

この講義について

配布日：2016 年 4 月 5 日 Version：1.1

担当教員：川平 友規 (Kawahira, Tomoki；理学院数学系)

講義ウェブサイト：

<http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/16S-tokuron.html>

配布された資料が pdf 形式でダウンロードできます。また、毎週の進捗状況についてコメントしていきます。

講義の目的 (シラバスの要約)：「ベルトラミ方程式」とは、(1次元) 複素構造の変形度合いを「ベルトラミ係数」として指定し、それを実現するような同相写像を求めるための偏微分方程式である。「ベルトラミ係数」のノルムが1より真に小さいとき、その同相解は「擬等角写像」とよばれるものになっており、タイヒミュラー理論、クライン群論、複素力学系理論などで欠かせない道具となっている。本講義ではまず「ベルトラミ方程式」の種々の解法について概説する。さらに、複素力学系理論について概説し、「擬等角写像」の著しい応用の数々を紹介する。

講義の構成：本講義は4年・大学院向けの講義である。形式的には第1クォーターに開講される「解析学特論 E」と第2クォーターに開講される「解析学特論 F」に分かれており、成績も単位も別々に評価することになるが、内容的には「E」と「F」ふたつ合わせてひとつのまとまった講義となるよう構成されている。

講義計画 (シラバスより改変)：

第 1 Q	解析学特論 E
4月5日	曲面と等温座標
4月12日	Beltrami 係数と擬等角写像
4月19日	擬等角写像の性質
4月26日	Beltrami 方程式の解法 1
5月10日	Beltrami 方程式の解法 2
5月17日	Beltrami 方程式の解法 3
5月24日	概複素構造と無限小楕円場
(5月31日)	休講予定
(6月7日)	講義予備日
第 2 Q	解析学特論 F
6月14日	複素力学系入門 1
6月21日	複素力学系入門 2
6月28日	Fatou-Shishikura の不等式
7月5日	多項式類似写像と Straightening
7月12日	Sullivan の非遊走領域定理
7月19日	David 級退化ベルトラミ方程式
7月24日	放物的手術：退化ベルトラミ方程式の応用
(7月26日)	講義予備日
(8月2日)	講義予備日

教科書および参考書：教科書は特に指定しないが、参考書として以下の本をあげておく。

- L.V. Ahlfors, Lectures on quasiconformal mappings. AMS. (邦訳あり, L.V. アールフォールス, 擬等角写像講義, 丸善出版)

- A.F. Beardon, Iterations of rational functions. Springer.
- 今吉・谷口, タイヒミューラー空間論, 日本評論社.

成績評価の方法：成績はレポート課題（第 1Q と第 2Q の 2 回）による。レポート問題は講義中に指示する。また、第 1Q と第 2Q の終わりにレポートの提出期間を指示する。

オフィスアワー（質問受付）：オフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）は設定していませんが、事前にメールで連絡をとっていただければ対応します。もちろん、授業中・授業後の質問は大歓迎です。院生のみなさんによる数学相談室（月・火・木・金の 16:45~18:45, 本館 1 階 H113/114 講義室）もぜひ活用しましょう。

Beltrami 方程式と擬等角写像 (4/5-4/26)

配布日：2016/05/17 Version：1.1

● 2016/4/5：曲面と等温座標 ●

準備：複素偏微分など

いくつか、記号の準備をしておこう。 $D \subset \mathbb{C}$ を領域とする。また、 C^1 級関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、変数を $z = x + yi$, $w = f(z) = u + vi$ (ただし x, y, u, v は実数) のように表すことにしよう。ただし、 f が C^1 級であるとは $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ が C^1 級の実 2 変数関数であることをいう。

$z_0 = x_0 + y_0i \in D$ における関数 f の x, y に関する偏微分は

$$f_x(z_0) := u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0), \quad f_y(z_0) := u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)$$

と定義され¹、全微分の式

$$f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(z - z_0) \quad (1.1)$$

が成り立つのであった。

ここで、

$$f_z(z_0) := \frac{1}{2}\{f_x(z_0) - if_y(z_0)\}, \quad f_{\bar{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\{f_x(z_0) + if_y(z_0)\},$$

とおき、便宜的に z および \bar{z} に関する「偏微分」と括弧つきで呼ぶことにしよう²。すると上の式 (1.1) は

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)(\overline{z - z_0}) + o(z - z_0) \quad (1.2)$$

のように変形される。³ あたかも、 z と \bar{z} が独立変数で、それらに関して全微分の式が成立するかのようである。この式も、便宜的に z および \bar{z} に関する「全微分」と呼ぶことにしよう。この表現の利点は、この式から即座に

$$f \text{ が } D \text{ 上正則} \iff \bar{z} \text{ に関する「偏微分」 } f_{\bar{z}} \text{ が } D \text{ 上で恒等的に } 0$$

が結論できることである。

空間内の曲面

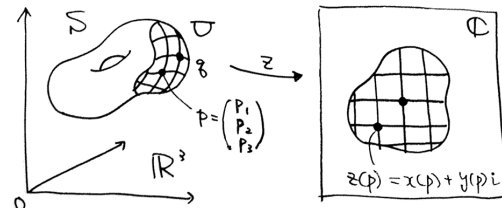
空間内の曲面とアトラス。 いま、ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 に向き付け可能で滑らかな曲面 S があったとする。ここで集合 $S \subset \mathbb{R}^3$ が「向き付け可能な滑らかな曲面」であるとは、(便宜的に) 次の条件を満たす写像の族 $\mathcal{A} = \{z_q: U_q \rightarrow \mathbb{C}\}_{q \in S}$ が存在することだと定義する：

¹単に $f_x(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$, $f_y(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + hi) - f(z_0)}{h}$ と定義してもよい。

²それぞれ f の z 微分, \bar{z} 微分とよばれることもある。また、(今後使うかわからないが、念のために) 微分作用素として $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$, とおき、 $\partial_z := \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar{z}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ と定める。たとえば、 $f_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f$ など。

³微分形式としては、 $dz = dx + dyi$, $\bar{d}z = dx - dyi$ とおいて $df = f_z dz + f_{\bar{z}} \bar{d}z$ もしくは $w = f(z)$ として $dw = w_z dz + w_{\bar{z}} \bar{d}z$ のように書ける。

- 任意の $q \in S$ に対し, $U_q \subset S$ は q の開近傍 (S には \mathbb{R}^3 からの相対位相をいれておく).
- \mathcal{A} の元 $z_q : U_q \rightarrow z_q(U_q) \subset \mathbb{C}$ は C^∞ 級同相写像であり, これを局所座標 (local coordinate) とよぶ.
- $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ ($p, q \in S$) のとき, 座標変換 $z_p \circ (z_q)^{-1}$ の (平面から平面への写像としての) ヤコビアンはつねに正



このような \mathcal{A} を S のアトラス (altas) もしくは地図帳とよぶ.

リーマン面とみなせるか? このとき, 次の問題を考えてみる:

問題 1. S のアトラス $\mathcal{A} = \{z_q : U_q \rightarrow \mathbb{C}\}_{q \in S}$ の局所座標をうまく取り直すことで (すなわち地図帳の各ページをうまく描き直すことで), ペア (S, \mathcal{A}) をリーマン面 (1次元複素多様体) とみなすことはできるか? すなわち, $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ ($p, q \in S$) のときに定まる座標変換 $z_p \circ (z_q)^{-1}$ がすべて正則写像 (複素解析的写像) であるようにできるか?

リーマン面とみなすためには, アトラス (地図帳) の各ページの関係が互いに等角写像によって与えられなければならない. たとえば, あるページで直交するふたつの道路が描かれているとき, 別のページでもそれらの道路の交差点は直交していなければならない. 本屋で売られている普通の世界地図帳は, 多くの場合このような「等角性」をもっていない. リーマン面の地図帳は, 特殊な「等角地図帳」なのである.

ガウスの考察

ガウスの考察. ガウスはまず, この問題を下に述べる問題 2 に帰着させた. (正確にはガウスのアイデアを, われわれの文脈に無理矢理あわせて記述している.)

いま曲面 S 上の各点 $q = (q_1, q_2, q_3)$ に対し, 近傍 $U = U_q \subset S$ 上で定義された滑らかな ($= C^\infty$ 級) 局所座標

$$z = z_q : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad p = (p_1, p_2, p_3) \in U, \quad z = z(p) = x(p) + y(p)i \in \mathbb{C}$$

が存在している⁴. 以下, 登場する関数はすべて滑らかなものと考えてよい.

さて \mathbb{R}^3 を XYZ 空間とみなしたとき, そのユークリッド計量を $ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$ とする⁵. このとき, 曲面 S の接ベクトルの長さもこの ds^2 で測ることにすれば, これは S 上のリーマン計量とみなすことができ, 先ほどの U 上におけるパラメーター $x = x(p), y = y(p)$ を用いると

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 \tag{1.3}$$

のように表現される. ただし $E = E(z) = E(x, y), F = \dots, etc.$ は滑らかな関数であり, $E, G > 0$ かつ $EG - F^2 > 0$ を満たす.⁶

⁴本来は $z = x + yi$ が S 上の点を $p = (p_1(x, y), p_2(x, y), p_3(x, y))$ のようにパラメータ付けする, と (Mathematica の ParametricPlot3D の要領で) 考えるべきかもしれない.

⁵すなわち, \mathbb{R}^3 の標準内積によって接ベクトルの「長さ」が定まっている.

⁶リーマン計量になれていない人は, 次のように考えるとよい: 点 $p \in S$ を通る S 上の滑らかな曲線を 2 つ考

等温座標. ここで、「等温座標」という言葉を定義しておく.

定義 (等温座標) 局所座標 $z_q : U_q \rightarrow \mathbb{C}$ が**等温座標** (isothermal coordinate) であるとは, ある滑らかな正値関数 $E = E(z) = E(x, y)$ が存在し,

$$ds^2 = E(dx^2 + dy^2) (= E|dz|^2)$$

と表されることをいう.

このとき, 次の命題が成り立つ:

命題 1.1 アトラス $\mathcal{A} = \{z_q : U_q \rightarrow \mathbb{C}\}_{q \in S}$ がすべて等温座標からなるとき, (S, \mathcal{A}) はリーマン面となる.

証明. 与えられた $q \in S$ に対し, アトラス \mathcal{A} の元である等温座標 $z : U \rightarrow \mathbb{C}, z = x + yi$ と $w : V \rightarrow \mathbb{C}, w = u + vi$ が $q \in U \cap V$ を満たすと仮定する. このとき, 適当な正値関数 $E = E(z), \tilde{E} = \tilde{E}(w)$ が存在して,

$$ds^2 = E|dz|^2 = \tilde{E}|dw|^2$$

が成り立っている. いま変数としての w は変数としての z の滑らかな関数であるから, 「全微分」の式より関係式 $dw = w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}$ が導かれる. また, ヤコビアンは $|w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2 > 0$ と表されることがわかるので (\rightarrow レポート問題), $|w_z| > 0$ である. よって

$$E|dz|^2 = \tilde{E}|dw|^2 = \tilde{E}|w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}|^2 = \tilde{E}|w_z|^2 \left| dz + \frac{w_{\bar{z}}}{w_z} d\bar{z} \right|^2.$$

すなわち, $z(U \cap V)$ 上で $E(z) = \tilde{E}(w)|w_z(z)|^2 > 0$ かつ $w_{\bar{z}}(z) = 0$ が成り立たないといけない. これは任意の座標変換 $w \circ z^{-1}$ が正則 (よって等角) であることを意味する. ■

そこで, ガウスは次の命題を示した⁷:

命題 1.2 (等温座標の存在) S のアトラス \mathcal{A} の各元 $z : U \rightarrow z(U) \subset \mathbb{C}$ に対し, ある中への同相写像 $w : z(U) \rightarrow \mathbb{C}$ が存在し, $w \circ z : U \rightarrow \mathbb{C}$ は等温座標となる.

したがって, アトラス $\mathcal{A} = \{z : U \rightarrow \mathbb{C}\}$ の各ページを書き換えて, 別の等温座標のみからなるアトラス $\tilde{\mathcal{A}} := \{w \circ z : U \rightarrow \mathbb{C}\}$ を構成することができる. したがって, 上の命題 1.1 と合わせて, 次の定理を得る⁸:

定理 1.3 (ガウスの定理) $S \subset \mathbb{R}^3$ を向き付け可能かつ滑らかな曲面とする. このとき, S の各点の近傍には等温座標が存在する. すなわち地図帳 $\tilde{\mathcal{A}}$ が存在して, S はリーマン面となる.

え, それらの速度ベクトルを $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ とする. またこれらに対応する $z(U) \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ 上の速度ベクトルを $\mathbf{u}' = [Dz(p)](\mathbf{u}), \mathbf{v}' = [Dz(p)](\mathbf{v})$ とする. ($[Dz(p)]$ は $z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ と考えたときのヤコビ行列.) このとき, \mathbb{R}^3 の標準内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ について

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^3} = {}^t \mathbf{u}' \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \mathbf{v}'$$

が成立し, 右辺の行列は正値対称行列である. その成分がリーマン計量の「係数」として表れる E, F, G であり, これらは p に対し滑らかに変化する.

⁷正確には, ガウスは局所座標がすべて実解析的な場合のみを示した.

⁸ S は \mathbb{R}^3 内の曲面である必要はなく, 一般の向き付け可能な 2 次元可微分多様体であればよい.

● 2016/4/12 : Beltrami 係数 ●

命題 1.2 の証明は？

ガウスの定理 (定理 1.3) を示すには, 命題 1.2 が証明できればよいのであった.
改めて, $dz = dx + dyi$, $\bar{dz} = dx - dyi$ とおいたとき, 次が成り立つ:

命題 2.1 (リーマン計量の複素形) 局所座標 $z : U \rightarrow \mathbb{C}$, $z = x + yi$ においてユークリッド計量が ds^2 が式 (1.3) のように表されるとき,

$$Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2 = \lambda |dz + \mu \bar{dz}|^2$$

$$\text{ただし } \lambda = \frac{(E+G) + 2\sqrt{EG-F^2}}{4}$$

$$\text{かつ } \mu = \frac{(E-G) + 2Fi}{(E+G) + 2\sqrt{EG-F^2}}.$$

とくに, $\lambda = \lambda(z) > 0$, $|\mu| = |\mu(z)| < 1$ が $z(U)$ 上で成り立つ.

証明はレポート問題としよう. すると, 命題 1.2 の証明は次の命題に帰着される:

命題 2.2 (Beltrami 方程式と等温座標) S のアトラス \mathcal{A} の元 $z : U \rightarrow z(U) \subset \mathbb{C}$ に対し, 中への向きを保つ滑らかな同相写像 $w : z(U) \rightarrow \mathbb{C}$ が存在し, 関係式

$$(BE) \quad w_{\bar{z}}(z) = \mu(z) w_z(z)$$

(ただし $\mu = \mu(z)$ は 命題 2.1 で与えられるもの) が存在すると仮定する. このとき, $w \circ z : U \rightarrow \mathbb{C}$ は等温座標となる.

関係式 (BE): $w_{\bar{z}}(z) = \mu(z) w_z(z)$ は **Beltrami 方程式** (Beltrami equation) と呼ばれる.⁹
証明. 命題 2.1 より

$$|dw|^2 = |w_z dz + w_{\bar{z}} \bar{dz}|^2 = |w_z|^2 |dz + \mu \bar{dz}|^2 = \frac{|w_z|^2}{\lambda} ds^2.$$

であるから, $\tilde{E}(w) := \lambda(z)/|w_z(z)|^2$ を満たす関数 \tilde{E} をとることで

$$ds^2 = \tilde{E}(du^2 + dv^2) = \tilde{E}|dw|^2$$

となり, 等温座標が得られる. ■

したがって, 問題はすべて Beltrami 方程式を解くことに帰着された.
以下では状況をより一般化して, 以下の問題を考えることにする;

問題 2 (Beltrami 方程式) Ω を複素平面内の領域とし, 可測 (measurable) 関数 $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が与えられているとする. このとき, Beltrami 方程式 $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ の解 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ で, 中への向きを保つ同相写像であるものを求めよ.

⁹方程式といっても, 1階の偏微分方程式である. 実体は w_x と w_y の方程式に書き直せば, 偏微分方程式としての形が若干分かりやすくなるかもしれない.

Beltrami 係数

Beltrami 係数と歪曲度. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域とし, $f : \Omega \rightarrow f(\Omega) \subset \mathbb{C}$, $w = f(z)$ を向きを保つ C^1 級同相写像とする. $\alpha \in \Omega$ を固定し, $\Delta z := z - \alpha$ とおくと, 「全微分」の式

$$f(\alpha + \Delta z) = f(\alpha) + f_z(\alpha) \Delta z + f_{\bar{z}}(\alpha) \overline{\Delta z} + o(|\Delta z|) \quad (\Delta z \rightarrow 0)$$

が成り立つのであった. すなわち, $\Delta w := f(\alpha + \Delta z) - f(\alpha)$ とおくと, 近似式

$$\Delta w \approx f_z(\alpha) \Delta z + f_{\bar{z}}(\alpha) \overline{\Delta z}$$

が成り立つということである.

