち $\mathbb{C}$ 上で f の最大絶対値は単位円周上でのみ実現される．（最大値原理から，f は正則でないことが結論される．）

その他の例． 左から順に $1 - z^2$, $\sin z$, e^z の絶対値を半径 2 の円板上でグラフ化したもの：

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp



応用．最大値原理を用いると，代数学の基本定理が証明できる（レポート）．

定理 10-3（最大値原理）の証明．いまそのような $\alpha \in D$ に対して，十分に小さな $r > 0$ をとれば，$C = C(\alpha, r)$ およびその内部 $\mathrm{int}(C)$ は D の内部に含まれるとしてよい．

$z \in C$ では $\left|\dfrac{f(z)}{z-\alpha}\right| = \dfrac{|f(z)|}{r} \le \dfrac{|f(\alpha)|}{r}$ であるから，積分公式より

$$|f(\alpha)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{|f(\alpha)|}{r}\cdot \ell(C) = |f(\alpha)|$$

が得られる．したがってここで現れる不等号はすべて等号であり，とくに C 上で $|f(z)| = |f(\alpha)|$ が成り立つ．

この結果は C の半径 r に依存しないから，各 $r' < r$ で同様の議論をすることで $\mathrm{int}(C)$ 上 $|f(z)| = |f(\alpha)|$ が成立することがわかる．絶対値が一定の正則関数は定数関数に限るので（→レポート問題）,[2]，$\mathrm{int}(C)$ 上 f は定数関数（$f(z) = f(\alpha)$）である．一致の定理より，f は D 上で定数関数でなくてはならない．■

系 10-4 の証明．関数 $z \mapsto |f(z)|$ は D 上連続なので，コンパクト集合 $E \subset D$ 上で必ず最大値をもつ．ここで，E の内点の集合を E° と表す.（このとき $E = E^\circ \cup \partial E$，$E^\circ \cap \partial E = \emptyset$ であることに注意.）

いま，$\alpha \in E^\circ$ が存在し $|f(\alpha)|$ が最大であったと仮定しよう（そうでなければ ∂E 上で最大値を取るので証明終わり.）．このとき E° の α を含む連結成分を D' とおけば，最大値原理が使えて f は D' 上で定数関数（$f(z) = f(\alpha)$）となることがわかる．よって一致の定理より，f は D 全体で定数関数でなくてはならない．当然 ∂E 上でも同じ定数であり，最大絶対値が実現されている．■

応用．最大値原理のもっともすばらしい応用例として，次の「シュワルツの補題」がある．[3] 以下，$\mathbb{D} = D(0,1)$ を単位円板とする．

> **シュワルツの補題**．$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が正則かつ $f(0) = 0$ であれば，$|f(z)| \le |z|$ かつ $|f'(0)| \le 1$ を満たす．等号を満たす $z \in \mathbb{D}$ が存在するのはは，いずれも関数が $f(z) = e^{i\theta}z$ $(\theta \in \mathbb{R})$ の形であるときに限る．

関数 f に対する仮定が極めて少ないことに注意しよう．原点を固定する単位円板から単位円板への正則写像であれば，1 次多項式でも 100 次多項式でも何でもよいのである．にもかかわらず，たとえば原点の微分係数に関する厳しい条件 $|f'(0)| \le 1$ が導かれる．なぜ，$|f'(0)| > 1$ であってはいけないのだろう？と，考えずにはいられない．

そして何よりも，この補題の証明がすばらしい．

[2] これはコーシー・リーマンを用いる問題の典型例．ヒント：$f(x+yi) = u + vi$ とおくと，$|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ は定数．これを偏微分して $2uu_x + 2vv_x = 2uu_y + 2vv_y = 0$．これとコーシー・リーマンより $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ を得る．

[3] この補題は，複素解析や複素多様体論，複素力学系理論の随所に現れて，さらりと重要な役割をこなしていく．

証明. 正則性より，原点でテイラー展開すると $f(z) = az + O(z^2)$ $(a = f'(0) \in \mathbb{C})$ の形となる．したがって，関数 $g(z) = f(z)/z = a + O(z)$ も正則関数である．いま $|z| \le r < 1$ とすると，最大値原理（の系 9-2）からある z_0 で $|z_0| = r$ となるものが存在して，$|g(z)| \le |g(z_0)| = |f(z_0)|/|z_0| \le 1/r$．$r < 1$ は任意であったから，1 に近づけた極限を取ることで任意の $z \in \mathbb{D}$ について $|g(z)| \le 1$ を得る．

次に等号成立に関する主張を示そう．もし $|f(z_0)| = |z_0|$ をみたす $z_0 \in \mathbb{D}$ が存在したとすると，$|g(z_0)| = 1$ が成立する．また，もし $|f'(0)| = 1$ であれば，$g(0) = f'(0)$ より，$|g(0)| = 1$ が成立することになる．いずれの場合も，最大値原理より $g(z)$ は定数関数である．とくに，その絶対値は 1 であるから，$g(z) = f(z)/z = e^{i\theta}$ の形となる． ■

レポート問題

締切りは 1 月 20 日（火）の講義開始時とします.

問題 11-1（最大値原理の応用） 代数学の基本定理を最大値原理を用いて証明しよう．$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ とする．

(1) R が十分に大きいとき，$|z| \ge R$ ならば $|f(z)| \ge R^n/2$ が成り立つことを示せ．(Hint: $|f(z)| \ge |z^n|\left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|\right)$)

(2) $f(z)$ に零点が存在しないと仮定する．$g(z) = 1/f(z)$ とおくとき，$\mathbb{C}$ 全体で $|g(z)| \le 2/R^n$ が成り立つことを（最大値原理を用いて）説明せよ．

R は (1) が成り立つ程度に大きい限り任意であるから，$|g(z)| = 0$ （定数）でなくてはならない．矛盾． ■

問題 11-2（逆関数の存在） 「$z = \alpha$ を含む領域で定義された正則関数 f が $f'(\alpha) \ne 0$ を満たすとき，ある十分小さな半径 $r > 0$ が存在し，$f(z)$ は $D(\alpha, r)$ 上単射」であることを示そう．

(1) 複素数 A, B が $|A - B| \le |B|/10$ を満たすとき，$\frac{9}{10}|B| \le |A| \le \frac{11}{10}|B|$ を示せ．

(2) 必要なら関数 $z \mapsto f(z)/f'(\alpha)$ を考えることで，最初から $f'(\alpha) = 1$ であると仮定してよい．このとき，ある半径 $r > 0$ が存在し，$f(z)$ は $D(\alpha, r)$ 上 $|f'(z) - 1| \le 1/10$ とできる．その理由を簡潔に述べよ．

(3) 円板 $D(\alpha, r)$ 内の任意の 2 点 z, w に対し，

$$|\{f(z) - f(w)\} - (z - w)| \le \frac{1}{10}|z - w|$$

を示せ．(Hint. $f'(z) - 1$ を z と w を結ぶ線分で積分し，$M\ell$ 不等式.)

