この講義について

配布日：2015年4月10日　Version：1.1

担当教員： 川平　友規（Kawahira, Tomoki；理学部・大学院理工学研究科 数学専攻）

担当 TA： 鈴木　悠（Suzuki, Haruka；大学院理工学研究科 数学専攻）

講義ウェブサイト：
`http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/15S-kaiseki.html`
配布されたプリントがpdf形式でダウンロードできます．また，毎週の進捗状況についてコメントしていきます．

講義の目的（シラバスより）： 解析学の基礎的事項について，できるだけ数学的に厳密に解説する．

講義計画（シラバスより）：

4月10日	**実数**：実数の集合... 上限，下限，連続性，
4月17日	数列と級数... 極限，部分列，集積点.
4月24日	ワイエルストラスの定理，上極限，下極限
5月1日	コーシー列
(5月8日)	休講（演習はあり）
(5月15日)	休講（ホームカミングデイ）
5月22日	**一変数関数**：極限と連続性... 中間値の定理，最大値と最小値の存在.
5月29日	一様連続性
6月5日	微分可能性... 平均値の定理，高階微分，テイラーの定理
6月12日	関数列... 一様収束，コーシーの条件
6月19日	極限関数... 連続性，微積分と極限の交換
6月26日	関数項級数... べき級数，収束半径，項別微積分
7月3日	**多変数関数の微分**： 極限と連続性.
7月10日	偏微分... 方向微分，全微分
7月17日	陰関数定理
7月24日	極値
7月31日	期末試験
8月7日	講義予備日

教科書および参考書： 教科書は特に指定しないが，参考書として以下の本をあげておく．
- M. スピヴァック,『多変数の解析学』（東京図書）
- 小平邦彦,『解析入門 I, II』（岩波書店）
- 杉浦光夫,『解析入門 I, II』（東京大学出版会）

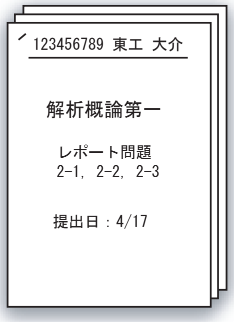
成績評価の方法： 成績はレポート課題・期末試験・「解析学演習A第一」の状況等によって総合的に評価する．ただし，

- ほぼ毎週のレポートおよび期末試験をそれぞれ50点満点で評価する．
- レポートを5回以上出さなかった場合，期末試験を受験しなかった場合はそれぞれ単位取得を辞退したものとみなす．

レポートの締め切りと提出様式： レポート問題と提出締め切りは毎週配布するプリントで指定します．提出する際には，必ず **A4 ルーズリーフ**もしくは **A4 レポート用紙**を使用し，右図のような**表紙をつけて**ください．また，必ず**左上**をホチキス等でとめてください．

受講者同士で協力し合って解答してもかまいませんし，それによる減点はありません．ただし，かならず協力者の名前も明記するようにしてください．（協力者名がなく，ただの書き写しとみなされる場合は減点します．）

レポートは採点して返却します．返却が済むまで，成績への加点の対象とはしないので注意してください．（返却されたレポートは，成績が確定するまで手元に保管しておくことをおすすめします．）



・必ずA4サイズ，表紙をつける．
・番号・名前は上の方に大きく書く．
・左上をホチキスで留める．
・解いた問題の番号，提出日を書く．
・裏面はなるべく使わない．

オフィスアワー（質問受付）： 授業中・授業後の質問は大歓迎です．講義終了後，1 時間ほどは私の研究室（H210）に待機していますので，オフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）として活用してください．院生のみなさんによる数学相談室（月・火・木・金の 16：45〜18：45，本館 1 階 H113/114 講義室）もぜひ活用しましょう．

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体　(2) $\mathbb{R}$: 実数全体　(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体　(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体　(6) $\emptyset$: 空集合

ギリシャ文字

(1) α: アルファ　(2) β: ベータ　(3) γ, Γ: ガンマ　(4) δ, Δ: デルタ　(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ　(7) η: エータ　(8) θ, Θ: シータ　(9) ι: イオタ　(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ　(12) μ: ミュー　(13) ν: ニュー　(14) ξ, Ξ: クシー　(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ　(17) ρ: ロー　(18) σ, Σ: シグマ　(19) τ: タウ　(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ　(22) χ: カイ　(23) ψ, Ψ: プサイ　(24) ω, Ω: オメガ

その他

(1) $\leq$ と $\leqq$，$\geq$ と $\geqq$，はそれぞれ同じ意味．

(2) $A := B$ と書いたら A を B で定義する，という意味．たとえば $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

(3) （文章 1）$:\Longleftrightarrow$（文章 2）と書いたら，（文章 1）の意味は（文章 2）であることと定義する，という意味．たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$.」

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学部 数学科

ちからだめし

配布日：2014/04/10　Version：1.1

レポート問題

締め切りは 4 月 17 日の講義開始前とします.

問題 1-1. 次の関数について 4 階までの導関数を求め，さらに $x = a$ におけるテイラー展開を，3 次テイラー多項式＋剰余項の形で書け.（答えのみでよい.）

$$(a) \quad f(x) = \cos x \qquad (a = \pi/2) \qquad\qquad (b) \quad g(x) = x \sin x \qquad (a = 0)$$

問題 1-2. 次の関数が原点で連続かどうか判定せよ.

$$\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

問題 1-3. 次の関数の極値をすべて求めよ：$z = f(x,y) = x^4 + 6x^2 - 8xy + 2y^2$

問題 1-4. m を実数，$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とするとき，

$$I(m) = \iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^m}\,dxdy.$$

を求めよ．また，$I(m)$ は m の連続関数であることを示せ.

担当教員：川平 友規 研究室：本館 H210 東京工業大学 理学部 数学科

実数の構成（4/10）

配布日：2015/04/17 Version：1.1

実数を作ろう

解析学の土台となる「実数」について，改めて考え直してみよう．私たちは

$$\text{自然数} \subset \text{整数} \subset \text{有理数} \subset \text{実数}$$

という流れで数の体系を拡張してきた．これらは具体的に，

$$\begin{aligned} \text{自然数全体の集合} \quad & \mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \cdots\} \\ \text{整数全体の集合} \quad & \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots\} \\ \text{有理数全体の集合} \quad & \mathbb{Q} := \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

のように書き下すことができる．では，実数はどうだろうか？

$$\text{実数全体の集合} \quad \mathbb{R} := \{\ ?\ \mid \quad ????\quad \} \tag{1.1}$$

高校まで数学では，この？に入るものが何か答えることができないことに気がつく．実数とは一体，何なのだろうか？

人類がこの問いを真剣に考え，満足の行く答にまで到達したのは 1860 年代，わずか 150 年ほど前のことである．これまで「あたりまえのように存在する」と考えられていた実数（とくに無理数）は，じつは「人工的に構成すべきもの」だったのである．

$\sqrt{2}$ は存在するか？ たとえば方程式 $x^2 - 2 = 0$ を解いてみよう．中学校以来の習慣で，私たちは即座に $x = \pm\sqrt{2}$ と計算するだろう．しかし，この $\sqrt{2}$ の意味するものはなにか？それは $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ ということであって，方程式 $x^2 = 2$ の x を $\sqrt{2}$ という記号に置き換えたにすぎない．じつは，この方程式はまだ解けていない[1]．$\sqrt{2}$ という数が本当に存在するのか，その具体的な値は何か，という議論が完全に抜け落ちている．

こうして考えると，$\sqrt{3}$，円周率 π，自然対数の底 e などなど，本当に存在するのか疑わしいが，なんとなく「あるもの」と仮定してここ（大学？）まできてしまったのである．こういう無理数たちの存在を明確に保証するのが，いわゆる実数論である．

デデキント (Dedekind) の切断

実数の厳密な構成として最も有名なのが，これから紹介する「切断」とよばれる方法である[2]．これにより，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ をもちいて「これが実数ですよ」と提示できるようなものを具体的に構成する．

アイディアを標語的に述べると，「実数 x」とは，ある「有理数の部分集合のペア (A_x, A'_x)」の別名として構成されるものである．

まずは，有理数がもつ次の基本的な性質を認める：

[1] 高校では $x^2 + 1 = 0$ の解を，（その存在について議論しないまま）i とおいて複素数の理論を作ってきた．それと同じである．

[2] デデキントは 19 世紀ドイツの数学者．実数を厳密に構成する試みはコーシーの弟子筋にあたるメレ（フランス）が最初であり，いわゆる「コーシー列」による完備化を用いる．たとえば松坂和夫『代数系入門』を参照．

命題 1.1 (有理数の性質) a, b を有理数とするとき，

(1) $a<b$, $a=b$, $a>b$ のいずれかひとつだけが成り立つ．

(2) $a<b$ のとき，$a<m<b$ を満たす有理数 m が存在する．

(1) より，有理数の全体は大小関係に応じて「一列に」並べることができる．これを「有理直線」とよぶことがある．(2) のような m は，たとえば $m=(a+b)/2$ がある．これより,「有理直線」のどんなに小さな区間にも有理数が存在する.「有理数の稠密性」とよばれる性質である．

有理数の切断.　大雑把にいうと,「切断」とは有理直線にどこかで切れ目をいれて,「左半分」と「右半分」に分割するものである．

定義　(切断) 集合 $\mathbb{Q}$ の空でない部分集合のペア (A, A') が（有理数の）**切断** (cut) であるとは，以下の条件を満たすことをいう：

(Q1) $A \cup A' = \mathbb{Q}$,　$A \cap A' = \emptyset$.

(Q2) $a \in A$ かつ $a' \in A'$ のとき，$a < a'$.

このとき，A を**下組**，A' を**上組**という．

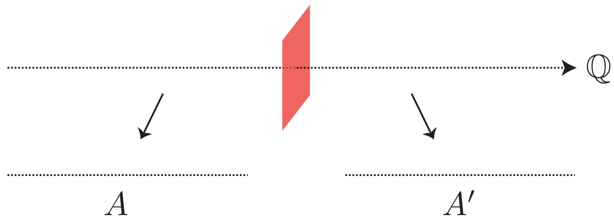


図 1.1: 有理数の切断.

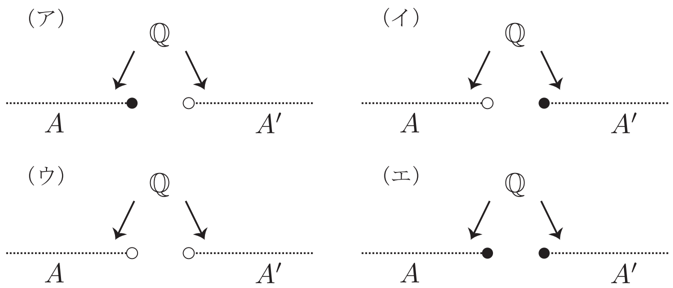
切断は次の性質を持つ．

命題 1.2 (切断の性質) 有理数の切断 (A, A') は以下のいずれかひとつだけをみたす．

（ア）A は最大値をもち，A' は最小値をもたない．

（イ）A は最大値をもたず，A' は最小値をもつ．

（ウ）A は最大値をもたず，A' も最小値をもたない．



担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学部 数学科

証明． $\mathbb{Q}$ の空でない部分集合のペア (A, A') が (Q1)(Q2) を満たすとき，「（エ）A は最大値をもち，A' も最小値をもつ」というケースがありえないことを示せばよい．

（エ）であったと仮定しよう．A の最大値 a と A' の最小値 a' は (Q2) より $a < a'$ を満たす．また，命題 1.1 の (2) より，$a < m < a'$ を満たす有理数 m が存在する．(Q1) より $m \in A$ もしくは $m \in A'$ だが，$m \in A$ と仮定すると a が A の最大値であったことに矛盾し，$m \in A'$ と仮定すると a' が A' の最小値であったことに矛盾する．よって（エ）はありえない．■

（ア）から（イ）へ． （ア）の型の切断は下組 A の最大値 a を上組 A' に移し替えることで（イ）の型の切断に変形することができる[3]．

そこで，以下では「切断」といったら次の (Q3) も同時に仮定する：

> **定義 （切断への追加条件）**
>
> (Q3) A は最大値をもたない．すなわち，（イ）か（ウ）の型に限る．

実数の定義． 以上をふまえて，「実数」の定義を次のように与えることができる．

> **定義 （実数）** 切断 (A, A') に対し，
>
> - (A, A') が（イ）の型のとき，A' は最小値 $a \in \mathbb{Q}$ をもつ．このとき，**切断 (A, A') は有理数 a の別名**だと考え，$a = (A, A')$ と表す．
> - (A, A') が（ウ）の型のとき，これを**無理数**とよぶ．
> - 有理数と無理数を合わせて**実数**とよび，その全体を $\mathbb{R}$ と表す．すなわち実数とは，（イ）もしくは（ウ）の型の切断のことである．

「別名」というのは，モノとしては同じだがふたつの名前（記号，表現，表象）が割り当てられている状態だと考えるとよい．

これで，実数とは何かという問いにはっきりと応えられるようになった．

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &:= \big\{(A, A') \mid (A, A') \text{ は（イ）もしくは（ウ）の型の切断}\big\} \\ &\supsetneq \big\{(A, A') \mid (A, A') \text{ は（イ）の型の切断}\big\} \overset{\text{別名}}{=} \mathbb{Q}\end{aligned}$$

注意． 切断 (A, A') において，下組 A を決めれば自動的に上組 A' が決まるので，

$$1 \text{ つの実数を決める} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} 1 \text{ つの切断を決める} \Longleftrightarrow 1 \text{ つの下組を決める}$$

という同値関係が成立する．

実数の大小関係

有理数の大小関係を実数にまで拡張しよう．まず形式的に，次のように定義する：

[3] もちろん（イ）から（ア）への逆の変形も可能であるから,.（ア）の型の切断全体と（イ）の型の切断全体には 1 対 1 の対応がつく．よってどちらを選んでも，情報量は同じだと考えられる．

定義 （実数の大小） 実数 $\alpha = (A, A')$，$\beta = (B, B')$ に対し，

$$A = B \text{ のとき } \alpha = \beta, \quad A \subsetneq B \text{ のとき } \alpha < \beta, \quad A \supsetneq B \text{ のとき } \alpha > \beta$$

と表す．さらに,「$\alpha = \beta$ または $\alpha < \beta$」であることを $\alpha \le \beta$,「$\alpha = \beta$ または $\alpha > \beta$」であることを $\alpha \ge \beta$ と表す．

大小関係は次の意味で well-defined である（ちゃんと定義になっている）．

定理 1.3 (実数の大小) 実数 α, β に対し，$\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ のいずれかひとつだけが成り立つ．

証明は演習問題としよう．とくに，α, β がともに有理数であるときは命題 1.1(1) の大小関係と一致する．さらに，次の性質をもつ．

定理 1.4 (実数の性質) 実数 α, β, γ に対し，

(1) $\alpha < \beta$ かつ $\beta < \gamma$ であれば，$\alpha < \gamma$.

(2) $\alpha = (A, A')$ のとき，

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\}, \quad A' = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \ge \alpha\}.$$

(3) $\alpha < \beta$ のとき，$\alpha < m < \beta$ を満たす有理数 m が存在する．

証明. (1) $\alpha = (A, A'), \beta = (B, B'), \gamma = (C, C')$ とおくと，$\alpha < \beta$ より $A \subsetneq B$, $\beta < \gamma$ より $B \subsetneq C$. よって $A \subsetneq C$，すなわち $\alpha < \gamma$.
(2) 参考書 [小平] の §1.2 参照.
(3) →レポート問題. ■

レポート問題

締め切りは 4 月 24 日の講義開始前とします.

問題 2-1. (下組と特徴付け) $\mathbb{Q}$ の空でない部分集合 A が以下をみたすとする：

(L1) ある有理数 m が存在し，$a \in A$ ならば，$a < m$.

(L2) $a \in A$ かつ $x \in \mathbb{Q}, x < a$ ならば，$x \in A$.

このとき，$A' = \mathbb{Q} - A$ とおくと，これは空集合ではなく，ペア (A, A') は切断の条件 (Q1)(Q2) を満たすことを示せ.

問題 2-2. (実数の大小) 定理 1.3 を示せ．また，α, β がともに有理数であるときは命題 1.1(1) の大小関係と一致することを示せ.

問題 2-3. (実数の性質) 定理 1.4(3) を示せ.

ボーナス問題（+1 **point**）．このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあればメールでご指摘ください.

実数の連続性・上限と下限（4/17）

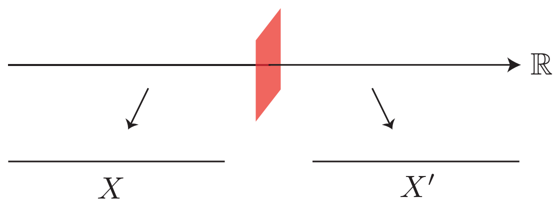
配布日：2015/04/24　Version：1.1

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第 1 章　　• 高木貞治『解析概論』の付録.

実数の連続性

数直線. 任意の実数 α, β に対して，$\alpha = \beta, \alpha < \beta, \alpha > \beta$ のいずれかひとつだけが成り立つのであった（前回，定理 1-3）．このことから，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を（概念的に）一列に並べることができる．これこそが，私たちがいままで**数直線**とよんできたものである．

実数の切断. 大小関係が成り立つことから有理数の切断をまねて「実数の切断」を考えることができる．



定義 (実数の切断) 空でない $\mathbb{R}$ の部分集合 X, X' のペア (X, X') が実数の**切断**であるとは，ペア (X, X') が次の (R1)(R2) を満たすことという：

(R1) $X \cup X' = \mathbb{R}$, $X \cap X' = \emptyset$

(R2) $x \in X$, $x' \in X'$ のとき，$x < x'$

このとき，X を**下組**，X' を**上組**という．

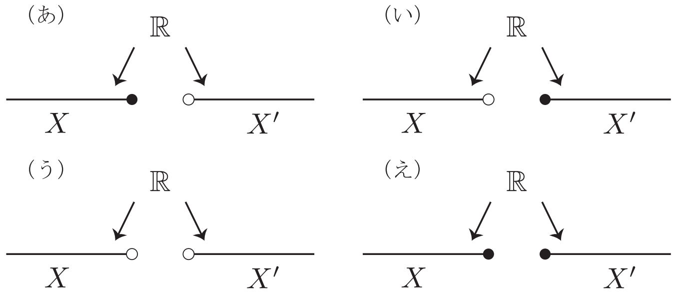
命題 1-2 より有理数の切断には（ア）（イ）（ウ）の型があり,（ア）と（イ）の型は既存の有理数の「別名」とみなすことができた．また,（ウ）の型の切断から本質的に新しい数（無理数）が定義できた．では，実数の切断を同様に考えたとき，実数ではない何か新しい数が生まれる可能性はないのだろうか？

そのようなことはない，というのが，次の「実数の連続性」からの帰結である[1]．

定理 2.1 (実数の連続性) 実数の切断 (X, X') は，次のうちいずれかをひとつだけを満たす：

（あ）X は最大値をもち，X' は最小値をもたない．

（い）X は最大値をもたず，X' は最小値をもつ．



[1]「関数の連続性」とは関係がない．

可能性としては図の 4 通りが考えられるが，実数の切断に関しては，図の（う）や（え）の型は存在しない．これは「数直線の切れ目には必ずひとつだけ実数がある」，ということであり，数直線に穴や飛び（ギャップ）がないことを示唆している．これを「実数の連続性」とよんでいるのである．

有理数の切断の議論を真似すると,（あ）の型は下組 X の最大値を上組 X' に移すことで（い）の型にできる．したがって，実数の切断に条件 (Q3) に対応する条件

(R3) X に最大値は存在しない．

を加えると，(R1)–(R3) を満たす切断 (X, X') は（い）の型に限定されてしまう．このような切断は X' の最小値を与える実数 x の別名だと考えることができる．逆に，実数 x を決めると

$$X = \{y \in \mathbb{R} \mid y < x\}, \quad X' = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq x\}$$

は（い）の型の切断を定める．すなわち，実数全体と（い）の型の切断全体は一対一に対応してしまう．結局，有理数から無理数を生成したときのように,（切断という方法では）実数から新しい数を構成することはできないのである[2]．

「公理」としての実数の連続性． 解析学の教科書によっては,「実数の連続性」が「公理」として定式化されることがある．これは，実数を具体的に構成する代わりに「実数とは以下の公理をみたすような集合のことである」と述べて，そのような公理をみたす集合がすでにあると仮定してから解析学を理論構成する，という立場を取っているからである．

定理 2.1 の証明． （[小平] の定理 1.6，[高木] 附録 I，定理 3 参照）$A := X \cap \mathbb{Q}$, $A' := X' \cap \mathbb{Q}$ とおくと，(A, A') は有理数の切断となる（形式的に，条件 (R1)(R2) を用いて条件 (Q1)(Q2) を確認すればよい．ほとんど明らかだが..）．この切断が定める実数を $\alpha = (A, A')$ とおくと，(R1) より $\alpha \in X$ もしくは $\alpha \in X'$ である．

$\alpha \in X$ のとき： α は X の最大値であることを示そう．$\alpha < x$ を満たす $x \in X$ が存在すると仮定すれば，定理 1.4 の (3) より $\alpha < m < x$ を満たす有理数 $m \in X \cap \mathbb{Q} = A$ が存在する．一方，$\alpha < m$ と定理 1.4 の (2) より $m \in A'$ でなくてはならない．これは矛盾である．よって α は X の最大値である．次に，X' に最小値が存在しないことを示す．もし最小値 $\alpha' \in X'$ があれば，(R2) より $\alpha < \alpha'$ でなくてはならない．しかし定理 1.4 の (3) より，$\alpha < m < \alpha'$ なる有理数 m が存在する．このとき $m \in X$ としても $m \in X'$ としても矛盾である．よって (X, X') は（あ）の型である．

$\alpha \in X'$ のときも，同様の議論で (X, X') は（い）の型となることがわかる． ■

実数の四則

実数は和差積商（加減乗除）の四則があってはじめて数として機能する．もちろんそれは，有理数の四則を自然に拡張したものでなくてはならない．

たとえば実数（すなわち（イ）もしくは（ウ）型の有理数の切断）$\alpha = (A, A')$ $\beta = (B, B')$ が与えられているとき，$\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$ はどのような実数（有理数の切断）として定義されるべきであろうか？

詳細は参考文献に譲ることにして，ここでは和 $\alpha + \beta$ の定義だけを簡単に与えておこう．いま，

$$C := \{a + b \in \mathbb{Q} \mid a \in A,\ b \in B\}, \qquad C' := \mathbb{Q} - C$$

とすると，(C, C') は実数の切断となることがわかるから，これを α と β の**和** (sum) とよび，$\alpha + \beta = (C, C')$ とあらわす．

[2] これは実数の完備性 (completeness) とよばれる性質である．

上限と下限

解析学を学ぶ上でマスターしておきたいのが，ここで紹介する「上限」と「下限」の概念である．

アイディア. 実数からなる集合 S が与えられているとき，一般に「最小値」や「最大値」が存在するとは限らないが,「最小値っぽいもの」や「最大値っぽいもの」を考えたいことがある．

たとえば S が閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ の場合は文句なしに最小値 a，最大値 b をもつ．一方 S が開区間 (a,b) の場合，これらの値は S 自体には含まれないので「S は最小値 a を持つ」「S は最大値 b を持つ」といういい方にはどこか違和感がある[3]．こういうときに，私たちは「S は下限 a を持つ」，「S は上限 a を持つ」といいたいのである．

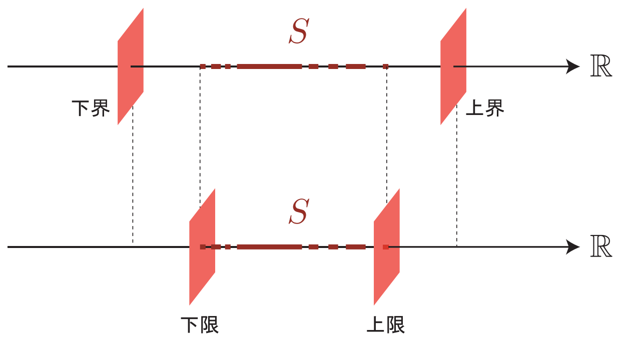
上界と下界.

