この講義について

配布日：2017年4月10日　Version : 1.1

担当教員： 川平　友規（Kawahira, Tomoki；理学院数学系・数学コース）

担当 TA： 中兼　啓太（Nakagane, Keita；理学院数学コース）

講義ウェブサイト：
http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/17S-kaiseki.html
配布されたプリントがpdf形式でダウンロードできます．また，毎週の進捗状況についてコメントしていきます．

講義の目的： 解析学の基礎的事項について，できるだけ数学的に厳密に解説する．

講義の構成： 本講義は数学系2年生を対象とした演習付き講義科目である．形式的には第1クォーターに開講される「解析学概論第一」と第2クォーターに開講される「解析学概論第二」に分かれており，成績も別々に評価することになる（それぞれ2単位）が，内容的には「第一」と「第二」ふたつを合わせてひとつのまとまった講義・演習となるよう構成されている[1]．

講義計画（シラバスより改変）：

第 1 Q	解析学概論第一の講義部分
4月10日	実数の構成（切断）
4月17日	実数の連続性・上限と下限
4月24日	数列の収束と極限
5月1日	単調列・コーシー列・区間縮小法
5月8日	ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理
5月15日	関数の極限と連続性
5月22日	一様連続性
5月29日	定積分の定義
6月5日	講義予備日

第 2 Q	解析学概論第二の講義部分
6月12日	微分可能性・テイラー展開
6月19日	一様収束性
6月26日	ユークリッド空間と1次関数
7月3日	多変数関数の微分
7月10日	偏微分と方向微分
7月17日	合成関数の微分と高次元のテイラー展開
7月24日	ベクトル値関数とヤコビ行列
7月31日	逆関数定理と陰関数定理
8月7日	講義予備日

教科書および参考書： 毎回講義プリントを配布する．参考書として以下の本をあげておく．

- 小平邦彦,『解析入門 I, II』（岩波書店）
- 高木貞治,『解析概論』（岩波書店）
- 杉浦光夫,『解析入門 I, II』（東京大学出版会）
- M. スピヴァック,『多変数の解析学』（東京図書）

[1]ただし，平成26年度以前に入学した学生はこれらの2科目を旧カリキュラムの「解析概論第一」および「解析学演習A第一」として受講しなくてはならない．要相談．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

成績評価の方法： 解析学概論第一・第二ともに，講義と演習をそれぞれ独立に評価し，それらの合計点によって評価する．講義部分については，次のように成績を評価する：

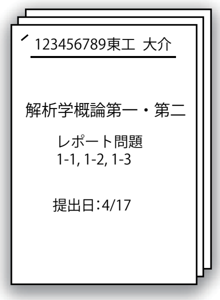
- ほぼ毎週のレポート課題（宿題）を 70 点満点，講義中の課題プリントを 30 点満点で評価する．
- 1 クォーター中，レポートを 3 回以上出さなかった場合，もしくは講義中の課題プリントを 3 回以上出さなかった場合，それぞれ単位取得を辞退したものとみなす．

レポートの締め切りと提出様式： レポート問題と提出締め切りは毎週配布するプリントで指定します[2]．講義開始前に教壇前の机か川平のメールボックスに提出してください．

提出する際には，必ず **A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙**を使用し，右図のような**表紙をつけて**ください．また，必ず**左上**をホチキス等でとめてください．

受講者同士で協力し合って解答してもかまいませんし，それによる減点はありません．ただし，かならず協力者の名前も明記するようにしてください．（協力者名がなく，ただの書き写しとみなされるレポートは減点します．）

レポートは採点して返却します．返却が済むまで，成績への加点の対象とはしないので注意してください．（返却されたレポートは，成績が確定するまで手元に保管しておくことをおすすめします．）



・必ずA4サイズ, 表紙をつける．
・番号・名前は上の方に大きく書く．
・左上をホチキスで留める．
・解いた問題の番号，提出日を書く．
・裏面はなるべく使わない．

質問受付： 講義終了後，その場で質問を受け付けます．それ以外の時間に質問したい場合はメール等でご相談ください．（もちろん，授業中の質問は大歓迎です．）院生のみなさんによる数学相談室（月・火・木・金の 16：45〜18：45，本館 1 階 H113/114 講義室）もぜひ活用しましょう．

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体	(2) $\mathbb{R}$: 実数全体	(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体	(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体	(6) $\emptyset$: 空集合

ギリシャ文字

(1) α: アルファ	(2) β: ベータ	(3) γ, Γ: ガンマ	(4) δ, Δ: デルタ	(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ	(7) η: エータ	(8) θ, Θ: シータ	(9) ι: イオタ	(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ	(12) μ: ミュー	(13) ν: ニュー	(14) ξ, Ξ: クシー	(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ	(17) ρ: ロー	(18) σ, Σ: シグマ	(19) τ: タウ	(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ	(22) χ: カイ	(23) ψ, Ψ: プサイ	(24) ω, Ω: オメガ	

その他

(1) $\le$ と $\leqq$，$\ge$ と $\geqq$，はそれぞれ同じ意味．

(2) $A := B$ と書いたら A を B で定義する，という意味．たとえば $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$．

(3) （文章 1）$:\Longleftrightarrow$（文章 2）と書いたら，（文章 1）の意味は（文章 2）であることと定義する，という意味．たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対し $a_n \le M$．」

※この講義プリントは小森靖さん作成のスタイルファイルを使用しています．

[2]プリントは講義 web page 上にもアップロードされますが，講義日から 1–2 日遅れることもあります．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210 東京工業大学 理学院（数学系）

実数の構成（4/10）

配布日：2017/04/10　Version：1.1

実数を作ろう

解析学の土台となる「実数」について，改めて考え直してみよう．私たちは

$$\text{自然数} \subset \text{整数} \subset \text{有理数} \subset \text{実数}$$

という流れで数の体系を拡張してきた．自然数から有理数までは具体的に，

$$\begin{aligned} \text{自然数全体の集合}\quad & \mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \cdots\} \\ \text{整数全体の集合}\quad & \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots\} \\ \text{有理数全体の集合}\quad & \mathbb{Q} := \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