(4) (1) と (3) の結果を組み合わせて，関数 $f(z)$ が $D(\alpha, r)$ 上単射であることを示せ．

注意（逆関数定理へ）. $f|_{D(\alpha,r)}$ の単射性より，逆関数 $g := (f|_{D(\alpha,r)})^{-1}$ が定義される．(4) で (1) と (3) の結果を組み合わせて得られる不等式より g は連続である．また，$z_k = g(\zeta_k)$ $(k = 1, 2)$ とすれば，$\zeta_2 \to \zeta_1$ のとき $z_2 \to z_1$ であり，

$$\frac{g(\zeta_1) - g(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} = \frac{z_1 - z_2}{f(z_1) - f(z_2)} \to \frac{1}{f'(z_1)}.$$

よって g の正則性も得られる．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

解析接続とリーマン面

配布日：January 20, 2015 Version：1.1

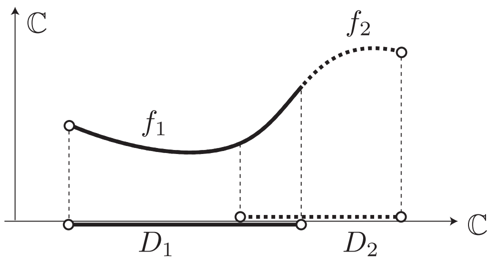
前回 (1/13) のまとめと補足

解析接続

まず，次のような問題を考えてみよう：

> **問題**．ある領域上の正則関数が与えられたとき，正則性を保ったまま どこまで定義域を拡張できるか？

例 1． 関数 $f_1(z) = 1 + z + z^2 + \cdots$ は $D_1 = D(0,1)$ 上で正則である．一方，$f_2(z) = \dfrac{1}{1-z}$ は $D_2 = \mathbb{C} - \{1\}$ 上で正則．$D_1 \cap D_2 = D_1$ 上で $f_1 = f_2$ であるから，D_1 上の正則関数 f_1 は D_2 まで正則に拡張できる[1]．



> **定義（解析接続）** D_1, D_2 を複素平面内の領域とし，$f_1 : D_1 \to \mathbb{C}$，$f_2 : D_2 \to \mathbb{C}$ をそれぞれ正則関数とする．さらに $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ かつその上で $f_1 = f_2$ が成り立つとき，f_2 は f_1 の**解析接続** (analytic continuation) である」という．

注意． 「f_1 は f_2 に解析接続される」ともいう．また，この定義は f_1 と f_2 に関して対称である．すなわち f_1 は f_2 の解析接続でもある．

「解析（的）」を「正則」に,「接続」を「拡張」と読み替えて,「正則拡張 (holomorphic extension)」とよんだ方が，本講義の文脈にはあっている．

例（リーマンのゼータ）． $s = \sigma + it$ $(\sigma, t \in \mathbb{R})$ とし，

$$\zeta_1(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

(ただし $n^s := e^{s \log n}$，$\log n > 0$）と定義する．この ζ_1 の右辺は $D_1 := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s = \sigma > 1\}$ 上で広義一様収束することがわかるので，(各 n について $s \mapsto e^{s \log n}$ が正則であることから) $\zeta_1 : D_1 \to \mathbb{C}$ は正則関数である．

この ζ_1 は次の性質を持つ正則関数 $\zeta : \mathbb{C} - \{1\} \to \mathbb{C}$ に解析接続されることが知られている：[2]

- $s = 1$ は ζ の 1 位の極．よって ζ は $\mathbb{C}$ 上の有理形関数．
- $\forall n \in \mathbb{N}$，$\zeta(-2n) = 0$．

---

[1] $z = 1$ は f_2 の極なので，$f_2(1)$ としてどんな複素数を割り当てても $\mathbb{C}$ 上の正則関数には拡張できない．

[2]「正の実軸を囲む」適当な積分路 C をとるとき，$\zeta(s) = -\dfrac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\,dz$ と表される．ただし Γ は複素ガンマ関数，$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}$，$|\mathrm{Im}\,\log(-z)| < \pi$ とする．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

このような ζ を**リーマンのゼータ関数** (Riemann's zeta function) とよぶ.

次の予想は懸賞金 100 万ドルがかけられた「ミレニアム問題」のひとつである：

リーマン予想 (The Riemann Hypothesis).

$$\zeta(\alpha) = 0 \implies \alpha = -2n \ (n \in \mathbb{N}) \text{ もしくは } \mathrm{Re}\,\alpha = 1/2.$$

解析接続と一意性

解析接続がもつ最も重要な性質を確認しておこう[3].

命題 11-1（解析接続の一意性） 正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が共通の定義域をもつ正則関数 $g_1 : D' \to \mathbb{C}$ および $g_2 : D' \to \mathbb{C}$ に解析接続されるとき，$g_1 = g_2$ が成り立つ.

すなわち，解析接続の結果は定義域に沿って一意的に決まってしまう．いつ，誰が，どのような方法で解析接続しても，確実に同じ結果が得られるのである[4].

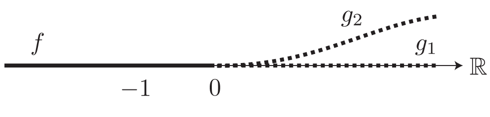
証明. 仮定より $D \cap D'$ 上では $g_1 = f = g_2$ が成り立つ．よって「一致の定理」より，D' 上でも $g_1 = g_2$ が成り立つ. ■

注意（C^∞ 級関数の場合との比較）． 「解析接続の一意性」がいかに特殊かを理解するために，滑らか（無限回微分可能）な実 1 変数関数と比較してみよう.

次ような関数たちのグラフを考える.

$$f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0$$
$$g_1 : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad g_1(x) = 0$$
$$g_2 : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g_2(x) = 0 & (x \le 0) \\ g_2(x) = e^{-1/x} & (x > 0). \end{cases}$$

これらはすべて，定義域上で滑らかな関数である．定数関数 f を数直線全体に拡張したい場合，f のグラフを g_1 に「接続」するのがもっとも自然であろう．しかし，グラフを g_2 に「接続」しても，滑らかな関数であることは保たれている.「滑らかな関数」の範疇では，こうした不自然ともいえる「つぎはぎ」も拡張として許されるのである[5].



一方，正則関数（すなわち無限回複素微分可能な複素関数）ではそのような「つぎはぎ」が一切許されない．解析接続の結果は人為的な操作で変えられず，正則関数のあらゆる断片から，パズルのように唯一の完成形へと組みあがるのである.

解析接続の多価性

正則関数の「多価性」. 解析接続によって生じる「多価性」について大雑把に説明しよう.

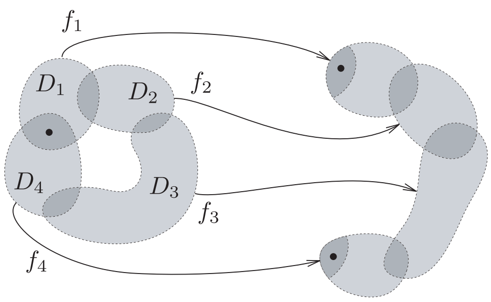
[3]「一意接続の原理」ともよばれる.

[4]「接続」というと私たちが行う人為的な操作のように感じられるが，そうではない.「解析接続」というのは，私たちの存在とは無関係に,「天然」の数学的原理に従ってつながるべきところに勝手につながるのである.

[5] しかも，g_2 が $e^{-1/x}$ に変わるタイミングを，好きなだけ右にずらせるので,「つぎはぎ」の方法は無数に存在する.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

次の図のように D_1 から D_4 までの領域が与えられていて，D_1 上の正則関数 $f_1 : D_1 \to \mathbb{C}$ が正則関数 $f_2 : D_2 \to \mathbb{C}$，$f_3 : D_3 \to \mathbb{C}$，$f_4 : D_4 \to \mathbb{C}$ へと順に解析接続されたとしよう．



このとき，各 D_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ の像 $f_k(D_k)$ がどのような形になるかは，最初の f_1 を選んだ時点で決まっている（解析接続の一意性，命題 11-1）．素朴に考えると，f_1 の定義域は順調に拡大し，正則関数

$$f_1 : D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \to \mathbb{C}$$

が得られそうなものである．

ところが厄介なことに，像 $f_k(D_k)$ たちが図の右側のようになる場合がある．f_1 から f_2 へ，f_2 から f_3 へという解析接続では，着実に正則関数 f_1 の定義域が拡張される．しかし f_3 から f_4 に至るとき，おかしなことが起きてしまう．z が D_1 と D_4 の共通部分にあるとき，

$$f_1(z) \neq f_4(z)$$

だからである．f_1 の定義域を拡張していたつもりが，矛盾めいた結論に到達してしまった．

逆に $f_4 : D_4 \to \mathbb{C}$ からスタートして，f_3，f_2，f_1 の順で解析接続しても同様の結論に達するだろう．点 $z \in D_1 \cap D_4$ に対し，ふたつの関数の値 $f_1(z)$ と $f_4(z)$ は対等に意味があって，互いに解析接続によって関係しあっている．どちらかを選ぼう，と考えるのはある意味不自然であろう．これが「多価性」の問題である．