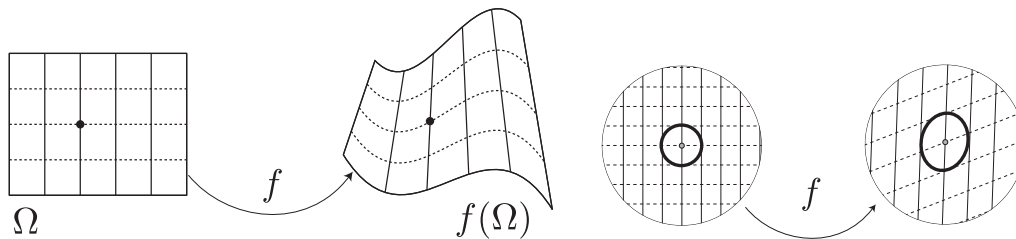


図 2.1: 左が全体図, 右は $z = \alpha$ の周りを局所的に拡大した図. f は線形写像で近似され, 接空間の円を接空間の楕円に写す. これは, f が α のまわりの無限小円を $f(\alpha)$ のまわりの無限小楕円に写しているのだ, と解釈できる.

いま $w = f(z)$ の変数を実部と虚部で分けて $u + vi = f(x + yi)$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$) と表すとき, f が定める実 2 次元写像 $(x, y) \mapsto (u, v)$ のヤコビ行列とヤコビアンを考えることができる. とくに, 関数 $w = f(z)$ の $\alpha = a + bi$ におけるヤコビアンを

$$J_f(\alpha) := u_x(a, b)v_y(a, b) - u_y(a, b)v_x(a, b)$$

と定める. このとき, 以下が成り立つ:

命題 2.3 (ヤコビアンと Beltrami 係数) $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ が向きを保つ C^1 級同相写像であるとき, 任意の $\alpha \in \Omega$ に対し

$$J_f(\alpha) = |f_z(\alpha)|^2 - |f_{\bar{z}}(\alpha)|^2 > 0$$

が成り立つ. とくに, Ω 上で $f_z(\alpha) \neq 0$ であり, $\left| \frac{f_{\bar{z}}(\alpha)}{f_z(\alpha)} \right| < 1$ が成り立つ.

証明はレポート問題としよう.

定義 (Beltrami 係数) 単位円板 \mathbb{D} 内に値をとる複素数

$$\mu_f(\alpha) := \frac{f_{\bar{z}}(\alpha)}{f_z(\alpha)}$$

を f の α における **Beltrami 係数** (Beltrami coefficient) と呼ぶ.

Beltrami 係数の幾何学的意味. 点 $\alpha \in \Omega$ を固定して, そこでの Beltrami 係数 $\mu := \mu_f(\alpha)$ の幾何学的な意味を与えよう.

いま「全微分」の式より $|\Delta w| \approx |f_z(\alpha)| |\Delta z + \mu_f(\alpha) \overline{\Delta z}|$ が成り立つ. そこで, Δz の長さは十分に小さいものとして,

$$|\Delta z + \mu \overline{\Delta z}| = |\Delta z| \left| 1 + \mu \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \right|$$

が最大・最小となる Δz の方向をもとめてみよう. $\theta = \arg \Delta z$ とおくと, $|\mu| < 1$ および $|\overline{\Delta z}/\Delta z| = 1$ より

$$|\Delta z|(1 - |\mu|) \leq |\Delta z + \mu \overline{\Delta z}| = |\Delta z| \left| 1 + \mu \cdot \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \right| \leq |\Delta z|(1 + |\mu|)$$

が成り立つ. 右の等号は $\mu(\overline{\Delta z}/\Delta z) = \mu e^{-2\theta} > 0$ のとき実現されるから, 最大値は

$$\arg \mu + (-2\theta) = 0, 2\pi, \iff \arg \Delta z = \frac{\arg \mu}{2}, \frac{\arg \mu + \pi}{2}$$

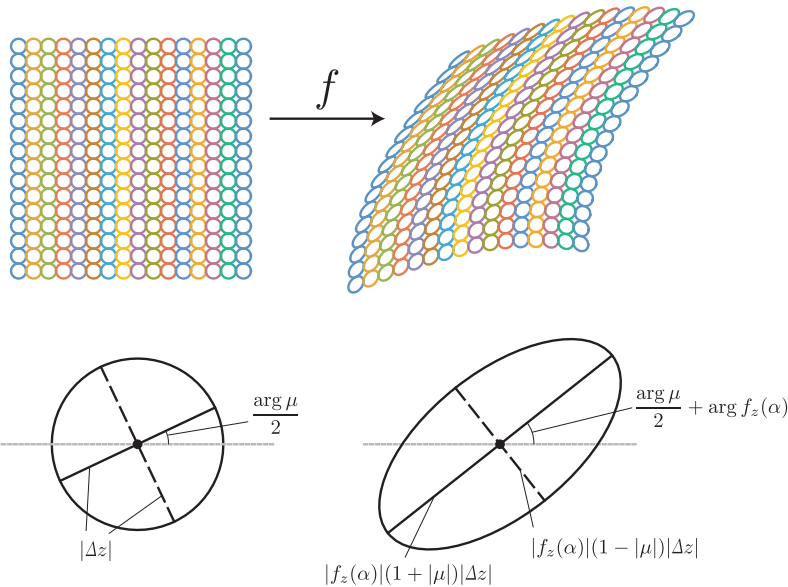
のときであり, そのとき $|\Delta w| \approx |f_z(\alpha)| |\Delta z|(1 + |\mu|)$ となる.

同様に左の等号は $\mu(\overline{\Delta z}/\Delta z) = \mu e^{-2\theta} < 0$ のとき実現されるから, 最小値は

$$\arg \mu + (-2\theta) = \pm\pi, \iff \arg \Delta z = \frac{\arg \mu \pm \pi}{2}$$

のときであり, そのとき $|\Delta w| \approx |f_z(\alpha)| |\Delta z|(1 - |\mu|)$ となる.

注意. 一般に向きを保つ C^1 写像 f は, 像の側にサイズが特定されない楕円による場, いわば「無限小楕円場」(a field of infinitesimal ellipses) を定める. 個々の「無限小楕円」は長径・短径の方向と比によって一意的に定まり, とくに長径と短径の比は Beltrami 係数 $\mu_f(z)$ によって表現されるのである.



● 2016/4/19 擬等角写像 (1) ●

前回から引き続き、 $f: \Omega \rightarrow f(\Omega)$ を向きを保つ C^1 級同相写像とする。このとき、 $\alpha \in \Omega$ に対し $\mu_f(\alpha) := f_{\bar{z}}(\alpha)/f_z(\alpha) \in \mathbb{D}$ を f の α における Beltrami 微分というのであった。

さらに、写像 f の「歪曲度」を以下で定義する：

定義 (歪曲度) $\mu_f(\alpha) \in \mathbb{D}$ によって定まる $K_f(\alpha) := \frac{1 + |\mu_f(\alpha)|}{1 - |\mu_f(\alpha)|} \geq 1$ を f の α における歪曲度 (dilatation) とよぶ。また、

$$K_f := \sup_{z \in \Omega} \frac{1 + |\mu_f(z)|}{1 - |\mu_f(z)|} \in [1, \infty]$$

を f の最大歪曲度 (maximal dilatation) とよぶ。

直感的には、関数 f は無限小円 (もしくは接空間上の円) を無限小楕円 (もしくは接空間上の楕円) に写すが、その長径と短径の比の上限が K_f である。すなわち、「 K_f が 1 に近いほど、 f は等角写像に近い」ということがわかる。

とくに $K_f = 1$ は以下と同値であることに注意しよう：

$$\begin{aligned} K_f(\alpha) = 1 \ (\forall \alpha \in \Omega) &\iff \mu_f(\alpha) = 0 \ (\forall \alpha \in \Omega) \\ &\iff f_{\bar{z}}(\alpha) = 0 \ (\forall \alpha \in \Omega) \\ &\iff f \text{ は } \Omega \text{ 上で正則 (等角)} \end{aligned}$$

これから定義する「擬等角写像」とは、向きを保つ同相写像であり、 $K_f(\alpha)$ が測度ゼロの集合を除いて一様に有界となるような写像である。(さらに解析的によい性質を持つよう、条件を加える。)

言葉の準備 (三つ)

(ア) 絶対連続性。 Beltrami 微分は z および \bar{z} に関する「偏微分」の比であるから、それらの存在が一定保証されなければならない。具体的には、「ほとんどいたるところ」(a.e. = almost everywhere) でその存在を保証するような条件を与えよう。

定義 (絶対連続) 閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上で定義された関数 $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が絶対連続 (absolutely continuous) であるとは、任意に小さい $\epsilon > 0$ に対し、次を満たす十分小さな $\delta > 0$ が存在することをいう：有限個の数 a_1, a_2, \dots, a_n および b_1, b_2, \dots, b_n が

$$\bullet a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b \text{ かつ}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$$

を満たすとき、 $\sum_{k=1}^n |u(b_k) - u(a_k)| < \epsilon$ 。

明らかに、絶対連続ならば連続関数となる。さらに、次の重要な性質がある¹⁰：

¹⁰実はこの命題の逆も成り立つ。すなわち、絶対連続性は微積分の基本定理が成り立つことの必要十分条件なのである。たとえば伊藤清三の『ルベーグ積分入門』p139 を見よ。

命題 3.1 (絶対連続関数の性質) 関数 $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が絶対連続のとき, a.e. $x_0 \in [a, b]$ で微分 $u_x(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$ が存在する. また, 微積分の基本定理

$$u(x_0) - u(a) = \int_a^{x_0} u_x(t) dt$$

がすべての $x_0 \in [a, b]$ で成り立つ.

注意. 導関数 u_x は区間 $[a, b]$ 内のある零集合上で定義されていない. しかし, そこでの u_x の値を任意に定めて得られる関数 $u_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は可測関数であって, その積分は上の関係式を満たす, というのがこの命題の正確な主張である.

絶対連続でない関数の例 (カントール関数). 絶対連続でない典型的な関数をひとつ紹介しよう. 下の図のように定まる関数列 $u_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ には一様収束極限が存在する (\rightarrow レポート問題). これを「カントール関数」もしくは「悪魔の階段関数」とよぶ. この関数はいわゆるカントール

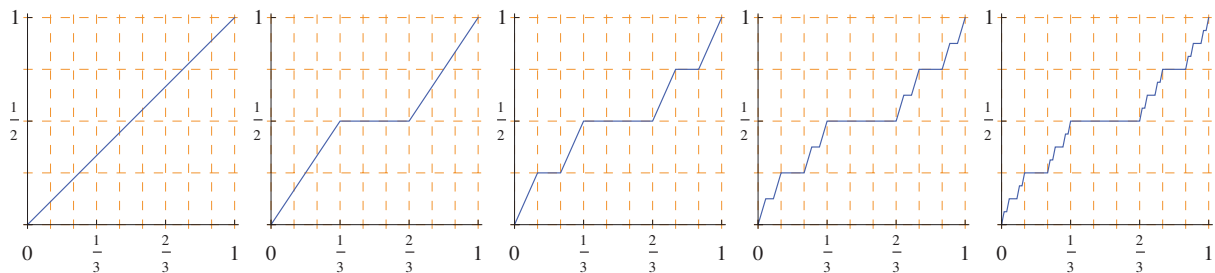


図 3.2: 左から関数 u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 .

の 3 進集合 Λ においてのみ増加する. Λ は測度 (長さ) 0 の集合であるから, 集合 Λ はルベーグ測度 0 である. すなわちどんなに小さな長さ δ の線分であっても, 細かく有限個に刻んで Λ を覆うようにできる. そこでの増分はちょうど 1 であるから, 絶対連続性の定義に反する.

一方で, u はほとんどいたるところで微分可能 (微分係数は 0) となることにも注意しよう.

(イ) ACL 性. さて上の絶対連続性は, 複素数値の関数 $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ についても全く同様の定義が適用できる. このとき $\operatorname{Re} u(x), \operatorname{Im} u(x)$ はそれぞれ実関数の意味で絶対連続であるから, 命題 3.1 より, a.e. $x_0 \in [a, b]$ において x 微分をもつ. したがって, 複素数値の x 微分 $u_x(x_0) = (\operatorname{Re} u)_x(x_0) + i(\operatorname{Im} u)_x(x_0)$ も a.e. $x_0 \in [a, b]$ で存在し, 可測関数となることに注意しよう.

定義 (ACL) 領域 U 上で定義された関数 $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ が **ACL**(absolutely continuous on lines) であるとは, U に含まれる任意の長方形

$$Q = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\} \subset U$$

に対し, $x \in [a, b], y \in [c, d]$ を変数とするとき

- 関数 $x \mapsto f(x, y_0)$ は a.e. $y_0 \in [c, d]$ について絶対連続; かつ
- 関数 $y \mapsto f(x_0, y)$ が a.e. $x_0 \in [a, b]$ について絶対連続

となることをいう.

よって命題 3.1 より, 複素数値関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が ACL であれば, a.e. $z_0 \in \Omega$ で「偏微分」

$$f_z(z_0) = \frac{1}{2}\{f_x(z_0) - if_y(z_0)\}, \quad f_{\bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\{f_x(z_0) + if_y(z_0)\}$$

が存在する.

さらに, ゲーリング (Gehring) とレヒト (Lehto) による次の結果がある:

命題 3.2 (ゲーリング-レヒト) 同相写像 $f: \Omega \rightarrow f(\Omega) \subset \mathbb{C}$ が a.e. $z_0 \in \Omega$ で「偏微分」 $f_z(z_0), f_{\bar{z}}(z_0)$ を持つとき, さらに, a.e. $z_0 \in U$ で「全微分」の式

$$f(z + \Delta z) = f(z) + f_z(z)\Delta z + f_{\bar{z}}(z)\overline{\Delta z} + o(\Delta z) \quad (\Delta z \rightarrow 0)$$

が成り立つ.

したがって, 次の系を得る:

系 3.3 (ACL 同相写像の性質, とくに Beltrami 微分の存在) 向きを保つ同相写像 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が ACL であれば, a.e. $\alpha \in \Omega$ で「全微分」可能であり, Beltrami 微分 $\mu_f(\alpha) = f_{\bar{z}}(\alpha)/f_z(\alpha) \in \mathbb{D}$ が (幾何学的な意味あいも含めて) 定まる.

「全微分」の式から a.e. $\alpha \in \Omega$ でヤコビアンが定まり, 同相であることと向きを保つという性質から $f_z(\alpha) \neq 0$ だとわかる (命題 2.3 参照).

(ウ) 最大歪曲度 (と L^∞ ノルム). さて $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域, $\mu: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ を可測関数とする. 定数 $0 \leq \ell < 1$ に対し,

$$A(\mu, \ell) := \text{Area}\{z \in \Omega \mid \ell \leq |\mu(z)| < 1\}$$

とおく. ただし, Area は 2次元ルベーグ測度とする. このとき, μ の L^∞ ノルムを

$$\|\mu\|_\infty = \text{ess. sup}_{z \in \Omega} |\mu(z)| := \inf_{0 \leq \ell < 1} \{\ell \mid A(\mu, \ell) = 0\}$$

と定める.

以上を踏まえて, 「最大歪曲度」の概念を一般化しておく:

定義 (最大歪曲度: 一般化) 向きを保つ同相写像 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が ACL であるとき,

$$K_f := \sup_{z \in \Omega} \frac{1 + \|\mu_f\|_\infty}{1 - \|\mu_f\|_\infty} \in [1, \infty]$$

を f の **最大歪曲度** (maximal dilatation) とよぶ.

以上で言葉の準備が終了した.

● 2016/4/26 擬等角写像 (2) ●

擬等角写像の定義

擬等角写像を次のように定義する：

定義 (擬等角写像) $1 \leq K < \infty$ を定数とする. 向きを保つ上への同相写像 $f : U \rightarrow V$ が K -擬等角写像 (K -quasiconformal mapping, 略して K -qc) であるとは,

(A1) f は ACL ; かつ

(A2) $K_f \leq K$

を満たすことをいう.

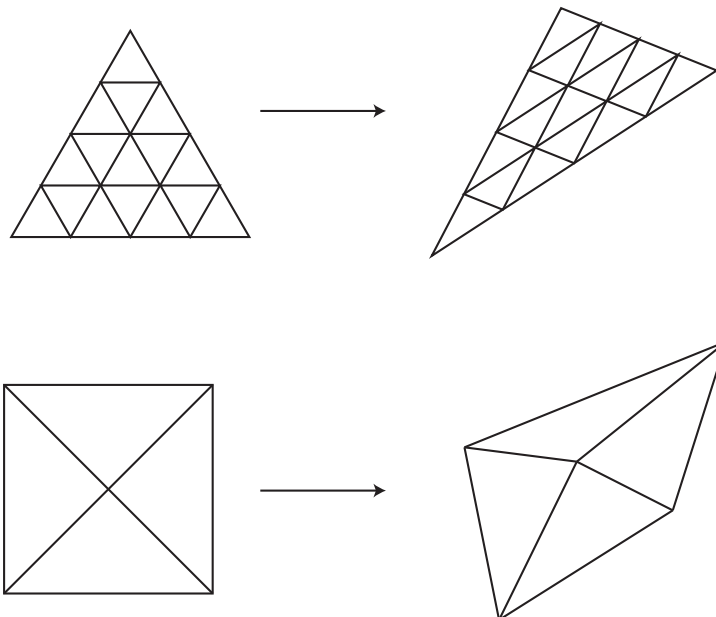
注意. K -qc は ACL 性から a.e. で全微分性が保証されている. すなわち, 前回でいうところの像の側での「無限小楕円場」が a.e. で存在しており, これらの楕円の歪曲度 (長径と短径の比) は一様に $K_f \leq K < \infty$ で抑えられる. K が特定されず, K_f の有界性のみが分かっている場合, f は単に「擬等角写像」と呼ばれる.

具体例 0. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が等角写像であれば, 1-qc である.