定義 （上に有界・下に有界・上界・下界）

- $\mathbb{R}$ の部分集合 S が**上に有界** (bounded to the above) であるとは，ある実数 M が存在して，S の任意の元 x が $x \le M$ を満たすことをいう．このような M を S の**上界** (upper bound) とよぶ．
- $\mathbb{R}$ の部分集合 S が**下に有界** (bounded to the below) であるとは，ある実数 M が存在して，S の任意の元 x が $x \ge M$ を満たすことをいう．このような M を S の**下界** (lower bound) とよぶ．
- S が上にも下にも有界であるとき，単に**有界** (bounded) であるという．

言い換えると，実数 M が S の「上界」であるとは，数直線上で M より右側には S の元が存在しないことが確実にわかっている状態をいう．また，S が上に有界で M をその上界とするとき，M 以上の実数はすべて S の上界となる．すなわち，S の「上界」というのはひとつの値に決まるものではない．

例. S が開区間 (a,b) であるとき，b 以上の実数はすべて S の上界である．同様に，a 以下の実数はすべて S の下界である．



上限と下限. 上界・下界はひとつの値に定まらないが,「上界の最小値」「下界の最大値」はひとつに定まる：

[3] S の中だけでは達成できない値を，あたかも実現したかのように聞こえる．

定理 2.2 (ワイエルシュトラスの定理) $\mathbb{R}$ の部分集合 S が上に有界 [下に有界] であるとき S の上界の最小値 [下界の最大値] が存在する．

定義　(上限・下限) S の上界の最小値を S の**上限** (supremum) とよび，$\sup_{x \in S} x$ もしくは $\sup S$ と表す．また，S の下界の最大値を S の**下限** (infimum) とよび，$\inf_{x \in S} x$ もしくは $\inf S$ と表す．

例（区間）． S が開区間 (a, b) であるとき，$\inf_{x \in (a,b)} x = a$ かつ $\sup_{x \in (a,b)} x = b$．S が閉区間 $[a, b]$ であるときも，$\inf_{x \in [a,b]} x = a$ かつ $\sup_{x \in [a,b]} x = b$ が成り立つ．

例（有界でない集合）． S が $\mathbb{R}$ 自身であるとき，そもそも上にも下にも有界ではなく，上限も下限も存在しない．S が整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ であるとき，同様の理由で上限も下限も存在しない．

一方，$S = \mathbb{N}$ であるとき，上限は存在しないが下限は $\inf_{x \in \mathbb{N}} x = 1$．

注意． S が上に有界で <u>ない</u> ときは $\sup_{x \in S} x = \infty$，下に有界で <u>ない</u> ときは $\inf_{x \in S} x = -\infty$ と表すことがある（あくまで記号であり，∞ のことを上限とはいったりしない）．

証明（定理 2.2）のスケッチ．　([小平] の §1.5，[高木]，第 1 章定理 2 参照）M' を S の上界全体からなる $\mathbb{R}$ の部分集合とする．(S は上に有界なので，もちろん $M' \neq \emptyset$.）また，$M := \mathbb{R} - M'$ とおくと，(M, M') は実数の切断となる（要証明）．定理 2.1 より，(M, M') は（あ）型か（い）型のいずれかである．私たちは「M' が最小値を持つ」ことを示したいのだから，（あ）型だと仮定して矛盾を導こう．

（あ）型であれば，M に最大値 m が存在する．このとき $m \notin M'$ であるから，m は上界ではない．よってある $x \in S$ が存在して，$m < x$ を満たす．定理 1.4 の (3) より，$m < r < x$ を満たす r を選ぶことができるが，$x \in S$ より r は S の上界ではない．よって $r \notin M'$．しかし，$r \in M$ すると m の最大性に反する．矛盾である．■

上限・下限の特徴づけ．　「上限」の定義はつぎのように必要十分条件（同値な条件）で置き換えておくと便利である（下限についても同様．証明は演習問題とする）：

定理 2.3 (上限・下限の特徴づけ) S が上に有界な集合とする．$a \in \mathbb{R}$ が S の上限であることは次の (S1) と (S2) が成り立つことと同値：

(S1) a は S の上界．すなわち，$x \in S$ のとき $x \leq a$．

(S2) 任意の $\epsilon > 0$ に対し，$a - \epsilon < x$ を満たす $x \in S$ が少なくともひとつ存在する．

数列の収束性について

次回「数列の収束性」について厳密に取り扱う方法を学ぶので，その前に高校で学んだ「数列の収束性」についておさらいしておこう．

「数列 a_n が実数 A に収束する」とは，「n が限りなく増加するとき，a_n が A に限りなく近づく」ことをいうのであった．

では，次の数列はどうだろう？

例 1． $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ とするとき，a_n は 1 だけでなく，2 にも「限りなく近づく」のではないだろうか？(実際，距離は n とともに縮まっている.）

例 2． 数列 a_n が $1, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{20}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{30}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{40}, \cdots$ は 0 に収束するが，0 から離れたり近づいた

りしながら収束している.「限りなく近づく」というのは，ただ近づいているだけではないらしい.

「近づく」とは. 「近さ」というのは本来相対的な概念である．たとえば，東京-大阪間は東京-横浜間に比べると遠いが，東京-ニューヨーク間に比べると近い.「近さ」というのは「ふたつの距離」の大小関係なのである．このことばを無批判的に無限個の項をもつ数列に当てはめると,「何が何と比べて近いのか」がはっきりとせず，あいまいになってしまう.

「数列の収束」を厳密に定義するには，この点を克服しなくてはならない.

誤差の考え方. 実数の大小関係を把握するために，しばしば，小数展開が用いられる．たとえば円周率 π の小数展開 $3.14159265\cdots$ が既知だとして，

$$a_1 = 3.1,\ a_2 = 3.14,\ a_3 = 3.141,\ a_4 = 3.1415,\ a_5 = 3.14159,\ \cdots$$

という数列を考えると，π に収束しているように感じられる．それが本当に収束している根拠は，a_n と π が小数点 n 桁まで一致することから

$$(a_n \text{と} \pi \text{の絶対誤差}) = |a_n - \pi| < \frac{1}{10^n}$$

が成り立つので，π の近似値として a_n の精度が確実によくなっていることを量的に把握できるからである[4].

一般に数列 a_n がある実数 A の近似値を与えると期待されるとき，任意に小さな目標精度 $\epsilon > 0$（たとえば $\epsilon = 10^{-30}$，小数点以下 30 桁一致相当）を定め，数列 a_n がある $n = N$ から先でこの目標精度を達成するならば,「$n \geq N$ のとき $|a_n - A| < \epsilon$」が成り立つ．すなわち,「目標精度」ϵ という基準を定め，それと実際の誤差 $|a_n - A|$ の大小関係を比較する.

このような観点から「近づく」という概念のあいまいさを克服し数列の収束を定式化したのが，いわゆる ϵ 論法（ϵ-N 論法）による収束の定義である.

レポート問題

締め切りは 5 月 1 日の講義開始前とします.

問題 3-1.（上限・下限） 以下の集合について，上限・下限が存在すればその値を求めよ.

(1) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$　　(2) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

(3) $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\right\}$　　(4) $S = \{\cos x \mid 0 < x < 2\pi\}$

問題 3-2.（上限・下限の特徴づけ） 定理 2.3 を示せ．また，集合の下限について定理 2.3 に対応する定理を述べ，その証明を与えよ.

問題 3-3.（上限と下限） 数列 $\{a_n\}$ を実数の集合とみなしたとき，その上限と下限をそれぞれ $\sup\limits_n a_n$，$\inf\limits_n a_n$ と表す．たとえば $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n = 1$，$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n = -1$ など.

(1) $\sup\limits_n(a_n + b_n) \leq \sup\limits_n a_n + \sup\limits_n b_n$ を示せ．また，等号が成立しない例を与えよ.

(2) $\inf\limits_n(a_n + b_n) \geq \inf\limits_n a_n + \inf\limits_n b_n$ を示せ．また，等号が成立しない例を与えよ.

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあればメールでご指摘ください.

[4] 小数には「繰り上がり」という面倒な性質があるので，$|a_n - A| < 1/10^n$ だからといって a_n と A が小数点以下 n 桁まで一致するとは限らない．この不等式は「小数点以下 n 桁一致相当の精度」だと解釈するのが正しい.

数列の収束・コーシー列（4/24）

配布日：2015/5/1　Version：1.1

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第 1 章　• 高木貞治『解析概論』の第 1 章.

数列の収束

ある実数 A に対し，その近似値 a が $|a-A|<1/10^n$ を満たすとき，a は A と「小数点以下 n 桁一致相当の精度をもつ」といえるのだった（前回の最後の議論）．この事実を踏まえて，数列の収束性を以下のように定義する：

定義 (数列の収束) 数列 $\{a_n\}$ が実数 A に**収束する** (converge) とは，任意の $\epsilon>0$ に対し，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在し，

$$n\geq N \quad \text{のとき} \quad |a_n-A|<\epsilon \tag{3.1}$$

を満たすことをいう．このとき，$a_n\to A\ (n\to\infty)$ もしくは $\lim_{n\to\infty}a_n=A$ と表す．また，A を数列 a_n の**極限** (limit) とよぶ.

注意.

- 「収束」の定義は記号だけで「$\forall\epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\quad |a_n-A|<\epsilon$」と表されることもある[1].
- a_n は実数 A の近似列だと考えられる．式 (3.1) の不等式 $|a_n-A|<\epsilon$ は,「a_n が A を誤差 ϵ 未満で近似している」と解釈できる.
- ϵ は近似精度の目標値であり，任意に「小さな」正の数を選ぶ．たとえば $\epsilon=\dfrac{1}{10^5}$ なら小数点以下 5 桁一致相当の精度，$\epsilon=\dfrac{1}{10^{50}}$ なら小数点以下 50 桁，$\epsilon=\dfrac{1}{10^{500}}$ なら小数点以下 500 桁，といった具合である.
- N は目標精度 ϵ に依存して決まるので，$N=N(\epsilon)$ とか $N=N_\epsilon$ などと書かれることもある．たとえば $\epsilon=\dfrac{1}{10^{50}}$ のとき，$n\geq N\left(\dfrac{1}{10^{50}}\right)$ であれば a_n は A を小数点以下 50 桁一致相当の精度で近似する.
- どの実数にも収束しない数列は**発散する** (diverge) という.

例題 3.1 (数列の収束) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$ を示せ.

解答. $\left|\dfrac{n-1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$ であることに注意する．任意の（任意に小さな） $\epsilon>0$ に対し，ある（十分に大きな） $N\in\mathbb{N}$ が存在して $1/N<\epsilon$ とできる[2]．よって $n\geq N$ のとき,

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\epsilon.$$

[1] 括弧を使って「$(\forall\epsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geq N)\quad |a_n-A|<\epsilon$」と表すこともある.

[2] 次の性質（「アルキメデスの原則」とよばれる）を用いている：任意の正の数 ϵ, a に対し，$n\epsilon>a$ を満たす自然数 n が存在する．証明を考えてみよ.

ゆえに $\dfrac{n-1}{n} \to 1 \ (n \to \infty)$. ■

命題 3.1 (極限の四則) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ のとき，次が成り立つ：

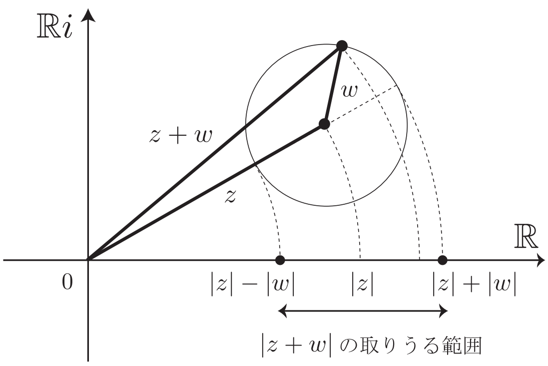
(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$　　(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

(3) $B \neq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$.

a_n, b_n がそれぞれ A，B の近似値であれば，$a_n + b_n$ は $A+B$ の近似値となるであろう．この命題はそのことを正当化したものである．証明の前に，解析学でもっとも基本的な不等式である「三角不等式」を確認しておこう：

命題 3.2 (三角不等式) z, w を複素数とするとき，

$$|z| - |w| \le |z + w| \le |z| + |w|. \tag{3.2}$$



証明.　まず仮定より，

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \ge N) \quad |a_n - A| < \epsilon \ \text{ かつ } \ |b_n - B| < \epsilon \tag{3.3}$$

としてよい[3].
(1) 三角不等式 (3.2) と式 (3.3) より，$|(a_n+b_n)-(A+B)| = |(a_n-A)+(b_n-B)| \le |(a_n-A)|+|b_n-B| < \epsilon+\epsilon = 2\epsilon$. ϵ は任意だったので，$\epsilon' := 2\epsilon$ も任意に選ぶことができる．よって $a_n + b_n \to A + B \ (n \to \infty)$.
(2) 収束性の定義より，$\epsilon_0 = 1$ とおくと，ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，$n \ge N_0$ のとき $|a_n - A| \le 1$ が成り立つ．三角不等式 (3.2) より，$|a_n| - |A| \le 1$，よって $|a_n| \le |A| + 1$.
　いま $n \ge \max\{N_0, N\}$ とすれば，ふたたび三角不等式 (3.2) より

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \le |a_n||b_n - B| + |a_n - A||B| \\ &\le (|A|+1)\epsilon + \epsilon|B| = (|A|+|B|+1)\epsilon. \quad \text{（注：これは誤差の評価式になっている）} \end{aligned}$$

ϵ は任意に小さくとれるので，$\epsilon' := (|A|+|B|+1)\epsilon$ も任意に小さくとれる．よって $a_n b_n \to AB \ (n \to \infty)$
(3) →レポート問題. ■

単調列の収束

数列の収束性の定義を眺めていると，定義の中に「極限の値 A」がすでに使われていることに気がつく．したがって，極限が存在するかどうかがわからない状況では，定義に当てはめて収束性を判定することはできない．たとえば，まったく予備知識のない状態で

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

[3] 正確には，$n \ge N_A$ のとき $|a_n - A| < \epsilon$，$n \ge N_B$ のとき $|b_n - B| < \epsilon$ となるように N_A，N_B を選び，$N := \max\{N_A, N_B\}$ とおけばよい．

といった数列が与えられたとき，私たちにはまだ，これらが「ある実数に収束する」と言い切れるだけの根拠がないのである．(本当は両方とも e に収束する.)

そのあたりの不便を解消していこう．

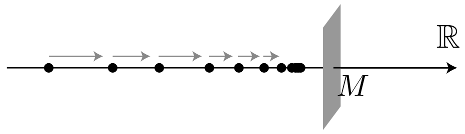
定義　(単調な数列) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$ を満たすとき**単調増加** (monotone increasing)，$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ を満たすとき**真に単調増加** (strictly increasing) であるという．また，$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots$ を満たすとき**単調減少** (monotone decreasing) $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ を満たすとき**真に単調減少** (strictly decreasing) であるという．

これらの数列はまとめて**単調** (monotone) な数列もしくは**単調列** (monotone sequence) とよばれる．

次の定理は，極限を知らない状態で数列の収束性を保証する「十分条件」である：

定理 3.3 (有界単調列は収束) 上に [下に] 有界かつ単調増加 [減少] な数列はある実数に収束する．

ここで数列が「上に有界」であるとは，$\{a_n\}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とみなしたときに上に有界であることを意味する．「下に有界」も同様．



証明（定理 3.3）．集合 $\{a_n\}$ が上に有界であれば，上限 A が存在する（定理 2-2）[4]．このとき，任意に小さい $\epsilon > 0$ に対して，$A - \epsilon \le a_N \le A$ を満たす自然数 N が存在する．(そうでないと，すべての n で $a_n \le A - \epsilon < A$ となるが，これは A が上限であったことに反する.）このとき

$$A - \epsilon \le a_N \le a_{N+1} \le a_{N+2} \le \cdots \le A$$

が成り立つから，すべての $n \ge N$ に対し $|a_n - A| < \epsilon$．よって $a_n \to A \ \ (n \to \infty)$．下に有界かつ単調減少の場合の証明も同様である．(もしくは，$b_n := -a_n$ とすれば上の場合に帰着される.) ■

例 1．先ほどの $\{a_n\}$ は単調増加かつ上に有界である．(どの微積の教科書にも書いてある.）よって定理 3.3 より収束する．この極限を $e = 2.71828\cdots$ と定めるのであった．

$\{b_n\}$ のほうは明らかに単調増加である．また，$n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \ge 2 \cdots 2 \cdot 1 = 2^{n-1}$ より，$b_n \le 1 + 1 + 1/2 + \cdots + 1/2^{n-1} < 3$．よって上に有界であるから，$\{b_n\}$ は収束する．(「テイラー展開」を用いると，これが e に収束することが示される.)

コーシー列

定理 3.3 は収束することの十分条件を与えるものであった．つぎは必要十分条件を考えよう．

数列の収束性の定義に用いた式 (3.1)　$|a_n - A| < \epsilon$ は，極限 A の値をあらかじめ知らないとチェックできない．一方，次の「コーシー列」の条件は，数列の値を見るだけでチェック可能である：

定義　(数列の収束) 数列 $\{a_n\}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し，

$$n \ge m \ge N \quad のとき \quad |a_n - a_m| < \epsilon \tag{3.4}$$

を満たすことをいう．

[4] これを $\sup_n a_n$ と表す．同様に下限は $\inf_n a_n$ と表す．

このとき，次の定理が成り立つ：

定理 3.4 (収束列 $\Longleftrightarrow$ コーシー列) 実数の列 $\{a_n\}$ が収束することと，コーシー列であることは同値（互いに必要十分条件）である．

注意.

- すなわち，極限を知らなくても．コーシー列であることが確認できれば収束性が保証される．
- **式 (3.4) の意味**：たとえば $\epsilon = \dfrac{1}{10^M}$ とおくと，$n \geq m \geq N$ のとき（m と n の大小関係は重要ではない）$|a_n - a_m| < \epsilon = \dfrac{1}{10^M}$．これは，$a_n$ と a_m の値が小数点以下 M 桁一致相当の近さをもつことを意味する．すなわち，$a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots$ は（繰り上がりがおきない限り）小数点以下 M 桁が一致し続ける．M がどれだけ大きな自然数であっても，そのような N を見つけることができるのだから，数列 $\{a_n\}$ はその小数が定める実数へと収束していると考えるのが道理にかなっている．
- 有理数からなるコーシー列に関しては，その極限が有理数でないかもしれない．しかし実数からなるコーシー列は，必ず実数の中に極限をもつ．この状況を，「有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は完備でない」,「実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は完備」と表現する．

証明（定理 3.4）．まず収束列がコーシー列であることを示そう．ある実数 A が存在し，任意の $\epsilon > 0$ に対し $N \in \mathbb{N}$ が存在し $n \geq N$ のとき $|a_n - A| < \epsilon/2$ が成り立つと仮定する．$n \geq m \geq N$ のとき，三角不等式 (3.2)

$$|a_n - a_m| \leq |(a_n - A) - (a_m - A)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

が成り立つ．よって $\{a_n\}$ はコーシー列の条件を満たす．

逆は比較的難しいので次回に．(たとえば [小平]1.4 節，[高木] 第 1 章 6 節参照.) ■

レポート問題

締め切りは 5 月 22 日の講義開始前とします．5 月 8 日は休講（午後の演習はあり），5 月 15 日はホームカミングデイのため休講.

問題 4-1. (商の極限) 命題 3.1(3) を示せ．

問題 4-2. (超典型問題) 数列 $\{a_n\}$ が実数 A に収束するとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$ を示せ．

問題 4-3. (コーシー列) $|r| < 1$ のとき，$a_n := 1 + r + \cdots + r^{n-1}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ はコーシー列の定義を満たすことを示せ．

ボーナス問題（+1 point）．このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあれば メールで ご指摘ください．

区間縮小法，上極限と下極限（5/1）

配布日：2015/5/22 Version：1.1

参考文献： • 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第 1 章 • 高木貞治『解析概論』の第 1 章

コーシー列の収束性

数列 $\{a_n\}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し，

$$n \geq m \geq N \quad \text{のとき} \quad |a_n - a_m| < \epsilon \tag{4.1}$$

を満たすことをいうのであった．

今回は次の定理の証明を完了させる [1]：

> **定理 3.4（再，収束列 $\Longleftrightarrow$ コーシー列）** 実数の列 $\{a_n\}$ が収束することと，コーシー列であることは同値（互いに必要十分条件）である．

収束する数列はコーシー列であることは前回示した．今回のテーマは，逆に，コーシー列が収束列であることを示すことである．

区間縮小法

まずは次の定理を証明しよう．

> **定理 4.1 (区間縮小法)** 閉区間の列 $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が次の (I1)，(I2) を満たすと仮定する：
>
> (I1) すべての n に対し，$I_{n+1} \subset I_n$
>
> (I2) $[I_n\text{の長さ}] = |b_n - a_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$
>
> このとき，すべての I_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ に含まれる実数 A がただひとつ存在し，
>
> $$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

注意. 「閉区間」の列であることが重要.「開区間」の場合，極限の存在はわからない．たとえば，$I_n = (0, 1/n)$ は (I1) を満たし長さも 0 に収束するが，$\bigcap_n I_n = \emptyset$.