具体例（平方根の多価性）． 「多価性」をもつ解析接続の中で，いちばんシンプルな具体例を紹介しよう．

まず準備として，複素数 z に対し平方根 $\sqrt{z}$ とは何か考えてみよう．たとえば 1 の平方根は ± 1 のふたつであり，-1 の平方根は $\pm i$ のふたつである．

一般に与えられた複素数 z に対し，z の平方根は「2 乗して z となる数 w」だといえる．それは未知数 w に関する方程式

$$(**) \qquad w^2 = z$$

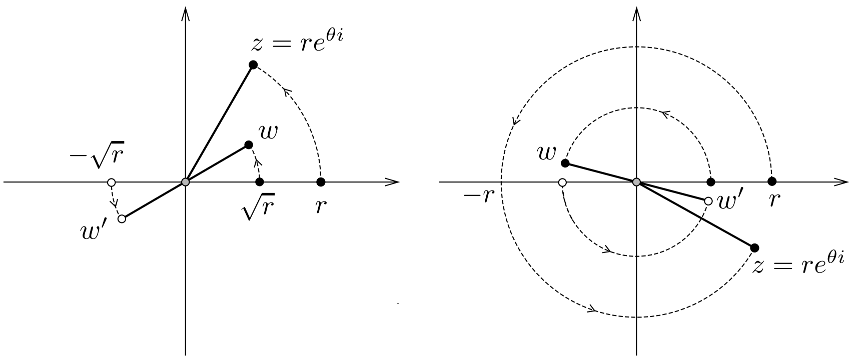
の解であるから，「代数学の基本定理」より，つねに重複を込めてふたつ存在することになる．

実際に方程式を解いてみよう．

$z = 0$ のとき，その解は $w = 0$ ひとつ（重解）しかない．$z \neq 0$ のとき，$z = re^{\theta i}$，$w = Re^{ti}$ と極表示して $(**)$ に代入すると，

$$(Re^{ti})^2 = re^{\theta i} \iff R^2 e^{2ti} = re^{\theta i}.$$

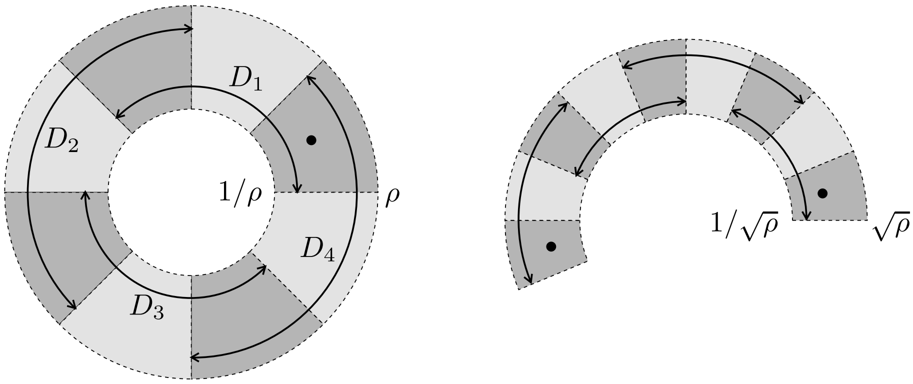
右の等式の絶対値と e の指数部分を比較すると，$R = \sqrt{r}$，$t = \theta/2$ として得られる $w = \sqrt{r}e^{\theta i/2}$ は方程式 $(**)$ の解だとわかる．このとき $w' = -\sqrt{r}e^{\theta i/2}$ も明らかに解であるから，$w \neq w'$ より方程式のふたつの異なる解が得られた（次の図）．



「平方根」の解析接続. まず定数 $\rho > 1$ を固定し，$k = 1, 2, 3, 4$ に対し

$$D_k = \left\{ z = re^{\theta i} \;\middle|\; \frac{1}{\rho} < r < \rho,\ \frac{(k-1)\pi}{2} < \theta < \frac{(2k+1)\pi}{4} \right\}$$

を考える（下図の左）.



また，各 $k = 1, 2, 3, 4$ に対し関数 $f_k : D_k \to \mathbb{C}$ を

$$f_k(re^{\theta i}) := \sqrt{r}e^{\theta i/2}$$

（ただし $(k-1)\pi/2 < \theta < (2k+1)\pi/4$）で定める．上の考察から $z \in D_k$ に対し $f_k(z)$ は z の平方根のひとつである.（このページ上段の図でいうと，w，すなわち○ではなく●で表されるほうに対応する.）また，k に依存するのは定義域のみで，関数の式としては同じであるから，$k = 1, 2, 3$ のとき $D_k \cap D_{k+1}$ 上で $f_k = f_{k+1}$ は成り立っている．あとで確認するように f_k はちゃんと正則関数になっているので（命題 11-2），f_1 は f_2, f_3, f_4 の順で解析接続されることがわかった.

さらに各 $k = 1, 2, 3, 4$ に対し，集合 $f_k(D_k)$ は

$$f(D_k) = \left\{ w = Re^{ti} \;\middle|\; \frac{1}{\rho} < R < \rho,\ \frac{(k-1)\pi}{2} < t < \frac{(2k+1)\pi}{4} \right\}$$

を満たす $w = Re^{ti}$ からなる領域であり，図示するとこのページ下段の図の右側のようになる．とくに $z \in D_1 \cap D_4$ のとき，

$$f_1(z) \neq f_4(z) = -f_1(z)$$

が成立するのである.

解析接続になっていることの確認. 最後に「関数 $f_k(z)$ が正則関数になっていること」を確認しよう.

命題 11-2. $f_k : D \to \mathbb{C}$ は正則.

証明. 明らかに f_k は D_k と $f_k(D_k)$ の間の同相写像になっているので[6]，f_k が正則であること（各点で複素微分可能であること）を示せばよい.

$w = f_k(z)$ $(z \in D_k)$ とすると，$w^2 = z$ が成り立つ．$z = F(w)$ とおくと，$w \neq 0$ のとき $F'(w) = 2w \neq 0$ であるから，次に述べる「逆関数定理」により，$w \neq 0$ のまわりで F の局所的な逆関数が存在し．正則である（ただし，下の定理では z と w の役割が入れ替わっている.）．その逆関数は f_k に他ならない． ■

定理 11-3（(局所）逆関数定理）. 関数 $w = F(z)$ は $z = \alpha$ を含む領域上で正則であり，$F'(\alpha) \neq 0$ を満たすと仮定する．このときある十分小さな $r > 0$ が存在し，関数

$$F|\ D(\alpha, r) \to F(D(\alpha, r))$$

は（正則な）同相写像であり，逆関数 $G := (F|_{D(\alpha,r)})^{-1}$ も正則である．また，$z = G(w)$ は次の関係式をみたす：

$$\frac{dg}{dw} \cdot \frac{df}{dz} = 1.$$

証明方法はいろいろある．たとえば前回のレポート問題を参照.

平方根のリーマン面

「関数」とは，何か？ 19 世紀の半ば，ドイツの数学者ディリクレは「関数 (function) とは，定義域上のおのおのの数に，ある数をひとつずつ対応させるものである」と定義した.

平方根の場合はどうだろうか？与えられた複素数 z に対し，$w = \sqrt{z}$ という「関数」を考えたいとしよう．ディリクレの流儀にのっとれば，z に対し $w^2 = z$ を満たす w を「ひとつだけ」対応させなくてはならない．しかし，現実には $z = re^{i\theta}$ に対し $w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ と $w' = -\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ は「z の平方根」として対等の権利をもっていて，どちらかがエライ，というわけではない.

多価性をどう受け入れるか？ 問題の本質は,「天然」の方程式（関係式）$w^2 = z$ を，人工的な概念である「関数」という形で解釈しようとしたことにある.

妥協案はふたつある.

(1) ひとつの複素数 $z = re^{i\theta}$ に，ふたつ（複数）の複素数 $w = \pm\sqrt{r}e^{\theta i/2}$ を同時に対応させる.