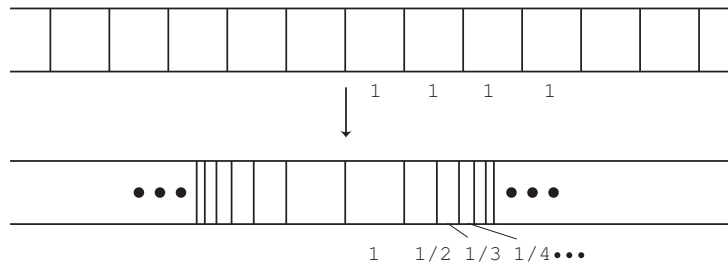
具体例 1. $K \geq 1$ に対し $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f(x + yi) = x + \frac{y}{K}i$ で定めたものは K -qc である.

具体例 2 (アファイン写像). $\mu_0 \in \mathbb{D}$ をひとつ固定し, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f(z) = \frac{z + \mu_0 \bar{z}}{1 + \mu_0}$ と定めると, $K_0 = (1 + |\mu_0|)/(1 - |\mu_0|)$ -qc である. Beltrami 係数は $\mu_f(z) \equiv \mu_0$ で一定である.

具体例 3. 具体例 2 の f は線形写像であるから, 同一直線上では長さの「比」を保つ. このことから, 三角形を三角形に写すアファイン写像を貼り合わせて, 多角形から多角形への擬等角写像を構成することができる. 貼り合わせられた線分上では Beltrami 係数が定義できないが, 面積 0 なので擬等角写像の定義には影響しない.

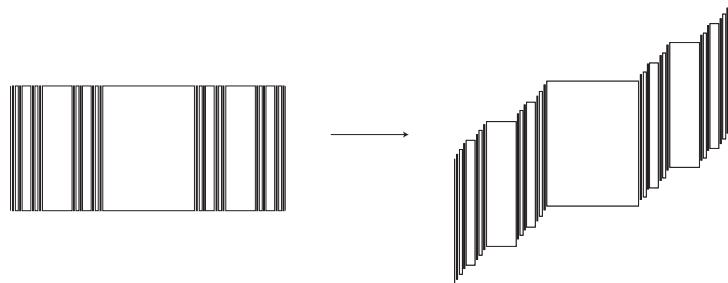


擬等角写像でない例 1. やや直感的な例. 帯状領域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im } z < 1\}$ に対し $f : \Omega \rightarrow \Omega$ を下図のように定めると, 最大歪曲度 K_f が無限大となり, (A2) に反する.



擬等角写像でない例 2. 同様に, 上への微分同相写像 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z/(1 - |z|)$ もやはり $K_f = \infty$ となってしまふ。(じつは, 単位円板から複素平面への擬等角写像は存在しない.)

擬等角写像でない例 3. この例がいちばん厄介である. $\Omega = \{x + yi \mid x, y \in [0, 1]\}$ 上で定義された関数 $f(x + yi) := x + (y + u(x))i$ は向きを保つ同相写像であるが, ACL ではない. よって擬等角写像ではない (下図参照. 縦方向の縮尺は正確ではない.)



ややこしいことに, この写像はほとんどいたるところ全微分可能であり, しかも $\mu_f(z) = 0$, すなわち $K_f = 1$ なのである. じつは, 擬等角写像に ACL 性が要求される理由は, 「全微分」を a.e. で保証するためだけではない. さらに強く, 命題 3.1 でいう「微積分の基本定理」が成り立つことが本質的なのである. 興味のある皆さんはぜひ, 参考文献を当たって考えていただきたい.

擬等角写像の性質. 擬等角写像は定義が複雑なわりに, きわめて「直感的に妥当な」性質を持っている. そのいくつかを証明なしでピックアップしてみよう:

定理 4.1 (擬等角写像の性質) $f : \Omega \rightarrow f(\Omega) = \Omega'$ を K -qc とするとき, 以下が成り立つ.

- (QC1) f はほとんどいたるところで「全微分」可能であり, μ_f が定義できる.
- (QC2) **Weyl の補題**: 1 -qc は正則 (等角) 写像.
- (QC3) f^{-1} も K -qc.
- (QC4) $g : \Omega' \rightarrow g(\Omega')$ が K' -qc のとき, $g \circ f : \Omega \rightarrow g(\Omega')$ は $K'K$ -qc.
- (QC5) f は零集合を零集合を写す.
- (QC6) f は $(1/K)$ -Hölder 連続.
- (QC7) $g : \Omega' \rightarrow g(\Omega')$ が等角写像のとき, $\mu_{g \circ f} = \mu_f$.

などなど. 証明にはいずれもデリケートな議論を必要とし, 残念ながらこの講義で扱う時間的余裕はない.

Beltrami 方程式の解の存在 (5/10 - 6/7)

配布日：2016/06/14 Version：1.1

● 2016/5/10:Beltrami 方程式の解 ●

以下 $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域とし, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は (Lebesgue) 可測関数, $f : \Omega \rightarrow f(\Omega) \subset \mathbb{C}$ を向きを保つ同相写像とする.

また, p と K は 1 以上の実数をあらわすものとする.

記号. これから用いる関数空間とそのノルムに関する記号をまとめておく.

- $\|u\|_\infty := \operatorname{ess. sup}_{z \in \Omega} |u(z)|$: L^∞ -ノルム.
- $\|u\|_p := \left(\int_{\mathbb{C}} |u(z)|^p dx dy \right)^{1/p}$: L^p -ノルム.
- $L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ は可測かつ } \|u\|_\infty < \infty\}$.
- $L^p(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ は可測かつ } \|u\|_p < \infty\}$.
- $C_0^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(u) \subset \Omega \text{ はコンパクト}\}$.

$\Omega = \mathbb{C}$ のときには $L^p(\mathbb{C})$ を単に L^p などと略記する.

擬等角写像の他の定義法.

$f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ は向きを保つ同相写像とする.

定義 (超関数の意味での偏導関数) f が超関数の意味での偏導関数を持つとは, 任意の $h \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$\iint_{\Omega} f h_z dx dy = - \iint_{\Omega} \phi h dx dy \quad \text{かつ} \quad \iint_{\Omega} f h_{\bar{z}} dx dy = - \iint_{\Omega} \psi h dx dy.$$

を満たす関数 $\phi, \psi \in L^1(\Omega)$ が存在することをいう. このとき $f_z = \phi, f_{\bar{z}} = \psi$ と表す.

定義 (Sobolev 空間) f が Sobolev 空間 $W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ の元であるとは, Ω の任意のコンパクト部分集合 E に対して,

$$\iint_E |f_z|^p dx dy < \infty \quad \text{かつ} \quad \iint_E |f_{\bar{z}}|^p dx dy < \infty. \quad (5.1)$$

が成り立つことをいう. とくに $p = 2$ のとき, 「 f は局所 2 乗可積分な (超関数の意味での) 偏導関数をもつ」という.

以上の定義のもとで, 次が成り立つことが知られている:

定理 5.1 (擬等角写像の他の定義法) $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ を向きを保つ同相写像, $K \in [1, \infty)$ とするとき, f が K -擬等角写像であることは以下の二つの条件を満たすことと同値である:

(A1) $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$

(A2) $K_f \leq K$

Beltrami 方程式の解の存在. $\mu: \mathbb{C} \rightarrow D$ (D は単位開円板 $\{|z| \leq 1\}$) を可測関数とする. Beltrami 方程式 $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ について考える.

定理 5.2 (Ahlfors-Bers, Morrey) $\|\mu\|_\infty < 1$ を満たす任意の可測関数 $\mu: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, 以下を満たすような関数 $f = f^\mu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が唯一存在する.

- $f_{\bar{z}} = \mu f_z$, a.e. \mathbb{C} .
- f は K -qc. ただし, $K = \frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty}$.
- $f(0) = 0, f(1) = 1$.

今後しばらくはこの定理の証明をスケッチしていこう.

注意.

- μ の定義域が \mathbb{C} でなく Ω の場合にも, μ の代わりに $\tilde{\mu}(z) := \begin{cases} \mu(z) & (z \in \Omega) \\ 0 & (z \notin \Omega) \end{cases}$ を考えることで, 上の定理は成り立つ.
- とくに, 「曲面の等温座標を求める」という問題に関してはこの定理で十分である.
- f^μ は μ について解析的に依存している. 言い換えると, 任意に $z \in \mathbb{C}$ をとり固定するとき, 複素パラメータ t に関して写像 $t \mapsto \mu_t(z)$ が正則であるとき, (この定理によって存在が保証される) 写像 $t \mapsto f^{\mu_t}(z)$ もまた正則である.

二つの積分作用素.

定義 (P -作用素) $p > 2, h \in L^p$ に対して作用素 P を次のように定義する.

$$Ph(\zeta) := \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} h(z) \left(\frac{1}{z - \zeta} - \frac{1}{z} \right) dx dy.$$

命題 5.3 $h \in L^p$ ($p > 2$) とする. このとき, p のみに依存する定数 K_p が存在して, 任意の $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ に対し,

$$|Ph(\zeta_1) - Ph(\zeta_2)| \leq K_p \|h\|_p |\zeta_1 - \zeta_2|^{1-2/p}$$

すなわち, 関数 $Ph(\zeta)$ は一様 $(1 - 2/p)$ -Hölder 連続である.

定義 (T -作用素) $h \in C_0^2(\mathbb{C})$ に対し, 作用素 T を以下のように Cauchy の主値積分で定義する.

$$Th(\zeta) := \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(-\frac{1}{\pi} \iint_{|z - \zeta| \geq \epsilon} \frac{h(z)}{(z - \zeta)^2} dx dy \right)$$

注意. この極限は存在する. 以下, その証明: $R > 0$ を,

$$\text{supp}(h) \subset \{z \mid |z - \zeta| < R\}$$

となるように十分大きくとる. このとき,

$$\begin{aligned} \iint_{\{\epsilon < |z - \zeta| \leq R\}} \frac{1}{(z - \zeta)^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^R \frac{1}{r^2 e^{2\theta i}} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-2\theta i} d\theta \int_{\epsilon}^R \frac{1}{r} dr \\ &= 0 \quad (\text{これは } \epsilon \text{ に依らない!}) \end{aligned}$$

よって

$$Th(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \iint_{\{\epsilon < |z - \zeta| < R\}} \frac{h(z) - h(\zeta)}{(z - \zeta)^2} dx dy.$$

積分値が発散するのは ζ の近傍だけである. $h \in C_0^2$ より h は全微分可能であるから, 十分小さな $R_0 \ll 1$ をとると, $\mathbb{D}(\zeta, R_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \zeta| < R_0\}$ 上で

$$\exists C > 0 : |z - \zeta| < R \implies |h(z) - h(\zeta)| \leq C|z - \zeta|.$$

したがって, 上式の被積分関数は $\mathbb{D}(\zeta, R_0)$ 上で

$$\left| \frac{h(z) - h(\zeta)}{(z - \zeta)^2} \right| \leq \frac{C}{|z - \zeta|}$$

を満たすので, 右辺の積分は $\epsilon \searrow 0$ のとき収束する.

命題 5.4 (P -作用素と T -作用素の性質) $h \in C_0^2$ とする. このとき, 関数 $Th(\cdot)$ は C^1 -級であり, さらに以下を満たす.

$$(1) (Ph)_z = h \qquad (2) (Ph)_z = Th \qquad (3) \|Th\|_2 = \|h\|_2$$

● 2016/5/17 : Beltrami 方程式の解 (2) ●

注意. 命題 5.4 から T が C_0^2 上の有界線形作用素 (これは連続線形作用素であることと同値) であることが分かる.

注意. C_0^∞ が L^2 に稠密に含まれるという事実から, C_0^2 もまた L^2 に稠密に含まれるということがわかる. したがって, T は L^2 上の有界線形作用素に拡張される. (しかし P は L^2 には拡張できない.)

この有界線形作用素 T を L^p ($p \geq 2$) 上の有界線形作用素として拡張したい.

命題 6.1 (Calderón-Zygmund) $p \in [2, \infty)$ とする.

$$(1) C_p := \sup \left\{ \|Th\|_p \mid h \in C_0^\infty(\mathbb{C}), \|h\|_p = 1 \right\} < \infty.$$

$$(2) p \mapsto C_p \text{ は連続であり, さらに } p \searrow 2 \text{ のとき } C_p \rightarrow 1.$$

系 6.2 作用素 T は L^p ($p \geq 2$) から自身への有界線形作用素に拡張される。

証明. 有界線形作用素 T の連続性と, C_0^∞ が L^p に稠密に含まれることから従う. ■

補題 6.3 $h \in L^p$ ($p > 2$) $\implies (Ph)_{\bar{z}} = h, (Ph)_z = Th$ (超関数の意味で一致.)

証明の概略. C_0^2 は L^2 に稠密に含まれるので,

$$\forall h \in L^2, \exists h_n \in C_0^2 : h_n \rightarrow h \text{ in } L^2$$

また, 命題 6.1 より

$$\begin{aligned} \|Th - Th_n\|_p &\leq C_p \|h - h_n\|_p \\ |P(h - h_n)(\zeta)| &\leq K_p \|h - h_n\|_p |\zeta|^{1-2/p} \end{aligned}$$

これらの不等式と命題 5.4 から, 任意の $\phi \in C_0^1$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} (Ph_n)\phi_{\bar{z}} \, dx dy &= - \int_{\mathbb{C}} h_n \phi \, dx dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}} (Ph)\phi_{\bar{z}} \, dx dy = - \int_{\mathbb{C}} h \phi \, dx dy, \\ \int_{\mathbb{C}} (Ph_n)\phi_z \, dx dy &= - \int_{\mathbb{C}} (Th_n)\phi \, dx dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}} (Ph)\phi_z \, dx dy = - \int_{\mathbb{C}} (Th)\phi \, dx dy. \end{aligned}$$

■

コンパクトな台を持つ μ に関する $(BE)_k$ の解

次の方程式 $(BE)_k$ を解きたいのであった :

$$(BE)_k: \quad f_{\bar{z}} = \mu f_z$$

ただし $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ は可測関数で $\|\mu\|_\infty = k < 1$ を満たす.

定理 6.4 (正規解の存在 : コンパクトな台を持つ場合) μ がコンパクトな台を持つとき, $(BE)_k$ は次を満たす唯一の連続な解 f を持つ.

$$f(0) = 0, \quad f_z - 1 \in L^p$$

ただし, p は $p > 2, kC_p < 1$ を満たす定数とする.

証明 (解の一意性). f を上のような解とすると, μ の台がコンパクトであり, $f_z - 1 \in L^p$ となることから, $f_{\bar{z}} = \mu f_z \in L^p$ がわかる. よって $Pf_{\bar{z}}$ ($:= P(f_{\bar{z}})$, これはヘルダー連続) が定義できる. このとき $F := f - Pf_{\bar{z}}$ とおくと, これは連続関数であり, 超関数の意味での偏導関数として

$$F_{\bar{z}} = f_{\bar{z}} - (P(f_{\bar{z}}))_{\bar{z}} = f_{\bar{z}} - f_{\bar{z}} = 0$$

が成り立つ。よって「ワイルの補題」¹より F は \mathbb{C} 上正則となる。このとき $F' = f_z - (Pf_{\bar{z}})_z = f_z - Tf_{\bar{z}}$ であるから、

$$F' - 1 = (f_z - 1) - Tf_{\bar{z}} \in L^p$$

を得る。 \mathbb{C} 上正則かつ $L^p = L^p(\mathbb{C})$ に属するのは 0 (定数関数) のみであるから、 \mathbb{C} 上で $F' \equiv 1$ でなくてはならない。とくに

$$F(0) = f(0) - Pf_{\bar{z}}(0) = 0 - 0 = 0$$

より、 $F(z) = z$ を得る。したがって $f(z) = Pf_{\bar{z}}(z) - z$ であり、「 z -偏微分」に関する等式

$$f_z = Tf_{\bar{z}} - 1 = T(\mu f_z) - 1.$$

が成り立つ。いま、 g をもう一つの解とすると、

$$\begin{aligned} g_z &= T(\mu g_z) - 1 \\ \implies f_z - g_z &= T(\mu(f_z - g_z)) \\ \implies \|f_z - g_z\|_p &= \|T\mu(f_z - g_z)\|_p \leq C_p \|\mu(f_z - g_z)\|_p \leq kC_p \|f_z - g_z\|_p \\ \implies f_z &= g_z, \text{ a.e.} \\ \implies f_{\bar{z}} &= g_{\bar{z}}, \text{ a.e. : (BE)}_k \text{より} \\ \implies (f - g)_{\bar{z}} &= 0 \text{ かつ } \overline{(f - g)}_{\bar{z}} = 0, \text{ a.e.} \\ \implies f - g \text{ と } \overline{f - g} &\text{ は正則} \\ \implies f - g &\text{ は定数.} \end{aligned}$$

$f(0) - g(0) = 0 - 0 = 0$ であり、これは \mathbb{C} 上 $f = g$ を意味する。 ■

● 2016/5/24:Beltrami 方程式の解 (3) ●

定理 6.4 の証明の続き (解の存在の証明)。次の方程式を考える：

$$h = T(\mu h) + T\mu \tag{7.2}$$

まず $h_0 := T\mu \in L^p$ とおく。さらに $h \in L^p$ に対し $\tilde{T}(h) := T(\mu h)$ とおくと、これは線形作用素 $\tilde{T} : L^p \rightarrow L^p$ を定める。このとき、

$$\text{式 (7.2)} \iff h = \tilde{T}h + h_0 \iff (I - \tilde{T})h = h_0$$

であるから、 $I - \tilde{T}$ の逆作用素がみつければ方程式 (7.2) は解ける。命題 6.1 の (2) より、

$$\|\tilde{T}h\|_p = \|T(\mu h)\|_p \leq C_p \|\mu h\|_p \leq C_p \|\mu\|_\infty \|h\|_p \leq kC_p \|h\|_p$$

であるから定理の仮定 ($kC_p < 1$) より

$$\|\tilde{T}\| \leq kC_p < 1.$$

したがって線形作用素の一般論より、次がわかる：

(a) $(I - \tilde{T}) : L^p \rightarrow L^p$ は全射。

¹『連続関数 F が超関数の意味で $F_{\bar{z}} \equiv 0$ を満たすならば、 F は正則関数』というのが「ワイルの補題」である。

(b) $(I - \tilde{T})^{-1} : L^p \rightarrow L^p$ が存在し,

$$(I - \tilde{T})^{-1} = I + \tilde{T} + \tilde{T}^2 + \dots$$

が成り立つ².