のように書き下すことができる．では，実数はどうだろうか？

$$\text{実数全体の集合}\quad \mathbb{R} := \{\ ?\ \mid\ \ ????\ \ \} \tag{1.1}$$

高校まで数学では，この ? に入るものが何か明確に答えることができないことに気がつく．実数とは一体，何なのだろうか？

人類がこの問いを真剣に考え，満足の行く答にまで到達したのは，1860 年代 — わずか 150 年ほど前 — のことである．

$\sqrt{2}$ は存在するか？ たとえば方程式 $x^2 - 2 = 0$ を解いてみよう．中学校以来の習慣で，私たちは即座に $x = \pm\sqrt{2}$ と計算するだろう．しかし，この $\sqrt{2}$ の意味するものはなにか？それは $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ ということであって，方程式 $x^2 = 2$ の x を $\sqrt{2}$ という記号に置き換えたにすぎない．じつは，この方程式はまだ解けていない[1]．2 乗して 2 になる「$\sqrt{2}$」という数が本当に存在するのか，その具体的な値は何か，という議論が完全に抜け落ちている．

こうして考えると，$\sqrt{3}$，円周率 π，自然対数の底 e などなど，本当に存在するのか疑わしいが，なんとなく「あるもの」と仮定してここ（大学？）まできてしまったのである．こういう無理数たちの存在を明確に保証するのが，いわゆる「実数論」である．

デデキント (Dedekind) の切断

これまで「あたりまえのように存在する」と考えられていた実数，とくに無理数は，「人工的に構成すべきもの」なのである．

実数の厳密な構成として最も有名なのが，これから紹介する「切断」とよばれる方法である[2]．これにより，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ （その存在と基本的な性質は認める）をもちいて「これが実数ですよ」と提示できるようなものを具体的に構成する．標語的に述べると，「実数 x」とは，ある「有理数の部分集合のペア (A_x, A'_x)」の別名として構成されるものである．

まずは，有理数がもつ次の基本的な性質を認める：

[1] 高校では $x^2 + 1 = 0$ の解を，（その存在について議論しないまま）i とおいて複素数の理論を作ってきた．それと同じである．

[2] デデキントは 19 世紀ドイツの数学者．実数を厳密に構成する試みはコーシーの弟子筋にあたるメレ（フランス）が最初であり，いわゆる「コーシー列」による完備化を用いる．たとえば松坂和夫『代数系入門』を参照．

命題 1.1 (有理数の性質) a, b を有理数とするとき，

(1) $a < b,\ a = b,\ a > b$ のいずれかひとつだけが成り立つ（**大小関係の存在**）．

(2) $a < b$ のとき，$a < m < b$ を満たす有理数 m が存在する（**稠密性**）．

(1) より，有理数の全体は大小関係に応じて「一列に」並べることができる．これを「有理直線」とよぶことがある．(2) のような m は，たとえば $m = (a+b)/2$ がある．これより,「有理直線」のどんなに小さな区間にも有理数が存在する.「有理数の稠密性」とよばれる性質である．

ここで，有理数からなる集合の「最大値」と「最小値」を定義しておく．

定義 (最大値と最小値) 集合 A は $\mathbb{Q}$ の部分集合とする．

- 有理数 a が A の**最大値** (maximum) であるとは，$a \in A$ であり，すべての $x \in A$ に対し $x \leq a$ （すなわち，$x < a$ または $x = a$）が成り立つことをいう．
- 有理数 a が A の**最小値** (minimum) であるとは，$a \in A$ であり，すべての $x \in A$ に対し $x \geq a$ （すなわち，$x > a$ または $x = a$）が成り立つことをいう．

最大値・最小値は存在しないこともある．たとえば A が「正の有理数全体の集合」であるとき，A は最小値を持たない.（すべての $x \in A$ に対し $x \geq 0$ だが，0 自身は A に含まれない.）

有理数の切断. 大雑把にいうと,「切断」とは有理直線にどこかで切れ目をいれて,「左半分」と「右半分」に分割するものである．

定義 (切断) 集合 $\mathbb{Q}$ の空でない部分集合のペア (A, A') が有理数の**切断** (cut) であるとは，以下の条件を満たすことをいう：

(Q1) $A \cup A' = \mathbb{Q},\quad A \cap A' = \emptyset$.

(Q2) $a \in A$ かつ $a' \in A'$ のとき，$a < a'$.

このとき，A を**下組**，A' を**上組**という．

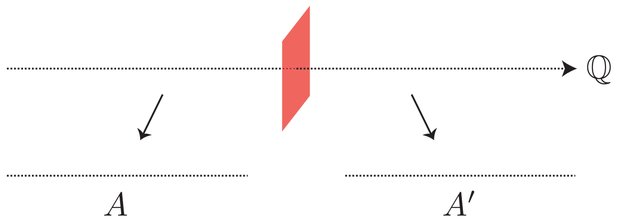


図 1.1: 有理数の切断.

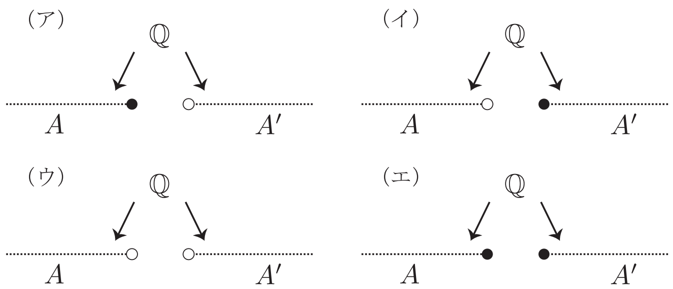
切断は次の性質を持つ．

命題 1.2 (切断の性質) 有理数の切断 (A, A') は以下のいずれかひとつだけを満たす．

（ア）A は最大値をもち，A' は最小値をもたない．

（イ）A は最大値をもたず，A' は最小値をもつ．

（ウ）A は最大値をもたず，A' も最小値をもたない．



証明． $\mathbb{Q}$ の空でない部分集合のペア (A, A') が (Q1)(Q2) を満たすとき,「（エ）A は最大値をもち，A' も最小値をもつ」というケースがありえないことを示せばよい．