証明. (I1) より

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

が成り立つ．したがって，数列 $\{a_n\}$ は上に有界かつ単調増加，数列 $\{b_n\}$ は下に有界かつ単調減少となることがわかる．定理 3.3（前回）より，$\{a_n\}$ は $A := \sup_n a_n$ に収束し，$\{b_n\}$ は $B := \inf_n b_n$ に収束する．

$A \neq B$ と仮定しよう．このとき，$\delta := |A - B| > 0$ である．$A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ より，ある $N = N(\delta)$ が存在して，$n \geq N$ のとき

$$|a_n - A| < \delta/4 \quad \text{かつ} \quad |b_n - B| < \delta/4$$

が成り立つようにできる．これより $|a_n - b_n| \geq |A - B| - (|a_n - A| + |b_n - B|) > \delta/2$ となる [2] が，これは (I2) に反する．よって $A = B$ である．とくに $a_n \leq A = B \leq b_n$ が成り立つことから，すべての n について $A \in I_n$ がいえる．

[1] 講義では定理 3-3 としていましたが，プリントの番号に合わせて定理 3.4 としています．

[2] 図を描けばあたりまえの不等式だが，まじめに証明したければ三角不等式 $|A - B| \leq |A - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - B|$ を変形すればよい．

最後にそのような A の一意性を示そう．もし A でない A' がすべての n について $A' \in I_n$ を満たせば，$0 < |A - A'| \le |b_n - a_n|$ となる．これは (I2) に矛盾する． ■

定理 3.4 の証明

まず，次の補題が必要である：

> **補題 4.2 (コーシー列の有界性)** $\{a_n\}$ がコーシー列であるとき，すべての n に対し集合 $S_n := \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ は有界である．

証明はレポート問題としよう．この補題を認めて，コーシー列は収束列であることを示そう．

定理 3.4 の証明のつづき． 補題 4.2 より，S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ はすべて（上下に）有界な集合である．ワイエルシュトラスの定理（定理 2.2）より，S_n には下限 x_n と上限 y_n が存在する．一方，S_n の定義より $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$ が成り立つから，

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots \le y_n \le \cdots \le y_2 \le y_1$$

が成り立つ．よって，区間 $I_n := [x_n, y_n]$ は区間縮小法（定理 4.1）の仮定 (I1) を満たす．これが (I2) も満たすことを示そう．

$\epsilon > 0$ を任意に小さくとり，固定しておく．$\{a_n\}$ はコーシー列であるから，ある自然数 N が存在し，$n \ge m \ge N$ のとき $|a_n - a_m| < \epsilon/2$ が成り立つ．このような N に対し，$S_N = \{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots\}$ を考えよう．$x_N = \inf S_N$ であったから，ある $m' \ge N$ が（少なくともひとつ）存在し，

$$x_N \le a_{m'} \le x_N + \epsilon/4$$

が成り立つ．同様に，$y_N = \sup S_N$ であったから，ある $n' \ge N$ が（少なくともひとつ）存在し，

$$y_N - \epsilon/4 \le a_{n'} \le y_N$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} |y_N - x_N| &\le |y_N - a_{n'} + a_{n'} - a_{m'} + a_{m'} - x_N| \\ &\le |y_N - a_{n'}| + |a_{n'} - a_{m'}| + |x_N - a_{m'}| < \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4 = \epsilon. \end{aligned}$$

区間 I_n の長さ $|y_n - x_n|$ は単調減少だから，$n \ge N$ のとき，$|y_n - x_n| \le |y_N - x_N| < \epsilon$．$\epsilon$ は任意だったので，$|y_n - x_n| \to 0$ $(n \to \infty)$．よって閉区間 $I_n = [x_n, y_n]$ は区間縮小法（定理 4.1）の仮定 (I2) を満たす．

定理 4.1 より，すべての n に対し $A \in [x_n, y_n]$ かつ $A = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ を満たす A がただひとつ存在する．いま $a_n \in S_n \subset [x_n, y_n]$ であるから，$|a_n - A| \le |y_n - x_n| \to 0$ $(n \to 0)$．よって $\{a_n\}$ は収束し，極限 A を持つ． ■

上極限と下極限

すこし厄介だが重要な概念である（数列の）「上極限」と「下極限」を紹介しよう．

まず，数列 $\{a_n\}$ （収束するとは限らない）が有界な場合を考えよう．$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$S_n := \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ とおく．このとき，$\{a_n\}_{n\ge1} = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$ はすべて有界な集合であるから，ワイエルシュトラスの定理（定理 2.2）より，S_n には下限 x_n と上限 y_n が存在する．すなわち，

$$x_n := \inf S_n = \inf_{k\ge0} a_{n+k}, \quad y_n := \sup S_n = \sup_{k\ge0} a_{n+k}.$$

これらは

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots \le y_n \le \cdots \le y_2 \le y_1$$

を満たすから，数列 $\{x_n\}$ は上に有界かつ単調増加，数列 $\{y_n\}$ は下に有界かつ単調減少となることがわかる．定理 3.3（前回）より，$\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は収束する．

定義 (上極限・下極限) 有界な数列 $\{a_n\}$ に対し，$x_n := \inf_{k\geq 0} a_{n+k}$ で定まる数列 $\{x_n\}$ の極限を数列 $\{a_n\}$ の**下極限** (inferior limit) とよび，

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{もしくは} \quad \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$$

と表す．また $y_n := \sup_{k\geq 0} a_{n+k}$ で定まる数列 $\{y_n\}$ の極限を数列 $\{a_n\}$ の**上極限** (superioir limit) とよび，

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{もしくは} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$$

と表す．

このとき，次が成り立つ：

定理 4.3 有界な 数列 $\{a_n\}$ がある実数に収束するための必要十分条件は，その上極限と下極限が一致することである．

証明はレポート問題としよう．

注意.

- $\{a_n\}$ が下に有界で「ない」とき，$\liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty$，$\{a_n\}$ が上に有界で「ない」とき，$\limsup_{n\to\infty} a_n := \infty$ と定義する．
- $\{a_n\}$ が下に有界で「ない」が上に有界であるとき，$y_n := \sup_{k\geq 0} a_{n+k}$ は単調減少列となり，数列 $\{y_n\}$ は極限をもつか $-\infty$ に発散する．後者を $\lim_{n\to\infty} y_n := -\infty$ と書くことにすれば，$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} y_n$ がつねに定まり，これを $\{a_n\}$ の上極限として定義する．$\{a_n\}$ が上に有界で「ない」が下に有界であるときも，同様にして下極限 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ が定まる．
- 以上の定義から，すべての数列 $\{a_n\}$ に対しその「上極限」と「下極限」が定まることになる．
- **意味**：$\{a_n\}$ が有界であるとき，「数列 $\{a_n\}$ の無限個の項を用いて限りなく近似できるような数」全体の集合を考えたとき，その最大の数が $\limsup a_n$ であり，その最小の数が $\liminf a_n$ である．正確には，無限個の添え字 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ を選ぶことで $A = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ と表現できるような実数 A の全体を考え，その最大値と最小値を上極限，下極限とよぶのである．

レポート問題

締め切りは 5 月 29 日の講義開始前とします．

問題 5-1. (コーシー列の有界性) 補題 4.2 を示せ．

問題 5-2. (上極限・下極限) 定理 4.3 を示せ．

問題 5-3. (上極限・下極限) 次の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限と下極限を求めよ（答えのみでよい）．

(1) $a_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{4}$ (2) $a_n = n\sin\dfrac{n\pi}{4}$ (3) $a_n = n^2$ (4) $a_n = -\log n$

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあれば メールで ご指摘ください．

ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理（5/22）

配布日：2015/5/29　Version：1.1

参考文献：
- 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第 1–2 章
- 高木貞治『解析概論』の第 1 章

集積点とワイエルシュトラスの定理

今回は「有界な数列は収束する部分列をもつ」という「ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理」の証明を目標とする．これは数列がもつ，もっとも重要な性質だといっても過言ではない．

まずはその基盤となる,「集積点」に関する「ワイエルシュトラスの定理」を示そう．

定義 (集積点) S を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．$x \in \mathbb{R}$（S に属するとは限らない）が S の**集積点**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$|x-y| < \epsilon$ を満たす S の元 y が無限個存在することをいう．

注意. 次のようにいい替えてもよい：「任意の $\epsilon > 0$ に対し，$0 < |x-y| < \epsilon$ を満たす S の元 y が存在する.」（→レポート問題）

例 1. $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ のとき，$x = 0$ は S の唯一の集積点である．しかし，$0 \notin S$ であることに注意.

例 2. $S = \mathbb{Q}$ （有理数全体の集合）とするとき，任意の実数は S の集積点である.（→レポート問題）

集積点に関して次が成り立つ：

定理 5.1 (ワイエルシュトラス) 有界な無限集合は（少なくともひとつ）集積点をもつ.

証明. S を $\mathbb{R}$ の有界な無限集合とする．有界性より，$x_0 := \inf S$, $y_0 := \sup S$ が定まるので，$I_0 := [x_0, y_0]\ (\supset S)$ とおく.

ここで $m_0 := \dfrac{x_0 + y_0}{2}$ として，区間 $[x_0, m_0]$ と $[m_0, y_0]$ を考えると，少なくともいずれか一方は（もしくは両方が）S の元を無限個含む．それを（両方の場合はひとつ選んで）$I_1 := [x_1, y_1]$ とする.

さらに $m_1 := \dfrac{x_1 + y_1}{2}$ として，区間 $[x_1, m_1]$ と $[m_1, y_1]$ を考えると，やはりいずれか一方は S の元を無限個含む．それを $I_2 := [x_2, y_2]$ とする.

以下同様の操作を繰り返すと，

$$I_{n+1} \subsetneqq I_n, \quad [I_n \text{の長さ}] = \frac{|y_0 - x_0|}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たす区間の列 $\{I_n\}_n$ を得る．区間縮小法（定理 4.1）より，ある $A \in \mathbb{R}$ がただひとつ存在して，

$$A = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \quad \text{かつ} \quad \forall n \geq 0, \quad A \in I_n.$$

ここで，$I_n \cap S$ は無限集合なので，各 $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し

$$A_n \in I_n \cap S - \{A\} \quad \text{かつ} \qquad m < n \implies A_m \neq A_n$$

となるように数列 $\{A_n\}$ を選ぶことができる．A, $A_n \in I_n = [x_n, y_n]$ より，

$$|A_n - A| \leq |y_n - x_n| \to 0 \quad (n \to 0).$$

よって A は S の集積点である. ■

部分列とボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理

数列の「部分列」を定義しよう．

定義 (部分列) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられているとき，自然数の増加列

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots$$

を選んで得られる数列

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ a_{n_4},\ \ldots$$

を数列 $\{a_n\}$ の**部分列** (subsequence) とよび，$\{a_{n_k}\}$ もしくは $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ のように表す．

例 3. $n_k = 2^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ とするとき，$\{a_n\}$ の部分列 $a_2, a_4, a_8, a_{16}, \ldots$ が定まる．

例 4. $\{a_n\}$ の同じ項を繰り返して得られる数列，たとえば $a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots$ は部分列とはいわない．添字は（真に）増加列になっていなければならないからである．

例 5. $a_n = (-1)^n$ とするとき，$n_k = 2k$ として得られる数列 $a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$ は値としては $1, 1, 1, 1, \ldots$ であり同じ値を繰り返すが，こちらは「部分列」の条件を満たしている．数列の添字がちゃんと（真に）増加しているからである．

部分列に関するもっとも基本的かつ重要な性質が，次の定理である：

定理 5.2 (ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理) 有界な数列は収束する部分列を含む．

証明. 有界な数列 $\{a_n\}$ が与えられているとき，それを集合として $S := \bigcup_{n \geq 1} \{a_n\} = \{a_n \mid n \geq 1\}$ と表現してみよう [1]．

S が有限集合であれば，$a_n = A$ となる自然数 n が無限個存在するような A が S の中に少なくともひとつ存在する．そのような自然数たちを $n_1 < n_2 < \cdots$ と小さい順に並べれば，部分列 $\{a_{n_k}\}$ は $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$ を満たす．よって収束する部分列が存在する．

S が無限個の元をもつときは，定理 5.1（の証明）より，S 内の数列 $\{A_i\}_{i\geq 1}$ と S の集積点 A が存在して「$i \neq j$ のとき $A_i \neq A_j$」かつ $\lim_{i\to\infty} A_i = A$ を満たす．S の定義から各 A_i に対して自然数 $n(i)$ が（少なくとも 1 つ）存在し，$A_i = a_{n(i)}$ を満たす．添え字の列 $n(1), n(2), n(3), n(4), \cdots$ は増加列とは限らないが，「$i \neq j$ のとき $A_i \neq A_j$」であったから，すべて異なる自然数である．そこで，必要ならさらに部分列を取ることで（すなわち $\{A_i\}$ を「間引き」することで）増加列だと仮定してよい [2]．このとき，数列 $a_{n(1)}, a_{n(2)}, a_{n(3)}, a_{n(4)}, \cdots$ は A に収束する部分列である． ■

上極限と下極限・再訪

$\{a_n\}$ を有界数列とするとき，上極限 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ とは「$\{a_n\}$ の部分列で収束させることができる最大の実数」であり，下極限 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ とは「$\{a_n\}$ の部分列で収束させることができる最小の実数」ということになる．

---

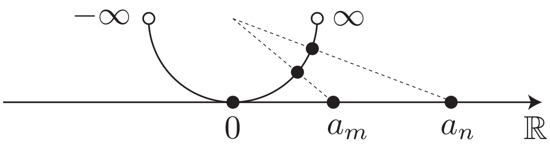
[1] たとえば $a_n = (-1)^n$ のとき，$S = \{-1, 1\}$．

[2] 具体的には次のようにやればよい：まず $n_1 := n(1)$ とし，さらに $n(2), n(3), n(4), \cdots$ の中で最初に $n(1) < n(i)$ を満たす $n(i)$ を n_2 とする．以下同様に，$n(i) < n(j)$ を満たす最初の $j(> i)$ を n_3，などと繰り返せば，添字の増大列 $n_1 < n_2 < \cdots$ と A に収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ が得られる．

例 6. たとえば $a_n = \dfrac{1}{n}$ の場合，この数列の部分列で収束させることができる数は 0 だけである．よって $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$.

例 7. $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{3}$ の場合，この数列の部分列で収束させることができる数は 0 と $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ だけである．よって $\limsup_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

$\{a_n\}$ が有界で「ない」場合も，ひと工夫すれば同様のアイディアで上極限と下極限を理解することができる．



図のように数直線の原点の上に半円を置くと，数直線全体と半円の端点以外が対応する．このとき，数直線上の収束列は半円上の収束点列に見える．

いま，有界で「ない」数列を半円で見てみよう．このとき，対応する点列はその端点のいくらでも近くに到達できる．すなわち，部分列をうまく選べば端点に「収束する」点列を見つけることができる．右の端点を ∞，左の端点を $-\infty$ と解釈すれば，上極限と下極限は $\pm\infty$ も込みで数列の部分列が収束できる「最大」と「最小」の点ということになる．

関数

次回から扱う関数について，一連の用語を定義しておこう．

定義 （関数，定義域，値域，etc.） D を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．

- D の各元 a にひとつの実数 b を対応させたものを D 上の**関数** (function) という．
- f をそのような関数とするとき，b を a における関数 f の**値** (value) とよび，$b = f(a)$ と表す．
- D を関数 f の**定義域** (domain) とよぶ．
- 集合 $S \subset D$ に対し，集合
$$f(S) := \{f(a) \in \mathbb{R} \mid a \in S\} = \{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in S, b = f(a)\}$$
を関数 f による S の**像** (image) という．とくに，$f(D)$ を関数 f の**値域** (range) とよぶ．
- 関数 f の値域 $f(D)$ が集合 $X \subset \mathbb{R}$ に入っていることがわかっているとき，関数 f を $f : D \to X$ のように表す．

注意. 関数 f を表すのに，しばしば $y = f(x)$ という形が用いられる．この x と y は通常変数 (variable) とよばれるが，意味としてはそれぞれ定義域と値域の実数を代入しうる「空箱」のよう

なものである[3]．一般に，関数 f の定義域 D 内のすべての値を自由にとりうる文字として記号 x を用いるとき，これを**独立変数** (independent variable) x とよび，その値 $f(x)$ として記号 y を用いるとき，これを**従属変数** (dependent variable) y とよぶ．

例 8. $f(x) = x^2$ を $x \in D := [-1, 2)$ 上に制限して考える．このとき，値域は $f(D) = [0, 4)$ である．また，この関数の表現として

$$f : [-1, 2) \to [0, 4), \quad f : [-1, 2) \to [0, \infty), \quad f : [-1, 2) \to \mathbb{R},$$

はすべて正しい．

レポート問題

締め切りは 6 月 5 日の講義開始前とします．

問題 6-1. (集積点) 「x が集合 $S \subset \mathbb{R}$ の集積点である」ことは,「任意の $\epsilon > 0$ に対し，$0 < |x-y| < \epsilon$ を満たす S の元 y が存在する」ことと同値であることを示せ．

問題 6-2. (有理数と実数) 任意の実数は有理数の集合 $\mathbb{Q}$ の集積点であることを示せ．

問題 6-3. (部分列) 有界な数列 $\{a_n\}$ は $m \neq n$ のとき $a_m \neq a_n$ を満たすと仮定する．このとき，$\{a_n\}$ の収束する部分列で，真に単調増加もしくは真に単調減少なものを選ぶことができることを示せ．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあれば メールで ご指摘ください．

[3]．関数解析では関数 f を $f(\cdot)$ のように表現することも多い．この $(\cdot)$ はまさに，定義域内の実数を挿入する「空箱」であることを表現している．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210 東京工業大学 理学部 数学科

関数の極限と連続性（5/29）

配布日：2015/6/5　Version：1.1

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第 1–2 章　• 高木貞治『解析概論』の第 1 章

関数の極限

いわゆる ϵ-δ 論法（ϵ 論法）を用いて関数の極限を厳密に定義しよう．

定義 (関数の極限) I を区間とし，a を区間 I 上の点とする．また，関数 f を少なくとも $I-\{a\}$ で定義された関数とする．「$x \to a$ のとき $f(x)$ が実数 A に**収束する** (converge)」とは，任意の（任意に小さな） $\epsilon > 0$ に対しある $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在し，

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

が成り立つことをいう．これを

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \to A$$

もしくは

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

と表し，A を関数 f の $x \to a$ のときの**極限** (limit) とよぶ．

注意.

- $\delta = \delta(\epsilon)$ というのは，δ が ϵ のとり方に依存することを示唆する記法である [1]．
- $0 < |x-a|$ という条件（すなわち $x = a$ は考えない）が効力を発揮するのは，たとえば関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ のような場合である．$x = 0$ のとき $f(0)$ は $\dfrac{0}{0}$ となり定義できないが，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は意味をもつ．
- $0 < |x-a| < \delta$ という条件には「$x \in I$」という条件も含まれているが，わざわざ書かないのがならわしである．（そもそも $f(x)$ が意味を持つには $x \in I$ が必要である．）例えば $I = [a, b]$ $(a < b)$ のように，a が区間の端点である場合もありうるが，この場合条件 $0 < |x-a| < \delta$ は「$a < x < a+\delta$ であり，しかも $a + \delta \le b$ となるように δ は十分小さくとる」のだと解釈する．
- 任意の（任意に大きな） $M > 0$ に対しある $\delta = \delta(M) > 0$ が存在し，

  $$0 < |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M \quad [f(x) < -M]$$

  が成り立つとき，「$x \to a$ のとき $f(x)$ は ∞ $[-\infty]$ に**発散する** (diverge)」という．これを

  $$x \to a \text{ のとき } f(x) \to \infty \quad [f(x) \to -\infty]$$

  もしくは

  $$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad [\lim_{x\to a} f(x) = -\infty]$$

  と表す．（$\pm\infty$ に「収束する」とはいわない．）
- 条件 $0 < |x-a| < \delta$ を

  $$0 < x - a < \delta \quad \text{すなわち} \quad a < x < a + \delta$$

[1] 実際には f や a にも依存するので，$\delta = \delta(f, a, \epsilon)$ とすべきかもしれないが，ここでは f や a を固定して考えているのである．

に変えたとき，これを

$$x \to a+0 \text{ のとき } f(x) \to A$$

もしくは

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A$$

と表し，A を関数 f の a における**右極限** (right-hand limit) とよぶ．

- 同様に，条件 $0 < |x-a| < \delta$ を

$$-\delta < x-a < 0 \quad \text{すなわち} \quad a-\delta < x < a$$

に変えたとき，これを

$$x \to a-0 \text{ のとき } f(x) \to A$$

もしくは

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A$$

と表し，A を関数 f の a における**左極限** (left-hand limit) とよぶ．

- 右極限と左極限を合わせて**片側極限** (one-sided limit) とよぶ．また，$x \to a+0$ と $x \to a-0$ はそれぞれ $x \nearrow a$ と $x \searrow a$ もしくは $x \downarrow a$ と $x \uparrow a$ と表されることも多い．
- $\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty$ といった記号も同様に定義される．

極限の性質． 数列と同様にして，つぎの公式が示される：

公式 6.1 (極限の四則・はさみうちの原理) $\lim_{x \to a} f(x) = A$，$\lim_{x \to a} g(x) = B$ のとき，次が成り立つ：

(1) $\boldsymbol{\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = A + B}$.

(2) $\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB}$.

(3) $B \neq 0$ のとき $\boldsymbol{\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}}$.

(4) $f(x) < g(x)$ であれば，$\boldsymbol{A \le B}$.