(c) $\|(I - \tilde{T})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\tilde{T}\|} \leq \frac{1}{1 - kC_p}$.

よって,

$$\begin{aligned} h &:= (I - \tilde{T})^{-1}h_0 = (I + \tilde{T} + \tilde{T}^2 + \dots)T\mu \\ &= T\mu + T\mu(T\mu) + T\mu(T\mu(T\mu)) + \dots \end{aligned}$$

とおけば h は式 (7.2) の解である. これを用いて,

『 $f(z) := P[\mu(h+1)](z) + z$ は $(BE)_k$ の解である』

ことを示そう. まず $\mu(h+1) \in L^p$ であるから, $P[\mu(h+1)]$ が定義され, しかヘルダー連続である. よって $f(z) := P[\mu(h+1)](z) + z$ とおけば, これは連続関数となる. また, 補題 6.3 と h が式 (7.2) の解であることから, 超関数の意味で

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}} &= \mu(h+1), \\ f_z &= T(\mu(h+1)) + 1 = (T\mu h + T\mu) + 1 = h + 1 \end{aligned}$$

が成り立つので, $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ を満たす. よって f は $(BE)_k$ を満たすことがわかった.

最後に, この解 f は $f(0) = P[\mu(h+1)](0) + 0 = 0$ を満たし, さらに $f_z = h + 1$ より $f_z - 1 = h \in L^p$ なので, 定理 6.4 の条件を満たす. すなわち, これが求める唯一の解である.

■(定理 6.4)

正規解の性質.

命題 7.1 (正規解の性質) 定理 6.4 における μ についての正規解 f は以下を満たす.

(1) $\|f_{\bar{z}}\|_p \leq \frac{1}{1 - kC_p} \|\mu\|_p$

(2) 任意の $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ に対し,

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq \frac{K_p}{1 - kC_p} \|\mu\|_p |\zeta_1 - \zeta_2|^{1-2/p} + |\zeta_1 - \zeta_2|.$$

証明. (1): 定理 6.4 の証明で用いた $h = (I - \tilde{T})^{-1}h_0 = (I - \tilde{T})^{-1}T\mu$ に対し, 上述の (c) より

$$\|h\|_p \leq \frac{1}{1 - kC_p} C_p \|\mu\|_p$$

が成り立つ. さらに $f_{\bar{z}} = \mu(h+1)$ より,

$$\|f_{\bar{z}}\|_p \leq \|\mu h\|_p + \|\mu\|_p \leq \|\mu\|_\infty \|h\|_p + \|\mu\|_p \leq k \cdot \frac{C_p}{1 - kC_p} \|\mu\|_p + \|\mu\|_p = \frac{1}{1 - kC_p} \|\mu\|_p.$$

²すなわち, 左辺の級数は作用素ノルムに関して収束し, その極限は右辺と一致する

(2) $f(z) = P[\mu(h+1)](z) + z = P[f_z](z) + z$ より,

$$\begin{aligned} |f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| &\leq |Pf_z(\zeta_1) - Pf_z(\zeta_2)| + |\zeta_1 - \zeta_2| \\ &\leq K_p \|f_z\|_p |\zeta_1 - \zeta_2|^{1-2/p} + |\zeta_1 - \zeta_2| \\ &\leq \frac{K_p}{1 - kC_p} \|\mu\|_p |\zeta_1 - \zeta_2|^{1-2/p} + |\zeta_1 - \zeta_2|. \end{aligned}$$

最後の不等式で (1) を用いた. ■

正規解の μ に対する依存性. 以下, $p > 2$, $kC_p < 1$ となるような $k \in (0, 1)$ を固定する.

定理 7.2 (正規解の μ に対する依存性) 関数 $\mu, \mu_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は以下を満たす可測関数とする:

- $\|\mu_n\|_\infty \leq k, \|\mu\|_\infty \leq k$.
- ある M が存在し, μ_n と μ の台は $\mathbb{D}(M) = \{|z| < M\}$ に含まれる.
- $\|\mu_n - \mu\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

さらに $f_n, f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ μ_n, μ に関する正規解とすると, f_n は f へ \mathbb{C} 上で広義一様収束する. さらに, $\|f_z - (f_n)_z\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ.

注意. K -擬等角写像の列 $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ がある $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ に一様収束したとしても, $\|\mu_{f_n} - \mu_f\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) とは限らない. (例えば, 恒等写像に一様収束する K -擬等角写像の列を構成することができる.)

注意. 正規解 f は円板 $\mathbb{D}(M)$ の外で正則かつ $f_z - 1 \in L^p$ を満たすので, $f(z) = z + o(1)$ ($|z| \rightarrow \infty$) が成り立つ. 同様に $f_n(z) = z + o(1)$ ($|z| \rightarrow \infty$) が成り立つから, 実際は f_n は f に一様収束する.

証明. 正規解は $f(z) = P[\mu(h+1)](z) + z = P[\mu f_z](z) + z$ (ただし $h \in L^p$) の形で表現されるのであった. このとき $f_z = T[\mu f_z] + 1$ であり, 同様に $(f_n)_z = T[\mu_n(f_n)_z] + 1$ も成り立つので,

$$\begin{aligned} \|f_z - (f_n)_z\|_p &\leq \|T[\mu f_z - \mu_n(f_n)_z]\|_p \\ &\leq \|T[\mu f_z - \mu_n f_z]\|_p + \|T[\mu_n f_z - \mu_n(f_n)_z]\|_p \\ &\leq C_p \|(\mu - \mu_n) f_z\|_p + kC_p \|f_z - (f_n)_z\|_p \\ \iff \|f_z - (f_n)_z\|_p &\leq \frac{C_p}{1 - kC_p} \|(\mu - \mu_n) f_z\|_p. \end{aligned}$$

μ と μ_n の台は $\mathbb{D}(M)$ に含まれており, $\|\mu_n - \mu\|_\infty \rightarrow 0$ より $\|f_z - (f_n)_z\|_p \rightarrow 0$ がわかる.

また, $f_n(z) = P[\mu_n(f_n)_z](z) + z$ であるから, 任意の $R > 0$ に対し, $|\zeta| \leq R$ のとき

$$\begin{aligned} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| &= |P[\mu f_z - \mu_n(f_n)_z](\zeta)| \\ &\leq K_p \|\mu f_z - \mu_n(f_n)_z\|_p |\zeta|^{1-2/p} \\ &\leq K_p R^{1-2/p} \left(\|\mu f_z - \mu_n f_z\|_p + \|\mu_n(f_z - (f_n)_z)\|_p \right) \\ &\leq K_p R^{1-2/p} \left(\|(\mu - \mu_n) f_z\|_p + k \|f_z - (f_n)_z\|_p \right) \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

よって任意のコンパクト集合上で f_n は f に一様収束する. ■

● 2016/6/7:Beltrami 方程式の解 (4) ●

これまでに構成した Beltrami 方程式 $(BE)_k$ の正規解が擬等角写像であることを示し、さらに「Beltrami 係数の台がコンパクト」という条件を外したい。

定理 8.1 Beltrami 方程式 $(BE)_k$ において、 μ の台はコンパクトと仮定する。
 $K := \frac{1+k}{1-k} \geq 1$ とおくと、その正規解 f は K -擬等角写像である。

証明は結構大変なのでその概略のみを述べることにする。 μ も f も一旦 C^1 関数で近似してから証明することに注意しよう³。

証明の概略

- μ を以下を満たすような C^1 関数の列 $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ で近似する⁴。
 - $\|\mu - \mu_n\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。
 - ある $R > 0$ が存在して、すべての μ_n と μ の台は $\mathbb{D}(R)$ に含まれる。
 - すべての n に対し、 $\|\mu_n\|_\infty \leq k$ 。
- μ_n が C^1 級するとき、その正規解 f_n が C^1 級であることを示す。 $(P$ -作用素および T -作用素を用いると、ある連続関数 $\sigma_n(z)$ が存在して $(f_n)_z = e^{\sigma_n(z)} \neq 0$ と表されることがわかる。 $(f_n)_{\bar{z}} = \mu_n(f_n)_z$ より $(f_n)_{\bar{z}}$ も連続。)
- f_n は C^1 級なので、 $\|\mu_n\|_\infty \leq k$ よりヤコビアン $|(f_n)_{\bar{z}}|^2 - |(f_n)_z|^2 = |(f_n)_z|^2(1 - |\mu_n|^2)$ は連続かつ正。よって局所的には同相写像である。 f_n は全平面で局所同相なので同相となることがわかる。これより、 f_n は K -擬等角写像。
- よって、 f_n^{-1} もまた K -擬等角写像。このとき、 $\|\mu_{f_n^{-1}}\|_p \leq \frac{\|\mu_n\|_p}{(1 - kC_p)^{2/p}}$ が成り立つ。命題 7.1 と組み合わせると、

$$\begin{aligned} |\zeta_1 - \zeta_2| &\leq \frac{K_p}{(1 - kC_p)^{1+2/p}} \|\mu_n\|_p |f_n(\zeta_1) - f_n(\zeta_2)|^{1-2/p} + |f_n(\zeta_1) - f_n(\zeta_2)| \\ &\leq \frac{kK_p}{(1 - kC_p)^{1+2/p}} |f_n(\zeta_1) - f_n(\zeta_2)|^{1-2/p} + |f_n(\zeta_1) - f_n(\zeta_2)|. \end{aligned}$$

が成り立つ。

- これより $f_n(\zeta_1) = f_n(\zeta_2) \implies \zeta_1 = \zeta_2$ がわかる。定理 7.2 と $\mu_n \rightarrow \mu$ より f_n は f にコンパクト一様収束する。よって上の不等式で $n \rightarrow \infty$ とした極限を取ると、 $f(\zeta_1) = f(\zeta_2) \implies \zeta_1 = \zeta_2$ 。よって単射。
- 以上より f は連続かつ全単射であり、 f^{-1} についても同様。よって、 f は同相写像である。
- 正規解の性質より、 $f_z - 1 \in L^p$ 。よって $f_z = (f_z - 1) + 1 \in L^p_{loc}$ 。したがって、 $f_{\bar{z}} = \mu f_z \in L^p_{loc}$ 。よって $f \in W^{1,p}_{loc} \subset W^{1,2}_{loc}$ 。すなわち、 f は K -擬等角写像。 ■

³もっと直接的な方法は他にないのだろうか？

⁴たとえば軟化子を用いて $\mu_n(z) := (\mu * \eta_n)(z) = \int_{\mathbb{C}} \mu(\tilde{z}) \eta_n(z - \tilde{z}) d\tilde{x} d\tilde{y}$ のように定義する。ただし η_n は $\overline{\mathbb{D}(1/n)}$ を台にもつ C^∞ 級関数で、 $\overline{\mathbb{D}(1/n)}$ 上での積分値が 1 になるもの。

標準解

最後に台がコンパクトであるという条件を外す：

定理 8.2 ((BE)_k の標準解) Beltrami 方程式 (BE)_k は次の性質をもつ解 $f^\mu : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を一意に持つ：

- f^μ は $\frac{1+k}{1-k}$ -擬等角写像
- f^μ は $0, 1, \infty$ を固定する.

f^μ を \mathbb{C} に制限すると, $f^\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は 0 と 1 を固定する一意な解となる. このような f^μ を Beltrami 方程式 (BE)_k の標準解 (canonical solution) もしくは Beltrami 係数 μ をもつ標準擬等角写像 (canonical qc mapping) とよぶ.

証明.

Case 1. $\text{supp } \mu$ がコンパクトのとき： f をその正規解として, $f^\mu(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{f(1)}$ とおけばよい. このとき $f^\mu(0) = 0, f^\mu(1) = 1, f^\mu(z) \rightarrow \infty (|z| \rightarrow \infty)$ が成り立つ.

Case 2. ある $\epsilon > 0$ が存在し, $\mathbb{D}(\epsilon)$ 上で $\mu(z) = 0$ のとき：変数変換 $\zeta = \tau(z) := 1/z$ を考える. このとき $\tau(\zeta) = 1/\zeta$ でもあり,

$$\tilde{\mu}(\zeta) := (\mu \circ \tau)(\zeta) \frac{\overline{\tau'(\zeta)}}{\tau'(\zeta)} = \mu\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{\zeta^2}{\bar{\zeta}^2}$$

と定義する. このとき, $\text{supp } \tilde{\mu}$ はコンパクトであるから, Case 1 を適用してベルトラミ方程式 $f_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}} = \tilde{\mu} f_{\tilde{z}}^{\tilde{\mu}}$ を満たし $0, 1, \infty$ を固定する解 (標準解) $f^{\tilde{\mu}}(\zeta)$ が見つかる. さらに

$$f^\mu(z) := (\tau^{-1} \circ f^{\tilde{\mu}} \circ \tau)(\zeta) = \frac{1}{f^{\tilde{\mu}}(1/z)}$$

とおくれば求める標準解を得る.

Case 3. 一般の場合：まず $\mu_1(z) := \begin{cases} \mu(z) & (z \in \mathbb{C} - \mathbb{D}) \\ 0 & (z \in \mathbb{D}) \end{cases}$ とおき, 次に

$$\mu_2(z) := \left(\frac{\mu - \mu_1}{1 - \mu\mu_1} \cdot \frac{f_z^{\mu_1}}{(f_z^{\mu_1})} \right) \circ (f^{\mu_1})^{-1}(z)$$

とおくと, $\text{supp } \mu_2$ はコンパクトである. μ_1 には Case 2 が適用でき, μ_2 には Case 1 が適用できるので, そうして構成した標準解 f^{μ_1} と f^{μ_2} を用いて $f^\mu(z) := f^{\mu_2} \circ f^{\mu_1}(z)$ とすれば, a.e. $z \in \mathbb{C}$ で $f_z^\mu = \mu f_z^\mu$ が成り立つことがわかる.

一意性. (BE)_k が $0, 1, \infty$ を固定するふたつの擬等角写像解 f, g を持つとする. このとき $\mu_f = \mu_g (= \mu)$ a.e. であるから,

$$\mu_{f \circ g^{-1}} = \left(\frac{\mu_f - \mu_g}{1 - \mu_g \mu_f} \cdot \frac{g_z}{g_z} \right) \circ g^{-1} = 0 \quad \text{a.e.}$$

が成り立つ. よって $f \circ g^{-1}$ は $0, 1, \infty$ を固定する 1-擬等角写像, すなわち正則写像である. そのような写像は恒等写像以外にありえない. ■

解のパラメーター依存性

まず, $\nu \in L^\infty = L^\infty(\mathbb{C})$ を任意にとり固定する⁵. さらに十分に小さな $\epsilon > 0$ と, $\mu_0 \in L^\infty = L^\infty(\mathbb{C})$ として $\|\mu_0\| < 1$ を満たすものを固定し, $(t, \zeta) \in \mathbb{D}(\epsilon) \times \mathbb{C}$ 上で定義された L^∞ -関数の族 $\{\mu_t(\zeta) = \mu(t, \zeta)\}$ で, $t \rightarrow 0$ のとき任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対し

$$\mu(t, \zeta) = \mu(0, \zeta) + t\nu(\zeta) + o(t).$$

と表されるようなものを考える. ただし, $o(t)$ の部分の正確な意味は,

$$\frac{\|\mu_t - \mu_0 - t\nu\|_\infty}{|t|} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0)$$

ということである. このことから, あらかじめ ϵ を十分に小さく取ることで, すべての $t \in \mathbb{D}(\epsilon)$ に対して $\|\mu_t\|_\infty \leq \|\mu_0\|_\infty + |t|(\|\nu\|_\infty + o(1)) < 1$ であると仮定してよい. このとき, Beltrami 係数 μ_t に関する標準擬等角写像 f^{μ_t} が存在する.

いま $\|\mu_t - \mu_0\|_\infty \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) であるから, 定理 7.2 を用いて (コンパクト集合上一様に) $f^{\mu_t}(\zeta) = f^{\mu_0}(\zeta) + o(1)$ ($t \rightarrow 0$) であることはわかる. すなわち, 標準解は Beltrami 係数のパラメーター t とともに連続に変化する.

この場合, Beltrami 係数は t について (ζ を固定するごとに) 微分可能であるが, 標準解も同様に微分可能だろうか? すなわち, ある関数 $V(\zeta)$ が存在し,

$$f^{\mu_t}(\zeta) = f^{\mu_0}(\zeta) + tV(\zeta) + o(t) \quad (t \rightarrow 0).$$

と表されるだろうか? 答は yes である. 結果だけを述べておこう:

定理 8.3 (パラメーターへの複素解析的依存性) (1) $\mu_0(\zeta) = \mu(0, \zeta) \equiv 0$ であれば, $f^{\mu_0}(\zeta) = \zeta$ であり, 任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\exists V(\zeta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{\mu_t}(\zeta) - \zeta}{t} = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \nu(z) \frac{\zeta(\zeta - 1)}{z(z-1)(z-\zeta)} dx dy.$$

(2) $R(z, \zeta) := \frac{\zeta(\zeta - 1)}{z(z-1)(z-\zeta)}$ とおくとき, 一般の μ_0 に対して

$$\exists V(\zeta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{\mu_t}(\zeta) - f^{\mu_0}(\zeta)}{t} = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \nu(z) R(f^{\mu_0}(z), f^{\mu_0}(\zeta)) (f_z^{\mu_0}(z))^2 dx dy$$

が成り立つ.