（エ）であったと仮定しよう．A の最大値 a と A' の最小値 a' は (Q2) より $a < a'$ を満たす．また，命題 1.1 の (2) より，$a < m < a'$ を満たす有理数 m が存在する．(Q1) より $m \in A$ もしくは $m \in A'$ だが，$m \in A$ と仮定すると a が A の最大値であったことに矛盾し，$m \in A'$ と仮定すると a' が A' の最小値であったことに矛盾する．よって（エ）はありえない． ■

（ア）から（イ）へ． （ア）の型の切断は下組 A の最大値 a を上組 A' に移し替えることで（イ）の型の切断に変形することができる[3]．

そこで，以下では「切断」といったら，(Q1)，(Q2) とともに次の (Q3) も同時に仮定する：

定義 (切断への追加条件)

(Q3) A は最大値をもたない．すなわち,（イ）か（ウ）の型に限る．

（イ）の例． 任意の有理数 a に対し，

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}, \quad A' := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq a\}$$

とおくことで，a を上組の最小値とする（イ）の型の切断 (A, A') がひとつ定まる．

逆に，任意の（イ）の型の切断 (A, A') に対し，上組 A' の最小値としてある有理数がただひとつ定まる．最小値の定義から，有理数全体の集合と（イ）の型の切断全体の集合には過不足のない対応がつく[4]．

（ウ）の例． 有理数の集合 A, A' を

$$A := \mathbb{Q} - A', \quad A' := \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \text{ かつ } x > 0\right\}$$

とおくと，(A, A') は切断であり，しかも（ウ）の型となる（理由を考えてみよ）．

実数の定義． 以上をふまえて,「実数」の定義を次のように与えることができる．

---

[3] もちろん（イ）から（ア）への逆の変形も可能であるから,（ア）の型の切断全体と（イ）の型の切断全体には 1 対 1 の対応がつく．

[4] 集合論の言葉で言えば，これらの集合の間には全単射が存在する．

定義 (実数) 切断 (A, A') に対し，

- (A, A') が（イ）の型のとき，A' は最小値 $a \in \mathbb{Q}$ をもつ．このとき，**切断** (A, A') **は有理数** a **の別名**だと考え，$a = (A, A')$ と表す．
- (A, A') が（ウ）の型のとき，これを**無理数**とよぶ．
- 有理数と無理数を合わせて**実数**とよび，その全体を $\mathbb{R}$ と表す．すなわち実数とは，（イ）もしくは（ウ）の型の切断のことである．

「別名」というのは，モノとしては同じだがふたつの名前（記号，表現，表象）が割り当てられている状態だと考えるとよい．たとえば，有理数の集合 $\mathbb{Q}$ とは,（イ）の型の切断全体の集合の「別名」である．

これで，実数とは何かという最初の問いにはっきりと応えられるようになった：

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &:= \{(A, A') \mid (A, A') \text{ は（イ）もしくは（ウ）の型の切断}\} \\ &\supsetneq \{(A, A') \mid (A, A') \text{ は（イ）の型の切断}\} \stackrel{\text{別名}}{=} \mathbb{Q}\end{aligned}$$

注意. 切断 (A, A') において，下組 A を決めれば自動的に上組 A' が決まるので，

$$1\text{ つの実数を決める} \stackrel{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} 1\text{ つの切断を決める} \Longleftrightarrow 1\text{ つの下組を決める}$$

という同値関係が成立する．

実数の大小関係

有理数の大小関係を実数にまで拡張しよう．まず形式的に，次のように定義する：

定義 (実数の大小) 実数 $\alpha = (A, A')$，$\beta = (B, B')$ に対し，

$$A = B \text{ のとき } \alpha \stackrel{\mathbb{R}}{=} \beta, \quad A \subsetneq B \text{ のとき } \alpha \stackrel{\mathbb{R}}{<} \beta, \quad A \supsetneq B \text{ のとき } \alpha \stackrel{\mathbb{R}}{>} \beta$$

と表す．さらに,「$\alpha \stackrel{\mathbb{R}}{=} \beta$ または $\alpha \stackrel{\mathbb{R}}{<} \beta$」であることを $\alpha \stackrel{\mathbb{R}}{\leq} \beta$,「$\alpha \stackrel{\mathbb{R}}{=} \beta$ または $\alpha \stackrel{\mathbb{R}}{>} \beta$」であることを $\alpha \stackrel{\mathbb{R}}{\geq} \beta$ と表す．

大小関係は次の意味で well-defined である（ちゃんと定義になっている）．

定理 1.3 (実数の大小) 実数 α, β に対し，$\alpha \stackrel{\mathbb{R}}{=} \beta$，$\alpha \stackrel{\mathbb{R}}{<} \beta$，$\alpha \stackrel{\mathbb{R}}{>} \beta$ のいずれかひとつだけが成り立つ．とくに，α, β がともに有理数であるときは命題 1.1(1) の大小関係と一致する.（すなわち，等号・不等号の上の $\mathbb{R}$ をとっても矛盾は生じない.）

証明は演習問題としよう．さらに，次の性質をもつ．

定理 1.4 (実数の性質) 実数 α, β, γ に対し，

(1) $\alpha \overset{\mathbb{R}}{<} \beta$ かつ $\beta \overset{\mathbb{R}}{<} \gamma$ であれば，$\alpha \overset{\mathbb{R}}{<} \gamma$.

(2) $\alpha = (A, A')$ のとき，下組 A と上組 A' は α を用いて次のように表現される：

$$A = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r \overset{\mathbb{R}}{<} \alpha \right\}, \quad A' = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r \overset{\mathbb{R}}{\geq} \alpha \right\}.$$

(3) $\alpha \overset{\mathbb{R}}{<} \beta$ のとき，$\alpha \overset{\mathbb{R}}{<} m \overset{\mathbb{R}}{<} \beta$ を満たす有理数 m が存在する.