(5) $A = B$ かつ $f(x) < h(x) < g(x)$ のとき，

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} h(x) = A}. \quad \text{（はさみうちの原理）}$$

(4) と (5) の不等号 $<$ はいずれも $\le$ に変えてもよい．さらに，同様の公式は片側極限についても正しい．

関数の連続性

ϵ 論法を用いると，関数の連続性は次のように表現される：

定義 (連続性) I を区間とし，a を区間 I 上の点とする．また，関数 f を（少なくとも）I 上で定義された関数とする．(これを $f: I \to \mathbb{R}$ と表すのであった.)
　関数 f が $x = a$ で**連続** (continuous) であるとは，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

であることをいう．すなわち，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在し，

$$|x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

が成り立つことをいう．f が I 上のすべての点で連続であるとき，**関数 f は I 上で連続**である，もしくは**f は I 上の連続関数**であるという．

注意． 公式 6.1 より，連続関数の和（差），積，商，合成はいずれも定義可能な範囲で連続となることがわかる．

数列による言い替え． 関数の連続性を数列の言葉に置き換えておくと便利である；

命題 6.2 (数列による連続性の定義) $f: I \to \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で連続であることは，次と同値：「a に収束する任意の数列 $\{a_n\}_n \subset I$ に対し，数列 $\{f(a_n)\}_n$ は $f(a)$ に収束する.」すなわち，

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \to \infty} a_n) = f(a) \quad :「像の極限は極限の像」$$

証明はレポート問題としよう．

中間値の定理

　連続関数のグラフが「つながっている」ことの根拠とされるのが，次の「中間値の定理」である：

定理 6.3 (中間値の定理) 閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $y = f(x)$ が $f(a) \neq f(b)$ を満たすとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の実数 ℓ に対し，$f(c) = \ell$ を満たす c が区間 (a, b) に少なくともひとつ存在する．

下線部に関する注意． この定理では,「実数の連続性」と関数が「連続関数」であることが重要な役割を果たす．以下の議論のどこでそれらの性質が効いているのか，意識しておこう．
　「中間値の定理」の証明を与えるまえに，唐突だが「方程式の数値解法」について考える.(「中間値の定理」は「方程式 $f(x) = \ell$ の解 $c \in (a, b)$ が存在する」と主張しているのだから，決して無関係ではない.) 与えられた関数 $y = f(x)$ について方程式 $f(x) = 0$ の解を任意の精度で求める，そのような数値計算でもっとも初歩的な方法が，**二分法**とよばれる次のアルゴリズムである：

二分法． 連続関数 $y = f(x)$ に対し，方程式 $f(x) = 0$ の解 α を数値的に求める次のアルゴリズム（手順）を，**二分法**とよぶ：

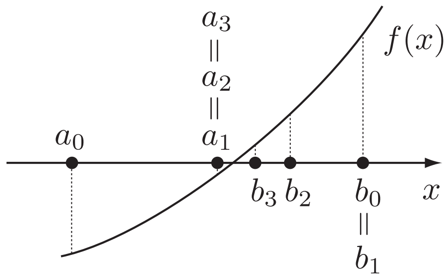
二分法のアルゴリズム．　$y = f(x)$ を連続関数とする．

(1) $f(a_0) < 0$, $f(b_0) > 0$ となるペア (a_0, b_0) を見つける．必要であれば $f(x)$ のかわりに $-f(x)$ を考えることで，$a_0 < b_0$ と仮定してよい．

(2) $n \geq 0$ に対し $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$，$a_n < b_n$ となるペア (a_n, b_n) が与えられているとき，その中点を $m_n := \dfrac{a_n + b_n}{2}$ とおく．

(3) $f(m_n)$ の値を計算し，

- $f(m_n) < 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (m_n, b_n)$ とおいて (2) に戻る．
- $f(m_n) > 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (a_n, m_n)$ とおいて (2) に戻る．
- $f(m_n) = 0$ ならば $\alpha := m_n$，計算終了．



二分法は解の存在まで保証するアルゴリズムである：

定理 6.4 (二分法の収束性) 二分法に関して，次のいずれかが成り立つ：

(a) ある自然数 n に対し $f(m_n) = 0$ となる．よって $\alpha := m_n$ は解のひとつ．

(b) すべての自然数 n で $f(m_n) \neq 0$ となるが，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は $n \to \infty$ のときそれぞれ同じ極限 α に収束し，$f(\alpha) = 0$ を満たす．

いずれの場合も，次のような誤差の評価式が成り立つ．

$$\max\{|a_n - \alpha|,\ |b_n - \alpha|\} \leq \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}.$$

したがって，十分大きな n に対し a_n もしくは b_n を α の近似値として用いることができる．

証明． (a) でなければ，すべての自然数 n で $f(m_n) \neq 0$ である．このときアルゴリズムの (2) と (3) を繰り返すと，$I_n := [a_n, b_n]$ は $I_{n+1} \subsetneq I_n$ かつ I_n の長さは $|b_0 - a_0|/2^n \to 0$ $(n \to \infty)$ である．よって区間縮小法（定理 4-1）より，すべての n に対し $\alpha \in I_n$ かつ $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ を満たす α がただひとつ存在する．

関数 $f(x)$ は連続かつ $f(a_n) < 0$ より，$f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$.（公式 6.1(4)）．同様に $f(b_n) > 0$ より，$f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$．よって $f(\alpha) = 0$．また，(a)，(b) によらず $a_n \leq \alpha \leq b_n$ であるから，

$$\max\{|a_n - \alpha|,\ |b_n - \alpha|\} \leq |b_n - a_n| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}.$$

■

例 1（$\sqrt{2}$ の計算）． 連続関数 $f(x) = x^2 - 2$ に対し，$(a_0, b_0) = (1.0, 2.0)$ として二分法のアルゴリズムに従って計算したのが次の表である [2]．

[2] ここに現れる (a_n, b_n) はすべて $k/2^n$ の形の有理数であるが，表の中では収束の様子が分かりやすいように小数で表現している．

n	a_n	b_n	n	a_n	b_n	n	a_n	b_n
0	1.00000	2.00000	7	1.41406	1.42188	14	1.41418	1.41425
1	1.00000	1.50000	8	1.41406	1.41797	15	1.41418	1.41422
2	1.25000	1.50000	9	1.41406	1.41602	16	1.41420	1.41422
3	1.37500	1.50000	10	1.41406	1.41504	17	1.41421	1.41422
4	1.37500	1.43750	11	1.41406	1.41455	18	1.41421	1.41422
5	1.40625	1.43750	12	1.41406	1.41431	19	1.41421	1.41422
6	1.40625	1.42188	13	1.41418	1.41431	20	1.41421	1.41421

定理 6.4 より，数列 a_n, b_n は $\alpha^2 - 2 = 0$ を満たす正の実数 α に収束する．すなわち，$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ の近似値を与える．また，その誤差は $|b_0 - a_0|/2^n = 1/2^n$ 以下である [3]．

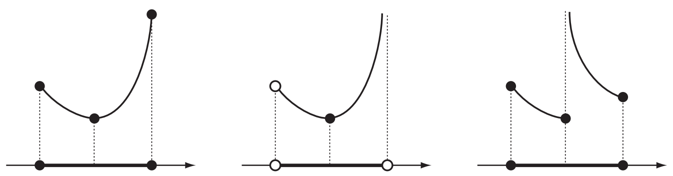
方程式の数値解法としての二分法は収束も遅く有用ではないが，「中間値の定理」の実質的な証明を与えてくれる．

中間値の定理（定理 6.3）の証明． $f(x)$ は連続なので，$F(x) = f(x) - \ell$ も連続関数である．これに $a = a_0$, $b = b_0$ として二分法のアルゴリズムを適用すると，定理 6.4 より $F(c) = 0$ を満たす c が区間 (a, b) に見つかる．よって $f(c) = \ell$． ■

最大値・最小値の存在定理

次の定理も応用上極めて重要である：

定理 6.5 (最大値・最小値の存在定理) 閉区間 上の 連続関数 はその区間で最大値と最小値をもつ．



閉区間かつ連続　　閉区間でない　　連続でない

注意．

- 定理は，「連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対し，ある α, β が $[a, b]$ に存在し，$a \le x \le b$ のとき $f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$」ということ．
- 「閉区間」であること，「連続」であることは必須である（上の図）．

証明（定理 6.5）． $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．区間 $[a, b]$ を 2^n 等分（$n = 0, 1, 2, \ldots$）して得られる区間の端点の集合を X_n で表す．たとえば $n = 2$ のとき，$X_2 = \{a, (3a + b)/4, (a + b)/2, (a + 3b)/4, b\}$ である．$X_n \subset X_{n+1}$ であるから，$M_n = \max\{f(x) \mid x \in X_n\}$ は $M_n \le M_{n+1}$ を満たす．

各 n に対し，$f(x_n) = M_n$ となる $x_n \in X_n$ を選んでいくと，区間 $[a, b]$ に散らばる数列 $\{x_n\}$ が得られる．すなわち $\{x_n\}$ は有界な数列であるから，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理（定理 5-2）より収束する部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k \ge 1}$ をとることができるので，その極限を $\beta \in [a, b]$ としよう．

いま，$\{M_n\}$ が有界でないと仮定すると，$M_{n(k)} = f(x_{n(k)}) \to \infty$ $(k \to \infty)$ であるが，関数 f の連続性より $f(x_{n(k)}) \to f(\beta)$．これは矛盾である．よって $\{M_n\}$ は有界であり，しかも単調増加であったから，$M = \lim_{n\to\infty} M_n$ が存在する．$M = \lim_{k\to\infty} M_{n_k}$ でもあるから，f の連続性より $M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\beta)$ でなくてはならない．これが最大値であることを確認しよう．もし $f(y) > M$ となる y が存在すると，連続性より十分大きな n について，X_n の中に $f(y_n) > M$ を満たす y_n が y の近くに存在する．これは $f(y_n) \le \max_{x \in X_n} f(x) =: M_n \le M$ に矛盾する． ■

[3] 厳密にいうと，定理 6.3 や定理 6.4 からわかるのは「$\alpha^2 = 2$ を満たす α が区間 $[1, 2]$ 内に少なくともひとつ存在する」ということだけである．この α が本当に，私たちが $\sqrt{2}$ とよぶ唯一の数であることを示すには，別の根拠（関数の単調性，次節参照）が必要である．

レポート問題

締め切りは **6** 月 **12** 日の講義開始前とします.

問題 7-1. (数列による連続性の定義) 命題 6.2 を示せ.

問題 7-2. (最大値の存在) 閉区間 I 上の連続関数 $f: I \to \mathbb{R}$ が最大値を「もたない」と仮定して矛盾を導け. (Hint. 集合 $f(I)$ が上に有界か，そうでないかで場合分けする．上に有界な場合は $n = 1, 2, \ldots$ に対して $\sup f(I) - 1/n \le f(x_n) \le \sup f(I)$ を満たす $x_n \in I$ が存在する．上に有界でない場合は，$f(x_n) \ge n$ を満たす $x_n \in I$ が存在する．いずれも $\{x_n\}$ は有界数列なので…).

問題 7-3. (固定点の存在) 区間 $[0, 1]$ 上で定義された連続関数 $y = f(x)$ が $0 \le f(x) \le 1$ を満たすならば，$f(c) = c$ を満たす c が区間 $[0, 1]$ に存在することを示せ.（Hint. $x - f(x)$ に中間値の定理を適用する.）

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあれば メールで ご指摘ください.

一様連続性（6/5）

配布日：2015/6/12　Version：1.1

参考文献：　小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第 2 章　　高木貞治『解析概論』の第 1 章

一様連続性

以下，I を区間とし，a を区間 I 上の点とする．また，関数 $f : I \to \mathbb{R}$ を関数とする．

関数が「連続である」とは，標語的にいうと「像の極限は極限の像」ということであった．厳密な定義を復習しておこう．

> **定義　（関数の連続性，再）**　関数 f が $x = a$ で**連続** (continuous) であるとは，
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
>
> であることをいう．すなわち，任意の　> 0 に対しある $\delta = \delta(\ ) > 0$ が存在し，
>
> $$|x \quad a| < \delta \implies |f(x) \quad f(a)| <$$
>
> が成り立つことをいう．f が I 上のすべての点で連続であるとき，**関数 f は I 上で連続**である，もしくは **f は I 上の連続関数**であるという．

ここで「$\delta = \delta(\ )$」は δ の値 が　の値に依存して決まることを表しているが，厳密には関数 f や（数直線上の）点 a にも依存する．したがって，$\delta = \delta(f, a,\ )$ と書く方がより正確である．

一様連続性． 以上を念頭におきつつ，関数の「一様連続性」を次のように定義する：

> **定義　（関数の一様連続性）** 関数 f が I 上で**一様連続** (uniformly continuous) であるとは，任意の　> 0 に対しある $\delta = \delta(f,\ ) > 0$ が存在し，<u>任意の $a \in I$ に対し</u>
>
> $$|x \quad a| < \delta \implies |f(x) \quad f(a)| <$$
>
> が成り立つことをいう．

特徴的なのは下線部で，「$\delta = \delta(f,\ )$」というのは $\delta = \delta(f, a,\ )$ ではなく，a の値には依存しないことを意味している．関数の連続性は各点における性質だが，一様連続性は区間全体にわたる性質である．とくに，一様連続であれば連続である．

定義の意味． 意味を理解するために

$$|x \quad a| < \delta \implies |f(x) \quad f(a)| <$$

という部分を解釈してみよう．x を時間パラメーター（時刻，秒単位）とし，$f(x)$ を動点 P の時刻 x における位置（メートル単位）だとしよう．このとき，上の式は動点 P の移動量について「δ 秒未満の時間で進めるのは　メートルまで」という，ある種の「速度制限」（もしくは「移動量の制限」）だと解釈できる[1]．

[1]秒速 5 メートルで移動できる参加者たちとかくれんぼをしよう．「鬼」から半径 50 メートル未満に参加者を隠れさせるためには「鬼」が目をつむって数を数える時間は 10 秒未満にしなくてはならない．「鬼」から半径 1 メートル未満に参加者を隠れさせるためにはそれを 0.2 秒未満にしなくてはならない．一般には参加者が秒速何メートルで移動するかはわからないが，もし「δ 秒未満の時間で進めるのは　メートルまで」という上限がわかっていたら，（平均変化率の意味で）参加者の移動速度の上限は　$/\delta$ ということになる．

「一様連続性」というのは，先に　メートルという移動量の制限を決めたとき，それ相応の移動時間の制限（δ 秒未満）を設けることで，時刻 $x = a$ に**依存せずに**，「δ 秒未満の時間で進めるのは　メートルまで」という「一様な速度制限」が実現できる，ということである．

一方，ふつうの「連続性」は「δ 秒未満の時間で進めるのは　メートルまで」という制限を実現するために必要な移動時間の上限 δ の取り方が $x = a$ の値に依存してもかまわないのである．

例題 7.1 (一様連続でない例) 関数 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める．

(1) $[0, \infty)$ 上で一様連続ではないことを示せ

(2) しかし，任意の $M > 0$ に対し，$[0, M]$ 上では一様連続であることを示せ．

解答. (1) $\ = 1$ として，任意の $\delta > 0$ に対しある $x, y \in [0, \infty)$ が存在して $|x \quad y| < \delta$ かつ $|f(x) \quad f(y)| \quad 1$ とできることを示そう[2]．$y = x + \Delta x$ とおくと，$f(y) \quad f(x) = (x + \Delta x)^2 \quad x^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$．ここで，$|\Delta x| \quad 1$ と仮定すれば，三角不等式より $|f(y) \quad f(x)| = |\Delta x||2x + \Delta x| \quad |\Delta x|(2|x| \quad 1)$ が成り立つ．よって $(2|x| \quad 1) \quad 1/|\Delta x|$ となるように x と Δx を選べば，$|f(y) \quad f(x)| \quad 1$ となる．

以上の計算から，任意に小さく与えられた $\delta > 0$ に対して，

$$0 < |\Delta x| < \min\{\delta, 1\}; \quad |x| \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{|\Delta x|} + 1 \quad ; \quad y = x + \Delta x$$

となるように $\Delta x, x, y$ の順に定めれば，$|x \quad y| < \delta$ かつ $|f(x) \quad f(y)| \quad 1$ を満たす．

(2) $x \in [0, M]$ とする．$y = x + \Delta x$，$|\Delta x| \quad 1$ と仮定すれば，三角不等式より $|f(y) \quad f(x)| = |\Delta x||2x + \Delta x| \quad |\Delta x|(2|x| + 1) \quad |\Delta x|(2M + 1)$．よって任意に小さい $\ > 0$ が与えられたとき，$\delta = \min\{1, \ /(2M + 1)\}$ とおけば，任意の $x \in [0, M]$ に対し

$$|x \quad y| = |\Delta x| < \delta \implies |f(x) \quad f(y)| < \delta(2M + 1) <$$

とできる．ゆえに，$f(x)$ は $[0, M]$ 上で一様連続である．

定理 7.1 (閉区間での一様連続性) 閉区間上の連続関数は一様連続である．

証明. 背理法により証明する．ある閉区間 I 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が一様連続でなかったとしよう．すなわち，ある $\ > 0$ が存在し，任意の（任意に小さい）$\delta > 0$ に対し，ある $x = x(\delta), y = y(\delta) \in I$ が存在して，$|x \quad y| < \delta$ かつ $|f(x) \quad f(y)| \quad$ が成り立つ．

とくに自然数 $n = 1, 2, \quad$ それぞれに対して $\delta = 1/n$ を考えると，$|x_n \quad y_n| < 1/n$ かつ $|f(x_n) \quad f(y_n)|$ が成り立つような $x_n, y_n \in I$ が存在する．

いま数列 $\{x_n\}$ は有界な閉区間 I 内の数列であるから，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理（定理 5.2）より収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ を持つ．I は閉区間なので，その極限 $\ = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ は I に含まれる．したがって関数の値 $f(\ )$ を考えることができる．

このとき，

$$|y_{n_k} \quad | \quad |y_{n_k} \quad x_{n_k}| + |x_{n_k} \quad | < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} \quad | \to 0 \quad (k \to \infty)$$

であるから，部分列 $\{y_{n_k}\}_k$ も　に収束する．よって関数の連続性より，

$$f(\ ) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

これは k によらず $|f(x_{n_k}) \quad f(y_{n_k})| \quad$ が成り立つことに反する．

レポート問題

締め切りは 6 月 19 日の講義開始前とします．

問題 8-1. (一様連続性) 以下の関数は一様連続でないことを示せ．

[2] 一様連続性の条件は「$(\forall \ > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in I \mid |x \quad y| < \delta) \ |f(x) \quad f(y)| <$ 」と表現される．その否定は「$(\exists \ > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in I \mid |x \quad y| < \delta) \ |f(x) \quad f(y)| \quad$ 」である．

(1) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$

(2) $f:(0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$

(3) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

問題 8-2.（一様連続性） 以下の関数は一様連続であることを示せ．

(1) $f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$

(2) $f:(\quad\infty,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$

問題 8-3.（一様連続関数の合成） I,J を区間とする（閉区間とは限らない）．関数 $f:I\to J$, $g:J\to\mathbb{R}$ が一様連続であるとき，$g\circ f(x):=g(f(x))$ で定まる合成関数 $g\circ f:I\to\mathbb{R}$ は一様連続か？そうであれば証明し，そうでなければ反例をあげよ．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあれば メールで ご指摘ください．

微分可能性（6/12）

配布日：2015/6/19　Version：1.1

参考文献：　● 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第 3 章　● 高木貞治『解析概論』の第 2 章

微分可能性の新しい定義

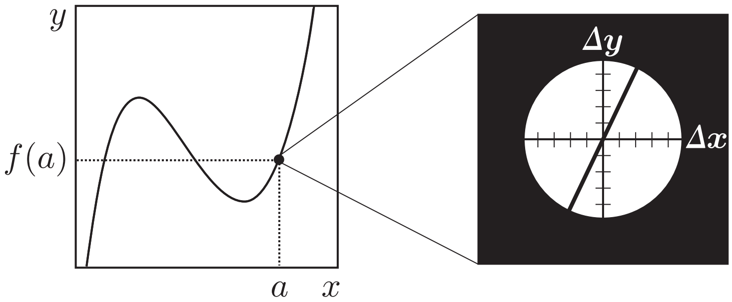
以下，I を区間とし，a を区間 I 上の点とする．また，関数 $f: I \to \mathbb{R}$ を関数とする．
まず，高校で学んだ「微分可能性」と「微分係数」の定義を確認しよう．

定義 （微分可能性の定義 1） 関数 $f: I \to \mathbb{R}$ が $x = a$ で**微分可能** (differentiable) であるとは，極限

$$A = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{8.1}$$

が存在することをいう．この極限 A を a における**微分係数** (derivative/differential coefficient) とよび，$f'(a)$ と表す．

顕微鏡の中の比例関数． 式 (8.1) の意味を詳しく解釈してみよう．



たとえば図のような関数 $y = f(x)$ のグラフを，点 $(a, f(a))$ を中心にして顕微鏡で拡大してみる．倍率を上げていくと，拡大されたグラフの断片の凹凸は次第に和らぎ，いつかは線分のように見えてくるだろう．直観的には，その線分の傾きが微分係数 A だと考えられる．

そこで，式 (8.1) が成り立つことを仮定して，実際に「傾き A の線分の方程式」を抽出してみよう．

まず「式 (8.1) が成り立つ」ことは，

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \right| \to 0 \quad (x \to a)$$

と同値である．そこで，式 (8.1) の定数 A と lim の中の「平均変化率」との差をあらわす関数

$$\eta_a(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \quad (x \neq a)$$

を導入しよう．この関数は

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \underline{\eta_a(x)(x - a)} \tag{8.2}$$

を満たす[1]．

ランダウの記号． 0 に収束する関数の「相対的な速さ」を表現するために,「ランダウの記号」を思い出しておく．

[1]本来は $x \neq a$ だが，$\eta_a(a) = 0$ と定義すれば η_a は a のまわりで定義された連続関数となる．

与えられた関数 $f(x)$ がある基準となる関数 $g(x)$ よりも「相対的に速く」0 に収束することを，$f(x)=o(g(x))$ と表すのが**ランダウの記号（記法）**(Landau symbol/notation) である [2]．厳密には，次のように定義する：

定義　（ランダウの記号） 関数 $f(x)$ が $x\to a$ のとき 0 に収束し，さらに別の関数 $g(x)$ に対し

$$\frac{[f(x)\text{ と }0\text{ の距離}]}{[g(x)\text{ と }0\text{ の距離}]}=\frac{|f(x)|}{|g(x)|}\to 0$$

を満たすとき，$f(x)=o(g(x))\quad(x\to a)$ と表す．

$f(x)=o(g(x))$ のあとの $(x\to a)$ は文脈から明らかな場合しばしば省略される．

さて式 (8.2) の下線部は

$$\frac{\eta_a(x)(x-a)}{x-a}=\eta_a(x)\to 0\quad(x\to a)$$

を満たすので，ランダウの記号を用いると $\eta_a(x)(x-a)=o(x-a)$ と書ける．よって，「式 (8.1) が成り立つ」ことから

$$\exists\, A\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(a)+A(x-a)+o(x-a) \tag{8.3}$$

がいえる．逆にこの式 (8.3) が成り立つとき，

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A+\frac{o(x-a)}{x-a}\to A+0\quad(x\to a)$$

より式 (8.1) が成立する．

以上の考察より，微分可能性の定義 1 は次の定義と同値である：

定義　（微分可能性の定義 2） 関数 $f:I\to\mathbb{R}$ が $x=a$ で**微分可能**であるとは，ある実数 A が存在して，$x\to a$ のとき

$$f(x)=f(a)+A(x-a)+o(x-a) \tag{8.4}$$

が成り立つことをいう．この極限 A を a における**微分係数**とよび，$f'(a)$ と表す．式 (8.4) の右辺にある 1 次関数 $y=f(a)+A(x-a)$ を関数 $f(x)$ の（グラフの）$x=a$ における**接線** (tangent line) **の方程式**もしくは **1 次近似** (もしくは**線形近似**，linear approximation) とよぶ．

この「接線」は，顕微鏡で拡大したときに見えてきた「線分」にほかならない．式 (8.4) 右辺の $o(x-a)$ は，関数 $f(x)$ を接線の方程式で近似したときの「誤差」にあたる量である．これは $|x-a|$ に比べて相対的に速く小さくなるから，顕微鏡の拡大率を上げると私たちには知覚できなくなってしまうのである [3]．

注意（区間の端点における微分）． 式 (8.1) や式 (8.4) 条件 $x\to a$ では暗に $x\in I$ が仮定されていることを思い出そう．たとえば $I=[a,b]$ の場合，すなわち a が区間 I の左の端点である場合，式 (8.1) の極限は

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

[2] $o(g(x))$ は「スモールオー $g(x)$」と読む．(本当はギリシャ文字のオミクロン (omicron) であるという．

[3] このように関数を「1 次関数 ＋ 誤差」の形で表現するというアイディアは，後にテイラー展開や多変数関数の微分へと発展していくのである．

ということである．この場合，右辺の右極限が存在するとき，その値 A をもって $f'(a) := A$ と定義するのである．

同様に，右端の点 b においても（左）極限

$$B = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

が存在するとき，$f'(b) := B$ と定義する[4]．

例 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める．任意の実数 a に対し恒等式 $x^2 = a^2 + 2a(x-a) + (x-a)^2$ が成り立つ．$(x-a)^2 = o(x-a)$ $(x \to a)$ なので，$A = 2a$ とおくと

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a)$$

が成り立つ．すなわち，f はすべての $x = a$ において微分可能であり，$f'(a) = 2a$.