⁵この ν は \mathbb{C} 上のベクトル場を定める. すなわち, 各 $z \in \mathbb{C}$ にそこを始点とする複素 1 次元ベクトル (ようするに複素数) $\nu(z)$ が対応していると考ええる.

有理関数 (6/14)

配布日: 2016/06/14 Version: 1.1

今回からしばらく 1 次元複素力学系の理論を概説する.

参考文献:

- J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*. Princeton Univ. Press.
- A.F. Beardon, *Iterations of rational functions*. Springer.
- L. Carleson and T.W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer.

記号の準備

- Riemann 球面: $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
- 円板: $\mathbb{D}(\alpha, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < r\}$, $\mathbb{D}(r) := \mathbb{D}(0, r)$, $\mathbb{D} := \mathbb{D}(1)$.
- $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$.

球面距離. $\widehat{\mathbb{C}}$ には次で定義される球面距離 (spherical distance) を入れて距離空間とみなす:定義 (球面距離) $z, w \in \mathbb{C}$ に対し,

$$d(z, w) := \frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}, \quad d(\infty, z) := \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

と定める. さらに $d(\infty, \infty) := 0$ とすれば, $d(\cdot, \cdot)$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の距離を定める. これを球面距離 (spherical distance) とよぶ.このとき, $(\widehat{\mathbb{C}}, d)$ はコンパクトかつ完備な距離空間となる.

有理関数 (有理写像)

定義 次数 d ($d \in \mathbb{N}$) の有理関数 (rational function) とは, 互いに共通因子を持たない複素係数多項式 P, Q を用いて

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

と表される関数であり,

$$\deg f := \max\{\deg P, \deg Q\} = d$$

を満たすものをいう. ただし, $\deg P$ は P の多項式としての次数を表す.

以下では,

$$P(z) := a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_0,$$

$$Q(z) := b_d z^d + b_{d-1} z^{d-1} + \cdots + b_0$$

と書くことにする.

例. $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^3}$ のとき, $\deg f = \max\{2, 3\} = 3$. また, $g(z) = z^2 + i = \frac{z^2 + i}{1}$ の場合は, $\deg g = \max\{2, 0\} = 2$.

有理関数の空間. 自然数 d に対して, 次数 d の有理関数全体を Rat_d と表す. これを有理関数の係数のなす空間と対応させれば, Rat_d は $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2d+1} = (\mathbb{C}^{d+1} \times \mathbb{C}^{d+1})/\mathbb{C}^*$ に埋め込むことができる. また, 次数 d の複素係数多項式関数の全体を Poly_d と表す. すなわち,

$$\text{Poly}_d := \left\{ f \in \text{Rat}_d \mid f(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_0, a_d \in \mathbb{C}^*, a_{d-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C} \right\} \\ \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^d.$$

写像としての有理関数

Rat_d の元 f は $\widehat{\mathbb{C}}$ からそれ自身への写像とみなすことができる. 以下, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ と表して, 具体的にどのように写像が定義されるか記述していこう.

- (1) $z \in \mathbb{C}$ かつ $Q(z) \neq 0$ のとき: そのまま $f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} \in \mathbb{C}$ と定義.
- (2) $z \in \mathbb{C}$ かつ $Q(z) = 0$ のとき: $f(z) := \infty$ と定義する. (理由: P と Q は共通因数を持たないので, $P(z) \neq 0$ となる. これより $\zeta \rightarrow z$ のとき $|f(\zeta)| = |P(\zeta)/Q(\zeta)| \rightarrow \infty$.)
- (3) $z = \infty$ のとき: $|\zeta| \rightarrow \infty$ としたときの $f(\zeta)$ の極限を考えて, 以下のように定める.
 - $d = \deg P > \deg Q \implies f(z) := \infty$.
 - $\deg P < \deg Q = d \implies f(z) := 0$.
 - $d = \deg P = \deg Q \implies f(z) = \frac{a_d}{b_d} \in \mathbb{C}^*$.

このとき, 次が成り立つ:

命題 9.1 $f \in \text{Rat}_d$ のとき,

- (1) $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ は連続.
- (2) 任意の $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対し, その f による逆像は重複度込みでちょうど d 個の点からなる.

証明. (1) の証明は容易であるから, (2) を示そう. $z \neq 0, \infty$ のとき, z の逆像で ∞ でないものは方程式

$$z = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} \iff P(\zeta) - zQ(\zeta) = 0$$

の解である. $a_d - zb_d \neq 0$ のとき, 右は複素係数 d 次方程式であるから, 「代数学の基本定理」によりこの方程式は重複込みで d 個の複素数解を持つ. $a_d - zb_d = 0$ の場合, 方程式 $P(\zeta) - zQ(\zeta) = 0$ はある $1 \leq k \leq d$ が存在して $c_{d-k} z^{d-k} + \cdots + c_0 = 0$ ($c_{d-k} \neq 0$) の形となる. これは $d-k$ 個の解をもつから, 残りの k 個の逆像が重複した ∞ であることを示す. 実際, 変数変換 $Z = 1/\zeta$ を施すと, 方程式 $z = \frac{P(1/Z)}{Q(1/Z)}$ は $c_{d-k} Z^k + \cdots + c_0 Z^d = 0$ の形に変形できるので $Z = 0$ はこの方程式の k 重解である. よって合計で d 個の逆像の点 (重複込みで) が存在する.

$z = 0, z = \infty$ の場合はレポート問題とする. (後日レポート問題をまとめたプリントを配布します.) ■

命題 9.2 (正則写像の局所構造) $f \in \text{Rat}_d$, $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ とするとき,

- α の近傍 $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ と局所座標 $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}$ で $\phi(\alpha) = 0$ を満たすもの
- $f(\alpha)$ の近傍 $V \subset \widehat{\mathbb{C}}$ と局所座標 $\psi: V \rightarrow \mathbb{C}$ で $\psi(f(\alpha)) = 0$ を満たすもの
- ある自然数 N

が存在し, $\zeta = \phi(z)$ とするとき $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ かつ

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(\zeta) = \zeta^N$$

が成り立つ.

局所次数. 命題 9.2 が定める自然数 N をこれを点 α における f の**局所次数** (local degree) とよび, $\deg(f, \alpha) := N$ と表す.

証明. $\alpha \neq \infty$, $f(\alpha) \neq \infty$ のときを証明する. そのほかの場合は適当に局所座標 $z \mapsto \zeta = 1/z$ をとればよい. テイラー展開を考えると, $z \rightarrow \alpha$ のとき

$$f(z) = f(\alpha) + A(z - \alpha)^N + O((z - \alpha)^{N+1})$$

となる $A \neq 0$, $N \in \mathbb{N}$ が存在する. さらに

$$f(z) - f(\alpha) = A(z - \alpha)^N \{1 + O(z - \alpha)\}$$

と変形し, 右辺の $\{1 + O(z - \alpha)\}$ の部分を $h(z)$ とすれば, α 中心の十分に小さな半径の円板上で定義された正則関数 $H(z) := 1 + O(z - \alpha)$ で, $H(z)^N = h(z)$ を満たすものが存在する. そこで, A の N 乗根のうちの一つを選びこれを $\sqrt[N]{A}$ として,

$$\zeta = \phi(z) := \sqrt[N]{A}(z - \alpha)H(z)$$

とおこう. $\phi(\alpha) = 0$ かつ $\phi'(\alpha) = \sqrt[N]{A} \neq 0$ なので, 逆関数定理より, ϕ は点 α の近傍で局所的に一对一の写像である. そこで, 点 α の近傍 U を $\phi(U)$ が原点中心の十分小さな円板 $\mathbb{D}(r)$ ($r \ll 1$) となるように選び, $V := f(U)$ 上で定義された関数 $\psi(w) := w - f(\alpha)$ を用いれば,

$$\psi \circ f(z) = \phi(z)^N \iff \psi \circ f \circ \phi^{-1}(\zeta) = \zeta^N$$

が任意の $\zeta \in \phi(U)$ 上で成り立つ. ■

分岐点

定義 $\alpha \in \mathbb{C}$ が f の**分岐点** (critical point) であるとは, $\deg(f, \alpha) \geq 2$ となることをいう. f の分岐点全体の集合を $C(f)$ で表す.

例. $d = 1$ のとき, Rat_1 は $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ($ad - bc \neq 0$) の形のメビウス変換全体のことである. このような f は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上で正則かつ全単射であり, 局所次数はつねに 1 である. よって $C(f) = \emptyset$.

命題 9.3 (分岐点の個数) $d \geq 2$ とするとき,

$$\sum_{\alpha \in C(f)} (\deg(f, \alpha) - 1) = 2d - 2. \quad (9.1)$$

が成り立つ. とくに,

$$\# C(f) \leq 2d - 2.$$

ただし, $\# X$ は集合 X の濃度を表す.

証明. 命題 9.2 より, $C(f)$ は集積点を持つことができないので, $\# C(f) < \infty$ である. よってある $\alpha \in \mathbb{C}^*$ が存在し, $f(\alpha) \neq 0, \infty$ かつ $\deg(f, \alpha) = 1$ を満たす. そこで, メビウス変換 $\phi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を $\phi(\alpha) = \infty$, $\phi(f(\alpha)) = 0$ を満たすようにとれば,

- $\phi \circ f \circ \phi^{-1} \in \text{Rat}_d$.
- $\phi(C(f)) = C(\phi \circ f \circ \phi^{-1})$.
- $\# C(f) = \# C(\phi \circ f \circ \phi^{-1})$.

を満たすので, $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ を f と思って証明すればよい. そのような f は $f(\infty) = 0$ を満たすから,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_{d-1}z^{d-1} + \dots}{b_d z^d + \dots}$$

の形となる.

テイラー展開より次の補題がわかる:

補題 9.4 $\deg(f, \alpha) \geq 2 \iff f'(\alpha) = 0$. このとき, $1 \leq k \leq \deg(f, \alpha) - 1$ に対し $f^{(k)}(\alpha) = 0$.

これより分岐点の個数は重複度込みでの方程式

$$f'(z) = 0 \iff \frac{P'Q - PQ'}{Q^2} = \frac{-a_{b-d}b_d z^{2d-2} + \dots}{Q^2} = 0$$

の解の個数 $2d - 2$ と等しく, 式 (9.1) が成立する. ■

複素力学系 (6/21)

配布日：2016/07/12 Version：1.1

 f の力学系

定義 点 $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ の関数 $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ による軌道 (orbit) とは、次のような性質をもつ点列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ のことである：

$$z_0 = z, \quad z_{n+1} = f(z_n) \quad (n \geq 0)$$

すなわち,

$$z = z_0 \xrightarrow{f} z_1 \xrightarrow{f} z_2 \xrightarrow{f} \dots$$

以下, $f^0 := \text{id}$, $f^n := f \circ f \circ \dots \circ f$ (n 個の反復合成) と定める.

宇宙のモデル. 連続関数 $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が与えられたとき,

$$\widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \dots$$

と無限に合成し続けることを考える. 形式的には, ペア組 $(\widehat{\mathbb{C}}, f)$ のことを関数 f が定める $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の力学系と呼ぶ. ただし, 実際に私たちが考えるときは「空間」「時間」「運動法則」の三要素を以下のように定めた「宇宙のモデル」だと解釈できる:

- 「空間」: Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$
- 「時間」: 0 以上の整数 $0, 1, 2, \dots$
- 「運動法則」: 点 z は 1 秒後に点 $f(z)$ に移動する

このような「宇宙」に存在する「軌道」たちの長期的な振る舞いを調べたい.

軌道の例. $f(z) = z^2$, $f(\infty) = \infty$ とする. $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ をとると, $z_n = f^n(z_0) = z_0^{2^n}$.

$$z_0 = 0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} \dots \quad (\text{固定点})$$

$$z_0 = \infty \xrightarrow{f} \infty \xrightarrow{f} \infty \xrightarrow{f} \infty \xrightarrow{f} \dots \quad (\text{固定点})$$

$$z_0 = i \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} \dots \quad (\text{途中から固定})$$

$$z_0 = 2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 256 \xrightarrow{f} 65536 \xrightarrow{f} \dots \quad (\infty \text{ に収束})$$

$$z_0 = \frac{1}{2} \xrightarrow{f} \frac{1}{4} \xrightarrow{f} \frac{1}{16} \xrightarrow{f} \frac{1}{256} \xrightarrow{f} \frac{1}{65536} \xrightarrow{f} \dots \quad (0 \text{ に収束})$$

$f(z) = z^2$ による軌道の分類.

$$(A) |z_0| < 1 \implies |z_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \iff z_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$(B) |z_0| > 1 \implies |z_n| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \iff z_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

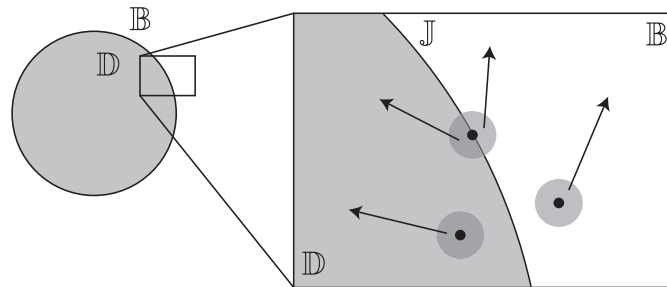
$$(C) |z_0| = 1 \implies |z_n| = 1 \iff z_n \text{ は単位円板 } \mathbb{J} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \text{ にとどまる.}$$

軌道の安定性. $\epsilon > 0$ をとり, $z_\epsilon := z_0 + \epsilon$ の軌道を考える. $\epsilon \ll 1$ のとき (すなわち, ϵ が十分に小さいとき)

(A') $|z_0| < 1 \implies |z_\epsilon| < 1 \implies (z_\epsilon)_n$ は 0 に収束する. (z_0 の軌道は「安定」)

(B') $|z_0| > 1 \implies |z_\epsilon| > 1 \implies (z_\epsilon)_n$ は ∞ に収束する. (z_0 の軌道は「安定」)

(C') $|z_0| = 1 \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } |z_\epsilon| < 1 \implies 0 \text{ に収束する.} \\ \text{(b) } |z_\epsilon| > 1 \implies \infty \text{ に収束する.} \\ \text{(c) } |z_\epsilon| = 1 \implies \mathbb{J} \text{ にとどまる.} \end{array} \right\} \quad (z_0 \text{ の軌道は「不安定」})$



結論. $f(z) = z^2$ による $z_0 \in \mathbb{C}$ の軌道は $|z_0| \neq 1$ のときは「安定」であり, $|z_0| = 1$ のときは「不安定」である. 前者のように「安定」な軌道を生成する初期値の集合を「Fatou 集合」とよび, 後者のように「不安定」な軌道を生成する初期値の集合を「Julia 集合」とよぶ. 正確な定義は次回へ.

Julia 集合と Fatou 集合 (6/28)

配布日：2016/07/19 Version：1.1

Fatou 集合と Julia 集合

$f \in \text{Rat}_d$ ($d \geq 2$) が生成する力学系を「安定な部分」と「不安定 (カオス的) な部分」に分割したい。以下では「安定な部分」である「Fatou 集合」 $F(f)$ と「不安定な部分」である「Julia 集合」 $J(f)$ を $\widehat{\mathbb{C}} = F(f) \sqcup J(f)$ (すなわち, $\widehat{\mathbb{C}} = F(f) \cup J(f)$ かつ $F(f) \cap J(f) = \emptyset$) が成立するように定義する。

正規族. $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ を領域とし, \mathcal{F} は Ω から $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則関数の族とする。

例. これから考えたい典型的な例は, $f \in \text{Rat}_d$ に対し, $\mathcal{F} := \{f^n|_{\Omega}\}_{n \geq 0}$ として定まる正則関数の族である。

定義 (同程度連続性) Ω 上の正則関数の族 \mathcal{F} が同程度連続 (equicontinuous) であるとは, 以下が成り立つことをいう:

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in \Omega) (\forall g \in \mathcal{F}) \\ d_{\widehat{\mathbb{C}}}(x, y) < \delta \implies d_{\widehat{\mathbb{C}}}(g(x), g(y)) < \epsilon.$$

ここで $d_{\widehat{\mathbb{C}}}(\cdot, \cdot)$ は球面距離である。また, \mathcal{F} が正則関数の同程度連続な族であるとき \mathcal{F} を**正規族** (normal family) という。

正規族かどうかを判定する最も強力な定義が, 次の「Montel の定理」である:

定理 11.1 (Montel の定理) \mathcal{F} は領域 Ω から $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則関数の族であるとする。互いに異なる三点 $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ が

$$\bigcup_{g \in \mathcal{F}} g(\Omega) \subset \widehat{\mathbb{C}} - \{a, b, c\}$$

を満たすならば, \mathcal{F} は正規族である。

Fatou 集合と Julia 集合.

定義 (Fatou 集合 と Julia 集合) $f \in \text{Rat}_d$ ($d \geq 2$) とする。

- $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ が関数 f の **Fatou 集合** $F(f)$ に属するとは, z_0 の近傍 U で, $\{f^n|_U\}_{n \geq 0}$ が正規族となるものが存在することをいう。
- Fatou 集合の補集合 $J(f) := \widehat{\mathbb{C}} - F(f)$ を f の **Julia 集合** という。すなわち, $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ が $J(f)$ に属するとは, z_0 のどんな近傍 U に対しても, $\{f^n|_U\}_{n \geq 0}$ は正規族と「ならない」ことをいう。

例. 2次多項式 (関数) $f(z) = z^2$ を $f(\infty) = \infty$ と定めて $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の写像と見た場合,

$$F(f) = \mathbb{C} - \mathbb{J}, \quad J(f) = \mathbb{J} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

となる (理由を考えよ)。

周期点

定義 (周期点と乗数) $f \in \text{Rat}_d$ ($d \geq 2$) とする.