証明. (1) $\alpha = (A, A'), \beta = (B, B'), \gamma = (C, C')$ とおくと，$\alpha \overset{\mathbb{R}}{<} \beta$ より $A \subsetneq B$, $\beta \overset{\mathbb{R}}{<} \gamma$ より $B \subsetneq C$. よって $A \subsetneq C$，すなわち $\alpha \overset{\mathbb{R}}{<} \gamma$. (2) 参考書 [小平] の §1.2 参照. (3) はレポート問題. ■

レポート問題

締め切りは 4 月 17 日の講義開始前とします.（研究室 (H210) メールボックスへの提出は当日朝 10 時 30 分まで.）

問題 1-1. (下組と特徴付け) $\mathbb{Q}$ の空でない部分集合 A が以下を満たすとする：

(L1) ある有理数 m が存在し，$a \in A$ ならば，$a < m$.

(L2) 任意の $a \in A$ に対し， $x \in \mathbb{Q}$ かつ $x < a$ ならば，$x \in A$.

このとき，$A' = \mathbb{Q} - A$ とおくと，これは空集合ではなく，ペア (A, A') は切断の条件 (Q1)(Q2) を満たすことを示せ.

問題 1-2. (実数の大小) 定理 1.3 を示せ.

問題 1-3. (実数の性質) 定理 1.4(3) を示せ.

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メールで ご指摘ください.

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210 東京工業大学 理学院（数学系）

実数の連続性・上限と下限（4/17）

配布日： 2016/04/17　Version： 1.1

参考文献： • 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第 1 章　• 高木貞治『解析概論』の付録.

実数の四則

実数は和差積商（加減乗除）の四則があってはじめて数として機能する．もちろんそれは，有理数の四則を自然に拡張したものでなくてはならない．

たとえば実数（すなわち（イ）もしくは（ウ）型の有理数の切断）$\alpha = (A, A')$ と $\beta = (B, B')$ が与えられているとき，$\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$ はどのような実数（有理数の切断）として定義されるべきであろうか？[1]

詳細は参考文献（例えば [小平]）に譲ることにして，ここでは和 $\alpha+\beta$ の定義だけを簡単に与えておこう．いま，

$$C := \{a + b \in \mathbb{Q} \mid a \in A,\ b \in B\}, \qquad C' := \mathbb{Q} - C$$

とすると，(C, C') は有理数の切断となることがわかるから（各自確かめよ），これを α と β の**和** (sum) とよび，$\alpha + \beta = (C, C')$ とあらわす[2]．これは通常の有理数の和と矛盾しない．

このとき，たとえば和の可換性

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

や結合法則

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

は（有理数の和がこれらの性質を持つことから）すぐに確認できるだろう．同様にして，四則をもった数の体系として実数が満たすべき性質をひとつひとつ確認していくことができる．

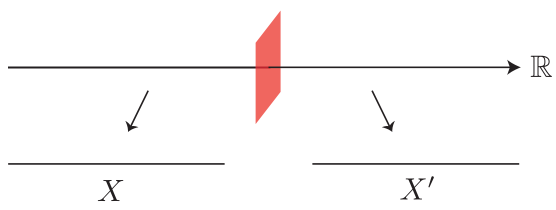
練習問題. $\alpha \overset{\mathbb{R}}{>} 0$, $\beta \overset{\mathbb{R}}{<} 0$ のとき $\alpha\beta$ を定める有理数の切断を与えよ．

実数の連続性

大小関係と数直線. 任意の実数 α, β に対して「大小関係」$\alpha \overset{\mathbb{R}}{>} \beta, \alpha \overset{\mathbb{R}}{=} \beta$, $\alpha \overset{\mathbb{R}}{<} \beta$ のいずれかひとつだけが成り立つのであった．また，α, β が有理数のとき，これらの大小関係は有理数の間の大小関係と一致する（前回，定理 1-3）．すなわち，等号・不等号の上の $\mathbb{R}$ をとっても矛盾は生じないから，**今後は実数の大小関係にも通常の記号** $>, =, <, \geq, \leq$, **を用いる**ことにしよう．

このように，実数には有理数の大小関係と矛盾しない大小関係が存在することから，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を（概念的に）一列に並べることができる．これこそが，私たちがいままで**数直線**とよんできたものである．また，数直線は有理直線を含むと考えてもよい．

実数の切断. 大小関係が成り立つことから有理数の切断をまねて「実数の切断」を考えてみよう．



[1] 実際には，和 $\alpha+\beta$ と積 $\alpha\beta$ を定義して，つぎに与えられた実数 β の逆元 $-\beta$ と（$\beta \neq 0$ のとき）逆数 β^{-1} を定義する．差と商は $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$, $\alpha/\beta := \alpha\beta^{-1}$ と定義すればよい．

[2] 正確には有理数の和と区別して $\alpha \overset{\mathbb{R}}{+} \beta$ などと表すべきだが，有理数の和の自然な拡張になっているので記号を乱用する．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

定義　(実数の切断) 空でない $\mathbb{R}$ の部分集合 X, X' のペア (X, X') が実数の**切断**であるとは，ペア (X, X') が次の (R1)(R2) を満たすことをいう：

(R1) $X \cup X' = \mathbb{R}$, $X \cap X' = \emptyset$

(R2) $x \in X$, $x' \in X'$ のとき，$x < x'$

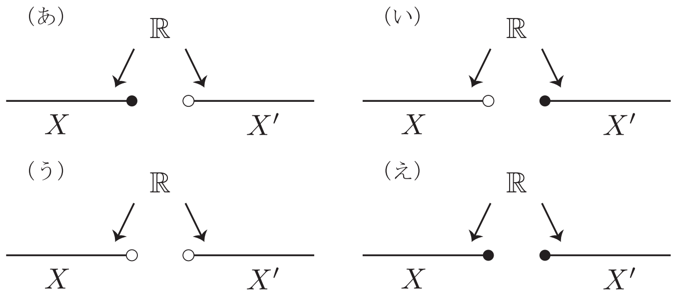
このとき，X を**下組**，X' を**上組**という．

命題 1-2 より有理数の切断には（ア）（イ）（ウ）の型があった．実数の場合は，次の定理が成り立つ [3]：

定理 2.1 (実数の連続性) 実数の切断 (X, X') は，次のうちいずれかひとつだけを満たす：

（あ）X は最大値をもち，X' は最小値をもたない．

（い）X は最大値をもたず，X' は最小値をもつ．



可能性としては図の 4 通りが考えられるが，実数の切断に関しては，図の（う）や（え）の型は存在しない．これは「数直線の切れ目には必ずひとつだけ実数がある」，ということであり，数直線に穴や飛び（ギャップ）がないことを示唆している．このような性質は**実数の連続性**とよばれる [4]．