(2) ふたつの複素数 $w = \pm\sqrt{r}e^{\theta i/2}$ にそれぞれ対応できるよう，$z = re^{i\theta}$ のコピー z' を定義域に加える.

(1) のように,「定義域上のおのおのの数に，ひとつ以上の数を対応させるもの」を**多価関数**とよぶ．従前の，すなわちディリクレ流の「関数」概念（こちらは**一価関数**とよばれる）を拡張しよう，というわけである.

(2) のほうはちょっとややこしい．定義域のほうを関数の多価性に応じて増やしておくことで，あくまでもディリクレの流儀を守ろう，というのである．これこそが，リーマン[7]の柔軟かつ大胆な発想であった.

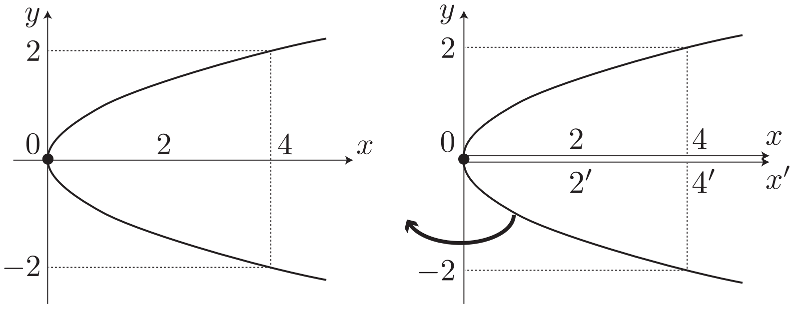
[6] $f_k : D_k \to f_k(D_k)$ は連続，$f_k^{-1} : Re^{it} \mapsto 2Re^{2it}$ も自然に定まりこちらも連続.
[7] ドイツの数学者，ディリクレの弟子であった.

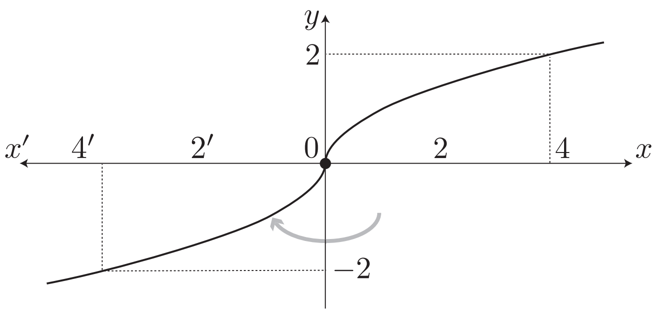
担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

リーマン面のアイディア

(2) のアイディアを明確にするために，実数の例を考えてみよう．以下，x と y は実数とする．

ふつう，方程式 $y^2 = x$ を x の「関数」として理解したい場合，$y = \pm\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ というふたつの式に分割して考えるだろう（図，上段左）．たとえば $x = 4$ に対して，$y = -2$ と $y = 2$ のふたつの値が得られる．このとき，どちらかを選ぶということはせず，その両方を「値」として平等に認めるのが「多価関数」の考え方である．(ただし $x = 0$ では例外的に $y = 0$ のみが対応する.)



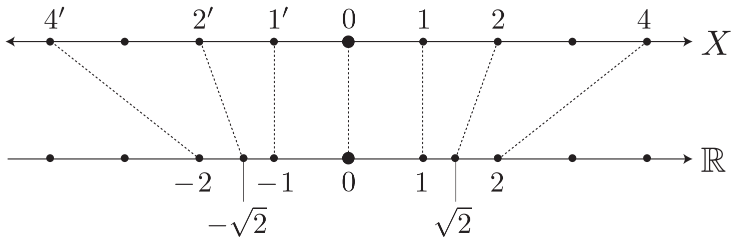


しかし，あえてディリクレ流の「関数」の考えに固執してみよう．リーマンのアイディアはこうである．x 軸の正の部分のコピーをとり（これを x' 軸とする)，(直前の図，上段右）のようにダブらせる．もとの x 軸の上には $y = \sqrt{x}$ のグラフがあり，新しい x' 軸の下には $y = -\sqrt{x'}$ のグラフがある．x' 軸をパタンと左側に折り返せば,「ふつうの関数」風のグラフが得られるではないか.

別の見方をしてみよう．x 軸の正の部分は数直線上の区間 $I = (0, \infty)$ とみなせる．x' 軸はそのコピー $I' = (0, \infty)'$ である．これと数 0 の形式的な和集合

$$X = I' \cup \{0\} \cup I$$

を考えよう．この集合 X に属する各々の「点」には，次の図のように実数がひとつずつ対応する．すなわち集合 X 上の（多価ではなく，一価の）「関数」が得られた．方程式 $y^2 = x$ は，新しい集合 X を定義域とするディリクレ流の「関数」へと翻訳されたのである．



担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

多価関数 $w = \sqrt{z}$ のリーマン面

実 1 次元版での議論を踏まえて，多価関数 $w = \sqrt{z}$ （すなわち方程式 $w^2 = z$）が「一価関数」と思えるような集合を新しく構成したい．

まず $z = 0$ のとき，方程式は重解 $w = 0$ をもつので，この点は特別扱いして除外しておこう．

次に実 1 次元版の $I = (0, \infty)$ に対応するものとして，複素平面 $\mathbb{C}$ から $z = 0$ を除いた「穴あき z-平面」$D := \mathbb{C} - \{0\}$ を考える．D 上の点は極表示が可能だから，偏角が動く範囲をあらかじめ指定して

$$D = \left\{ z = re^{\theta i} \mid 0 < r,\ 0 \le \theta < 2\pi \right\}$$

とパラメーター表示しておこう．

複素数 $z = re^{\theta i}$ がこの D に属するとき，方程式 $w^2 = z$ を満たす w は $w = \sqrt{r}e^{\theta i/2}$ と $w' = -\sqrt{r}e^{\theta i/2}$ のふたつである．そこで，実 1 次元版の $I' = (0, \infty)'$ に対応するものとして D のコピー D' を作成し，

- D 上の $z = re^{\theta i}$ には $w = \sqrt{r}e^{\theta i/2}$ を，
- D' 上の $z' = re^{\theta i}$ には $w' = -\sqrt{r}e^{\theta i/2}$ を

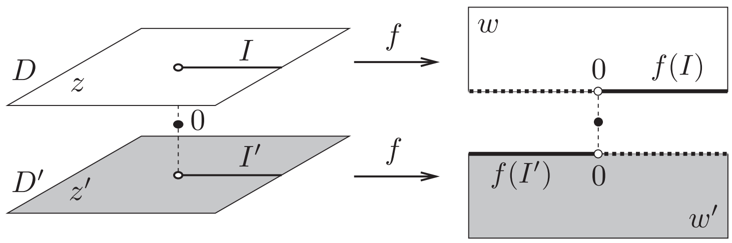
それぞれ対応させよう．さらに，特別扱いした 0 にはやはり 0 を対応付けることで，形式的な和集合

$$D \cup \{0\} \cup D'$$

の各点には複素数がひとつずつ対応する．この対応を f で表せば，平方根の方程式 $w^2 = z$ から一価関数

$$f : D \cup \{0\} \cup D' \to \mathbb{C}$$

が定まったことになる．

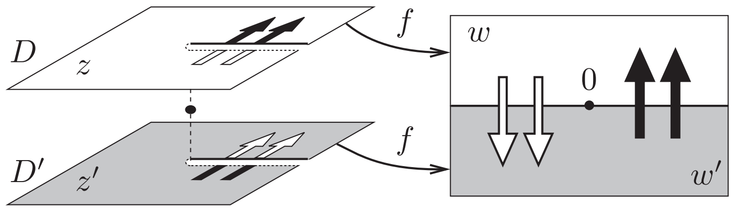


「切り貼り」によるアレンジ． 関数 f が「連続」になるように，集合 $D \cup \{0\} \cup D'$ の形をアレンジしてみよう．まず D と D' に $I = (0, \infty)$ と $I' = (0, \infty)'$ に沿った切れ目をいれて（次の図，左），上下の縁（ふち）を互い違いに貼り合わせる．いや，最初からそのようにつながっていたのだ，と考えるのである．さらに，中央の穴に 0 を埋め込んでおく．こうして得られる集合を，便宜的に括弧つきで $[D \cup \{0\} \cup D']$ と表そう．もとの形式的な和集合 $D \cup \{0\} \cup D'$ と比べると，点たちの配置（つながり具合）を変えただけで，「なにも足さない，なにも引かない」操作である．したがって関数 $f : D \cup \{0\} \cup D' \to \mathbb{C}$ は，最初から関数

$$f : [D \cup \{0\} \cup D'] \to \mathbb{C}$$

であった，と考えてよい．このとき，少なくとも直感的には，f が一価かつ連続な複素関数であることは認められると思う．さらに f が特別な点 $\{0\}$ 以外で正則な関数とみなせることも，前回平方根を解析接続したときの議論と同様にして確認できるだろう[8]．