- $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ が f の**周期** $p \in \mathbb{N}$ の**周期点** (periodic point of period p) であるとは, $f^p(z_0) = z_0$ であり, かつ任意の $1 \leq k \leq p-1$ に対して $f^k(z_0) \neq z_0$ が成り立つことをいう. とくに, $p=1$ のとき z_0 は**固定点** (fixed point) であるという. さらに

$$z_0 \xrightarrow{f} z_1 \xrightarrow{f} z_2 \xrightarrow{f} \cdots z_{p-1} \xrightarrow{f} z_0$$

とするとき, 点集合 $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}\}$ を z_0 の**サイクル** (cycle) という.

- 周期 p の周期点 $z_0 \in \mathbb{C}$ に対し, 微分係数 $\lambda := (f^p)'(z_0)$ を z_0 の**乗数** (multiplier) という. また, ∞ が周期 p の周期点である場合には, $g(z) := 1/f(1/z) \in \text{Rat}_d$ とおき, ∞ の乗数を $(g^p)'(0)$ として定める. (f の力学系を反転写像 $w = \tau(z) = 1/z$ を通して観測することで, f の周期点 ∞ を $g = \tau \circ f \circ \tau^{-1}$ の周期点 0 とみなして乗数を定義する.)

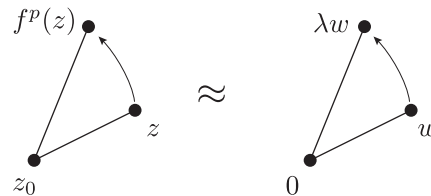
連鎖律より, $\lambda = f'(z_0)f'(z_1)\cdots f'(z_{p-1})$. すなわち, 乗数 λ はサイクルに固有の定数である.

乗数の意味. $f^p(z_0) = z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda := (f^p)'(z_0)$ のとき, $z = z_0$ でテイラー展開をすると

$$f^p(z) = f^p(z_0) + (f^p)'(z_0)(z - z_0) + \cdots$$

よって $z \approx z_0$ のとき近似式

$$f^p(z) - z_0 \approx \lambda(z - z_0)$$



が成り立つ. すなわち, f^p の作用を z_0 を中心に見ると, ほぼ $w \mapsto \lambda w$ のように観測できるということである.

周期点の分類. $f^p(z_0) = z_0$, $\lambda = (f^p)'(z_0)$ とする. 周期点は以下のように分類される:

- (A) $|\lambda| < 1$ のとき z_0 は**吸引的** (attracting) であるという.
- (R) $|\lambda| > 1$ のとき z_0 は**反発的** (repelling) であるという.
- (I) $|\lambda| = 1$ のとき z_0 は**中立的** (indifferent) であるという.
このとき, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ が存在する. この場合をさらに分類する:
 - (P) $\theta \in \mathbb{Q}$ のとき z_0 は**放物的** (parabolic) であるという.
 - (IR) $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ のとき z_0 は**無理的中立** (irrationally indifferent) であるという.
この場合をさらに分類する:
 - (S) ある z_0 の近傍 U と等角写像 $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して, $\phi(z_0) = 0$ かつ $\phi \circ f^p \circ \phi^{-1}(w) = e^{2\pi i\theta} w$ を満たすとき, z_0 は**Siegel 点**あるいは**線形化可能** (linearizable) であるという.
 - (C) 線形化可能でないとき, z_0 は**Cremer 点**であるという.

したがって、周期点は実質的に (A)(R)(P)(S)(C) の 5 通りの可能性に分類できる。

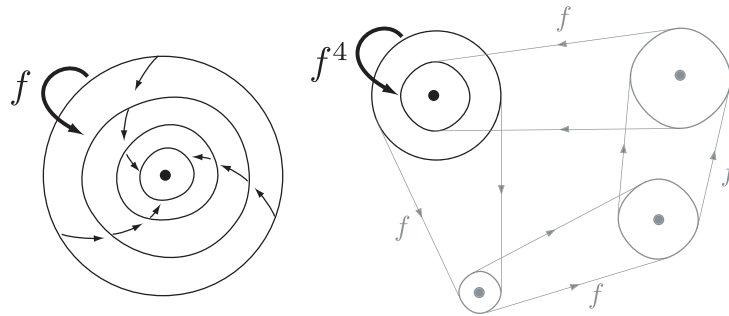


図 11.1: (A) 吸引的固定点の作用 (左) と周期 4 の吸引的周期点の作用 (右) .

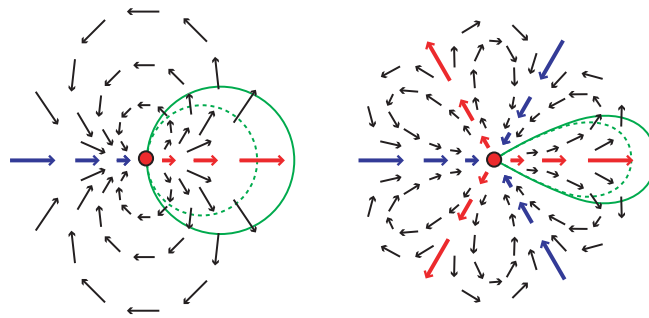


図 11.2: (P) 放物的固定点の作用

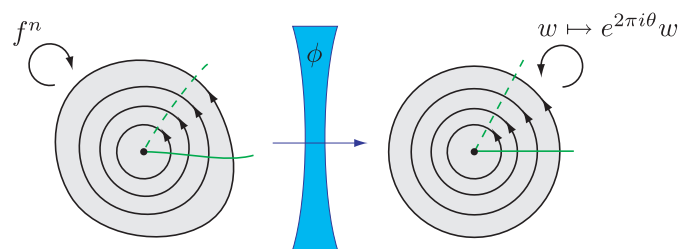


図 11.3: (S) Siegel 点と線形化可能性

命題 11.2 (周期点と Fatou/Julia 集合) 周期点 $f^p(z_0) = z_0$ に対し、

- (A) または (S) $\iff z_0 \in F(f)$.
- (R), (P) または (C) $\iff z_0 \in J(f)$.

Julia 集合と Fatou 集合 2 (7/5)

配布日：2016/07/26 Version：1.1

周期点の分類 (つづき)

命題 11.2 (周期点と Fatou/Julia 集合) 周期点 $f^p(z_0) = z_0$ に対し,

- (A) または (S) $\iff z_0 \in F(f)$.
- (R), (P) または (C) $\iff z_0 \in J(f)$.

補足 (線形化について).

定理 12.1 (Koenigs) $f^p(\alpha) = \alpha$, $(f^p)'(\alpha) = \lambda$ とする. $|\lambda| \neq 0, 1$ ならば α は線形化可能 (linearizable). すなわち, ある α の近傍 U と等角写像 $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}$ が存在し, $\phi(\alpha) = 0$ かつ

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1}(\zeta) = \lambda \zeta$$

が成り立つ.

等角写像 ϕ を通して f^p を観測すると, 線形写像 $\zeta \mapsto \lambda \zeta$ に見えるということである. この $\zeta = \phi(z)$ を **線形化座標** (linearizing coordinate) という. 証明は擬等角写像の応用としてあとで与える.

注意.

- 「 $\phi \circ f \circ \phi^{-1}(\zeta) = \lambda \zeta$ が成り立つ」というのは, 「定義可能な範囲で成り立つ」ということである. たとえば $|\lambda| > 1$ のとき, $\zeta = 0$ の十分近くでは成立しているが, $\phi(U)$ の境界付近では $f \circ \phi^{-1}(\zeta)$ が U から出てしまい $\phi \circ f \circ \phi^{-1}(\zeta)$ が定義できないかもしれない.
- したがって, (A) ($\lambda = 0$ を場合を除く), (R), (S) ならば線形化可能¹.

命題 11.2 の証明 (概略).

- **(A) の場合**: 定理 12.1 より, ある α の近傍 U が存在して, そこでの f^p の作用は縮小写像 $\zeta \mapsto \lambda \zeta$ ($|\lambda| < 1$) を適当な等角同相写像で観測したものになっている. よってすべての $z \in U$ に対して $f^{kp}(z) \rightarrow \alpha$ ($k \rightarrow \infty$) が成り立つ. とくに, $\{f^{kp}|_U\}_{k \geq 0}$ は同程度連続であり, したがって $\{f^n|_U\}_{n \geq 0}$ も同程度連続となる.
- **(S) の場合**: 定義より, ある α の近傍 U が存在して, そこでの f^p の作用は回転写像 $\zeta \mapsto \lambda \zeta$ ($|\lambda| = 1$) を適当な等角同相写像で観測したものになっている. よって $\{f^{kp}|_U\}_{k \geq 0}$ は同程度連続であり, したがって $\{f^n|_U\}_{n \geq 0}$ も同程度連続となる.
- **(R) の場合**: 定理 12.1 より, ある $\epsilon > 0$ が存在し, 任意の $\delta > 0$ に対して α の十分近くに z と w を選ぶことで $|z - w| < \delta$ だが $|f^{kp}(z) - f^{kp}(w)| \geq \epsilon$ が成り立つようにできる². よって, $\{f^{kp}|_U\}_{k \geq 0}$ は同程度連続でない. したがって, $\{f^n|_U\}_{n \geq 0}$ も同程度連続ではない.

¹ $\lambda = 0$ の場合は次が知られている (Bottcher): $f^p(\alpha) = \alpha$, $(f^p)'(\alpha) = 0$ とする. このとき, ある自然数 $n \geq 2$, α の近傍 U , 等角写像 $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}$ が存在し, $\phi(\alpha) = 0$ かつ $\phi \circ f \circ \phi^{-1}(\zeta) = \zeta^n$ が (定義可能な範囲で) 成り立つ. とくに, $\overline{f(U)} \subset U$ とできる.

²たとえば $z = \alpha$ としてよい. これを線形化写像で観測すると, $\zeta = 0$ とそれ以外の点は $\zeta \mapsto \lambda \zeta$ ($|\lambda| > 1$) によって距離が指数関数的に離れていく.

- (P) の場合：必要なら座標系を平行移動させて、 $\alpha = 0$ と仮定してよい。 λ は 1 のべき根なので、 $\lambda^k = 1$ としよう。このとき、 $z \approx 0$ ならば、

$$\begin{aligned} f^p(z) &= \lambda z + O(z^2), \\ f^{2p}(z) &= \lambda^2 z + O(z^2), \\ &\dots \\ f^{kp}(z) &= z + Az^{m+1} + O(z^{m+2}) \quad (\text{ここで, } A \neq 0, m \in \mathbb{N} \text{ である}), \\ f^{kp}(z) &\approx z(1 + Az^m). \end{aligned}$$

$Az^m > 0$ ならば、

$$|f^{kp}(z)| \approx |z|(1 + Az^m) > |z|,$$

$Az^m < 0$ ならば、

$$|f^{kp}(z)| \approx |z|(1 + Az^m) < |z|$$

が成り立つ³。前者の場合は (R) と同様の議論ができるので、よって、 $\{f^{kp}|_U\}_{k \geq 0}$ は同程度連続でない。したがって、 $\{f^n|_U\}_{n \geq 0}$ も同程度連続ではない。

- (C) の場合： $\alpha \in F(f)$ と仮定すると、後述する「Fatou 成分の分類」定理により、 $\lambda = 1$ となる α を真に含む Fatou 集合の成分はジーゲル円板しかない。これは α が線形化可能で「ない」ことに反する。 ■

Julia 集合の性質.

定理 12.2 $f \in \text{Rat}_d$ ($d \geq 2$) とする。このとき、 $J = J(f)$ は以下の性質を満たす。

- (J1) $f(J) = J = f^{-1}(J)$.
- (J2) $J(f^k) = J$ ($f^k \in \text{Rat}_{d^k}$)
- (J3) J は孤立点を持たないコンパクト集合.
- (J4) $J \cap U \neq \emptyset$ を満たす任意の開集合 U に対して、 $\widehat{\mathbb{C}} - \bigcup_{n \geq 0} f^n(U)$ は高々二つの点からなる。特に $J \subset f^N(U)$ となるような $N \in \mathbb{N}$ が存在する (このことを指して、 J はフラクタルであるといわれる.)
- (J5) J が内点を持つならば、 $J = \widehat{\mathbb{C}}$ である.
- (J6) $J = \overline{\{\text{反発的周期点}\}}$

証明の概略. いくつかはレポート問題としよう。ここでは (J4) の前半を示す。まず

$$\# \left(\widehat{\mathbb{C}} - \bigcup_{n \geq 0} f^n(U) \right) \geq 3$$

と仮定すると、Montel の定理より、 $\{f^n|_U\}_{n \geq 0}$ は正規族となる。したがって、 $U \subset F(f)$ となり、これは矛盾を導く。 ■

³実際、ある α の近傍 U 、擬等角写像 $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}$ (等角にはできない) が存在し、 $\phi(\alpha) = 0$ かつ $\phi \circ f \circ \phi^{-1}(\zeta) = \zeta(1 + \zeta^m)$ が (定義可能な範囲で) 成り立つ。

Fatou-Shishikura の不等式 (7/12)

配布日：2016/08/2 Version：1.1

Fatou 集合の性質.

前回の「Julia 集合の性質」に引き続き、Fatou 集合の性質について述べる.

以下、 $f \in \text{Rat}_d$ ($d \geq 2$), $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ とする.

定理 13.1 $F := F(f)$, $J := J(f)$ とする.

(F1) $f(F) = F = f^{-1}(F)$. これは (J1) $J(F) = J = f^{-1}(J)$ と同値.

(F2) すべての自然数 k に対し、 $F(f^k) = F(f)$. これは (J2) $J(f^k) = J(f)$ と同値.

(F3) F は開集合. (よって J は閉集合、とくにコンパクト集合である. (J3) の一部).

(F4) F の連結成分の数 (濃度) は $0, 1, 2$ または ∞ (可算無限) である.

有理関数の Fatou 集合について、もっとも重要かつ基本的なのが、「Sullivan の非遊走領域定理」(Sullivan's No Wondering Domain Theorem) である.

定理 13.2 (Sullivan の非遊走領域定理) $f \in \text{Rat}_d$ ($d \geq 2$) とし、 U を $F(f)$ の連結成分とする. このとき、ある自然数 l と p が存在し、

$$f^l(U) = f^{l+p}(U).$$

注意. 超越整関数 (複素平面上で正則かつ多項式でない関数) の力学系には非遊走領域定理は成り立たない.

Fatou 成分の分類

Fatou 集合の性質を述べるにあたって、その連結成分について次のような名前つけておく:

- 開集合 U が Fatou 集合の連結成分のひとつであるとき、**Fatou 成分** (Fatou component) であるという.
- ある Fatou 成分 U が**周期的** (periodic) であるとは、ある自然数 p が存在して $f^p(U) = U$ が成り立つことを言う. とくに、 $f^k(U) \cap U = \emptyset$ ($k = 1, \dots, p-1$) であるとき、 U を**周期 p の Fatou 成分**とよび、集合族

$$\{U, f(U), \dots, f^{p-1}(U)\}$$

を**Fatou サイクル** (Fatou cycle) とよぶ.

- ある Fatou 成分 U が**前周期的** (pre-periodic) であるとは、ある自然数 l, p が存在して $f^{l+p}(U) = f^l(U)$ が成り立つことをいう. すなわち、 $f^l(U)$ が周期的な Fatou 成分となることをいう.
- Fatou 成分 U が任意の $i \neq j$ に対して $f^i(U) \cap f^j(U) = \emptyset$ を満たすとき、 U を**遊走領域** (wandering domain) という.

注意. Fatou 成分は周期的であれば前周期的である. 定理 13.2 より, 有理関数の Fatou 集合は遊走領域を持たず, すべて前周期的であることがわかる.

したがって, Fatou 集合上の点の軌道を調べるには, 周期的な Fatou 成分 (Fatou サイクル) での軌道の振る舞いを調べればよい.

周期的 Fatou 成分の分類. 周期的な Fatou 成分 (Fatou サイクル) はおおまかに以下の 4 通りに分類される:

命題 13.3 (Sullivan) U を $f \in \text{Rat}_d$ ($d \geq 2$) の周期 p の周期的 Fatou 成分とする. このとき, 以下の $\langle A \rangle$, $\langle P \rangle$, $\langle S \rangle$, $\langle H \rangle$ のいずれか 1 つが成立する.