例 2（ライプニッツ則，the Leibniz rule）. ふたつの関数 $f, g : I \to \mathbb{R}$ が $a \in I$ で微分可能であったとしよう．すなわち，関数 $r_a(x) := f(x) - \{f(a) + f'(a)(x-a)\}$，$s_a(x) := g(x) - \{g(a) + g'(a)(x-a)\}$，とおくとき

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + r_a(x), \quad r_a(x) = o(x-a) \\ g(x) &= g(a) + g'(a)(x-a) + s_a(x), \quad s_a(x) = o(x-a) \end{aligned}$$

を満たす．これらの式の積をとると，

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big\{f(a) + f'(a)(x-a) + r_a(x)\big\}\big\{g(a) + g'(a)(x-a) + s_a(x)\big\} \\ &= f(a)g(a) + \big\{f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\big\}(x-a) + R_a(x), \\ \text{ただし}\quad R_a(x) &= \big\{f(a) + f'(a)(x-a)\big\}s_a(x) + \big\{g(a) + g'(a)(x-a)\big\}r_a(x) + r_a(x)s_a(x) \end{aligned}$$

となる．$x \to a$ のとき

$$\frac{R_a(x)}{x-a} = \big\{f(a) + f'(a)(x-a)\big\}\frac{s_a(x)}{x-a} + \big\{g(a) + g'(a)(x-a)\big\}\frac{r_a(x)}{x-a} + r_a(x)\frac{s_a(x)}{x-a} \to 0$$

なので，$R_a(x) = o(x-a)$．よって関数 $f(x)g(x)$ も $x = a$ で微分可能であり，その微分係数は $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ である．

連続性との関係. 「微分可能性」の定義には，「連続性」が仮定されていない．仮定しなくても，次の命題から自動的に導かれるからである

> **命題 8.1 (微分可能なら連続)** 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ において微分可能であれば，$x = a$ において連続．

証明. 式 (8.4) より $x \to a$ とすれば $f(x) \to f(a)$ は明らか． ■.

[4] この場合，f は $x = a$ で**右微分可能** (right differentiable)，$x = b$ で**左微分可能** (left differentiable) とおよび A を**右微分係数** (right derivaitve)，B を**左微分係数** (left derivaitve) という．

導関数

定義 (導関数)　関数 $f : I \to \mathbb{R}$ がすべての $a \in I$ において微分可能であるとき，f は I 上で**微分可能**であるという．このとき，$x \mapsto f'(x)$ で定まる I 上の関数 $f' : I \to \mathbb{R}$ を f の**導関数** (derivative) とよび，$y = f(x)$ のとき次のようにあらわされる：

$$y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ \{f(x)\}',\ \frac{df}{dx}(x),\ Df(x),\ \text{etc.}$$

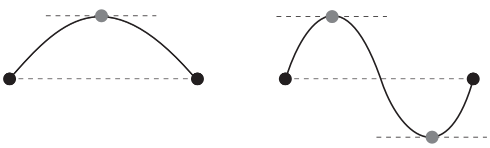
例 3.　関数 f と g が I 上で微分可能であるとき，例 2 より $h(x) := f(x)g(x)$ で定まる関数 h も I 上で微分可能であり，

$$h'(x) = \{f(x)g(x)\}' = \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

ロルの定理と平均値の定理

定理 6.5（閉区間における最大・最小値の存在）の主張によれば,「閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $y = f(x)$ は，最大値と最小値を持つ」のであった．

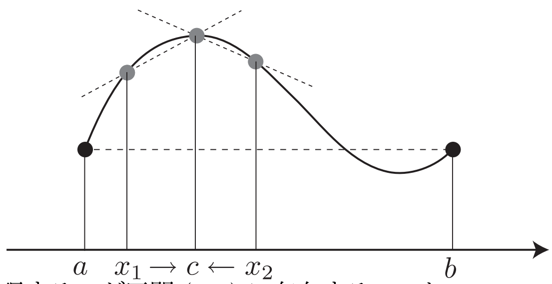
いま $f(a) = f(b)$ を仮定しよう．さらに開区間 (a, b) 上で微分可能であれば，最大値もしくは最小値を実現する点では微分係数が 0 になるであろう（右図）．すなわち，次が成り立つ：



定理 8.2 (ロルの定理)　区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $y = f(x)$ は，(a, b) 上で微分可能であり，$f(a) = f(b)$ を満たすとする．このとき，$f'(c) = 0$ となる c が区間 (a, b) に（少なくともひとつ）存在する．

証明.

$f(x)$ が定数関数のとき定理は明らかなので，$f(x)$ は定数関数でないと仮定する．関数 $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上で連続なので最大値 M と最小値 m を持つ（定理 6.5 ）が，定数関数ではないので $m < M$ を満たしている．このとき，$m \le f(a) = f(b) < M$ もしくは $m < f(a) = f(b) \le M$ のうち，少なくとも一方が成り立つ．



$m \le f(a) = f(b) < M$ のとき，最大値 $f(c) = M$ を実現する c が区間 (a, b) に存在する．いま $x_1 \to c - 0$ かつ $x_2 \to c + 0$ のとき，$f(x_1) \le f(c)$ かつ $f(c) \ge f(x_2)$ より

$$f'(c) = \lim_{x_1 \to c} \frac{f(x_1) - f(c)}{x_1 - c} \ge 0 \quad \text{かつ} \quad f'(c) = \lim_{x_2 \to c} \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c} \le 0$$

が成り立つ．よって $f'(c) = 0$．$m < f(a) = f(b) \le M$ の場合は最小値 $f(c) = m$ を実現する c が区間 (a, b) に存在するので，同様の議論で $f'(c) = 0$ がわかる．■

平均値の定理.　ロルの定理（定理 8.2）から，次の「平均値の定理」がただちに導かれる：

定理 8.3 (平均値の定理) 関数 $y = f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で連続，(a, b) 上で微分可能とする．このとき

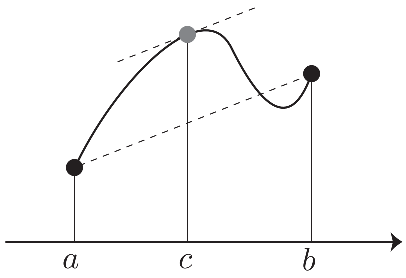
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \tag{8.5}$$

すなわち

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{8.6}$$

を満たす c が区間 (a, b) に（少なくともひとつ）存在する．

式 (8.5) の図形的な意味は,「点 $(a, f(a))$ と点 $(b, f(b))$ を結ぶ線分と平行な接線をもつ点 $(c, f(c))$ が $y = f(x)$ のグラフ上に存在する」ということである.（式 (8.5) の左辺は a から b までの**平均変化率**とよばれる量であった.）とくに，$f(a) = f(b)$ のときはロルの定理そのものである．また，式 (8.6) は次章で学ぶテイラー展開の特別な場合になっていて，応用上もこの形で用いられることが多い



証明. 点 $(a, f(a))$ と点 $(b, f(b))$ を結ぶ線分 ℓ の傾きを $A = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ とおき，関数 $F(x)$ を

$$F(x) := f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}$$

と定める（中括弧内は線分 ℓ の方程式である.）このとき $F(x)$ はロルの定理（定理 8.2）の仮定をすべて満たすから，$F'(c) = 0$ を満たす c が区間 (a, b) に存在する．$F'(x) = f'(x) - A$ より，$f'(c) = A$. ■

関数の増減への応用

高校で学んだように，微分係数の正負を確認することで関数の増減や極大・極小が判定できるのであった．ロルの定理（定理 8.2）と平均値の定理（定理 8.3）の応用として，その根拠を厳密な形で与えよう．

極大と極小. まずは「極大値」と「極小値」について，その定義を確認する：

定義 (極大と極小) $x = c$ の十分近くで「$x \neq c$ ならば $f(x) < f(c)$ $[f(x) > f(c)]$」 が成り立つとき，$f(x)$ は $x = c$ で**極大** [**極小**] であるといい，$f(c)$ を**極大値** [**極小値**] とよぶ．極大値と極小値をあわせて**極値**とよぶ.

極値をとる点では，グラフの接線の傾きが 0 となるのであった．ロルの定理（定理 8.2）のアイディアで，それを証明してみよう．

命題 8.4 (極値なら微分が 0) 微分可能な関数 $f(x)$ が $x = c$ で極値をとるならば，$f'(c) = 0$.

注意. $f'(c) = 0$ であっても，極値とならない場合がある．たとえば定数関数，$f(x) = x^3$ の $x = 0$ など.

証明. まず $x = c$ で極大と仮定する．$x = c$ を含む十分小さな区間上で $x \neq c$ のとき $f(x) < f(c)$. ロルの定理の証明と同様に左右からの平均変化率の極限をとることで $f'(c) \geq 0$ かつ $f'(c) \leq 0$ を得る．よって $f'(c) = 0$. $x = c$ で極小の場合も同様.（もしくは，$-f(x)$ を考えれば極大の場合に帰着される．） ■

関数の増減. グラフを描くときに重宝する次の定理は，平均値の定理（定理 8.3）を用いて証明される：

定理 8.5 (微分係数と増減) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続であり，開区間 (a,b) 上で微分可能とする．このとき，以下が成り立つ：

(1) 区間 (a,b) 上で $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は (a,b) 上で真に単調増加．

(2) 区間 (a,b) 上で $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ は (a,b) 上で真に単調減少．

(3) 区間 (a,b) 上で $f'(x)=0$（一定）ならば，$f(x)$ は (a,b) 上で定数関数．

証明. まず $a \le x_1 < x_2 \le b$ を満たす x_1 と x_2 を任意に選び，関数 $y=f(x)$ を閉区間 $[x_1,x_2]$ に制限する．これに平均値の定理（定理 8.3）を適用しよう．すなわちある c が区間 (x_1,x_2) に存在して，式 (8.6) より

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

を満たす．$x_2-x_1>0$ より，左辺の符号は $f'(c)$ の符号で決まる．たとえば $f'(c)>0$ であれば $f(x_2)>f(x_1)$ となり，$f'(c)<0$ であれば $f(x_2)<f(x_1)$，$f'(c)=0$ であれば $f(x_1)=f(x_2)$ となる．x_1，x_2 は自由に選べるので定理を得る． ■

レポート問題

締め切りは 6 月 26 日の講義開始前とします.

問題 9-1. (微分可能性と一様連続性) 開区間 I 上の関数 $f:I\to\mathbb{R}$ は微分可能であり，ある正の定数 $K>0$ が存在して，すべての $a\in I$ に対し $|f'(a)|\le K$ が成り立つ．このとき，f は I 上一様連続であることを示せ．(Hint. 平均値の定理．)

問題 9-2. (微分可能性) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(0)=0$, $x\neq 0$ のとき $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ と定める．このとき，次を示せ：

(1) f は $\mathbb{R}$ 上で微分可能.（Hint. $x=0$ では定義通りに微分係数が求まる.）

(2) 導関数 $f'(x)$ は $x=0$ で連続ではない.

問題 9-3. (合成関数の微分) I，J を開区間とし，$f:I\to J$，$g:J\to\mathbb{R}$ はそれぞれ微分可能であり，$f(I)\subset J$ を満たすとする．このとき $(g(f(x)))'=g'(f(x))f'(x)$ を満たすことを微分可能性の定義 2 に基づいて示せ．

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあればメールでご指摘ください．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210 東京工業大学 理学部 数学科

テイラー展開（6/19）

配布日：2015/6/19　Version：1.1

参考文献：
- 小平邦彦『解析入門 I,II』の第 3 章
- 高木貞治『解析概論』の第 2 章

高階導関数

以下，I を区間とし，a を区間 I 上の点とする．また，関数 $f : I \to \mathbb{R}$ を関数とする．

定義 (n 階導関数) 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対し,（存在するかはどうかは別にして，形式的に）

$$\boldsymbol{f^{(0)}(x) := f(x), \quad f^{(n+1)}(x) := \left(f^{(n)}(x)\right)'}$$

と定義する．ある負でない整数 n に対し I 上で $f^{(n)}(x)$ が定義できるとき，$\boldsymbol{f}$ **は** $\boldsymbol{I}$ **上で** $\boldsymbol{n}$ **回微分可能**といい，$f^{(n)}$ を f の $\boldsymbol{n}$ **階導関数**という．$y = f(x)$ と表すとき，$f^{(n)}(x)$ は

$$\boldsymbol{y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n}f(x), \quad D^n f(x)}$$

のようにも表される．また，$f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$ はそれぞれ $\boldsymbol{f''(x)}$, $\boldsymbol{f'''(x)}$ のようにも表す．

「n 回微分可能な関数」よりも使い勝手がよく応用上重要なのが，次の「C^n 級関数」である：

定義 (C^n 級関数) ある負でない整数 n に対し $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上で n 回微分可能であり，$f^{(n)}$ が I 上で連続であるとき，f **は** I **上で** C^n **級**もしくは f **は** I **上の** C^n **級関数**であるという．また，任意の自然数 n について関数 f が I 上で C^n 級であるとき，f **は** I **上で** C^∞ **級**もしくは f **は** I **上の** C^∞ **級関数**であるという．

関数の「滑らかさ」に応じて等級をつけたのである [1]．

注意.

- f が連続関数であることと C^0 級関数であることは同値である．
- f が n 回微分可能でも，C^n 級とはかぎらない．すなわち,「$f^{(n)}$ は存在するが，連続ではない」ような関数が存在する．

例 1. $y = f(x)$ を $f(0) = 0$，$x \neq 0$ のとき $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ と定義する．この関数はは,「$\mathbb{R}$ 上で 1 回微分可能だが，C^1 級ではない関数」の例である（→レポート問題 9-2.）．

テイラー展開

実数の小数展開を思い出そう．たとえば $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ は，級数

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots$$

にほかならない．これを有限項で打ち切ることで，$\sqrt{2} \approx 1.41$ といった近似値が得られるのである．

同じことを関数でやってみよう．たとえば $f(x) = x^3$ を

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 \tag{9.1}$$

[1] 関数の集まりとしての包含関係を「滑らかさの等級の大小」として表現すると,「関数 $<$ 連続関数 $= C^0$ 級 $<$ 微分可能 $< C^1$ 級 $<$ 2 回微分可能 $< C^2$ 級 $<$ 3 回微分可能 $< C^3$ 級 $< \cdots < C^\infty$ 級 $<$ 解析的 $= C^\omega$ 級」

のように変形してから，さらに $x = 1.1 = 1 + 1/10$ を代入すると，

$$(1.1)^3 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} = 1.331$$

と楽に計算できる．同様に $x = 1.02$ とおくと，

$$\begin{aligned}(1.02)^3 &= 1 + 3 \times 0.02 + 3 \times (0.02)^2 + (0.02)^3 \\ &= 1 + 0.06 + 0.0012 + 0.000008 \\ &= 1.061208\end{aligned}$$

を得るが，実用上は必要な精度にあわせて計算を打ち切って,「1 次近似」1.06.「2 次近似」1.0612.「3 次近似」1.061208 のいずれかを選ぶのが効率的だろう．

一般の関数を計算するときにも，同様の多項式展開ができれば単純な四則だけで満足のいく近似値が得られると期待される．その期待に応えてくれるのが，次の「テイラー展開」である：

定理 9.1 (テイラー展開) 関数 $y = f(x)$ は開区間 I 上で n 回微分可能とする．$a \in I$ を固定するとき，すべての $x \in I$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2} & \\ \boldsymbol{+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}} & \quad \text{(i)} \\ \boldsymbol{+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n} & \quad \text{(ii)} \end{aligned}$$

を満たす c が a と x の間に存在する．

定義　(テイラー展開・マクローリン展開) 上の式を $f(x)$ の $x = a$ における（n 次）**テイラー展開** (Taylor expansion) とよぶ．とくに $a = 0$ のとき,（n 次）**マクローリン展開** (Maclaurin expansion) ともよばれる．また，(i) の部分を $(n-1)$ 次**テイラー多項式**，(ii) の部分を**剰余項** (reminder) とよぶ．

テイラー展開の剰余項を「誤差項」として無視することで，関数の多項式近似が得られるわけである．

注意． テイラー展開について，いくつか注意事項をまとめておこう．

- **c の表現**：c は x に依存して決まる「正体不明の数」である．$a \neq x$ の場合，大小関係として $a < c < x$ の場合と $x < c < a$ の場合が考えられる．いずれの場合も c は a と x の内分点なので，ある $0 < \theta < 1$ が存在して
$$c = (1-\theta)a + \theta x \iff c = a + \theta(x-a)$$
と表される（θ はやはり正体不明）．$a = x$ の場合，c は何でもよい．
- **最良の多項式近似**：$f(x)$ の $(n-1)$ 次テイラー多項式を $F(x)$ とおくと，これは
$$f(a) = F(a),\ f'(a) = F'(a),\ \cdots,\ f^{(n-1)}(a) = F^{(n-1)}(a)$$
を満たす「唯一の」$(n-1)$ 次多項式である．この意味で，テイラー多項式は $(n-1)$ 次以下の多項式の中で関数 $f(x)$ をもっとも良い近似だといえる．たとえば,「1 次テイラー多項式」は接線の方程式にほかならない．
- **平均値の定理との関係**：$n = 1$ のときテイラー展開は平均値の定理（前回のプリント，定理 8.3）になっている．実際，$x = b$ とすればテイラー展開は
$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \iff f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

- **剰余項の表現あれこれ：** (ii) の剰余項はさまざな形で表現できる．一般にこれを $R_n = R_n(f,a,x)$ と表すと，定理のなかの剰余項は**ラグランジュ(Lagrange) の剰余項**とよばれている形である．ほかにも，**コーシー (Cauchy) の剰余項**とよばれる

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n$$

（ただし $0<\theta<1$，一般には上の θ とは異なる）や，**積分形の剰余項**とよばれる

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$

もある．これらの存在は記憶にとどめつつ，とりあえず (ii) （ラグランジュの剰余項）を完全に覚えておけば十分である．

定理 9.1 の証明． 便宜的に定理中の x を b に置き換えて証明する．また，$b\neq a$ の場合を示せば十分である．いま定数 A を

$$A := \frac{f(b)-\left\{f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}\right\}}{(b-a)^n}$$

と定めると，次が成り立つ：

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + A(b-a)^n \tag{9.2}$$

このとき，a と b の間にある c が存在して，$A=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$ と表されることを示そう．

区間 I 上の関数 $F(x)$ を

$$F(x) := \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + A(b-x)^n$$

とおく．$F(b)$ の値は $f(b)$ であり，式 (9.2) より $F(a)$ の値も同じく $f(b)$ だとわかる．$F(x)$ の微分は

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}\right\} - nA(b-x)^{n-1} \\ &= \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - nA(b-x)^{n-1} \end{aligned}$$

と計算できるので，$F(x)$ は微分可能である．よってロルの定理（定理 8.2）より，a と b を端点にもつ開区間の中に $F'(c)=0$ を満たす c が存在する．そのような $x=c$ を $F'(x)$ の式に代入すると，$b\neq c$ より求める等式 $A=f^{(n)}(c)/n!$ を得る． ■

漸近展開． 関数 f が $x=a$ で微分可能であれば

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a) \quad (x\to a)$$

が成り立つのであった（ほとんど微分可能性の定義 2 そのまま）．これを拡張しよう．

定理 9.2 (漸近展開) $f(x)$ を $x=a$ を含む区間上で定義された C^n 級関数とする．$x\to a$ のとき，次が成り立つ：

$$\boldsymbol{f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)} \tag{9.3}$$

定義 式 (9.3) を $f(x)$ の $x=a$ における（n 次）**漸近展開**とよぶ．

証明. x が a に近いとき，n 次のテイラー展開ができて

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

ただし c は x と a の間の数である．これより

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

いま $f(x)$ は C^n 級関数であり，$x\to a$ のとき $c\to a$ であるから，$f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(a)$．よって $\dfrac{[\text{上の式の右辺}]}{(x-a)^n}\to 0\ \ (x\to a)$. ■

注意. 定理 9.2 の仮定は弱めることができる．式 (9.3) が成り立つには，f が $x=a$ を含む区間上で $n-1$ 回微分可能であり，$x=a$ において $f^{(n-1)}$ が微分可能であればよい．すなわち，微分係数 $f^{(n)}(a)$ が存在すればよい.（[小平] の §3.4，[高木] の定理 29 を参照せよ.）

例 2. 指数関数は C^∞ 級なので，任意の $n=0,1,2,\cdots$ について定理 9.2 を適用できる．すなわち $x\to 0$ のとき，

$$e^x=1+o(1),\quad e^x=1+x+o(x),\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2),\ \cdots.$$

関数の凸性と 2 階微分

2 階微分係数の極限表示. $f:I\to\mathbb{R}$ が C^2 級関数であるとき，$a\in I$ に対し漸近展開 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2!+o((x-a)^2)$ が成り立つ．ここで，$x=a\pm h,\ h\to 0$ を代入すると，

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2),$$
$$f(a-h)=f(a)-f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)$$

となるから，これら 2 式の和をとると

$$f(a+h)+f(a-h)-2f(a)=f''(a)h^2+o(h^2)\iff f''(a)=\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}+\frac{o(h^2)}{h^2}$$

よって，次の公式を得る：

公式 9.3 (2 階微分係数の極限表示)