[8]部分部分は複素平面の断片であり，そこにある複素数によって関数の連続性や微分可能性が意味をもつのである．



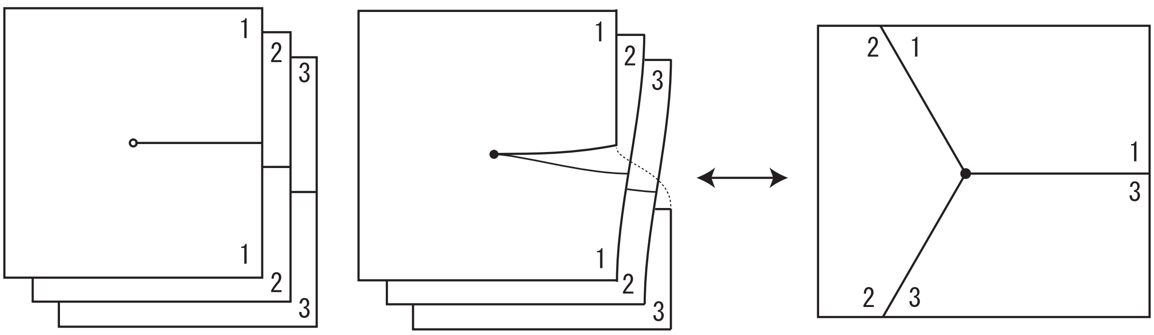
以上のようにして構成される集合 $Z := [D \cup \{0\} \cup D']$ が，多価関数 $w = \sqrt{z}$ の，あるいは方程式 $w^2 = z$ の**リーマン面**とよばれるものである．

この例の場合，関数 $f : Z \to \mathbb{C}$ はリーマン面 Z と $\mathbb{C}$ の間に過不足のない対応（全単射）を与えている．したがって，集合 Z は複素平面 $\mathbb{C}$ によって大域的にパラメーター表示される．さらに，f は $\{0\}$ 以外の部分で正則な関数であるから,「一致の定理」や「最大値原理」といった複素関数論の諸定理が意味を持つのではないか，と期待される．

ちなみに，点 $\{0\}$（方程式が重解をもつところ）においては，特別な工夫なしに f を正則と解釈することができない．これは**分岐点**とよばれる特異点の一種で，リーマン面の構造を豊かにする重要な構成要素である．

その他の典型的なリーマン面

$w = z^{1/n}$ のリーマン面． 多価関数 $w = z^{1/n}$ は z にたいして $z = w^n =: f(w)$ を満たす（重複度込みで）n 個の w を対応させるものである.（ただし重複は $z = 0$ のときのみ．このリーマン面は平方根のリーマン面と同じアイディアで構成できる．すなわち，n 個の w と 1 対 1 対応できるように n 枚の z 平面のコピーを準備し，正の実軸で切れ目を入れた後，互い違いに貼り合わせていき，原点は n 個のコピーをまとめて 1 点として留め合わせる．



$w = \log z$ のリーマン面． 多価関数 $w = \log z$ は $z \neq 0$ にたいして $z = e^w =: f(w)$ を満たす可算無限個の w を対応させるものである．可算無限個の w に 1 対 1 対応するには，可算無限個の z 平面（から原点を除いたもの）のコピーが必要となる．また，

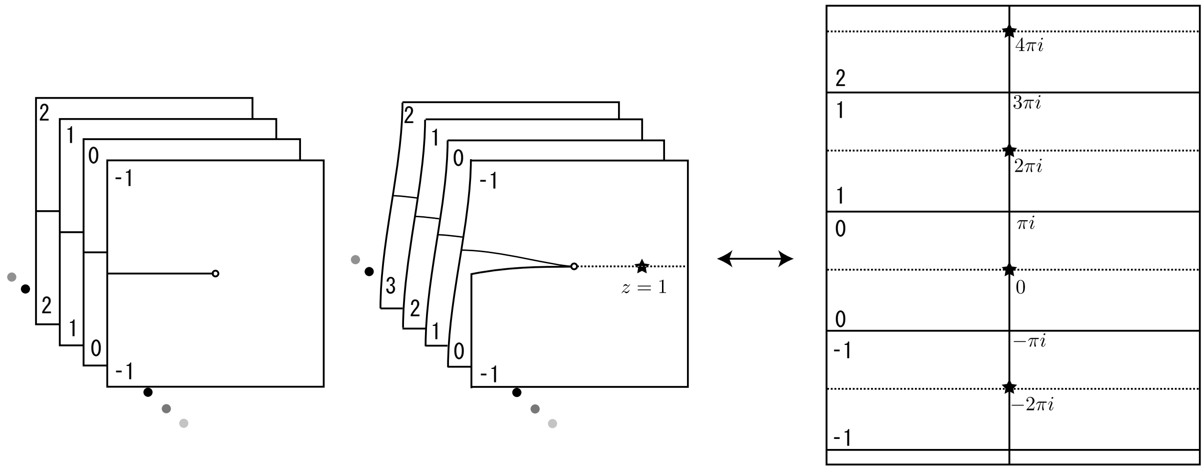
$$w \in \mathbb{C} \implies \frac{df}{dw} = \frac{d(e^w)}{dw} = e^w \neq 0$$

が成り立つので，逆関数定理より局所的には正則な逆関数が存在する．局所的な逆関数を解析接続することで，コピーの貼り合わせ方が決まるのである．

たとえば z 平面のコピーを整数 $k \in \mathbb{Z}$ で番号付けしておき，つぎに k 番目のコピーにおける $z = 1$ を $w = 2k\pi i$ に写す局所的な $f = \exp$ の逆写像 g_k を考える．これを解析接続していくと，g_k は $\mathbb{C}^*$ からさらに負の実軸を除いた $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ を w 平面内の帯状領域 $S_k := \{w \in \mathbb{C} \mid (2k-1)\pi < \operatorname{Im} w < (2k+1)\pi\}$ に全単射で対応させる．

担当教員：川平 友規 研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

負の実軸にあたる部分を g_k が $g_{k\pm1}$ に解析接続されるように切り貼りすれば，対数関数 $w=\log z$ のリーマン面が得られるのである．



対数関数の正則関数としての性質． 対数関数 $w=\log z$ を普通の 1 価関数として扱う方法を考えよう．[9]

先ほどリーマン面の構成に用いた $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ の k 番目のコピーを選ぶと，$f=\exp$ の逆関数 $g_k:\mathbb{C}-(-\infty,0]\to S_k$ が全単射で定まっている．しかも逆写像定理より，

$$\frac{df}{dw}\cdot\frac{dg_k}{dz}=1 \iff \frac{dg_k}{dz}=\frac{1}{df/dw}=\frac{1}{e^w}=\frac{1}{z}.$$

すなわち g_k は正則であり，かつ関数 $1/z$ の原始関数である．（この性質はコピーの番号 k に依存しない.）とくに，$1/z$ は単連結領域 $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ 上で正則であるから，積分を用いて

$$g_k(z)-g_k(1)=\int_1^z\frac{1}{\zeta}\,d\zeta \iff g_k(z)=\int_1^z\frac{1}{\zeta}\,d\zeta+2k\pi i$$