$\langle A \rangle$ **直接吸引鉢:** ある周期 p の吸引的周期点 $\alpha \in U$ が存在して, 任意の $z \in U$ に対して

$$f^{pk}(z) \rightarrow \alpha \quad (k \rightarrow \infty).$$

$\langle P \rangle$ **直接放物鉢:** $f^p(\alpha) = \alpha$ を満たす放物的周期点 $\alpha \in \partial U$ (その周期は一般に p の約数) が存在して, 任意の $z \in U$ に対して

$$f^{pk}(z) \rightarrow \alpha \quad (k \rightarrow \infty).$$

$\langle S \rangle$ **Siegel 円板:** $(f^p)'(\alpha) = e^{2\pi i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) をみたす周期 p の Siegel 点 $\alpha \in U$ と, 正則な同相写像 $\phi: U \rightarrow \mathbb{D}(r)$ が存在して, $\phi(\alpha) = 0$ かつ次が成り立つ:

$$\phi \circ f^p \circ \phi^{-1}(\zeta) = e^{2\pi i\theta} \zeta.$$

$\langle H \rangle$ **Herman 環:** ある正則な同相写像 $\phi: U \rightarrow \mathbb{A}(1, r)(:= \{z \mid 1 < |z| < r\})$ と無理数 θ が存在して, 次が成り立つ:

$$\phi \circ f^p \circ \phi^{-1}(\zeta) = e^{2\pi i\theta} \zeta.$$

Fatou サイクルの分類. 周期的 Fatou 成分 U の周期を p とし, U の属するサイクルを

$$\mathcal{U} := \{U, f(U), f^2(U), \dots, f^{p-1}(U)\}$$

と表す. 本講義では便宜的に, 以下のように呼ぶことにする:

- \mathcal{U} が**吸引的 Fatou サイクル** $:\iff \langle A \rangle$
- \mathcal{U} が**放物的 Fatou サイクル** $:\iff \langle P \rangle$
- \mathcal{U} が**Siegel 的 Fatou サイクル** $:\iff \langle S \rangle$
- \mathcal{U} が**Herman 的 Fatou サイクル** $:\iff \langle H \rangle$.

定理 13.4 (Fatou 成分と分岐点) (1) 吸引的または放物的な Fatou サイクルは少なくともひとつの分岐点 (とその軌道) を含む.

(2) Siegel 的または Herman 的な Fatou サイクルの境界は分岐点の軌道の閉包に含まれる.

Fatou-Shishikura の定理. 命題 9.3 と定理 13.4(1) より,

$$\#\langle A \rangle + \#\langle P \rangle \leq 2d - 2 \iff \#(A) + \#(P) \leq 2d - 2.$$

ここで $\#\langle A \rangle$ は吸引的 Fatou サイクルの個数を, $\#\langle P \rangle$ は放物的 Fatou サイクルの個数を表し, $\#(A)$ は吸引的周期点のなすサイクルの個数, $\#(P)$ は放物的周期点のなすサイクルの個数をあらわす. $2d - 2$ という数字は重複度も込めた分岐点の個数である.

定理 13.5 (Shishikura) 任意の $f \in \text{Rat}_d$ ($d \geq 2$) について, 以下が成り立つ:

$$\#(A) + \#(I) \leq 2d - 2.$$

ここで, $\#(I)$ は中立的周期点のなすサイクルの個数を表す.

この不等式を **Fatou-Shishikura の不等式** とよぶ. $\#(I) = \#(P) + \#(S) + \#(C)$ であることに注意せよ. ただし, $\#(S)$, $\#(C)$ はそれぞれ Siegel 点, Cremer 点のなすサイクルの個数を表す.

定理 13.6 (Shishikura) 任意の $f \in \text{Rat}_d$ ($d \geq 2$) について, 以下が成り立つ:

$$\#\langle A \rangle + \#\langle P \rangle + \#(S) + 2\#(H) + \#(C) \leq 2d - 2.$$

擬等角写像の応用 (7/19-26)

配布日: 2016/08/8 Version: 1.1

● 2016/07/19: 擬等角写像の応用 ●

Beltrami 係数の引き戻し. 以下, Ω, Ω' を \mathbb{C} 内の領域とし, $F: \Omega \rightarrow \Omega'$ および $G: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ中への擬等角写像とする.

このとき, 次の Beltrami 係数が定義域上ほとんどいたるところで定義される:

$$\mu_F(z) := \frac{F_{\bar{z}}(z)}{F_z(z)}, \quad \mu_G(z) := \frac{G_{\bar{z}}(z)}{G_z(z)}.$$

命題 14.1 (Beltrami 係数の引き戻し) Beltrami 係数 μ_G の, 写像 F による引き戻し (pull-back) $F^* \mu_G(z)$ を

$$F^* \mu_G(z) := \mu_{G \circ F}(z) \quad \text{a.e. } z \in \Omega.$$

で定義する. 具体的には, 以下のようにして計算される:

$$F^* \mu_G(z) = \mu_{G \circ F}(z) = \frac{\mu_F(z) + \mu_G(F(z)) \cdot \frac{\overline{F_z(z)}}{F_z(z)}}{1 + \mu_G(F(z)) \cdot \overline{\mu_F(z)} \cdot \frac{F_z(z)}{F_z(z)}}.$$

注意. F が正則な場合は

$$F^* \mu_G(z) = \mu_G(F(z)) \cdot \frac{\overline{F_z(z)}}{F_z(z)}$$

となる.

擬正則写像. 等角写像の拡張として擬等角写像があるように, 正則写像の拡張として擬正則写像の概念を導入する.

定義 写像 $F: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が次数 d の**擬正則写像** (quasiregular mapping) であるとは, ある次数 d の有理写像 f と擬等角写像 $\phi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が存在し, $F = f \circ \phi$ と表されることをいう.

注意. 擬正則写像 F に対し, 別の有理写像 g と擬等角写像 ψ が存在し, $F = \psi \circ g$ と表現することもできる.

注意. 本講義では便宜的に, $\phi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が「擬等角写像」であることを「ある普通の意味での擬等角写像 $\phi_0: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在し, $z \in \mathbb{C}$ のとき $\phi(z) = \phi_0(z)$, $\phi(\infty) = \infty$ であること」だと定義しておく.¹

注意. 擬等角写像は次数 1 の擬正則写像である. また, 次数 d の擬正則写像は高々 $2d - 2$ 個の点をのぞいて局所的には擬等角写像になっている.

¹一般に, リーマン面から別のリーマン面への写像が擬等角写像であるとは, 局所座標で表現したときに (ある一様な歪曲度を持つ) 複素平面のある領域から別の領域への擬等角写像となっていることをいう.

擬正則写像と有理写像

擬正則写像による引き戻し. いくつか記号を定義する.

- $B(\mathbb{C}) := \{\mu \in L^\infty(\mathbb{C}) \mid \|\mu\|_\infty < 1\}$.
- $QR := \{F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid F \text{ は (任意の次数についての) 擬正則写像}\}$.
- $QR_d := \{F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid F \text{ は次数 } d \text{ の擬正則写像}\}$.

定義 (F -不変性) • 与えられた可測関数 $\mu \in B(\mathbb{C})$ のある擬正則写像 $F \in QR$ による引き戻し (pull-back) とは, a.e. $z \in \mathbb{C}$ で定まる可測関数

$$F^*\mu(z) := \frac{\mu_F(z) + \mu(F(z)) \frac{\overline{F_z(z)}}{F_z(z)}}{1 + \mu(F(z)) \overline{\mu_F(z)} \frac{\overline{F_z(z)}}{F_z(z)}}$$

のことをいう. ただし, $F(z) = \infty$ のときは $\mu(F(z))$ を形式的に 0 と定める. (また, $F_z(z) = 0$ となる点も存在するかもしれないが, そのような点は測度 0 なので無視してよい. あるいは, 適当に値を 0 などとして決めればよい.)

- 可測関数 $\mu \in B(\mathbb{C})$ がある擬正則写像 $F \in QR_d$ に対して a.e. $z \in \mathbb{C}$ で

$$F^*\mu(z) = \mu(z)$$

を満たすとすき, F -不変 (F -invariant) であるという.

擬正則写像の有理写像としての実現.

定義 $F \in QR_d$ が $f \in Rat_d$ と共役 (conjugate) であるとは, ある向きを保つ同相写像 $\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が存在し,

$$\Phi \circ F \circ \Phi^{-1} = f$$

が成り立つことをいう.

これは, F の作用を Φ というレンズを通して観測すると f の作用に見える, ということである.

定理 14.2 擬正則写像 $F \in QR_d$ に対し, ある F -不変なベルトラミ係数 $\mu \in B(\mathbb{C})$ が存在すると仮定する. このとき, ある擬等角写像 $\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が存在して,

- $\mu = \mu_\Phi$ a.e.
- $\Phi \circ F \circ \Phi^{-1} \in Rat_d$

を満たす. すなわち, $f := \Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$ は F と共役な有理写像である.

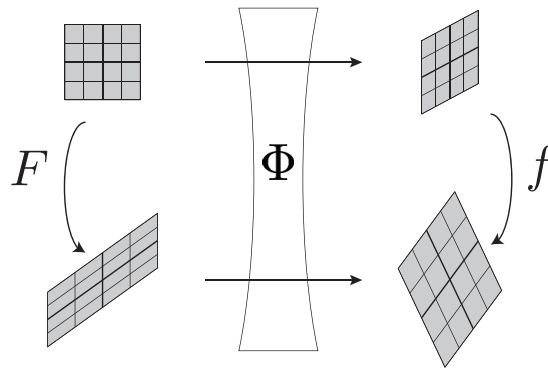


図 14.1: 擬正則写像 f は一般に角度を保たないが, 擬等角写像 Φ を通してその作用を観測すると等角 (正則, よって有理写像) に見える.

証明. 擬等角写像 $\Phi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を μ に対する標準解とする. すなわち, \mathbb{C} 上 a.e. で $\mu_\Phi = \mu$ であり, Φ は $0, 1, \infty$ を固定するものとする. いま $f := \Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$ とおくと,

$$f \circ \Phi = \Phi \circ F$$

であるから

$$\mu_{f \circ \Phi} = \mu_{\Phi \circ F} = F^* \mu_\Phi = F^* \mu = \mu = \mu_\Phi$$

が \mathbb{C} 上 a.e. で成り立つ. 以下同様に \mathbb{C} 上 a.e. で,

$$\begin{aligned} \mu_\Phi(z) &= \mu_{f \circ \Phi}(z) = \frac{\mu_\Phi(z) + \mu_f(\Phi(z)) \cdot \epsilon}{1 + \mu_f(\Phi(z)) \cdot \overline{\mu_\Phi(z)} \cdot \epsilon} \quad (\text{ただし } \epsilon := \frac{\overline{\Phi_z(z)}}{\Phi_z(z)}) \\ \iff \mu_\Phi(1 + (\mu_f \circ \Phi) \cdot \overline{\mu_\Phi} \cdot \epsilon) &= \mu_\Phi + (\mu_f \circ \Phi)\epsilon \\ \iff (1 - |\mu_\Phi|^2) \mu_f \circ \Phi &= 0 \\ \iff \mu_f \circ \Phi &= 0 \\ \iff \mu_f &= 0 \end{aligned}$$

となる. Weyl の補題より, f は $\widehat{\mathbb{C}}$ からそれ自身への (次数 d の) 正則関数となる. よって, $f \in \text{Rat}_d$ である². ■

応用 1 : Koenigs の線形化定理

吸引的もしくは反発的な固定点 (周期点) は, 適当な局所座標を通して表現することで線形写像 ($w \mapsto \lambda w$ の形の写像) とみなすことができる³:

² $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像は有理写像に限る.

³ただし, 乗数が 0 になる場合は特別で, 以下のような Böttcher の定理が知られている: 原点の近傍で $f(z) = Az^m + O(z^{m+1})$ ($A \neq 0, m \geq 2$) と表される正則関数に対し, ある原点の近傍で定義された等角写像 Φ が存在し, $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(w) = w^m$ を満たす.

定理 14.3 (Koenigs, 1884) Ω は $z = 0$ の近傍とし, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は以下を満たす正則写像とする:

$$f(z) = \lambda z + O(z^2)$$

もし $|\lambda| \neq 0, 1$ であれば, ある $r > 0$ と等角写像 $\Phi: \mathbb{D}(r) \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して, 以下を満たす:

- $\Phi(0) = 0$.
- $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(\zeta) = \lambda \zeta$.

したがって, 定義可能な範囲で $\Phi \circ f^k \circ \Phi^{-1}(w) = \lambda^k w$ が成り立つ.

オリジナルの証明のアイデア. $0 < |\lambda| < 1$ のとき, $\Phi_n(z) := \frac{f^n(z)}{\lambda^n}$ とおけば, $\Phi_n(f(z)) = \lambda \Phi_{n+1}(z)$ である. 原点の近傍で Φ_n が一様収束極限 Φ を持つことを示せば, そのような Φ は $\Phi(f(z)) = \lambda \Phi(z)$ を満たす. $\Phi'_n(0) = 1$ かつ Φ_n は正則なので, Weierstrass の定理より $\Phi'(0) = 1$. よって Φ は原点の十分近くで同相である. ■

擬等角写像を用いた証明 (Zakeri). $0 < |\lambda| < 1$ のときを考える. ($|\lambda| > 1$ であれば, 原点の周りで逆関数定理が適用できるので, 代わりに f^{-1} を考えればよい.)

補題 A. 十分に小さな $r > 0$ をとれば, $U := \mathbb{D}(r)$ は以下を満たす:

- $\overline{f(U)} \subset U \subset \Omega$.
- 任意の $z \in U$ に対し, $f^n(z) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

前半は $|f(z)| = |\lambda||z + o(1)|$ よりすぐわかる. 後半はレポート問題とする.

モデルとの対応. $L(w) = \frac{1}{2}w$, $A := \{w \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} \leq |w| \leq 1\}$ とする. また, C^1 級の (上への) 同相写像 $\phi: A \rightarrow \overline{U} - f(U)$ で $|w| = 1$ のとき $\phi(L(w)) = f(\phi(w))$ を満たすものを選ぶ⁴. 上の補題より, 関係式

$$\phi \circ L^n(w) = f^n \circ \phi(w)$$

を用いて, ϕ を同相写像のまま $\phi: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{U}$ と拡張することができる.

いま, $\mu \in B(\mathbb{C})$ を

$$\mu(w) = \begin{cases} \mu_\phi(w) & (w \in \overline{\mathbb{D}} \text{ のとき}) \\ (L^n)^* \mu_\phi(w) & (w \in \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \text{ かつ } L^n(w) \in A \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく⁵. このとき, μ は L -不変である. すなわち, $L^* \mu = \mu$ が成り立つ.

いま, $\tilde{\phi}$ を μ についての標準解とし, $g := \tilde{\phi} \circ L \circ \tilde{\phi}^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ とする. このとき, 定理 14.2 より g は \mathbb{C} 上の L とおなじ 1 次の有理関数である. とくに, 0 と ∞ を固定することから, ある $\nu \in \mathbb{C}^*$ が存在して $g(\zeta) = \nu \zeta$ の形で表される.

つぎに U 上で定義された関数 $\Phi := \tilde{\phi} \circ \phi^{-1}$ を考えると, a.e. で $\mu_\Phi = 0$ であることがわかるのでこれは正則である. とくに, $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1} = g$ であり, $(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})'(0) = g'(0)$. よって $\lambda = \nu$ を得る. したがってこの Φ が求めたいものである. ■

⁴アニュラスの外側の境界が内側の境界に移されるが, その境界での作用が対応するように ϕ を選ぶ. 内側は C^1 級同相であればなんでもよい.

⁵ $w = 0$ や $|w| = 2^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) のときは μ が定義できないかもしれないが, 測度 0 なので適当に, たとえば $\mu = 0$ などと値を定めておけば良い.

● 2016/7/26: Sullivan の非遊走領域定理 ●

応用 2：擬等角摂動による Fatou-Shishikura の不等式 (定理 13.3) の証明

「Fatou-Shishikura の不等式」とは、次数 2 以上の有理関数 f に対し、 $\#(A)_f$ および $\#(I)_f$ をそれぞれ吸引的サイクルの数、中立的サイクルの数とすると、

$$\#(A)_f + \#(I) \leq 2d - 2$$

が成り立つ、というものであった。「擬等角摂動」(quasiconformal perturbation) と呼ばれる手法を用いた、この不等式の証明 (Shishikura, 1985) をスケッチしてみよう。

証明のスケッチ. 与えられた次数 2 以上の有理関数 f に対し、 α を $F(f)$ に属する吸引的周期点とする。このとき、 α を含むある Fatou 成分 U が存在する。すなわち、 α を含むような $F(f)$ の連結成分が存在する。定理 13.4(1) より、任意の Fatou サイクルは少なくともひとつの特異点を含む。よって、少なくとも

$$\#(A)_f \leq \#(f \text{ の特異点}) \leq 2d - 2$$

がわかる⁶。

この不等式は中立的周期点を含んでいないが、 f を有理関数の範囲で摂動 (係数の微小変化に対応する操作) させて、中立的周期点を吸引的周期点に変えることができれば、Fatou-Shishikura の不等式を導くことができる。

まず十分に小さな $\epsilon > 0$ について、擬等角写像 $H_\epsilon : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を以下を満たすように構成する：

- (1) $\epsilon \rightarrow 0$ のとき、 H_ϵ は $H_0 := \text{id}$ に $\widehat{\mathbb{C}}$ 上一様収束する。
- (2) $F_\epsilon := f \circ H_\epsilon$ とおく。このとき、 F_ϵ は QR_d の元であり、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき F_ϵ は f に $\widehat{\mathbb{C}}$ 上一様収束する。
- (3) 任意の周期 p の吸引的周期点または中立的周期点 α について、 $H_\epsilon(\alpha) = \alpha$ であり、 $F_\epsilon(\alpha) = f(\alpha)$ が成り立つ⁷。また、 H_ϵ (および $F_\epsilon = f \circ H_\epsilon$) はそのような各 α の近傍で正則であり、

$$|(F_\epsilon^p)'(\alpha)| < 1$$

が成り立つ。すなわち、 α は F_ϵ の吸引的周期点である。

- (4) 可測関数 $\mu_\epsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ が存在し、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき $\|\mu_\epsilon\|_\infty \rightarrow 0$ かつ $F_\epsilon^* \mu_\epsilon = \mu_\epsilon$ 。

さて $\Phi_\epsilon : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を μ_ϵ に対する標準解とする。すなわち、 $\mu_{\Phi_\epsilon} = \mu_\epsilon$, a.e. であり、 Φ_ϵ は $0, 1, \infty$ を固定するものとする。 $f_\epsilon := \Phi_\epsilon \circ F_\epsilon \circ \Phi_\epsilon^{-1}$ とおけば、 $f_\epsilon \in \text{Rat}_d$ であり (定理 14.2)、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき $f_\epsilon \rightarrow f$ が成り立つ。さらに、 α が吸引的周期点または中立的周期点であれば、 F_ϵ と f_ϵ が共役であることから $\Phi_\epsilon(\alpha)$ は吸引的周期点であり、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき α に収束する。したがって、

$$\#(A)_f + \#(I)_f = \#(A)_{f_\epsilon} \leq 2d - 2$$

を得る。 ■

⁶放物的 Fatou サイクルも少なくともひとつ特異点を含むので、 $\#(A)_f + \#(P) \leq 2d - 2$ がわかる。

⁷すなわち、 f の吸引的周期点または中立的周期点は位置や周期を変えずそのまま F_ϵ の周期点である。じつは、このとき f の吸引的周期点または中立的周期点が高々有限個しかない、という事実を用いる。

応用 3：Sullivan の非遊走領域定理の証明

定理 13.2 (再, Sullivan の非遊走領域定理). $f \in \text{Rat}_d$, $d \geq 2$ とし, U を f の Fatou 成分とする. このとき, ある自然数 l と p が存在し, $f^l(U) = f^{p+l}(U)$.