実数の完備性（新しい数は作れるか？）． 有理数の切断の場合,（ア）の型は（イ）の型に変形でき,（イ）の型は既存の有理数の「別名」とみなすことができた．また,（ウ）の型の切断から本質的に新しい数（無理数）が定義できた．

では実数の切断から，実数ではない新しい数が生まれる可能性はないのだろうか？

有理数の切断の議論を真似すると,（あ）の型は下組 X の最大値を上組 X' に移すことで（い）の型にできる [5]．

したがって，実数の切断に条件 (Q3) に対応する条件

(R3) X に最大値は存在しない．

---

[3] 集合 S が $\mathbb{R}$ の部分集合であるとき，

- 実数 a が S の**最大値** (maximum) であるとは，$a \in S$ であり，すべての $x \in S$ に対し $x \leq a$ （すなわち，$x < a$ または $x = a$）が成り立つことをいう．このとき，$a = \max S$ とも表す．
- 実数 a が S の**最小値** (minimum) であるとは，$a \in S$ であり，すべての $x \in S$ に対し $x \geq a$ （すなわち，$x > a$ または $x = a$）が成り立つことをいう．このとき，$a = \min S$ とも表す．

[4] 有理数には（ウ）のような切断の型が存在するので，この意味での「連続性」はない．ちなみに,「関数の連続性」とは関係がない．

[5] 具体的には (X, X') が（あ）の型であるとき，$(X - \{\max X\}, X' \cup \{\max X\})$ とすれば（い）の型となる．

を加えると，(R1)–(R3) を満たす切断 (X, X') は（い）の型に限定されてしまう．このような切断は X' の最小値を与える実数 x の別名だと考えることができる．逆に，実数 x を決めると

$$X = \{y \in \mathbb{R} \mid y < x\}, \quad X' = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq x\}$$

は（い）の型の切断を定める．すなわち，実数全体と（い）の型の切断全体は一対一に対応してしまう．結局，有理数から無理数を生成したときのように，(切断という方法では) 実数から新しい数を構成することはできない[6]．これを実数の「**完備性** (completeness)」とよぶことがある．

注意（「公理」としての実数の連続性）． 解析学の教科書によっては,「実数の連続性」が「公理」として定式化されることがある．これは，実数を具体的に構成する代わりに「実数とは以下の公理を満たすような集合のことである」と述べて，そのような公理を満たす集合がすでにあると仮定してから解析学を理論構成する，という立場を取っているからである．

定理 2.1 の証明． （[小平] の定理 1.6，[高木] 附録 I，定理 3 参照）$A := X \cap \mathbb{Q}$, $A' := X' \cap \mathbb{Q}$ とおくと，(A, A') は有理数の切断となる．(条件 (R1)(R2) を用いて条件 (Q1)(Q2) を形式的に確認すればよい．) この切断が定める実数を $\alpha = (A, A')$ とおくと，(R1) より $\alpha \in X$ もしくは $\alpha \in X'$ である．

$\alpha \in X$ のとき： α は X の最大値であることを示そう．$\alpha < x$ を満たす $x \in X$ が存在すると仮定すれば，定理 1.4 の (3) より $\alpha < m < x$ を満たす有理数 $m \in X \cap \mathbb{Q} = A$ が存在する．一方，$\alpha < m$ と定理 1.4 の (2) より $m \in A'$ でなくてはならない．これは矛盾である．よって α は X の最大値である．次に，X' に最小値が存在しないことを示す．もし最小値 $\alpha' \in X'$ があれば，(R2) より $\alpha < \alpha'$ でなくてはならない．しかし定理 1.4 の (3) より，$\alpha < m < \alpha'$ なる有理数 m が存在する．このとき $m \in X$ としても $m \in X'$ としても矛盾である．よって (X, X') は（あ）の型である．

$\alpha \in X'$ のときも，同様の議論で (X, X') は（い）の型となることがわかる． ■

上限と下限

解析学を学ぶ上でマスターしておきたいのが，ここで紹介する「上限」と「下限」の概念である．

アイディア． 実数からなる集合 S が与えられているとき，一般に「最小値」や「最大値」が存在するとは限らないが,「最小値っぽいもの」や「最大値っぽいもの」を考えたいことがある．

たとえば S が閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ の場合は文句なしに最小値 a，最大値 b をもつ．一方 S が開区間 (a, b) の場合，これらの値は S 自体には含まれないので「S は最小値 a を持つ」「S は最大値 b を持つ」といういい方にはどこか違和感がある[7]．こういうときに，私たちは「S は下限 a を持つ」，「S は上限 a を持つ」といいたいのである．

上界と下界．

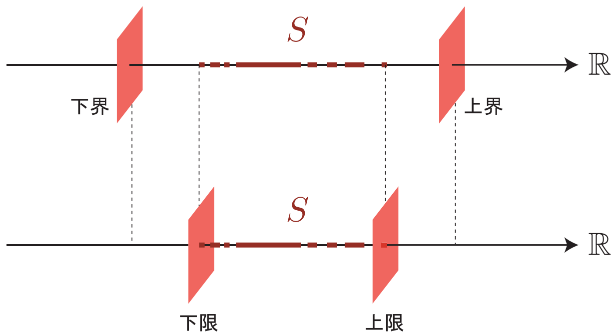
定義　(上に有界・下に有界・上界・下界)