を得る．ただし，式の中の積分路は 1 と z を結ぶ $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ 内の任意の経路である．また，$\mathrm{Log}\,z$ の定義より $g_0(z)=\mathrm{Log}\,z$ であるから，$g_k(z)=\mathrm{Log}\,z+2k\pi i$ と表される．

対数関数を正則関数として扱いたいときには，このようにリーマン面の適当なブランチに制限するとよい．

応用：ベキ級数展開． 応用として，対数関数のベキ級数展開

$$\mathrm{Log}\,(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots \quad (|z|<1)$$

を示そう．

いま $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ 内には中心 1 半径 1 の開円板 $D(1,1)$ が含まるから，$|z|<1$ のとき

$$\mathrm{Log}\,(1+z)=\int_1^{1+z}\frac{1}{\zeta}\,d\zeta$$

である．（ただし，積分路は 1 から $1+z$ までを直線で結ぶことにする.）そこで $1+\eta=\zeta$ とおくと，$|z|<1$ のとき

$$\mathrm{Log}\,(1+z)=\int_0^z\frac{1}{1+\eta}\,d\eta=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-\eta)^n\,d\eta=_*\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-\eta)^n\,d\eta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$$

[9]たとえば主値 $w=\mathrm{Log}\,z$ を考えればよいが，連続性や正則性に関する議論は不十分であった．

とできる．途中の $=_*$ の部分では，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-\eta)^n$ が $|\eta|<1$ のとき広義一様収束する，という性質を用いた．

このべき級数展開は $|z|<1$ で広義一様収束することに注意しておこう．

応用の応用：$(1+z)^\alpha$ **のべき級数展開**． $|z|<1$，$\alpha\in\mathbb{C}$ にたいし，

$$(1+z)^\alpha := e^{\alpha \mathrm{Log}\,(1+z)}$$

と定める．[10] このとき，

$$e^{\alpha \mathrm{Log}\,(1+z)} = e^{\alpha(z-z^2/2+z^3/3-\cdots)} = 1+\alpha(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots)+\frac{\alpha^2(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots)^2}{2!}+\cdots$$

より，2 次までの展開として

$$(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(z-\alpha)^2+\cdots$$

を得る．実用上はここまでで十分有用であるが，一般に $\displaystyle\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ とおくとき，$|z|<1$，$\alpha\in\mathbb{C}$ にたいし

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$$

が成り立つことが知られている．

[10] 一般に複素べきは $(1+z)^\alpha = e^{\alpha\log(1+z)}$ と定義されて，多価であるが，ここではその「主値」を考えているのである．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

リーマン球面とメビウス変換

配布日：January 27, 2015　Version : 1.1

前回 (1/20) のまとめと補足

複素平面に「無限遠点」を付け加えた集合を「リーマン球面」として定式化する．

リーマン球面． XYZ 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面を

$$S := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$$

とし,「北極」に当たる点 $(0, 0, 1)$ を N で表す．

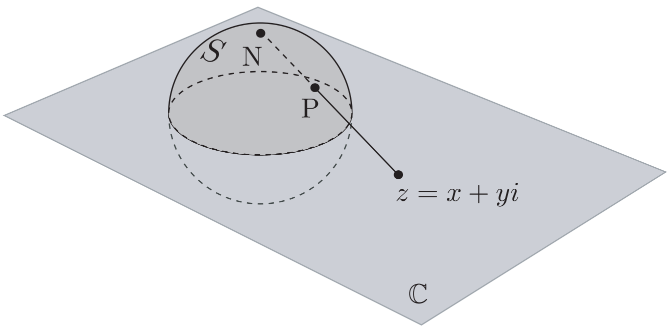
また，XY 平面 $Z = 0$ にあたる集合

$$\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

を複素平面（すなわち複素数全体の集合）

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

と同一視する．具体的には，点 $(x, y, 0)$ は $x + yi$ の別名であり，XY 平面もまた集合 $\mathbb{C}$ の別名と解釈する．これは，どちらかが実名でもうひとつが仮名，というわけではない．与えられたひとつのモノに，ふたつの対等な名前（記号）が割り当てられているのである．



このとき，北極点 N から出て $x + yi \longleftrightarrow (x, y, 0)$ を通る直線は，$S - \mathrm{N}$ 上の 1 点と必ず交差する．その点を $\mathrm{P} = (X, Y, Z)$ と表そう．これによって，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P} = (X, Y, Z) & \longleftrightarrow & x + yi \\ S - \mathrm{N} & \longleftrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

という 1 対 1 かつ連続な対応が得られる．もっと具体的に，簡単な幾何学的な考察から，次がわかる：

> **命題 12-1．** 上のようにして $z = x + yi$ から得られる点 $\mathrm{P} = (X, Y, Z)$ は，
>
> $$X = \frac{2x}{1 + |z|^2}, \quad Y = \frac{2y}{1 + |z|^2}, \quad Z = \frac{-1 + |z|^2}{1 + |z|^2}$$
>
> を満たす．また，次が成り立つ：
>
> $$x = \frac{X}{1 - Z}, \quad y = \frac{Y}{1 - Z}$$

以下，$\mathrm{P}=(X, Y, Z) \in S-\mathrm{N}$ は $z=x+yi \in \mathbb{C}$ の別名と考え，集合 $S-\mathrm{N}$ と $\mathbb{C}$ も互いに別名であると考えよう．

いま．$|z| \to \infty$ としてみると，z に対応する球面上の点 P は（$|z| \to \infty$ の発散の仕方に依存せず）N に近づく．その意味で，点 N を**無限遠点**（point at infinity）とよび，∞ で表す．[1]すなわち，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N}=(0,0,1) & \longleftrightarrow & \infty \\ S-\mathrm{N} & \longleftrightarrow & \mathbb{C} \\ S & \longleftrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \end{array}$$

という「別名」の関係がある．この集合 S すなわち別名 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を**リーマン球面** (the Riemann sphere) と呼び，$\hat{\mathbb{C}}$ （シーハット）で表す．[2]

距離空間としての $\hat{\mathbb{C}}$.　リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ に，次の距離を導入しよう．単位球面 S には，$\mathbb{R}^3$ でのユークリッド距離（直線距離）を制限することで，自然な距離（弦距離）が入る．命題 12-1 を用いて，これを $\hat{\mathbb{C}}$ の言葉で表現すると，次のようになる：$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ のとき，

$$d(z_1, z_2) := \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, \quad d(z_1, \infty) := \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}.$$

さらに $d(\infty, \infty) := 0$ である．この距離について $\hat{\mathbb{C}}$ は距離空間となり，位相空間とみなせる．具体的には，$z \in \hat{\mathbb{C}}$ 中心半径 $r>0$ の開円板を

$$B(z, r) := \left\{ w \in \hat{\mathbb{C}} \mid d(w, z) < r \right\}$$

と定義することで,「内点」「開集合」「開集合系」の概念が定義できる．[3]

練習問題.　次を示せ．

(1) $z_n, \alpha \in \mathbb{C}$，$n \to \infty$ のとき,『$|z_n - \alpha| \to 0 \iff d(z_n, \alpha) \to 0$』.

(2) $U \subset \mathbb{C}$ にたいし,『U は $\mathbb{C}$ の開集合 $\iff$ U は距離空間 $(\hat{\mathbb{C}}, d)$ の開集合』.

(3) $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ が ∞ を含む開集合であれば，ある $R>0$ が存在して，$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subset U$.