すなわち, 任意の Fatou 成分は前周期的である.

証明では背理法を用いる. もし遊走領域が存在すれば, そのような有理写像と互いに共役な有理写像が無限次元分存在してしまうが, (係数を考えればわかる通り) 次数 d の有理写像は高々有限次元分しか存在しないので矛盾となる.

以下で与える証明は Baker と McMullen のアイデアを用いて Sullivan のオリジナルの証明をかなり簡略化したものになっている.

証明. 次数 2 以上の有理関数 f が遊走領域 U をもつたと仮定する. すなわち, 任意の相異なる自然数 i と j に対し, $f^i(U) \cap f^j(U) = \emptyset$ が成り立つと仮定する.

以下, $U_n := f^n(U)$ ($n \in \mathbb{N}$) と表すことにしよう. このとき, 次が成り立つ:

命題 15.4 (Baker) U_n は十分大きな n に対し単連結である.

証明. f の特異点の個数は高々 $2d - 2$ 個であるから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $k \geq 0$ に対して, U_{k+N} は特異点を持たない. そこで, U_N で U を置き換え, $f: U_n \rightarrow U_{n+1}$ は正則な被覆写像 (covering map) になっていると仮定してよい⁸. また, 必要ならメビウス変換による共役をとることで, $\infty \in U$ と仮定してよい. このとき, 各 U_n は $\mathbb{C} - U$ 内の互いに共通部分をもたない部分集合である.

いま $\{f^n: U_1 \rightarrow \mathbb{C} - U\}_n$ は正規族であるから, (たとえば Ascoli-Arzelà の定理より) U_1 内の任意の内点を持つコンパクト集合 K 上で一様収束する部分列をもつ. とくに, 正則写像の一様収束による極限はまた正則写像である. この極限が定数関数となることを示そう.

もしこの一様収束極限が定数関数でない正則写像であれば, それは開写像であるから, K が内点を含むという仮定からその像も内点を含む. しかし, U_n たちを Riemann 球面でみたとき, その面積の総和は有限であるから, $\text{Area}_{\mathbb{C}}(U_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ. よって $f^n(U_1)$ から無限個を選んだ共通部分は内点をもつことができない. これは矛盾である.

さて γ を U 内の任意の閉曲線とし, $\gamma_n := f^n(\gamma)$ とおく. $\mathbb{C} - \gamma_n$ は一般に複数の連結成分に分かれるが, $\mathbb{C} - U$ に含まれる有界な成分の和集合 (開集合) を B_n とおくことにする⁹.

$f^n|_U$ は定数関数にコンパクト集合上で一様収束するから, $n \rightarrow \infty$ のとき $\text{diam}(\gamma_n) \rightarrow 0$, したがって $\text{diam}(B_n) \rightarrow 0$ も成り立つ.

いま, $f^{-1}(U)$ の連結成分を考えると, そのような連結成分は有限個であるから, 球面距離で見たときの直径は一定以上の大きさをもつ. 一方, $\text{diam}(B_n) \rightarrow 0$ であるから, 十分大きな n に対して, B_n の連結成分は $f^{-1}(U)$ の連結成分を含むことができない. したがって $f(B_n) \subset \mathbb{C} - U$ が成り立つ. Montel の定理より, $\{f^{n+k}\}_k$ は B_n 上で正規族となる. すなわち, $B_n \subset F(f)$ であり, $B_n \subset U_n$. これは $f^n: U \rightarrow U_n$ は被覆写像であったから U_n で 1 点にホモトピックな閉曲線 γ_n の U への持ち上げ γ は 1 点にホモトピックである. すなわち, U は単連結である. ■

⁸ Julia 集合は Julia 集合に写ることから, $f: U_n \rightarrow U_{n+1}$ は固有 (proper) であることに注意する. また, 特異点がないことから局所同相でもある. よって被覆写像である.

⁹ いま, U (および U_n) が単連結であることを示したいのだが, 証明の過程では例えばアニュラスを思い浮かべて, γ (および γ_n) はそれを一周する経路であり, B_n の中には Julia 集合を含む連結成分があるかもしれない, と考えて議論を進める必要がある.

f の擬等角変形の構成. 以上の議論から, すべての n で U_n は \mathbb{C} 内の単連結領域であり, $f: U_n \rightarrow U_{n+1}$ は等角な同相写像であると仮定してよい.

ここで, U 上の可測関数全体のなす L^∞ ノルムによる Banach 空間を $\tilde{B}(U)$ とおく. また, $\tilde{B}(U)$ の中で $\|\mu\|_\infty < 1$ を満たすもの全体 (単位球) を $B(U)$ と表すことにする.

$\mu \in \tilde{B}(U) - \{0\}$ をひとつ選んで固定するとき, 十分に小さい $\epsilon < \|\mu_\infty\|^{-1}$ をとれば $t \in \mathbb{D}(\epsilon)$ のとき $\mu_t := t\mu \in B(U)$ を満たす.

そのような μ_t を以下のように $B(\mathbb{C})$ の元として拡張する: $f^k(z) \in U$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在するときは $\mu_t(z) := (f^k)^*\mu_t(z)$ とし, $z \in U_n$ のときは $g_n := (f^n|_U)^{-1}: U_n \rightarrow U$ が正則同相写像として定義できるので $\mu_t(z) := (g_n)^*\mu_t(z)$ とする. それ以外では $\mu_t = 0$ とする¹⁰.

このとき μ_t は f -不変であり, その標準解を Φ_t とすれば $f_t := \Phi_t \circ f \circ \Phi_t^{-1}$ は有理関数である (定理 14.2). また, 標準解はパラメーター t に関して解析的に依存するから, $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し写像 $t \mapsto f_t(z)$ は正則写像となっている.

有理関数の無限小変形. 一般に, 複素パラメーター $t \in \mathbb{D}(\epsilon)$ に関して解析的に依存する有理関数の族 $\{f_t(z)\}_t$ を考えてみよう. 像 $t \mapsto f_t(z) \in \hat{\mathbb{C}}$ は正則写像となっているから, t に関する, $t = 0$ における微分

$$w(z) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_t(z)$$

を考えよう. ただし, この微分は $z = \infty$ および $f(z) = \infty$ のとき意味づけが曖昧であるから, そのような z は除いて考えることにすれば, 複素数値関数として定まる¹¹. すなわち, ($z = \infty$ および $f(z) = \infty$ となる z を含まない) コンパクト集合上で一様に

$$f_t(z) = f(z) + tw(z) + o(t) \quad (t \rightarrow 0)$$

と表されると仮定する. f_t も f も有理関数であるから $w(z)$ も正則関数である. この w は Rat_d の f における接空間 $T_f \text{Rat}_d$ とみなされる¹² ので, f の**無限小変形** (infinitesimal deformation) とよばれる. また, $\mu \in \tilde{B}(\mathbb{C})$ に対し上記のように $\{f_t\}$ を構成し得られた w が恒等的に零ベクトルであるとき, $\mu \in \tilde{B}(\mathbb{C})$ は**自明な** (trivial) 変形とよばれる.

幾何学の言葉を用いると, 各 z に対して $w(z)$ は接空間 $T_{f(z)}\hat{\mathbb{C}} (\simeq \mathbb{C})$ に属する接ベクトルを定めている. $w(z)$ は正則なベクトル場を定めるが, これは接バンドル $T\hat{\mathbb{C}}$ の f による引き戻し $f^*(T\hat{\mathbb{C}})$ の正則切断をひとつ定めていることになる.

擬等角ベクトル場による w の表現. $z \in \mathbb{C}$ とする. $v = v(z)$ が**擬等角ベクトル場**であるとは, 連続なベクトル場 (この場合単なる複素関数) であり, 局所可積分な超関数の意味での偏微分をもち, $\|\partial_{\bar{z}}v(z)\| < \infty$ を満たすことをいう¹³. 擬等角ベクトル場 $v = v(z)$ が $v(0) = v(1) = 0$, $v(z) \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow \infty$) を満たすとき, **正規化されている** (normalized) という.

v が f -**不変**であるとは, $f(z) \neq \infty$ のとき $v(f(z)) = f'(z)v(z)$ であることをいう.

補題 B. $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$v(z) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(z)$$

¹⁰無限遠点の逆像が可算無限個あるがここでは形式的に 0 としておく.

¹¹無限遠点を特別扱いしないようにするには, $w(z)$ を接空間 $T_{f(z)}\hat{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}$ の元とみなすのがもっとも自然である. そうすると複素関数としては扱えなくなるが, 正則なベクトル場としての意味を持つ.

¹²一致の定理より, ($z = \infty$ および $f(z) = \infty$ となる z を含まない) 任意に小さな開円板で f から f_t への変化を $f_t(z) = f(z) + tw(z) + o(t)$ ($t \rightarrow 0$) のように表現できれば, 接空間の元としての役割を果たす.

¹³ $v(z)$ は $T_z\hat{\mathbb{C}}$ の元とみなすことができる. $z = \infty$ 場合も適切な局所座標をとることで $\hat{\mathbb{C}}$ 上の擬等角ベクトル場が定義できる.

とおくと、これは $\partial_{\bar{z}}v(z) = \mu(z)$ を満たす正規化された擬等角ベクトル場である。また、 $z \in \mathbb{C} - f^{-1}(\{\infty\})$ に対し

$$\delta_f v(z) := v(f(z)) - f'(z)v(z)$$

と定めるとき、 $w(z) = \delta_f v(z)$ を満たす。

証明のスケッチ. 与えられた (コンパクトな台をもつ) $\mu \in \tilde{B}(\mathbb{C})$ に対し、方程式 $\partial_{\bar{z}}v = \mu$ の解のひとつは Cauchy 変換

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} dx dy$$

で与えられるから、これに適当な 1 次関数 (正則関数) を加えれば正規化された解を見つけることができる。その解と定理 8.3 の式を比較すれば前半の主張を得る。後半は $f_t(z) = \Phi_t \circ f \circ \Phi_t^{-1}(z) = f(z) + w(z)t + o(t)$, $f(z + \Delta z) = f(z) + f'(z)\Delta z + o(\Delta z)$, および $\Phi_t(z) = z + v(z)t + o(t)$ から導かれる。 ■

補題 C. $\delta_f v = 0$ であれば、 $J(f)$ 上で $v = 0$ となる。

証明. 乗数 λ の反発的周期点 $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots \mapsto z_p = z_0$ を選ぶと、 $\delta_f v = 0$ より $v(z_{j+1})0 = f'(z_j)v(z_j)$ が成り立つ。よって

$$\prod_{j=0}^{p-1} v(z_j) = \lambda \prod_{j=0}^{p-1} v(z_j)$$

が成り立つ。 $\lambda \neq 1$ より、 $v(z_j) = 0$ が反発的周期点上では成り立つ。反発的周期点は Julia 集合内で稠密であり v は連続なので、Julia 集合全体で $v = 0$ でなくてはならない。 ■

非自明な変形の構成. 以上をまとめると、 $\mu \in \tilde{B}(U)$ をひとつ選ぶとき、それは f -不変な $\mu \in B(\mathbb{C})$ に拡張され、さらに標準解 Φ_t を通して正則なベクトル場 $D\mu := w = \partial_f v \in T_f \text{Rat}_d$ が定まったことになる。この写像 $D: \tilde{B}(U) \rightarrow T_f \text{Rat}_d$ は線形写像である。

補題 D. $\tilde{B}(U)$ は次を満たす無限次元部分空間 $N(U)$ をもつ： $\mu \in N(U)$ のとき、

- $\text{supp } \mu$ はコンパクト。
- もし $\mu = \partial_{\bar{z}}v$ かつ ∂U 上で $v = 0$ となる擬等角ベクトル場 v が存在すれば、 $\mu = 0$ 。

証明. まず $U = \mathbb{D}$ の場合を考える。 $\hat{N}(\mathbb{D})$ を可算無限個の $\tilde{B}(\mathbb{D})$ の元 $\mu_k(z) = z^k$ で張られる $\tilde{B}(\mathbb{D})$ 内の線形部分空間とする。このとき、連続関数

$$V_k(z) := \begin{cases} \frac{1}{k+1} z^{k+1} & (z \in \mathbb{D}) \\ \frac{1}{k+1} z^{-(k+1)} & (z \notin \mathbb{D}) \end{cases}$$

は \mathbb{D} 上で方程式 $\partial_{\bar{z}}V_k = \mu_k$ を満たしている。

いま $\mu \in \hat{N}(\mathbb{D})$ に対し $\mu = \partial_{\bar{z}}v$ かつ $\partial \mathbb{D}$ 上で $v = 0$ を満たす擬等角ベクトル場が存在したとする。 V を V_k たちの 1 次結合で表される \mathbb{C} 上の連続関数で、 \mathbb{D} 上 $\mu = \partial_{\bar{z}}V$ を満たすものとしよう。このとき、 $u := V - v$ は \mathbb{D} 上で $\partial_{\bar{z}}u = \partial_{\bar{z}}V - \partial_{\bar{z}}v = 0$ を満たすので正則であり、 $\partial \mathbb{D}$ 上では $u = V$ を満たす。

もし $V = \sum_{k \geq 0} a_k V_k$ が恒等的に 0 でなければ、ある $k \geq 0$ が存在し、 $a_k V_k \neq 0$ となるが、 $\partial \mathbb{D}$ 上では $u = V$ を満たすことから、 u を \mathbb{D} へと正則に拡張しようとしても V_k の影響で $z = 0$ にお

いて少なくとも $k+1$ 位の極を持つてしまう。これは矛盾である。よって $V=0$ であり、 $\mu=0$ を得る。

いま、 $N(\mathbb{D})$ を $\tilde{B}(U)$ の部分空間で、 $|z| < 1/2$ のときはある $\hat{N}(\mathbb{D})$ の元と一致し、 $1/2 \leq |z| < 1$ では 0 となるような元の全体とする。このとき、もし $\mu = \partial_{\bar{z}}v \in N(\mathbb{D})$ かつ $\partial\mathbb{D}$ 上 $v=0$ を満たす擬等角ベクトル場 v が存在すれば、 $1/2 < |z| < 1$ においても正則性より $v=0$ でなくてはならない。さらに $|z|=1/2$ でも $v=0$ となることがわかるから、上と同様の議論により、 $\mu=0$ でなくてはならない。

U が \mathbb{D} でない一般の場合には、適当な Riemann 写像 $\psi = \phi^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow U$ により $N(U) := (\phi^*)(N(\mathbb{D}))$ と定める。

このとき、 $v = v(z)$ を擬等角ベクトル場で $\mu = \partial_{\bar{z}}v \in N(U)$ かつ ∂U 上で $v=0$ を満たすものとすれば、 $\phi_*v = v(\psi(z))/\psi'(z)$ は \mathbb{D} 上のベクトル場であり、 $\partial\mathbb{D}$ の近くでは正則、しかも $|z| \rightarrow 1$ のとき $v(\psi(z)) \rightarrow 0$ を満たす。単位円に関する「Schwarz の鏡像の原理」より $v(\psi(z))$ は $\partial\mathbb{D}$ の近傍にまで解析接続されるが、単位円周上で 0 なので一致の定理より恒等的に 0 である。 $\psi^*\mu = \partial_{\bar{z}}(v) \in N(\mathbb{D})$ であるから、 $\psi^*\mu=0$ が成り立つ。よって $\mu=0$ である。 ■

定理の証明. 遊走領域 U に対して $N(U)$ を考え、 $\mu \in N(U)$ に対して $D(\mu) \in T_f\text{Rat}_d$ を考える。もし $D(\mu)=0$ であれば、(すなわち μ が自明な変形を表すものであれば) $\partial_{\bar{z}}v = \mu$ を満たす正規化された v は f -不変となる。よって $J(f)$ 上で $v=0$ であり、とくに ∂U 上でも $v=0$ である。よって $N(U)$ の定義より、 $\mu=0$ となる。これは、無限次元の空間である $N(U)$ が D によって $T_f\text{Rat}_d \simeq \mathbb{C}^{2d+1}$ へと単射に写ることを意味する。これは矛盾である。 ■

注意. 一般に、以下が成り立つ可能性がある：

$$\text{Rat}_d \supset \{f_\mu \mid \mu \in \tilde{B}(U)\} = \{f\} \text{ (一点集合.)}$$

つまり、 f をいろいろ変形しても結局のところ一点 $\{f\}$ になってしまうかもしれない。

注意. 定理 13.2 は整関数や有理型関数に対しては成り立たない。