- $\mathbb{R}$ の部分集合 S が**上に有界** (bounded to the above) であるとは，ある実数 M が存在して，S の任意の元 x が $x \leq M$ を満たすことをいう．このような M を S の**上界** (upper bound) とよぶ．
- $\mathbb{R}$ の部分集合 S が**下に有界** (bounded to the below) であるとは，ある実数 M が存在して，S の任意の元 x が $x \geq M$ を満たすことをいう．このような M を S の**下界** (lower bound) とよぶ．
- S が上にも下にも有界であるとき，単に**有界** (bounded) であるという．

[6] もちろん,「切断」以外の方法で新しい数（たとえば複素数）を構成することはできる．
[7] S の中だけでは達成できない値を，あたかも実現したかのように聞こえる．

言い換えると，実数 M が S の「上界」であるとは，数直線上で M より右側には S の元が存在しないことが確実にわかっている状態をいう．また，S が上に有界で M をその上界とするとき，M 以上の実数はすべて S の上界となる．すなわち，S の「上界」というのはひとつの値に決まるものではない．

例． S が開区間 (a,b) であるとき，b 以上の実数はすべて S の上界である．同様に，a 以下の実数はすべて S の下界である．



上限と下限． 上界・下界はひとつの値に定まらないが,「上界の最小値」「下界の最大値」はひとつに定まる：

定理 2.2（ワイエルシュトラスの定理） $\mathbb{R}$ の部分集合 S が上に有界 [下に有界] であるとき S の上界の最小値 [下界の最大値] が存在する．

定義 （上限・下限） S の上界の最小値を S の**上限** (supremum) とよび，$\sup_{x\in S} x$ もしくは $\sup S$ と表す．また，S の下界の最大値を S の**下限** (infimum) とよび，$\inf_{x\in S} x$ もしくは $\inf S$ と表す．

直観的にいうと，数直線上で上界を数直線上で左に移動させていき，初めて S とタッチするか，もしくは S とタッチしないギリギリの点が $\sup S$ である．

例（区間）． S が開区間 (a,b) であるとき，$\inf_{x\in(a,b)} x = a$ かつ $\sup_{x\in(a,b)} x = b$．S が閉区間 $[a,b]$ であるときも，$\inf_{x\in[a,b]} x = a$ かつ $\sup_{x\in[a,b]} x = b$ が成り立つ．

例（有界でない集合）． S が $\mathbb{R}$ 自身であるとき，そもそも上にも下にも有界ではなく，上限も下限も存在しない．S が整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ であるとき，同様の理由で上限も下限も存在しない．

一方，$S = \mathbb{N}$ であるとき，上限は存在しないが下限は $\inf_{x\in\mathbb{N}} x = 1$．

注意． S が上に有界で<u>ない</u>ときは $\sup_{x\in S} x = \infty$，下に有界で<u>ない</u>ときは $\inf_{x\in S} x = -\infty$ と表すことがある（あくまで記号であり，∞ のことを上限といったりはしない）．

証明（定理 2.2）のスケッチ． ([小平] の §1.5，[高木]，第 1 章定理 2 参照）M' を S の上界全体からなる $\mathbb{R}$ の部分集合とする．(S は上に有界なので，もちろん $M' \neq \emptyset$.）また，$M := \mathbb{R} - M'$ とおくと，(M, M') は実数の切断となる（要証明）．定理 2.1 より，(M, M') は（あ）型か（い）型のいずれかである．私たちは「M' が最小値を持つ」ことを示したいのだから,（あ）型だと仮定して矛盾を導こう．

（あ）型であれば，M に最大値 m が存在する．このとき $m \notin M'$ であるから，m は上界ではない．よってある $x \in S$ が存在して，$m < x$ を満たす．定理 1.4 の (3) より，$m < r < x$ を満たす r を選ぶことができるが，$x \in S$ より r は S の上界ではない．よって $r \notin M'$．しかし，$r \in M$ すると m の最大性に反する．矛盾である． ■

上限・下限の特徴づけ． 「上限」の定義はつぎのように必要十分条件（同値な条件）で置き換えておくと便利である（下限についても同様．証明は演習問題とする）：

> **定理 2.3 (上限・下限の特徴づけ)** S が上に有界な集合とする．$a \in \mathbb{R}$ が S の上限であることは次の (S1) と (S2) が成り立つことと同値：
>
> (S1) a は S の上界．すなわち，$x \in S$ のとき $x \leq a$.
>
> (S2) 任意の $\epsilon > 0$ に対し，$a - \epsilon < x$ を満たす $x \in S$ が少なくともひとつ存在する．

(2) の ϵ は 「任意に小さい正の数」だと解釈してよい．数直線上を a から少しでも左に移動し $a - \epsilon$ にいくと，その途中で S の元に触れてしまう，ということである．

レポート問題

締め切りは 4 月 24 日の講義開始前とします.（研究室 H210 メールボックスへの提出は当日朝 10 時 30 分まで.）

問題 2-1. (上限・下限) 以下で与えられる $\mathbb{R}$ の部分集合について，上限・下限が存在すればその値を求めよ（答えのみでよい）．

(1) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$　(2) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
(3) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q},\, x^2 < 2\right\}$　(4) $S = \{\cos x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\pi\}$

問題 2-2. (上限・下限の特徴づけ) 定理 2.3 を示せ．また，集合の下限について定理 2.3 に対応する定理を述べ，その証明を与えよ．

問題 2-3. (上限と下限) 数列 $\{a_n\}$ を実数の集合とみなしたとき，その上限と下限をそれぞれ $\sup_n a_n$, $\inf_n a_n$ と表す．たとえば $\sup_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n = 1$, $\inf_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n = -1$ など．

(1) $\sup_n(a_n + b_n) \leq \sup_n a_n + \sup_n b_n$ を示せ．また，等号が成立しない例を与えよ．

(2) $\inf_n(a_n + b_n) \geq \inf_n a_n + \inf_n b_n$ を示せ．また，等号が成立しない例を与えよ．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メールで ご指摘ください．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210 東京工業大学 理学院（数学系）

数列の収束と極限（4/24）

配布日：2017/04/24　Version：1.1

参考文献：
- 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第1章
- 高木貞治『解析概論』の第1章.