∞ を含む計算.　$z_n, \alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ かつ $d(z_n, \alpha) \to 0$ $(n \to \infty)$ のとき,「点列 $\{z_n\}$ は α に収束する」といい，$z_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ もしくは $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ と表す．

いま $z \in \mathbb{C}$ を任意に固定し，$|w_n| \to \infty$ を満たす点列 $\{w_n\}$ を任意にとると，

$$\lim_{n\to\infty} (z + w_n) = \lim_{n\to\infty} (w_n + z) = \lim_{n\to\infty} w_n$$

が成り立つ．この式を習慣的に

$$z + \infty = \infty + z = \infty$$

のように書き表すことがある．同様に極限計算として正当化できる「∞ の計算」をまとめておこう：

- 和（差）：任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し，

$$z + \infty = \infty + z = \infty$$

[1] ∞ は無限遠点，あくまで「点」であって，無限大ではない．
[2] 1 次元射影直線とも呼ばれ，そのときは $\mathbf{P}^1$ とも表す．
[3] 実はコンパクトかつ完備（＝コーシー列が収束する）な距離空間となる．

- 積と商：任意の 0 でない複素数 z に対し，

$$\infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty, \qquad \frac{z}{\infty} = 0, \qquad \frac{z}{0} = \infty.$$

- 次のものはとりあえず考えない．

$$\infty \cdot \infty,\ \infty \pm \infty,\ \infty/\infty,\ 0 \cdot \infty.$$

円と直線.

命題 12-2. $\mathbb{C}$ 上の円または直線の方程式は次で表される：

$$\begin{cases} \alpha z\bar{z} + \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0 \\ \alpha,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{C},\ |\beta|^2 - \alpha\gamma > 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

証明. $\alpha \neq 0$ のとき，式変形により

$$(*) \iff \left| z + \frac{\beta}{\alpha} \right|^2 = \frac{|\beta^2| - \alpha\gamma}{\alpha^2}\ (> 0)$$

がわかる．これは $-\beta/\alpha$ 中心，半径 $\sqrt{(|\beta|^2 - \alpha\gamma)/\alpha^2}$ の円である．逆に z_0 中心半径 $r > 0$ の円の方程式は

$$|z - z_0| = r \iff (z - z_0)\overline{(z - z_0)} = r^2 \iff z\bar{z} - \overline{z_0} z - z_0 \bar{z} + z_0 \overline{z_0} - r^2 = 0$$

となる．いま $\alpha = 1, \beta = -z_0, \gamma = z_0\overline{z_0} - r^2$ とおけば，$|\beta|^2 - \alpha\gamma = r^2 > 0$ となり $(*)$ の形である．

つぎに $\alpha = 0$ のとき，$\beta = p + qi$ とおくと

$$(*) \iff \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0 \iff 2\mathrm{Re}\,(\bar{\beta} z) + \gamma = 0 \iff 2(px + qy) + \gamma = 0$$

いま $|\beta|^2 - \alpha\gamma = |\beta|^2 > 0$ より，$(p, q) \neq (0, 0)$．よって $(*)$ は直線の方程式となる．

逆に直線 $ax + by + c = 0$（ただし $(a, b) \neq (0, 0)$）は $\alpha = 0,\ \beta = (a + bi)/2,\ \gamma = c$ とすると $|\beta|^2 - \alpha\gamma = (a^2 + b^2)/4 > 0$ を満たし，上の式変形を逆にたどることにより $(*)$ の形となる．■

命題 12-3. $z \in \mathbb{C}$ が $(*)$ を満たすことと，S 上の対応する点 (X, Y, Z) が次の平面 Π の方程式を満たすことは同値である：

$$\Pi:\ 2pX + 2qY + (\alpha - \gamma)Z + (\alpha + \gamma) = 0. \tag{$**$}$$

ただし $\beta = p + qi$ であり，

$$|\beta|^2 - \alpha\gamma > 0 \iff (\text{球面 } S \text{ の中心 } (0,\ 0,\ 0) \text{ と}\Pi\text{の距離}) < 1$$

証明. 命題 12-1 より $z = \dfrac{X + Yi}{1 - Z}$．これを $(*)$ に代入し $X^2 + Y^2 = 1 - Z^2$ 関係式を用いると，$(**)$ の式に変形できる．また，点と平面の距離の公式より，

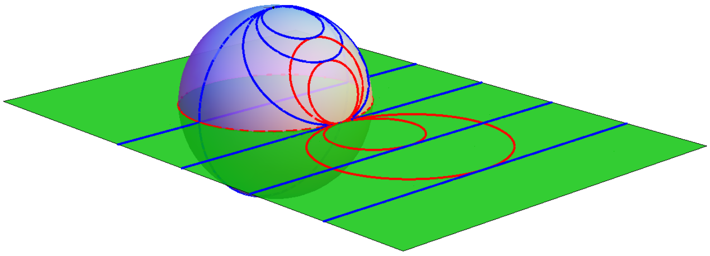
$$((0,\ 0,\ 0) \text{ と}\Pi\text{の距離}) < 1 \iff \frac{|0 + 0 + 0 + \alpha + \gamma|}{\sqrt{(2p)^2 + (2q)^2 + (\alpha - \gamma)^2}} < 1 \iff (\alpha + \gamma)^2 < |2\beta|^2 + (\alpha - \gamma)^2$$

であり，最後の式を整理して $4(|\beta|^2 - \alpha\gamma) > 0$ となる．■

これより，$\mathbb{C}$ 上の円または直線は $\mathbb{R}^3$ の中の平面 Π と $S - \mathrm{N}$ との交わりとして表現できる．球面と平面が交差する部分は円であり，$\alpha = 0 \iff \mathrm{N} \in \Pi$ であることから，次の定理が導かれる：

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

命題 12-4（円と直線）． $\mathbb{C}$ 上の円は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の ∞ を通らない円であり，$\mathbb{C}$ 上の直線は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の ∞ を通る円である．また，その逆も成り立つ．



メビウス変換.

定義（メビウス変換）． $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ のとき，

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

の形の関数を**メビウス変換** (Möbius transformation) もしくは **1 次分数変換** (fractional linear transformation) とよぶ.

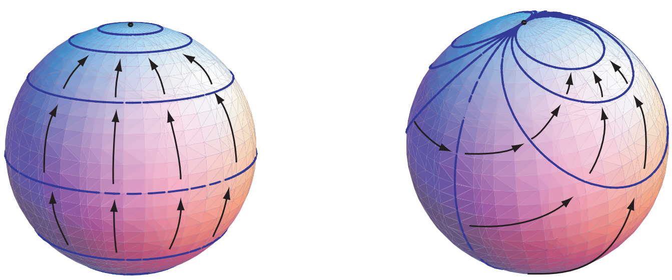
位相空間 X にたいし，写像 $f : X \to f(X) = Y$ が**同相写像** (homeomorphism, topological map) であるとは，f は全単射かつ f と f^{-1} が連続であることをいうのであった.

定理 12-5（メビウス変換の性質 1）． メビウス変換 $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ は $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ の上への同相写像を与える．ただし

$$T(\infty) = \frac{a}{c}, \quad T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

と定める.

注意. $c = 0$ のとき，$T(z) = \alpha z + \beta$ $(\alpha \neq 0)$ の形であり，$T(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ かつ $T(\infty) = \infty$ である．このタイプのメビウス変換は**複素アファイン変換** (complex affine transformation) とよばれる．[4]



具体例 1（拡大）． 証明の前にメビウス変換の典型例をみて，T が $\hat{\mathbb{C}}$ を自身へ同相に写す様子を把握しておこう.

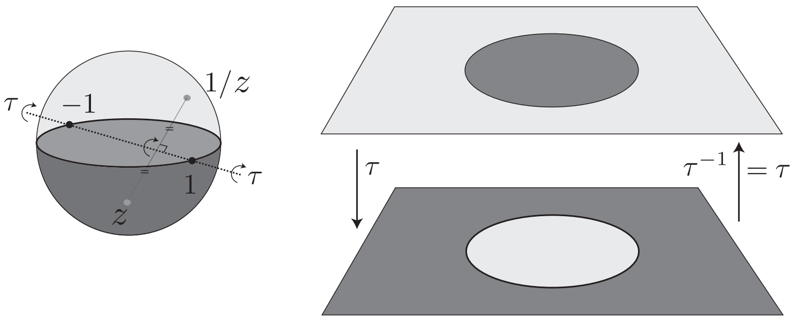
[4]$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ の正則な全単射は複素アファイン変換に限ることが知られている.