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

この公式は数値計算において 2 階微分を近似するために用いられる．

関数の凸性 高校では関数のグラフの凹凸を 2 階微分の正負で定義した．ここではもう少し幾何学的な定義を与え，それと 2 階導関数との関係を調べておこう．

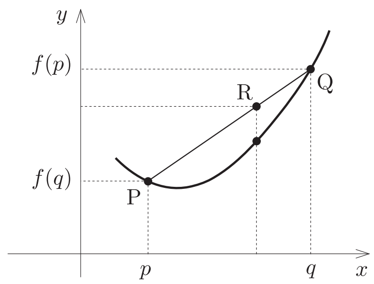
定義 （下に凸，上に凸） 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が**下に凸**（もしくは単に凸，convex）であるとは，任意の $p, q \in I$ と任意の $t \in (0,1)$ に対し，

$$f(tp + (1-t)q) \le t\,f(p) + (1-t)\,f(q) \tag{9.4}$$

が成り立つことをいう．式 (9.4) で等号成立がないとき，f は**真に下に凸** (strictly convex) という．

関数 $-f(x)$ が下に凸 [真に下に凸] であるとき，f は**上に凸**（もしくは凹，concave）[**真に上に凸** (strictly concave)] であるという．

上に凸もしくは下に凸な関数は**凸関数**とよばれる．



幾何学的には，グラフ上の 2 点を結ぶ線分がつねにグラフの「上」にある状態が「下に凸」である．実際，式 (9.4) の右辺はグラフ上の点 P $(p, f(p))$ と点 Q $(q, f(q))$ を $(1-t) : t$ に内分する点 R の y 座標にあたり，その x 座標 $x = tp + (1-t)q$ における関数 $y = f(x)$ の値が式 (9.4) の左辺である．

例 3. $y = x^2$ は真に下に凸．$y = |x|$ は下に凸だが「真に下に凸」ではない．

定理 9.4 (2 階微分と凹凸) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を C^2 級関数とする．

(1) f が下に凸 $\iff$ (a,b) 上 $f''(x) \ge 0$

(2) (a,b) 上 $f''(x) > 0 \implies$ f は真に下に凸．

注意． (2) の逆は成り立たない．たとえば $f(x) = x^4$ は真に下に凸だが $f''(0) = 0$．

証明． (1) : f が下に凸であったと仮定する．$x \in (a,b)$ を固定し，$h > 0$ を十分小さくとって $x \pm h \in (a,b)$ とすれば，式 (9.4) を $t = 1/2$ について適用できて

$$f(x) = f\left(\frac{(x+h)+(x-h)}{2}\right) \le \frac{1}{2}\{f(x+h) + f(x-h)\}.$$

よって公式 9.3 より，

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \ge 0.$$

逆に，(a,b) 上で $f''(x) \ge 0$ を仮定する．$a \le p < q \le b$ を満たす $p,\ q$ と $t \in (0,1)$ を任意に選ぶとき，$\alpha = tp + (1-t)q$ とおくと，定理 9.1 より

$$f(p) - f(\alpha) = f'(\alpha)(p-\alpha) + \frac{1}{2} f''(c_p)(p-\alpha)^2$$

$$f(q) - f(\alpha) = f'(\alpha)(q-\alpha) + \frac{1}{2} f''(c_q)(q-\alpha)^2$$

を満たす p と α の内分点 c_p と q と α の内分点 c_q が存在する．上の式を t 倍，下の式を $(1-t)$ 倍して足し合わせると，

$$tf(p) + (1-t)f(q) - f(\alpha) = \frac{1}{2}\left\{t\,f''(c_p)(p-\alpha)^2 + (1-t)\,f''(c_q)(q-\alpha)^2\right\}$$

となるが，仮定より $f''(c_p) \ge 0$ かつ $f''(c_q) \ge 0$ であったから

$$tf(p) + (1-t)f(q) - f(\alpha) \ge 0 \iff f(tp + (1-t)q) \le tf(p) + (1-t)f(q).$$

同様にして，(2) は (a,b) 上で $f''(c_p) > 0$ かつ $f''(c_q) > 0$ となることからわかる． ■

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210 東京工業大学 理学部 数学科

レポート問題

締め切りは 7 月 3 日の講義開始前とします．

問題 10-1. (テイラー展開) $n \in \mathbb{N}$ に対し $f(x) = \log(1+x)$ $(x > -1)$ の $x = 0$ を中心とする n 次テイラー展開を求めよ．

問題 10-2. (凸性) 区間 I 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は C^2 級であり，$f''(x) > 0$ を満たすとする．このとき，任意の $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ に対し

$$f \quad \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots f(x_n)}{n}$$

が成り立つことを示せ．(Hint. $\alpha = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$，$h_k = x_k - \alpha$ とおいて，α 中心のテイラー展開の和を考える．数学的帰納法でも証明できる．)

問題 10-3. (テイラー展開：積分形の剰余項) 区間 I 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は C^n 級であるとき，任意の $x,\, a \in I$ に対し

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ．(Hint 剰余項を R_n とするとき，部分積分を使って $R_n = f^{(n)}(a)(x-a)^n/n! + R_{n+1}$ が成り立つことを示す．)

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあれば メールで ご指摘ください．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学部 数学科

一様収束（6/26）

配布日：2015/7/3　Version：1.1

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I,II』の第 5 章　• 高木貞治『解析概論』の第 4 章

関数の収束

以下，$I \subset \mathbb{R}$ を区間とし，関数の列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．関数がある関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に「収束する」ことを二通りの方法で定義する．ひとつは「各点収束」とよばれ，もうひとつは「一様収束」とよばれる．私たちが着目したいのは，このとき

(Q1) f_n がすべて連続なとき，「極限」$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ も連続か？

(Q2) f_n がすべて微分可能なとき，「極限」$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ も微分可能か？そのとき，$f' = \lim_{n\to\infty} f_n$ がいえるか？

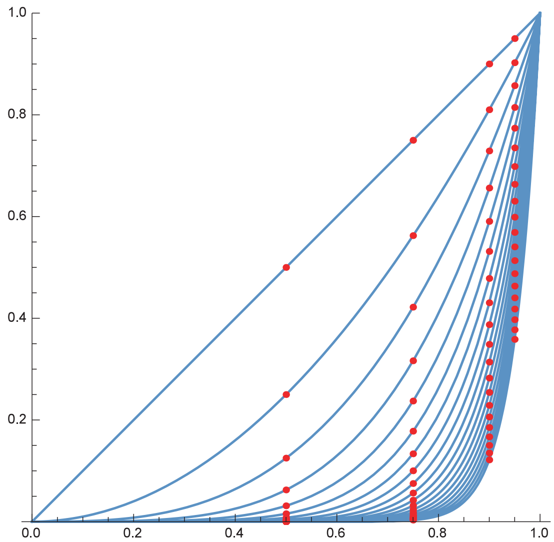
(Q3) 積分値は収束するか？すなわち，$n \to \infty$ のとき $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ か？

各点収束

定義 (各点収束) 関数列 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に**各点収束** (pointwise convergence) するとは，任意の $a \in I$ に対し，数列の意味で $f_n(a) \to f(a)$ $(n \to \infty)$ が成り立つことをいう．すなわち，

$$(^\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I})(^\forall \epsilon > 0)(^\exists N \in \mathbb{N})(^\forall n \geq N) \quad |f_n(a) - f(a)| < \epsilon.$$

グラフを各直線 $x = a$ 上に制限したとき，y 座標が収束するということである．もちろん，収束の速度にはばらつきがあるかもしれない．



例 1. $I = [0, 1]$ とし，$f_n(x) = x^n$ とする．

$0 \leq a < 1$ のとき，$f_n(a) = a^n \to 0$ $(n \to \infty)$ であり，$a = 1$ のとき，$f_n(1) = 1$ $(^\forall n = 1, 2, 3, \cdots)$ である．よって関数 $f : I \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

と定義すると，関数列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ は関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に各点収束する．
　この例からすぐに，次のことがわかる：各点収束では，

(Q1) No!　　(Q2) No!

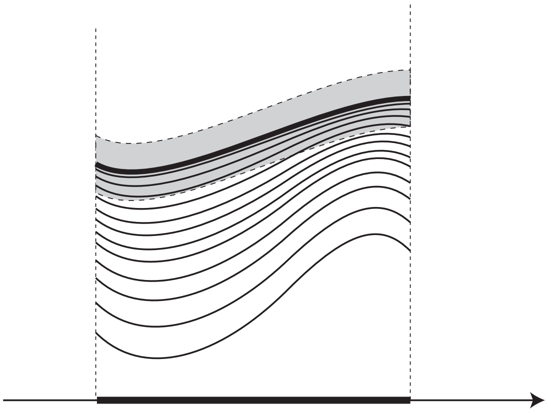
この例の場合，積分値は収束している [1]．しかし，一般には (Q3) の答えも No! である [2]．

一様収束

定義 (一様収束) 関数列 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に**一様収束** (uniform convergence) するとは，次が成り立つことをいう：

$$({}^{\forall}\epsilon > 0)({}^{\exists}N \in \mathbb{N})({}^{\forall}n \geq N)(^{\forall}\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I})\quad |f_n(a) - f(a)| < \epsilon.$$

一様収束であれば各点収束であることに注意しよう．
　グラフでいうと，十分大きな n に対し，$y = f_n(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフから上下それぞれ ϵ 未満の範囲に収まることを意味する．



例 2. $I = [0, 1/2]$ とし，$f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$ (定数関数) とする．
　$0 \leq a \leq 1/2$ のとき，$f_n(a) = a^n \leq (1/2)^n \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．よって，任意に小さい $\epsilon > 0$ を固定するとき，$1/2^N < \epsilon$ となる自然数 N をとれば，$n \geq N$ のとき，任意の $a \in I$ に対し

$$|f_n(a) - f(a)| = a^n \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon$$

が成り立つので，$\{f_n\}$ は f に一様収束する．

例 3. $I = \mathbb{R}$ とし，$f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx$, $f(x) = 0$ (定数関数) とする．
　任意の $a \in I = \mathbb{R}$ に対し

$$|f_n(a) - f(a)| = \left|\frac{1}{n}\sin na - 0\right| \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to 0)$$

が成り立つ. 例 2 と同様の議論により，$\{f_n\}$ は f に一様収束することがわかる．
　これ例 3 から，少なくとも次のことがわかる：一様収束では，

[1] ルベーグ（Lebesgue）積分論によれば，各点収束する列 f_n が適当な条件を満たせば，(あとで定義する「一様収束」でなくても）積分値が収束することがわかる．たとえば連続関数の列 f_n が各点収束し，各 $a \in I$ に対し $f_n(a)$ が単調増加列であれば，積分値は収束することが知られている（ルベーグの単調収束定理の特別な場合）．
[2] $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ を，そのグラフが「原点，$(1/(2n), 2n)$, $(1/n, 0)$,$(1, 0)$ を順に線分で結んだもの」として得られる関数とする．このとき，$\{f_n\}$ は $f(x) = 0$ (定数関数) に各点収束するが，$[0, 1]$ 上での積分値は収束しない．

(Q2) No!

なぜなら，この例の場合 $f_n'(x) = \cos nx$，$f(x) = 0$ であり，各点収束すらしていないからである[3].

一様収束列の性質

じつは一様収束列については，

(Q1) Yes!　(Q3) Yes!

が成立する．

まず，一様収束列の連続性は極限にまで保存される（遺伝する）：

定理 10.1 (連続性の保存) 連続関数の列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に一様収束するとき，f も連続関数である．

証明． $a \in I$ を固定するとき，

$$(^\forall \epsilon > 0)(^\exists \delta > 0) \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

を示せばよい．いま，任意に（小さい）$\epsilon > 0$ を固定する．一様収束性より，

$$(^\exists N \in \mathbb{N})(^\forall n \geq N)(^\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}) \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3.$$

とくに $x = a$ についても $n \geq N$ であれば $|f_n(a) - f(a)| < \epsilon/3$ を満たす．

いま $n_0 \geq N$ をひとつ選ぶと，仮定より $f_{n_0} : I \to \mathbb{R}$ は連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - a| < \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \epsilon/3$$

を満たす．したがって $|x - a| < \delta$ のとき，

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

ϵ は任意だったので，f は $x = a$ において連続である．■

また，一様収束列の積分値は極限にまで保存される（遺伝する）：

定理 10.2 (積分値の保存) 連続関数の列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に一様収束するとき，任意の閉区間 $[a, b] \subset I$ において

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx. \quad (n \to \infty)$$

$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ と表すとき，$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ が成り立つ．標語的にいえば，「積分の極限は極限の積分」が成り立つのである．

注意（積分可能性）． 積分は通常のリーマン積分の意味で考えている．閉区間上の連続関数はリーマン可積分であった．定理 10.1 より極限も連続であるから，一様収束性は極限の可積分性も保証してくれるのである．

証明．

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b \{f_n(x) - f(x)\}\,dx \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)||b - a|$$

一様収束性より，最右辺は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．■

[3]複素関数の場合，(Q2) は一様収束すれば YES となる．そもそも，複素関数の微分可能性（正則性）は条件が厳しく，優等生的な関数だけが生き残っているからである．

関数項級数

関数からなる級数を考えよう．

定義 （関数項級数） $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ を I 上の関数からなる列とする．また，$S_n(x) := f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_n(x)$ とおく．関数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ がある I 上の関数 $S(x)$ に各点収束 [一様収束] するとき，**級数** $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **は** I **上で関数** $S(x)$ **に各点収束 [一様収束] するといい，**

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots$$

のように表す．

例 4. $f_n(x) = x^n$ のとき，

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

$f(x) = 1/(1-x)$ とおくと，

- $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$ とみなすとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ は $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ に各点収束するが，一様収束はしない（レポート）．
- $f_n : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ とみなすとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = 1+x+x^2+\cdots$ は $f : [-1/2,1/2] \to \mathbb{R}$ に一様収束する．

例 5（先が見えない例）． 例 4 は極限が具体的にわかっていたが，次の例は極限がどのような関数になるのか，わからない：

例題 10.1 $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2}$ $(n \geq 1)$ のとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ．

解答． まず各点収束することを示そう．部分和を $S_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ とする．各 $x \in \mathbb{R}$ を固定するとき，$n > m$ に対し

$$\begin{aligned}|S_n(x) - S_m(x)| &= \left|\frac{1}{x^2+(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{x^2+n^2}\right| \leq \left|\frac{1}{x^2+(m+1)^2}\right| + \cdots + \left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| \\ &\leq \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \int_m^n \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

よって任意に小さい $\epsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して $n > m \geq N$ のとき $|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon$ とできる[4]．すなわち（x ごとに）$\{S_n(x)\}$ はコーシー列であるから，収束する．その極限を $S(x)$ とおけば，関数 $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が定まり，関数の列 $\{S_n\}$ は S に各点収束する．

[4] $1/N < \epsilon$ となるようにとればよい．

つぎに一様収束性を示す．いま上と同じ状況で $n > m \geq N$ のとき $|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon$ であったが，$m \geq N$ を固定し $n \to \infty$ としたとき，$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ より $|S(x) - S_m(x)| \leq \epsilon$ が成り立つ．ϵ は任意であり，N の取り方は x に依存しないから，関数の列 $\{S_m\}$ は S に一様収束する． ■

べき級数について

一般に，実数 a と x，数列 $A_1, A_2. \cdots$ によって定まる級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-a)^n = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots$$

を a を中心とする**べき級数**という．また，ある関数 $f(x)$ について，$|x-a| < R$ を満たすすべての実数 x に対し等式 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-a)^n$ が成り立つ（すなわち右辺のべき級数は収束し，その極限が $f(x)$ と一致する）とき，この等式を関数 $f(x)$ の a を中心とする**べき級数展開**とよぶ．x の範囲を制限する定数 R が（∞ もこめて）どの程度大きくとれるかは，係数の列 $\{A_n\}$ のみで決まり，中心 a には依存しない．そのような R で最大のもの（∞ も許す）はべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-a)^n$ の**収束半径**とよばれる[5]．

べき級数については，次の事実が知られている：

べき級数の性質． 0 を中心とするべき級数 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ は，$x = x_0 \neq 0$ のとき収束すると仮定する．このとき，

(1) 区間 $I_0 = (-|x_0|, |x_0|)$ 内のすべての x に対し，べき級数 $F(x)$ は収束する．

(2) 関数 $F(x)$ は I_0 上で微分可能であり，$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^{n-1}$ が成り立つ．

(3) $x \in I_0$ のとき，$\int_0^x F(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n+1} x^{n+1}$ が成り立つ．

ただし (2) と (3) の等式は,「$x \in I_0$ のとき右辺のべき級数は収束し，その値は左辺の関数の値と一致する」と解釈する．また，これらのべき級数は I_0 上で広義一様収束する．すなわち，I_0 内に含まれる任意の閉区間上で一様収束する．

べき級数のこうした性質は，複素関数の理論によって見通しよく説明され，(2) や (3) のような項ごとの微分と積分も正当化されるのである．

レポート問題

締め切りは 7 月 10 日の講義開始前とします．

問題 11-1. (一様収束性) 級数 $S(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ は区間 $(-1, 1)$ 上で各点収束するが，一様収束はしないことを示せ．

[5] じつは，$R = 1/\limsup |A_n|^{1/n}$ であることが知られている．ただし，$1/0 := \infty, 1/\infty := 0$ と（ここだけの）約束をしておく．

問題 11-2. (関数のコーシー列) 区間 I 上の連続関数の列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ がある関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に一様収束するための必要十分条件は，

$$({}^{\forall}\epsilon > 0)({}^{\exists}N \in \mathbb{N})({}^{\forall}x \in I),\quad n > m \geq N \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

が成り立つことである．これを示せ．(Hint. 上の例題の証明を参照せよ.)

問題 11-3. (広義積分の収束) 半開半閉区間 $I = [a, \infty)$ 上の連続関数の列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に一様収束している．各 f_n が I 上で広義積分可能であるとき，f は I 上で広義積分可能か？証明もしくは反例を与えよ.（Hint．まずは $1/x^{1+1/n}$ を考えてみる.）

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあればメールでご指摘ください.

高次元ユークリッド空間（7/3）

配布日：2015/7/10 Version：1.1

参考文献： • 小平邦彦『解析入門 I,II』の第 6 章 • スピヴァック『多変数の解析学』の第 1 章

n 次元ユークリッド空間

高次元の空間としてもっとも基本的なのが，次の「ユークリッド空間」とよばれる集合である：

定義（ユークリッド空間） n を自然数とし，n 個の実数を並べたもの $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を n **次元数ベクトル**もしくは単に**ベクトル** (vector) とよぶ．また，その全体からなる集合

$$\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, {}^{\forall} i = 1, 2, \cdots, n\right\}$$

を n **次元ユークリッド空間** (n dimensional Euclidean space，もしくは n **次元数空間**，n **次元数ベクトル空間**，n dimensional coordinate space) とよび，$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ で表す．

$\mathbb{R}^1$ は実数の集合 $\mathbb{R}$ （数直線）としばしば同一視される．また，しばしば $\mathbb{R}^2$ は xy 平面と，$\mathbb{R}^3$ は xyz 空間と同一視される [1]．

和とスカラー倍，内積． $\mathbb{R}^n$ はいわゆるベクトル空間（線形空間）の構造をもっている．ベクトルの基本的な演算として，和，実数倍と内積を定義しよう：

定義（和・実数倍・内積・長さ） $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$，$\vec{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の元とするとき，その**和** (sum) を

$$\vec{a} + \vec{b} := (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n),$$

t を実数とするとき，**実数倍** (multiple of a real number) を

$$t\vec{a} := (ta_1, \cdots, ta_n)$$

と定義する．また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積** (inner product) を

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

で定義する．

内積は次の「シュワルツの不等式」(the Schwarz inequality) を満たす：

命題 11.1 (シュワルツの不等式) $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$，$\vec{b} = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \quad \text{すなわち} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right). \tag{11.1}$$

証明はレポート問題としよう．シュワルツの不等式より，

$$-\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \le \vec{a} \cdot \vec{b} \le \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$$

[1] ベクトル $(a_1, \cdots, a_n)$ は上つき添字で $(a^1, \cdots, a^n)$ と書かれることもある．この場合，a^1 の 2 乗は $(a^1)^2$ のように書くしかない．

が成り立つ．とくに，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに $\vec{0}=(0,0,\cdots,0)$ でないとき，

$$-1 \le \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \le 1$$

が成り立つ．このことから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす「角度」を定義できる：

定義 （ベクトルのなす角，垂直，平行） $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに $\vec{0}$ でないとき，

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}}{\|\vec{\boldsymbol{a}}\|\|\vec{\boldsymbol{b}}\|}$$

を満たす実数 $\theta\in[0,\pi]$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**なす角** (angle) という．さらに，$\theta=\pi/2$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**垂直** (perpendicular) であるといい，$\vec{\boldsymbol{a}}\perp\vec{\boldsymbol{b}}$ と表す．また，$\theta=0$ あるいは π のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行** (parallel) であるといい，$\vec{\boldsymbol{a}}\,/\!/\,\vec{\boldsymbol{b}}$ と表す．

ちなみに，平行を表す記号の世界標準は傾けない $\vec{a}\parallel\vec{b}$ なのだという．

三角不等式． シュワルツの不等式から，次の「三角不等式」がわかる：

命題 11.2 (三角不等式) 任意の $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ に対し，次の不等式が成り立つ：

$$\|\vec{\boldsymbol{a}}\|-\|\vec{\boldsymbol{b}}\| \le \|\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\| \le \|\vec{\boldsymbol{a}}\|+\|\vec{\boldsymbol{b}}\| \tag{11.2}$$

この証明もレポート問題としよう．

ユークリッド距離．

定義 （ユークリッド距離） $\mathbb{R}^n$ 内の 2 点 $\vec{a},\vec{b}$ の**距離** (distance) （もしくは**ユークリッド距離** (Eucledean distance)）を

$$\boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}}) := \|\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}\|$$

と定義する．

このとき，次が成り立つ：

命題 11.3 (距離空間としての $\mathbb{R}^n$) 距離 $d(\cdot,\cdot)$ は次の (D1)〜(D3) を満たす：

(D1) $\boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}})=\boldsymbol{0} \iff \vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{b}}$.

(D2) $\boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}})=\boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{a}})$.