数列の収束性について

高校数学において「数列 $\{a_n\}$ が実数 A に収束する」とは,「n が限りなく増加するとき，a_n が A に限りなく近づく」ことをいうのであった．

では，次の数列はどうだろう？

例 1. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ とするとき，a_n は 1 に限りなく近づく．しかし，たとえば 2 にも「限りなく近づく」のではないだろうか？（実際，a_n と 2 の距離は n とともに縮まっている.）

例 2. 数列 a_n が $1, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{20}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{30}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{40}, \cdots$ は 0 に収束するが，0 から離れたり近づいたりしながら収束している.「限りなく近づく」というのは，ただ極限との距離が縮むだけではないらしい.

「近づく」とは. 「近さ」というのは本来相対的な概念であり，比較する対象があって初めて意味を持つ言葉である．たとえば，東京〜大阪間は東京〜横浜間に比べると遠いが，東京〜ニューヨーク間に比べると近い．このことばを無批判的に無限個の項をもつ数列に当てはめると,「何が何と比べて近いのか」がはっきりとせず，あいまいになってしまう.

「数列の収束」を厳密に定義するには，まずこの点を克服しなくてはならない.

誤差の考え方. 実数の大小関係を把握するために，しばしば，小数展開が用いられる．たとえば円周率 π の小数展開 $3.14159265\cdots$ が既知だとして，

$$a_1 = 3.1, a_2 = 3.14,\ a_3 = 3.141,\ a_4 = 3.1415,\ a_5 = 3.14159,\ \cdots$$

という数列を考えると，これは π に収束しているように感じられる．それが本当に収束している根拠は，a_n と π が小数点 n 桁まで一致することから

$$（a_n \text{と} \pi \text{の絶対誤差}）= |a_n - \pi| < \frac{1}{10^n}$$

が成り立つので，π の近似値として a_n の精度が確実によくなっていることを量的に把握できるからである [1].

一般に，数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ がある実数 A のいくらでも高い精度の近似値を与えるとしよう．ひとつ自由に目標となる精度（絶対誤差の許容度） $\epsilon > 0$ （たとえば $\epsilon = 10^{-30}$，小数点以下 30 桁一致相当）を定めたとき，a_n がある $n = N$ から先でこの目標精度を達成しつづけるならば,「$n \geq N$ のとき $|a_n - A| < \epsilon$」が成り立つ．すなわち，私たちの設定した「目標精度」ϵ という基準に対し，$n < N$ のとき a_n はその基準を満たさないかもしれないが，$n \geq N$ であればそれが確実に満たされている．この意味で，a_n は $n = N$ を境に，より A に「近づいた」という解釈が可能である.

つぎに，ϵ よりも小さい ϵ' を選んで高い目標精度として設定したとき（たとえば $\epsilon' = 10^{-100}$，小数点以下 100 桁一致相当）,「$n \geq N'$ のとき $|a_n - A| < \epsilon'$」が成り立つかもしれない．こうして目標精度 $\epsilon > 0$ を繰り返し小さいものに取り替えも，一定以上のすべての n に対して a_n がその目標精度を実現することができるとき,「数列 $\{a_n\}$ は A に収束する」とよぶのは妥当であろう.

[1] 小数には「繰り上がり」という面倒な性質があるので，$|a_n - A| < 1/10^n$ だからといって a_n と A が小数点以下 n 桁まで一致するとは限らない．この不等式は「小数点以下 n 桁一致相当の精度」だと解釈するのが正しい．たとえば，1.0000 と 0.9995 は $|1 - 0.9995| < 1/10^3$ だから，小数点以下 3 桁一致相当である.

こうして「近づく」という概念のあいまいさを克服し数列の収束を定式化したのが，いわゆる ϵ 論法（ϵ-N 論法）とよばれる収束性の定義である：

数列の収束

以下，数列 $a_1, a_2, \ldots$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ あるいは単に $\{a_n\}$ と略記する．

定義　(数列の収束) 数列 $\{a_n\}$ が実数 A に**収束する** (converge) とは，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し，

$$n \geq N \quad \text{のとき} \quad |a_n - A| < \epsilon \tag{3.1}$$

を満たすことをいう．このとき，$a_n \to A \ (n \to \infty)$ もしくは $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ と表す．また，A を数列 a_n の**極限** (limit) とよぶ．

一方，どの実数にも収束しない数列は**発散する** (diverge) という．

注意.

- 「収束」の定義は記号だけで「$\forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad |a_n - A| < \epsilon$」と表されることもある[2]．
- a_n は実数 A の近似列だと考えられる．式 (3.1) の不等式 $|a_n - A| < \epsilon$ は,「a_n が A を誤差 ϵ 未満で近似している」と解釈できる．幾何学的には,「複素平面内で，a_n が中心 A，半径 ϵ の円板の内部に入っている」とも解釈できる．
- ϵ は近似精度の目標値であり，任意に「小さな」正の数を選ぶ．たとえば $\epsilon = \dfrac{1}{10^5}$ なら小数点以下 5 桁一致相当の精度，$\epsilon = \dfrac{1}{10^{50}}$ なら小数点以下 50 桁，$\epsilon = \dfrac{1}{10^{500}}$ なら小数点以下 500 桁，といった具合である．
- N は目標精度 ϵ に依存して決まるので，$N = N(\epsilon)$ とか $N = N_\epsilon$ などと書かれることもある．たとえば $\epsilon = \dfrac{1}{10^{50}}$ のとき，$n \geq N\left(\dfrac{1}{10^{50}}\right)$ であれば a_n は A を小数点以下 50 桁一致相当の精度で近似する．
- 収束する数列は**収束列** (convergent sequence) とよばれる．

例題 3.1 (数列の収束) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$ を示せ．

解答. $\left|\dfrac{n-1}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$ であることに注意する．任意の（任意に小さな）$\epsilon > 0$ に対し，ある（十分に大きな）$N \in \mathbb{N}$ が存在して $1/N < \epsilon$ とできる[3]．よって $n \geq N$ のとき，

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

[2] 括弧を使って「$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \quad |a_n - A| < \epsilon$」と表すこともある．

[3] 次の性質（「アルキメデスの原則」とよばれる）を用いている：任意の正の数 ϵ，a に対し，$n\epsilon > a$ を満たす自然数 n が存在する．証明を考えてみよ．(Hint: 背理法．結果を否定すると自然数に上限が存在することになる．)

ゆえに $\dfrac{n-1}{n} \to 1 \quad (n \to \infty)$. ■

命題 3.1 (極限の性質) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim_{n\to\infty} b_n = B$ のとき，次が成り立つ：

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

(3) $B \neq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$.