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441 Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

まず $T(z)=2z=\dfrac{2z+0}{0\cdot z+1}$ のとき，複素平面全体が無限遠点に近づくように移動する（上図の左）．ただし $0, \infty$ は動かない．(いわゆる固定点.)

具体例 2（平行移動）． $T(z)=z+1=\dfrac{z+1}{0\cdot z+1}$ のとき，複素平面全体が一定方向にずれる（上図の右）．ただし ∞ は動かない．

具体例 3（反転）． $\tau(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{0\cdot z+1}{z+0}$ のとき．上のふたつの例は複素平面上で見ると T の作用がわかりやすいが，こちらはリーマン球面で見たほうがよい．じつは，τ は $z=\pm 1$ にあたる $(\pm 1, 0, 0)\in S$ を通る直線を軸に，180 度回転させる作用になっているのである．[5]



証明（命題 12-3，スケッチ）． $w=T(z)=(az+b)/(cz+d)$ にたいし，$z=S(w)=(dw-b)/(-cw+a)$ とおく．ただし $S(\infty)=-d/c$，$S(a/c)=\infty$ とする．

このとき，次が確認できる：

(1) $\forall w\in\hat{\mathbb{C}}$，$T\circ S(w)=w$　(2) $\forall z\in\hat{\mathbb{C}}$，$S\circ T(z)=z$　(3) T, S は $\hat{\mathbb{C}}$ 上で連続

これより $S=T^{-1}$ であり，T は同相写像である． ■

円円対応． メビウス変換のもっとも重要な性質が，つぎの「円円対応」と呼ばれるものである：

> **定理 12-6（円円対応）．** メビウス変換は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円に写す．

証明． $w=T(z)=(az+b)/(cz+d)$ とする．

$c=0$ のとき，$w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$．すなわち

$$z \ \mapsto\ \frac{a}{d}z =: z_1 \ \mapsto\ z_1+\frac{b}{d}=w.$$

一方 $c\neq 0$ のとき，$w=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c^2}\dfrac{1}{z+d/c}$ と変形できるので，

$$z \ \mapsto\ z+\frac{d}{c}=: z_1 \ \mapsto\ \frac{1}{z_1}=: z_2 \ \mapsto\ \frac{bc-ad}{c^2}\cdot z_2 =: z_3 \ \mapsto\ \frac{a}{c}+z_3=w.$$

いずれの場合も，T は次の 3 つの形のメビウス変換の合成で表される：

(1) $z\mapsto \lambda z$ $(\lambda\neq 0)$　(2) $z\mapsto z+\ell$ $(\ell\neq 0)$　(3) $z\mapsto \dfrac{1}{z}$

すなわち，これら 3 つのメビウス変換について「円円対応」を示せばよい．

(1) のとき，$w=T(z)=\lambda z$ $(\lambda\neq 0)$ とおく．$(*)$ で表される $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円（すなわち $\mathbb{C}$ 上の円または直線）があるとき，$(*)$ の式に $\lambda\bar{\lambda}$ をかけて整理すると

$$\alpha(\lambda z)\overline{(\lambda z)}+\bar{\beta}\bar{\lambda}\lambda z+\beta\lambda\bar{\lambda}\bar{z}+\lambda\bar{\lambda}\gamma=0 \iff \alpha w\bar{w}+\overline{\beta\lambda}w+\beta\lambda\bar{w}+|\lambda|^2\gamma=0$$

[5] $z=x+yi$ に対応する S 上の点を (X,Y,Z) とするとき，$1/z=(x-yi)/(x^2+y^2)$ は命題 12-1 より，S 上の点 $(X,-Y,-Z)$ に対応することがわかる．

担当教員：川平 友規　研究室：理学部 A 館 A441　Email: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

となる．いま $\alpha' = \alpha, \beta' = \beta\lambda, \gamma' = |\lambda|^2\gamma$ とおくと，$|\beta'|^2 - \alpha'\gamma' = |\lambda|^2(|\beta^2| - \alpha\gamma) > 0$ となるので，$(*)$ は $w = T(z)$ が

$$\begin{cases} \alpha' w\bar{w} + \bar{\beta}' w + \beta' \bar{w} + \gamma' = 0 \\ \alpha', \gamma' \in \mathbb{R},\ \beta' \in \mathbb{C},\ |\beta'|^2 - \alpha'\gamma' > 0 \end{cases} \qquad (*')$$

を満たすことと同値である．よって $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円に写ることがわかった．

(2)，(3) の場合も同様である．■

注意．一般に正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$，$w = f(z)$（D は $\mathbb{C}$ 内の領域）が $z_0 \in \mathbb{C}$ において $A_0 := f'(z_0) \neq 0$ を満たすとき，テイラー展開から $z \approx z_0$ のとき

$$f(z) - f(z_0) = A_0(z - z_0)(1 + o(|z - z_0|)) \iff w - w_0 \approx A_0(z - z_0)$$

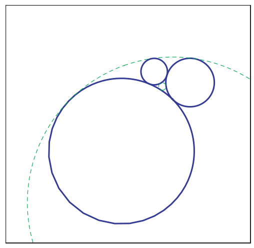
が成り立つ．これは z_0 の十分近くでは f の作用がほぼ定数 A_0 倍になっていることを意味する．$A_0 = |A_0|e^{i \arg A_0}$ と表すと，これは f の $z = z_0$ 付近での作用が $|A_0|$ 倍に拡大と $\arg A_0$ 回転という相似変換になっていることを意味する．

よって，もし $z = z_0$ で交差する 2 曲線があると，その f による像として得られる 2 曲線も $w = w_0$ で同じ角度で交差する．とくに，$z = z_0$ で互いに接する 2 曲線の f による像も $w = w_0$ で互いに接している．このことを念頭に置きつつ，次のような応用を考えよう．

応用．次の定理を証明しよう：

定理 12-7.

平面内に互いに外接する 3 つの円 C_1, C_2, C_3 がある．このとき，この 3 円に同時に外接する円 C_0（それは C_1, C_2, C_3 に囲まれる部分に存在する）と，この 3 円が同時に内接する円 C_4（それは C_1, C_2, C_3 を囲む）が存在することを示せ．



証明．複素平面上で考えよう．C_1 と C_2 の接点を α とし，メビウス変換 $T(z) = \dfrac{1}{z - \alpha}$ による 3 円の像をそれぞれ $C'_k = T(C_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ とおく．

このとき C'_1, C'_2 は ∞ を通る $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円なので，$\mathbb{C}$ 上の 2 直線である．また，$\mathbb{C}$ では交点を持たないから平行な 2 直線となる．よって C'_3 はこの 2 直線に同時に接する（はさまれた）円となる．

あとは図のように円 C'_0，C'_4 をとれば，逆像 $T^{-1}(C'_0)$ と $T^{-1}(C'_4)$ が求めるふたつの円となる．($T(\infty) = 0$ より，C'_0 か C'_4 のいずれか一方が 0 を含むはずである．その逆像が題意の C_4 を与える．) ■

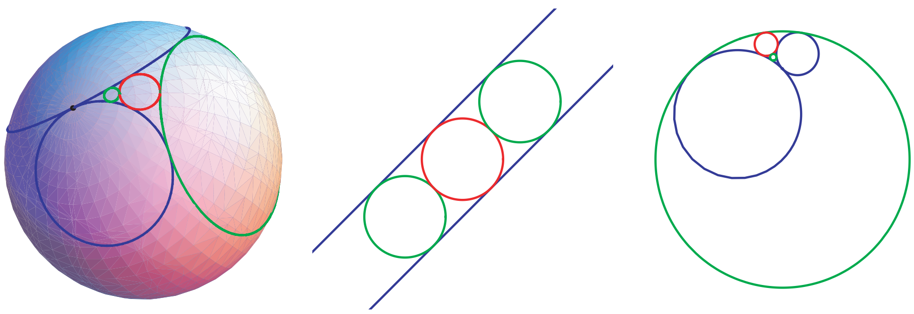


図 1: 円 C_1 と C_2 を青で．円 C_3 を赤で描いて区別してある．