(D3) $\boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}})\le\boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{c}})+\boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{c}},\vec{\boldsymbol{b}})$. (三角不等式)

証明はレポート問題とする．

注意． 一般に，(D1)〜(D3) を満たすような関数 $d: X\times X\to[0,\infty)$ が定義されているような集合 X を**距離空間** (metric space) という．

ある不等式． 以下，ベクトルの列（「点列」）を考えるにあたって重要な不等式を述べておこう：

命題 11.4 (ノルムの max 評価) 任意の $\vec{a} = (a_1, \cdots a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\max_{1 \le i \le n} |a_i| \le \|\vec{a}\| \le \sqrt{n} \max_{1 \le i \le n} |a_i|.$$

証明. 明らかに

$$\max\{a_1^2, \cdots, a_n^2\} \le a_1^2 + \cdots + a_n^2 \le n \max\{a_1^2, \cdots, a_n^2\}$$

が成り立つので，それぞれの平方根をとればよい． ■

点列の収束

ベクトルの列の収束性を定義しよう．

定義 (点列の収束，コーシー列)

- $\mathbb{R}^n$ のベクトルからなる列 $\{\vec{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は**点列** (sequence (of points)) とよばれる．
- 点列 $\{\vec{a}_k\}$ が**収束する** (converge) とは，ある $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ が存在し，

$$\|\vec{a}_k - \vec{A}\| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

となることをいう．すなわち，

$$({}^{\forall}\epsilon > 0)({}^{\exists}N \in \mathbb{N}) \;\; k \ge N \implies \|\vec{a}_n - \vec{A}\| < \epsilon.$$

- 点列 $\{\vec{a}_k\}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは，

$$({}^{\forall}\epsilon > 0)({}^{\exists}N \in \mathbb{N}) \;\; k > l \ge N \implies \|\vec{a}_k - \vec{a}_l\| < \epsilon$$

が成り立つことをいう．

- 点列 $\{\vec{a}_k\}$ が**有界** (bounded) であるとは，

$$({}^{\exists}M > 0)({}^{\forall}k \in \mathbb{N}) \quad \|\vec{a}_k\| \le M$$

が成り立つことをいう．

点列の収束性を次のようにいい換えておくと便利である．

命題 11.5 (収束性のいい換え) $\{\vec{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}^n$ 内の点列とし，$\vec{a}_k = (a_k^1, a_k^2, \cdots, a_k^n)$ と表すことにする．このとき，以下はすべて同値：

(1) $\{\vec{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が収束する．

(2) すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し，実数列 $\{a_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する．

(3) $\{\vec{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ はコーシー列．

証明. (1) を仮定すると，ある $\vec{A} = (A^1, \cdots, A^n) \in \mathbb{R}^n$ が存在し，$\|\vec{a}_k - \vec{A}\| \to 0 \;\; (k \to \infty)$．このとき命題 11.4 より，すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について $|a_k^i - A^i| \to 0 \;\; (k \to \infty)$．よって (2) が成り立つ．(2)

が成り立つとき，収束する実数列 $\{a_k^i\}_{k\geq 1}$ はコーシー列であるから，

$$({}^\forall \epsilon > 0)({}^\exists N_i \in \mathbb{N})\ \ k > l \geq N_i \implies |a_k^i - a_l^i| < \epsilon/\sqrt{n}.$$

ここで $N = \max\{N_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ とすれば，命題 11.4 より，$k > l \geq N$ のとき，

$$\|\overrightarrow{a_k} - \overrightarrow{a_l}\| \leq \sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n} |a_k^i - a_l^i| < \sqrt{n}\cdot\epsilon/\sqrt{n} = \epsilon.$$

よって (2) ならば (3) が成り立つ．

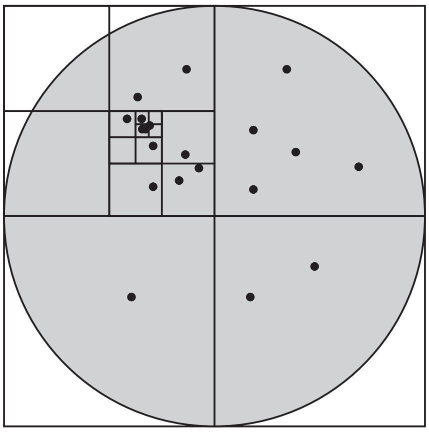
同様の議論により，(2) ならば (1)，(3) ならば (2) が証明される． ■

点列が有界であることは，命題 11.4 より，点列の各座標値からなる数列が有界であることと同値である．それを踏まえて，次の基本的な定理を示そう．

命題 11.6 (多次元版ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理) $\mathbb{R}^n$ 内の有界な点列は収束する部分列を含む．

証明． 有界な点列は各座標の値が有界なので，たとえば第 1 座標が収束するような部分列を選ぶことができる．その中から，さらに第 2 座標が収束するような部分列を選び…と続けていけば，すべての座標値が収束するような部分列を選ぶことができる．命題 11.5 より，このとき点列自体もあるベクトルに収束する．■

証明その 2． 区間縮小法の考え方を用いた証明もできる．アイディアを明確にするために $n = 2$ の場合で示そう．$\|\overrightarrow{a_k}\| \leq M$ を満たす有界点列 $S = \{\overrightarrow{a_k}\}$ があるとき，これは原点中心半径 M の（境界を含む）円板に含まれる．とくに，正方形 $Q_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq M,\ |y| \leq M\}$ にも含まれている．この正方形を 1 辺が半分になるように 4 等分すると，少なくともそのうちのひとつは点列 S の無限個の項を含む [2]．それを Q_1 とし，さらに 1 辺が半分になるように 4 等分する．少なくともそのうちのひとつは点列 S の無限個の項を含むので，それを Q_2 とする．この操作を繰り返すと，$Q \supsetneq Q_1 \supsetneq Q_2 \supsetneq \cdots$ という縮小する正方形の列を得る．区間縮小法の原理により x 座標，y 座標はそれぞれ極限をもつから，添字の増加列 $k_1 < k_2 < \cdots$ を $\{\overrightarrow{a_{k_j}}\} \in Q_j$ となるように選べば，収束する部分列を得る． ■



1 次関数

1 次関数とは次のような形の関数である（小文字が変数，大文字が定数）：

$$\begin{aligned}
&1\text{ 変数：} && y = Ax + B\\
&2\text{ 変数：} && z = Ax + By + C\\
&3\text{ 変数：} && w = Ax + By + Cz + D\\
&n\text{ 変数：} && y = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n + B
\end{aligned}$$

[2] 点として見たときは無限個とは限らない．

（$A_1 = \cdots = A_n = 0$ の場合は定数関数なので正確には「1 次以下の関数」だが，この場合も 1 次関数とよぶことにする.）

n 変数の場合，ベクトル定数 $\overrightarrow{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ とベクトル変数 $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ を用いると

$$y = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{x} + B$$

と表される.

1 次関数の性質. 次は 1 次関数 $y = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{x} + B$ のもつ重要な性質（一様性）である.

命題 11.7 (1 次関数の等高線・等位面) $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$ とする．与えられた実数 k に対し，1 次関数 $y = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{x} + B$ の値がちょうど k となるようなベクトル $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ の集合を

$$\boldsymbol{E_k} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \mid \boldsymbol{k} = \overrightarrow{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\}$$

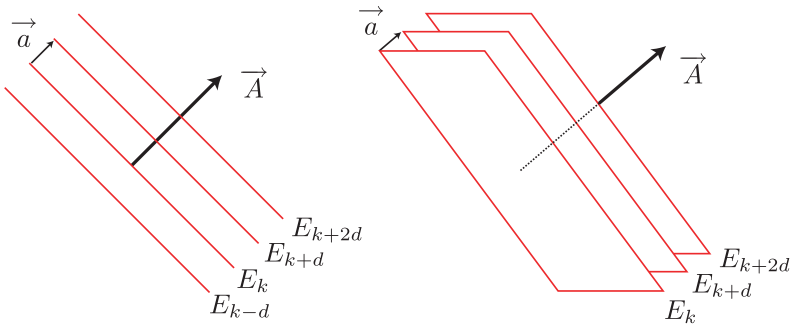
と表すことにする.

(i) $n = 2$ のとき，E_k はベクトル $\overrightarrow{A}$ に垂直な直線となる.

(ii) $n = 3$ のとき，E_k はベクトル $\overrightarrow{A}$ に垂直な平面となる.

また，E_{k+d} は E_k を $\dfrac{d}{\|\overrightarrow{A}\|^2}\overrightarrow{A}$ 平行移動させたものである．とくに $d > 0$ のとき，等差数列 $k, k+d, k+2d, \cdots$ に対応する $E_k, E_{k+d}, E_{k+2d}, \cdots$ は $\overrightarrow{A}$ の方向に等間隔に並ぶ.

E_k のような集合は 1 次関数の**等高線**もしくは**等位面** (contour) とよばれる．一般に，n 次元ユークリッド空間上の一次関数の等位面は $(n-1)$ 次元**超平面** (hyperplane) とよばれるものになる[3].



証明. (i) と (ii) の証明はレポート問題としよう．$\overrightarrow{a} := (d/\|\overrightarrow{A}\|^2)\overrightarrow{A}$ とおくと，$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{a} = d$ が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} \in E_{k+d} &\iff \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{x} = k + d \iff \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{x} = k + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{a} \\ &\iff \overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}) = k \iff \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} \in E_k. \end{aligned}$$

よって E_{k+d} は E_k をベクトル $\overrightarrow{a}$ 分だけ平行移動させたものである．同様に，E_{k+jd} は E_k をベクトル $j\overrightarrow{a}$ 分平行移動させたものである．とくに，$d > 0$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{a}$ は $\overrightarrow{A}$ の正の定数倍であるから，等高線 $E_k, E_{k+d}, E_{k+2d}, \ldots$ は $\overrightarrow{A}$ と同じ方向に等間隔で並んでいる. ■

[3] $\mathbb{R}^n$ をベクトル空間として考えたとき，その $(n-1)$ 次元部分空間を平行移動させて得られるのが $(n-1)$ 次元超平面である.

レポート問題

締め切りは **7** 月 **17** 日の講義開始前とします．

問題 12-1. (シュワルツの不等式) 命題 11.1 を示せ．(Hint．2 次（以下の）関数 $f(t) := \sum_{k=1}^{n}(ta_k + b_k)^2$ が $f(t) \geq 0$ を満たすことを用いる．)

問題 12-2. (三角不等式) 命題 11.2 と命題 11.3(D3) を示せ．ただし，シュワルツの不等式（命題 11.1）は用いてよい．

問題 12-3. (1 次関数の等高線・等位面) 命題 11.7 の (i) を証明せよ．また，(ii) のようになる理由を説明せよ（厳密に証明してもよいが直感的な説明でもよい）．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあれば メールで ご指摘ください．

多変数関数の微分（7/10）

配布日：2015/7/17 Version：1.1

参考文献： • 小平邦彦『解析入門 I,II』の第 6 章 • スピヴァック『多変数の解析学』の第 1-2 章

開集合・閉集合・コンパクト集合

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の集合に関する定義をまとめておこう．

（ア）． $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対し，集合

$$\mathbb{B}(\overrightarrow{a}, r) := \left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left\| \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} \right\| < r \right\}$$

を中心 $\overrightarrow{a}$ 半径 r の**球**（ball，もしくは**開球**, open ball）とよぶ．

（イ）． S を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．$\overrightarrow{x} \in S$ が S の**内点** (interior point) であるとは，十分小さな $r > 0$ が存在して，$\mathbb{B}(\overrightarrow{x}, r) \subset S$ とできることをいう．

例 1． 球 $S = \mathbb{B}(\overrightarrow{a}, R)$ $(R > 0)$ に含まれる点はすべて内点である．一点からなる集合 $S = \left\{ \overrightarrow{a} \right\}$ は内点を持たない．

（ウ）． $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ が S の**外点** (exterior point) であるとは，十分小さな $r > 0$ が存在して，$\mathbb{B}(\overrightarrow{x}, r) \subset \mathbb{R}^n - S$ とできることをいう．

（エ）． $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ が S の**境界点** (boundary point) であるとは，$\overrightarrow{x}$ が S の内点でも外点でもないことをいう．すなわち，すべての $r > 0$ に対して，$\mathbb{B}(\overrightarrow{x}, r) \cap S \neq \emptyset$ かつ $\mathbb{B}(\overrightarrow{x}, r) \cap (S - \mathbb{R}^n) \neq \emptyset$ が成り立つことをいう．

S の境界点全体からなる集合を ∂S と表し，S の**境界** (boundary) という．

例 2． 球 $S = \mathbb{B}(\overrightarrow{a}, R)$ $(R > 0)$ に対し，$\left\| \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} \right\| = R$ を満たす $\overrightarrow{x}$ はすべて境界点である．ただし，$\overrightarrow{x} \notin S$ である．

注意． この例のように，一般には集合 S の境界点が S に含まれているとは限らない．

（オ）開集合． 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が**開集合** (open set) であるとは，S に属する点がすべて S の内点であることをいう．

S に属する点は S の内点か境界点である．S が開集合であるとは,「S が境界点を含まない」ことと同値である．すなわち，$S \cap \partial S = \emptyset$．

（カ）開集合． 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が**閉集合** (closed set) であるとは，$\mathbb{R}^n - S$ が開集合となることをいう．

定義より $\partial S = \partial(\mathbb{R}^n - S)$ となることに注意しよう．$\mathbb{R}^n - S$ が開集合ということは，$\mathbb{R}^n - S$ が境界点を含まないことを意味する．よって，S が閉集合であるとは,「S が境界点をすべて含む」ことと同値である．すなわち，$\partial S \subset S$．

注意． $\mathbb{R}^n$ は開集合であるから，その補集合である空集合 $\emptyset$ は閉集合である．また，$\mathbb{R}^n$ は境界点を持たないので，$\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$．これは $\partial \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ を意味するので，$\mathbb{R}^n$ も閉集合でもある．ゆえに，その補集合である空集合 $\emptyset$ は開集合でもある．

じつは，$\mathbb{R}^n$ の部分集合で開集合かつ閉集合であるものは $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ そのものしか存在しない[1]．

（キ）有界集合とコンパクト集合． $S \subset \mathbb{R}^n$ が**有界** (bounded) であるとは，ある定数 $M > 0$ が存在して，任意の $\overrightarrow{a} \in S$ に対し $\left\| \overrightarrow{a} \right\| \leq M$ が成り立つことをいう．

[1]「開かつ閉」の部分集合は英語で “clopen set” とよばれることもある．位相空間としての「連結性」は,「空集合と全体集合以外に “clopen set” は存在しない」と言い換えることができる．

S が有界な閉集合であるとき，**コンパクト（集合）**(compact (set)) であるという[2].

（ク）領域・閉領域. 開集合 S が**連結** (connected) であるとは，S 内の任意の 2 点を S の中だけを通る折れ線で結ぶことができることをいう．

連結な開集合は**領域** (domain) とよばれる．領域 S にその境界 ∂S を加えた閉集合 $S \cup \partial S$ を**閉領域** (closed domain) という．

（ク）その他の記号・用語など.

- S の内点全体からなる集合は S° と表される．
- 和集合 $S \cup \partial S$ を $\overline{S}$ で表し，S の**閉包** (closure) とよぶ．
- 「S が開集合 $\iff S = S^\circ$」,「S が閉集合 $\iff S = \overline{S}$」が成り立つ．

多変数関数

定義 （関数，定義域，値域，etc.） D を $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合とする．

- D の各元 $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ にひとつの実数 b を対応させたものを D 上の**関数** (function) という．$n \geq 2$ のときは**多変数関数** (multivariable function) ともよばれる．
- f をそのような関数とするとき，b を $\overrightarrow{a}$ における関数 f の**値** (value) とよび，

$$b = f(\overrightarrow{a}), \qquad f : \overrightarrow{a} \mapsto b, \qquad \overrightarrow{a} \xmapsto{f} b$$
$$b = f(a_1, \ldots, a_n), \qquad f : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto b, \qquad (a_1, \ldots, a_n) \xmapsto{f} b$$

  などと表す．
- D を関数 f の**定義域** (domain) とよぶ．
- 集合 $S \subset D$ に対し，集合

$$\boldsymbol{f(S) := \{f(\overrightarrow{a}) \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{a} \in S\} = \{b \in \mathbb{R} \mid {}^\exists \overrightarrow{a} \in S,\ b = f(\overrightarrow{a})\}}$$

  を関数 f による S の**像** (image) という．とくに，$f(D)$ を関数 f の**値域** (range) とよぶ．
- 関数 f の値域 $f(D)$ が集合 $X \subset \mathbb{R}$ に入っていることがわかっているとき，関数 f を $f : D \to X$ のように表す．

注意. 関数 f を表すのに，しばしば $y = f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ という形が用いられる．この $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ は各成分が自由に変化する独立変数であり，**ベクトル変数** (または変数ベクトル， variable vector) とよばれることがある．

例 3. $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, x_2) := {x_1}^2 + {x_2}^2$ と定める．このとき，$f(\overrightarrow{x}) \geq 0$ なので，$f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ と表される．

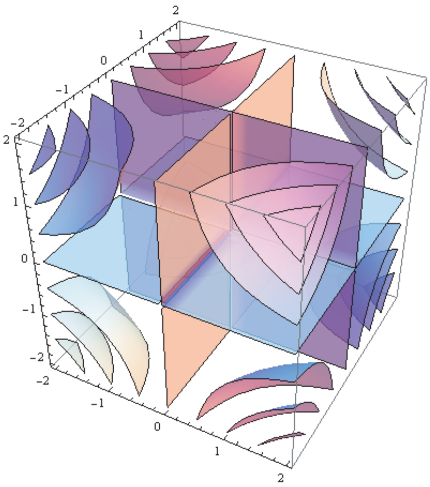
[2] 位相空間論では,「開被覆」という概念を用いてコンパクト性を定義する．

等位面.

定義 (等位面) 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ と与えられた実数 k に対し，集合

$$\boldsymbol{E_k = \{\overrightarrow{x} \in D \mid f(\overrightarrow{x}) = k\}}$$

を関数 f の高さ f の**等位面** (contour) とよぶ.



例 4（1 次関数）. 前回の議論により，1 次関数 $y = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{x} + B$ $(\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0})$ の等位面は $n = 2$ のとき $\overrightarrow{A}$ と垂直な直線，$n = 3$ のとき $\overrightarrow{A}$ と垂直な平面である.

例 5. 関数 $w = f(x, y, z) = xyz$ の等位面は右の図のようになる（各座標が絶対値 2 以下の範囲）.

極限と連続性

以下，D は内点をもつ $\mathbb{R}^n$ の部分集合（たとえば領域）とする.

定義 (関数の極限) $\overrightarrow{a} \in D \cup \partial D$ とする（すなわち，$\overrightarrow{a} \in D$ とは限らない.）. 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}$ のとき実数 A に**収束する** (converge) とは，

$$\boldsymbol{({}^\forall \epsilon > 0)({}^\exists \delta > 0)\ \ 0 < \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\| < \delta \implies |f(\overrightarrow{x}) - A| < \epsilon}$$

が成り立つことをいう. このとき，

$$\boldsymbol{f(\overrightarrow{x}) \to A\ \ (\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a})} \quad \text{もしくは} \quad \boldsymbol{\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x}) = A}$$

と表し，A を関数 f の $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}$ のときの**極限** (limit) という..

例 6. 関数 $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ は $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ において定義されているが，極限 $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 1$ は定義される.

定義 (関数の連続性) $\overrightarrow{a} \in D$ とする. 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が $\overrightarrow{a}$ において**連続** (continuous) であるとは，$\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}$ のとき $f(\overrightarrow{x}) \to f(\overrightarrow{a})$ が成り立つことをいう. すなわち，

$$\boldsymbol{({}^\forall \epsilon > 0)({}^\exists \delta > 0)\ \ \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\| < \delta \implies |f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a})| < \epsilon}$$

が成り立つことをいう.
f が D 上のすべての点で連続であるとき,「f は D 上で連続」あるいは「f は D 上の連続関数」であるという.

次は連続関数のもっとも重要な性質だといってよい：

定理 12.1 (最大値・最小値の存在) コンパクト集合上の連続関数は最大値と最小値をもつ．

すなわち，D がコンパクト集合であり，$f : D \to \mathbb{R}$ が連続であるとき，ある $\vec{a}, \vec{b} \in D$ が存在して，任意の $\vec{x} \in D$ に対し

$$f(\vec{a}) \le f(\vec{x}) \le f(\vec{b})$$

が成り立つ．

証明はレポート問題としよう．

微分可能性

1 変数関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $a \in I$ で「微分可能」であるとは，

$$f(x) = \underbrace{f(a) + A(x-a)}_{1\text{ 次関数}} + \underbrace{o(|x-a|)}_{\text{誤差}} \quad (x \to a)$$

を満たす定数 $A \in \mathbb{R}$ が存在することをいうのであった．

多変数関数の場合も，まったく同様の方法で「微分可能性」を定義する：

定義 (多変数関数の微分可能性) 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が $\vec{a} \in D$ において **(全) 微分可能** ((totally) differentiable) であるとは，あるベクトル $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ が存在し，$\vec{x} \to \vec{a}$ のとき

$$\boldsymbol{f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|)} \tag{12.1}$$

が成り立つことをいう．このとき，$\vec{A}$ を関数 f の $\vec{a}$ における**勾配ベクトル** (gradient vector) もしくは**微分係数** (derivative) とよび，

$$\boldsymbol{\nabla f(\vec{a}),\quad Df(\vec{a}),\quad \mathbf{grad}\, f(\vec{a})}$$

などと表す．

注意.

- 「全微分可能」(totally differentiable) というのは，後で出てくる「偏微分可能」(partially differentiable) との区別を強調するときに用いる．本講義では単に「微分可能」とよぶことにする．
- 式 (12.1) の正確な意味は次の通り：関数 $y = f(\vec{x})$ を 1 次関数 $y = f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a})$ で近似した誤差
$$E(\vec{x}) := f(\vec{x}) - \{f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a})\}$$
について，$\dfrac{E(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \to 0$ $(\vec{x} \to \vec{a})$ が成り立つ．この $E(\vec{x})$ をランダウ記号で $o(\|\vec{x} - \vec{a}\|)$ と表しているのである．
- 記号 ∇ は**ナブラ** (nabla) と読む．

- 念のために $n=3$ のとき式 (12.1) を成分で表してみよう．$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$\overrightarrow{A}=(A_1,A_2,A_3)$ とするとき，

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= f(a_1,a_2,a_3)+\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1-a_1\\x_2-a_2\\x_3-a_3\end{pmatrix}+o(\sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_3-a_3)^2}) \\ &= f(a_1,a_2,a_3)+\sum_{i=1}^{3}A_i(x_i-a_i)+o\left(\left(\sum_{i=1}^{3}(x_i-a_i)^2\right)^{1/2}\right). \end{aligned}$$

例 7（1 次関数）． 1 次関数 $y=f(\overrightarrow{x})=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{x}+B$ はすべての点 $\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^n$ で微分可能であり，一定の勾配ベクトル $\nabla f(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{A}$ をもつ．実際，

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x})-f(\overrightarrow{a}) &= (\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{x}+B)-(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{a}+B) \\ &= \overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}) \end{aligned}$$

であるから，誤差ゼロで微分可能性の式 (12.1) を満たす．

> **例題 12.1 (微分可能性)** 2 次関数 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ は点 $(1,2)$ で微分可能であることを示せ．また，その勾配ベクトルを求めよ．

解答． $x=x-1$，$y=y-2$ とおく．このとき

$$f(x,y)=(\ \ x+1)^2+(\ \ y+2)^2=5+2\ \ x+4\ \ y+\ \ x^2+\ \ y^2$$

であるから，

$$f(x,y)=5+2(x-1)+4(y-2)+\underline{(x-1)^2+(y-2)^2}.$$

を得る．$f(1,2)=5$ であり，下線部は $(x,y)\to(1,2)$ のとき

$$\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\to 0$$

を満たすので，$o\Big(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\Big)$ と表される．よって点 $(1,2)$ において微分可能性の式 (12.1) を満たす．勾配ベクトルは $(2,4)$ である． ■

連続性と微分可能性． 最後に，微分可能性から連続性が自動的に導かれることを示そう：

> **命題 12.2 (微分可能なら連続)** $f:D\to\mathbb{R}$ が $\overrightarrow{a}$ で微分可能であれば，$\overrightarrow{a}$ で連続である．

証明． $\overrightarrow{a}$ において式 (12.1) が成り立つとしよう．$\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}$ のとき明らかに $f(\overrightarrow{x})\to f(\overrightarrow{a})$ であるから，$\overrightarrow{a}$ において連続である． ■

レポート問題

締め切りは 7 月 24 日の講義開始前とします．

問題 13-1. (開集合)

(1) $a_1<b_1$，$a_2<b_2$ とするとき，$\mathbb{R}^2$ 内の集合

$$Q_2=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid a_1<x_1<b_1,\ a_2<x_2<b_2\}$$

は開集合であることを示せ．

(2) より一般に，$a_1 < b_1$，$\cdots$，$a_n < b_n$ とするとき，$\mathbb{R}^n$ 内の集合

$$Q_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 < x_1 < b_1, \cdots, a_n < x_n < b_n\}$$

は開集合であることを示せ．

問題 13-2. (最大値・最小値の存在) 1 変数関数のときの証明を参考に，定理 12.1 を示せ．

問題 13-3. (微分可能性) 次の関数が与えられた点で微分可能であることを示せ．また，そこでの勾配ベクトルを求めよ．

(1) $z = x^2 + y^2$,　$(x, y) = (a, b)$

(2) $z = xy$,　$(x, y) = (1, 1)$

(3) $w = x^2 + y^2 + z^2$,　$(x, y, z) = (1, 2, 3)$

ボーナス問題（+1 **point**）．このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあれば メールで ご指摘ください．

方向微分と偏微分（7/17）

配布日： 2015/7/24　Version： 1.1

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I, II』の第 6 章　• スピヴァック『多変数の解析学』の第 2 章

方向微分

大学 1 年生のときに学ぶ多変数（2 変数）の微分積分では,「偏微分」が重要な役割を果たしていた．たとえば $z = f(x, y)$ の偏微分とは，x 軸と y 軸方向という特定の 2 方向に関する関数の変化率を表現するものであった．しかし自然界には x 軸や y 軸といった軸が引かれているわけではなく，これらの方向が特別な意味をもつことはない．私たち人間が設定する座標系はつねに便宜的なものであるから，特定の座標系に依存しない形で自然現象を記述することが求められる．関数の微分に関していえば，あらゆる方向に関して関数の変化率を調べることが必要となる．

そのために必要なのが，次の「方向微分」である．

以下，$D \subset \mathbb{R}^n$ を領域（ひとつながりの開集合）であり，$f : D \to \mathbb{R}$ を関数とする．

定義（方向微分）． $\vec{a} \in D$ と「速度ベクトル」$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ を固定する．時刻 $t = 0$ に $\vec{a}$ を速度 $\vec{v}$ で通る直線 $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$ を考える．$t \to 0$ のときの極限

$$\boldsymbol{K = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t}}$$

が存在するとき，これを関数 f の $\vec{a}$ における **$\boldsymbol{\vec{v}}$ に沿った方向微分（係数）** (directional derivative) とよび，次のように表す．

$$\boldsymbol{K = D_{\vec{v}} f(\vec{a}).}$$

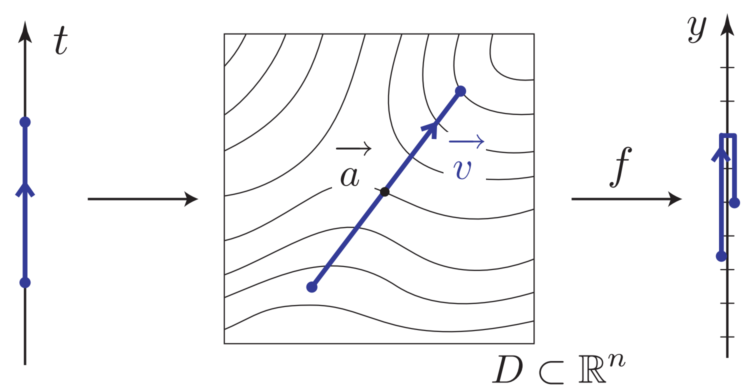
この極限 K は 0 に十分近い実数 t に対して

$$t \mapsto \vec{a} + t\vec{v} \stackrel{f}{\longmapsto} f(\vec{a} + t\vec{v}) \in \mathbb{R}$$

と合成して得られる 1 変数関数 $t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{v})$ の，$t = 0$ における微分係数である．また，私たちの微分係数の定義に即して書けば，$t \to 0$ のときある定数 K が存在して

$$f(\vec{a} + t\vec{v}) = f(\vec{a}) + K\,t + o(t)$$

と書けるとき，この定数 K を f の $\vec{a}$ における $\vec{v}$ に沿った方向微分とよぶのである．



例 1. $f(x,y)=x^2+y^2$ の $\vec{a}=(1,2)$ におけるベクトル $\vec{v}=(1,-1)$ に沿った方向微分を求めてみよう．

$$(x,y)=\vec{a}+t\vec{v}=(1,2)+t(1,-1)=(1+t,2-t)$$

で表される直線上での f の値を考えればよい：

$$\begin{aligned} f(\vec{a}+t\vec{v})-f(\vec{a}) &= f(1+t,2-t)-f(1,2)=(1+t)^2+(2-t)^2-(1^2+2^2) \\ &= -2t+2t^2 \end{aligned}$$

より，$f(\vec{a}+t\vec{v})=f(\vec{a})-2t+o(t)$ であり，

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{a}+t\vec{v})-f(\vec{a})}{t}=-2+2t\to -2 \quad (t\to 0).$$

よって求める方向微分は -2 である．

定理 13.1 (微分可能性と方向微分) $f:D\to\mathbb{R}$ が $\vec{a}\in D$ で微分可能であるとき，任意の「速度ベクトル」 $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ に沿った方向微分 $D_{\vec{v}}f(\vec{a})$ が存在する．さらに，次が成り立つ：

$$\boldsymbol{D_{\vec{v}}f(\vec{a})=\nabla f(\vec{a})\cdot\vec{v}}. \tag{13.1}$$

ここで，右辺は「勾配ベクトル」と「速度ベクトル」の内積である．

例 2. 前回計算したように例 1 の関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ は点 $(1,2)$ において微分可能であり，そこでの勾配ベクトルは $(2,4)$ であった，一方定理 13.1 より，勾配ベクトル $(2,4)$ と速度ベクトル $(1,-1)$ の内積の値は -2 である．すなわち，例 1 の結果とつじつまが合っている．

証明. $\vec{a}$ で微分可能なので，勾配ベクトルを $\vec{A}:=\nabla f(\vec{a})$ とおくと，$\vec{x}\to\vec{a}$

$$f(\vec{x})=f(\vec{a})+\vec{A}\cdot(\vec{x}-\vec{a})+o(\|\vec{x}-\vec{a}\|) \tag{13.2}$$

がなりたつ．いま任意に速度ベクトル $\vec{v}$ を固定し，$\vec{x}(t):=\vec{a}+t\vec{v}$ で表される $\mathbb{R}^n$ 内の直線を考える．t が十分 0 に近いとき，$\vec{x}(t)$ は $\vec{a}$ の十分近くにあり，$f(\vec{x}(t))\in D$ となる．とくに，$t\to 0$ のとき $\vec{x}(t)\to\vec{a}$ となるから，式 (13.2) より

$$\begin{aligned} & f(\vec{a}+t\vec{v})=f(\vec{a})+\vec{A}\cdot(t\vec{v})+o(\|t\vec{v}\|) \\ \iff\ & f(\vec{a}+t\vec{v})-f(\vec{a})=(\vec{A}\cdot\vec{v})t+o(|t|) \end{aligned}$$

となるから，$\vec{v}$ に沿った方向微分 $D_{\vec{v}}f(\vec{a})$ は存在し，その値は $\vec{A}\cdot\vec{v}=\nabla f(\vec{a})\cdot\vec{v}$ である． ■

偏微分 方向微分の特別な場合として，偏微分を定義しよう．

定義　(偏微分)　• $\mathbb{R}^n$ の元で，第 i 成分のみが 1 であとは 0 であるものを $\overrightarrow{e}_i$ で表す．すなわち，

$$\overrightarrow{e}_1 := (1, 0, \cdots, 0),\quad \overrightarrow{e}_2 := (0, 1, \cdots, 0),\quad \ldots,\quad \overrightarrow{e}_n := (0, 0, \cdots, 1).$$

（これらを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底** (canonical basis) とよぶ.）

- また，$\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を変数とする関数 $f : D \to \mathbb{R}$ と $\overrightarrow{a} \in D$ に対し，$\overrightarrow{e_i}$ に沿った方向微分係数

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{e_i}} f(\overrightarrow{a}) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a})}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + t, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{t} \end{aligned}$$

を関数 f の $\overrightarrow{a}$ における**第 i 偏微分係数** (ith partial derivative) もしくは**x_i 偏微分係数** (partial derivative with respect to x_i) とよび，

$$\partial_i f(\overrightarrow{a}),\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{a}),\quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(\overrightarrow{a}),\quad f_{x_i}(\overrightarrow{a})$$

などと表す.

- すべての偏微分係数 $\partial_1 f(\overrightarrow{a}), \ldots, \partial_n f(\overrightarrow{a})$ が存在するとき，関数 f は $\overrightarrow{a}$ において**偏微分可能** (partially differential) であるという.

定理 13.1 より，次の定理を得る：

定理 13.2 (微分可能なら偏微分可能) $f : D \to \mathbb{R}$ が $\overrightarrow{a} \in D$ で微分可能であれば，その点で偏微分可能である．また，勾配ベクトルを $\overrightarrow{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ と表すとき，$i = 1, 2, \ldots, n$ に対し

$$\partial_i f(\overrightarrow{a}) = A_i.$$

したがって，勾配ベクトルは偏微分係数を用いて次のように書ける：

$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = \Big(\partial_1 f(\overrightarrow{a}), \partial_2 f(\overrightarrow{a}), \ldots, \partial_n f(\overrightarrow{a})\Big).$$

証明.　定理 13.1 より，各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して第 i 偏微分係数，すなわち $\overrightarrow{e_i}$ に沿った方向微分 $\partial_i f(\overrightarrow{a}) = D_{\overrightarrow{e_i}} f(\overrightarrow{a})$ が存在する．式 (13.1) より，

$$\partial_i f(\overrightarrow{a}) = D_{\overrightarrow{e_i}} f(\overrightarrow{a}) = \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{e_i} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{e_i} = A_i. \qquad \blacksquare$$

レポート問題（通常のレポート課題は終了しました）

ボーナス問題（+1 point）.　このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあればメールでご指摘ください.（8 月 4 日まで）

テイラー展開と合成関数の微分（7/24）

配布日：2015/7/31　Version：1.1

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I, II』の第 6 章　• スピヴァック『多変数の解析学』の第 2 章

高階導関数と C^n 級関数

以下，$D \subset \mathbb{R}^n$，$f : D \to \mathbb{R}$ を関数とする．

定義 (高階導関数)　• $f : D \to \mathbb{R}$ は偏微分可能であるする．$i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し，第 j 偏導関数の第 i 偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f \quad = \partial_i(\partial_j f) = (f_{x_j})_{x_i}$$

を

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i}$$

などと表す．とくに，$i = j$ のときは $\dfrac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} = {\partial_i}^2 f$ とも表す．これらを関数 f の**2 階導関数** (second partial deribative) とよぶ．すべての 2 階導関数 $f_{x_i x_j}$ が存在するとき，f は**2 回偏微分可能**という．同様に、自然数 N に対して関数 f の N 階遍導関数と N 回偏微分可能性が定まる．

- 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が連続であることを $\boldsymbol{C^0}$ **級**であるという．また，自然数 N に対し，関数 $f : D \to \mathbb{R}$ の N 階までの導関数が存在し，しかもそれらがすべて連続であるとき，関数 f は $\boldsymbol{C^N}$ **級（関数）** (function of class C^N) であるという．
- 関数 f がすべての自然数 N に対して C^N 級であるとき，$\boldsymbol{C^\infty}$ **級（関数）** (function of class C^∞) もしくは**滑らか** (smooth) であるという

わざわざ「C^1 級関数」を考える最大の理由は，次の定理が成り立つことにある：

定理 14.1 (C^1 級なら微分可能) $f : D \to \mathbb{R}$ が C^1 級関数であれば，微分可能である．すなわち，偏導関数 $f_{x_1}, \cdots, f_{x_n}$ が存在しすべて連続であれば，関数 f は連続である．とくに，勾配ベクトルは偏微分係数を用いて次のように書ける：

$$\boldsymbol{\nabla f(\overrightarrow{a}) = \Big(\partial_1 f(\overrightarrow{a}), \partial_2 f(\overrightarrow{a}), \ldots, \partial_n f(\overrightarrow{a})\Big).}$$

注意． 一般に，与えられた関数が与えられた点で微分可能であることを定義通りに確認するには、巧みな（もしくは、単に面倒な）式変形が必要となり，あまり実用的とはいえない．一方，与えられた関数が C^1 級関数であることを確認するのは比較的やさしい．実際，偏微分の計算自体は実質的に 1 変数の微分計算であり，得られた偏導関数が連続であるかどうかも式の形から一目で判定できることが多い．

例． $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = xy^2 \sin e^{x^2+y^2}$ は（任意の点で）微分可能である．なぜなら、f_x も f_y も，x と y の連続関数の和，積，合成で書けることが（計算するまでもなく）わかるからである．

証明． 2 変数の場合と同様． ■

「C^2 級以上の関数」を考える利点は，次の定理が成り立つことにある：

定理 14.2 (偏微分の順序交換) $f : D \to \mathbb{R}$ が C^2 級関数であれば，任意の $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し，

$$\boldsymbol{\partial_i \partial_j f(\vec{x}) = \partial_j \partial_i f(\vec{x}).}$$

とくに，C^N 級であれば，N 階までの偏微分の順序は自由に交換してよい．

証明 2 変数の場合と同様. ■

テイラー展開

ヘッセ行列と 2 次形式. $f : D \to \mathbb{R}$ を C^2 級関数とする．$\vec{a} \in D$ に対し，n 次正方行列（すなわち，$n \times n$ 行列）で (i, j) 成分を $h_{ij} := \partial_i \partial_j f(\vec{a})$ にもつものを $\boldsymbol{Hf(\vec{a})}$ で表し，**ヘッセ行列** (Hesse matrix）という．定理 14.2 より，ヘッセ行列は $h_{ij} = h_{ji}$ を満たす．すなわち，対称行列である．

いま $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ を取るとき，これらを縦ベクトル (すなわち $n \times 1$ 行列）とみなせば、$\vec{p}$ の転置 ${}^t\vec{p}$ は横ベクトル（$1 \times n$ 行列）であり，行列としての積

$${}^t\vec{p}\, Hf(\vec{a})\, \vec{q} = (p_1 \ \ldots \ p_n) \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

は実数（1×1 行列）である [1]．ヘッセ行列を用いて，C^2 級関数の 2 次のテイラー展開を表現することができる．

定理 14.3 (n 変数関数の 2 次テイラー展開) 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ は C^2 級であり，定義域 D は $\vec{a}$ 中心の球 $\mathbb{B}(\vec{a}, r)$ を含んでいるとする．このとき，すべての $\vec{x} \in \mathbb{B}(\vec{a}, r)$ に対し，$\vec{x}$ と $\vec{a}$ を内分するベクトル $\vec{a}'$ が存在し，と表すとき，2 次テイラー展開

$$\boldsymbol{f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2}{}^t(\vec{x} - \vec{a}) Hf(\vec{a}')(\vec{x} - \vec{a})}$$

が成り立つ．また，$\vec{x} \to \vec{a}$ のとき 2 次漸近展開

$$\boldsymbol{\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) \\ &\qquad + \frac{1}{2}{}^t(\vec{x} - \vec{a}) Hf(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|) \end{aligned}}$$

が成り立つ．

このままではわかり辛いから，具体例を見てみよう．

例題 14.1 (多項式のテイラー展開) $w = f(x, y, z) = xyz$ の点 $(1, -1, 2)$ における 2 次のテイラー展開と漸近展開を計算せよ．

解答 勾配ベクトルは $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (yz, zx, xy)$, ヘッセ行列は $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$ で

[1] 任意の $\vec{p} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ に対して ${}^t\vec{p}\, M\, \vec{p} > 0$ が成り立つような n 次対称行列は**正定値対称行列** (positive-definite symmetric matrix) とよばれる．

ある．$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x-1, y+1, z-2)$ とおくとき，ある $c \in (0,1)$ が存在して [2]

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(1,-1,2) + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta x \ \ \Delta y \ \ \Delta z) \begin{pmatrix} 0 & 2 + c\Delta z & -1 + c\Delta y \\ 2 + c\Delta z & 0 & 1 + c\Delta x \\ -1 + c\Delta y & 1 + c\Delta x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\ &= -2 - 2\Delta x + 2\Delta y - \Delta z + 2\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta z - \Delta z\Delta x + 3c\Delta x\Delta y\Delta z. \end{aligned}$$

同様に漸近展開は

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(1,-1,2) + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta x \ \ \Delta y \ \ \Delta z) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + o(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \\ &= -2 - 2\Delta x + 2\Delta y - \Delta z + 2\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta z - \Delta z\Delta x + o(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2). \end{aligned}$$

■

一般次数のテイラー展開． f が C^N 級の場合、一般次数のテイラー展開は次のようになる：$\overrightarrow{x} \in B(\overrightarrow{a}, r)$ と $\overrightarrow{a}$ を内分する点 $\overrightarrow{a}'$ が存在し，$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ とおくとき、

$$\boldsymbol{f(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}(\Delta x_1 \partial_1 + \cdots + \Delta x_n \partial_n)^k f(\overrightarrow{a}) + \frac{1}{N!}(\Delta x_1 \partial_1 + \cdots + \Delta x_n \partial_n)^N f(\overrightarrow{a}').}$$

ただし，たとえば $(\Delta x_1 \partial_1 + \Delta x_2 \partial_2)^2 f(\overrightarrow{a})$ はまず形式的に $(\Delta x_1^2 \partial_1^2 + 2\Delta x_1 \Delta y_1 \partial_1 \partial_2 + \Delta x_2^2 \partial_2^2) f(\overrightarrow{a})$ と展開した上で，$\Delta x_1^2 f_{x_1 x_1}(\overrightarrow{a}) + 2\Delta x_1 \Delta x_2 f_{x_1 x_2}(\overrightarrow{a}) + \Delta x_2^2 f_{x_2 x_2}(\overrightarrow{a})$ と計算する．

証明は 2 変数のときと同様である（下の合成関数の微分公式を用いる.）．意外とよく用いるのが，$N = 1$ にあたる次の定理である：

> **定理 14.4 (多変数の平均値の定理)** $B(\overrightarrow{a}, r) \subset D$ かつ $f : D \to \mathbb{R}$ が C^1 級のとき、$\overrightarrow{x} \in B(\overrightarrow{a}, r)$ と $\overrightarrow{a}$ を内分する点 $\overrightarrow{a}'$ が存在し，
>
> $$\boldsymbol{f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) = \nabla f(\overrightarrow{a}') \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}).}$$

合成関数の微分

時刻 t $(\alpha \le t \le \beta)$ で媒介変数表示された $\mathbb{R}^n$ 内の曲線

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

が**滑らかな曲線** (smooth curve) であるとは，

- 各 $x_i : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ は C^1 級
- **速度ベクトル** $\dfrac{d\overrightarrow{x}}{dt}(t) = \left(\dfrac{dx_1}{dt}(t), \cdots, \dfrac{dx_n}{dt}(t)\right)$ はゼロベクトルにならない．

[2] 例題 14.2 での計算より，この場合，$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ に依存せず $c = 1/3$ だとわかる．

ことをいう．

命題 14.5 (合成関数の微分) 曲線 $\vec{x} = \vec{x}(t)$ に対し，関数 $y = f(\vec{x})$ との合成関数 $F(t) = f(\vec{x}(t))$ の微分は**勾配ベクトルと速度ベクトルの内積**

$$\boldsymbol{F'(t) = \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t)}$$

で与えられる．ただしダッシュ（$'$）は t による微分 $\dfrac{d}{dt}$ を表す．

証明のスケッチ． $t \to t_0$ のとき $\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{x}'(t_0)(t - t_0) + \vec{E}(t)$ （ただし $\vec{E}(t)$ の各成分は $o(|t - t_0|)$）と表される．

f は C^1 級なので微分可能であるから，$\vec{x}(t) \to \vec{x}(t_0)$ のとき

$$\begin{aligned} f(\vec{x}(t)) - f(\vec{x}(t_0)) &= \nabla f(\vec{x}(t_0)) \cdot \left(\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)\right) + o(\|\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)\|) \\ &= \nabla f(\vec{x}(t_0)) \cdot \vec{x}'(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|). \end{aligned}$$

これは題意の等式を意味する． ■

注意． この微分の値は，曲線の速度ベクトル $\vec{v} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}(t_0)$ に沿った方向微分 $D_{\vec{v}} f(\vec{x}(t_0))$ と一致する．

例． $f(x, y, z)$ が C^1 級であるとき，t の関数 $F(t) := f(t, t^2, e^t)$ の導関数を求めよう．まず曲線 $t \mapsto (t, t^2, e^t)$ で定まる関数の速度ベクトルは $(1, 2t, e^t)$ なので，

$$\frac{dF}{dt}(t) = \begin{pmatrix} f_x(t, t^2, e^t) \\ f_y(t, t^2, e^t) \\ f_z(t, t^2, e^t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{pmatrix} = f_x(t, t^2, e^t) + 2t f_y(t, t^2, e^t) + e^t f_z(t, t^2, e^t).$$

レポート問題（通常のレポート課題は終了しました）

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違いがあれば メールで ご指摘ください．(8 月 4 日まで)