(4) すべての n で $a_n < b_n$ が成り立つとき，$A \le B$.

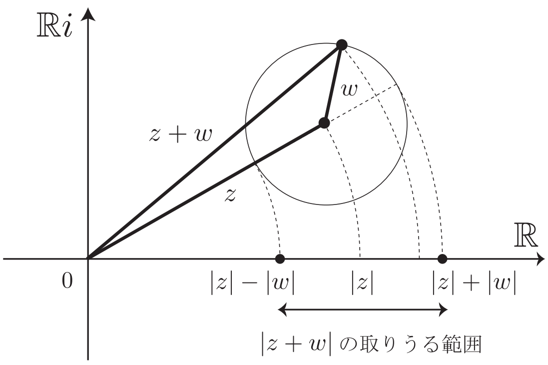
(5) $A = B$ かつすべての n で $a_n < c_n < b_n$ が成り立つとき，$\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

a_n, b_n がそれぞれ A，B の近似値であれば，$a_n + b_n$ は $A + B$ の近似値となるであろう．この命題はそのことを正当化したものである．(4) で等号が成立する簡単な例として，$a_n = -1/n, b_n = 1/n$ がある．

証明の前に，解析学でもっとも基本的な不等式である「三角不等式」を確認しておこう：

命題 3.2 (三角不等式) z, w を複素数とするとき，

$$|z| - |w| \le |z + w| \le |z| + |w|. \tag{3.2}$$



証明. まず仮定より，

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \ge N) \quad |a_n - A| < \epsilon \;\; \text{かつ} \;\; |b_n - B| < \epsilon \tag{3.3}$$

としてよい[4]．

(1) 三角不等式 (3.2) と式 (3.3) より，$n \ge N$ のとき $|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$. ϵ は任意だったので，2ϵ も任意に小さく選ぶことができる．よって $a_n + b_n \to A + B \quad (n \to \infty)$.

(2) 収束性の定義より，$\epsilon_0 = 1$ とおくと，ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，$n \ge N_0$ のとき $|a_n - A| < \epsilon_0 = 1$ が成り立つ．三角不等式 (3.2) より，$|a_n| - |-A| < 1$，よって $|a_n| < |A| + 1$.

いま $n \ge \max\{N_0, N\}$ とすれば，ふたたび三角不等式 (3.2) より

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| = |a_n(b_n - B) + (a_n - A)B| \\ &\le |a_n||b_n - B| + |a_n - A||B| \\ &< (|A| + 1)\epsilon + \epsilon|B| \\ &= (|A| + |B| + 1)\epsilon. \quad \text{（注：これは誤差の評価式になっている）} \end{aligned}$$

[4]正確には，$n \ge N_A$ のとき $|a_n - A| < \epsilon$，$n \ge N_B$ のとき $|b_n - B| < \epsilon$ となるように N_A，N_B を選び，$N := \max\{N_A, N_B\}$ とおけばよい．

ϵ は任意なので，$(|A|+|B|+1)\epsilon$ も任意に小さくとれる．よって $a_nb_n \to AB \ \ (n\to\infty)$
(3) (2) より，$B\neq 0$ のとき $1/b_n \to 1/B\ (n\to\infty)$ を示せば十分である．収束性の定義より，$\epsilon_0 = |B|/2 > 0$ とおくと，ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，$n \geq N_0$ のとき $|b_n - B| < \epsilon_0 = |B|/2$ が成り立つ．よって $|b_n| > |B|/2$ が成り立つ[5]．

いま $n \geq \max\{N_0, N\}$ とすれば，三角不等式 (3.2) より

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{B}\right| = \frac{|B-b_n|}{|b_n||B|} < \frac{\epsilon}{(|B|/2)|B|} = \frac{2\,\epsilon}{|B|^2}.$$ （注：これも誤差の評価式）

ϵ は任意なので，$(2\epsilon)/|B|^2$ も任意に小さくとれる．よって $1/b_n \to 1/B \ \ (n\to\infty)$.
(4) と (5) →レポート問題. ■

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メールで ご指摘ください．

[5] 三角不等式 (3.2) を用いて $|-B|-|b_n| \leq |-B+b_n| < |B|/2$，よって $|b_n| > |B|/2$．複素数だと思って幾何学的に考えたほうがわかりやすいかもしれない．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210 東京工業大学 理学院（数学系）

単調列・コーシー列・区間縮小法（5/1）

配布日：2017/04/24　Version：1.1

レポート問題 (4/24 出題)

締め切りは5月1日の講義開始前とします.（研究室 H210 メールボックスへの提出は当日朝10時30分まで.）

問題 4-1. (極限の大小関係) 命題 3.1 の (4) と (5) を示せ.

問題 4-2. (超典型問題) 数列 $\{a_n\}$ が実数 A に収束するとき, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$ を示せ.

問題 4-3. (次回の予習) 次回の講義ノートの内容をよく読んで, 以下の項目について, 定義や条件を適宜補いつつ, 合計2ページから3ページでまとめよ.（次回は講義中にこれらに関連した課題を出します.）

(1) 「上に有界」かつ「単調増加」な数列の例（プリントには書いていないもの）を自作せよ.

(2) 「上に有界」かつ「単調増加ではない」が, 収束する数列の例を挙げよ.

(3) コーシー列の定義とコーシー列では<u>ない</u>数列の例を挙げよ.

(4) ふたつのコーシー列の和が定める数列はまたコーシー列であることを示せ.（命題 3.1 (1) を参照）

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば<u>メールで</u>ご指摘ください.

次回（5/1）の講義ノート

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第1章　• 高木貞治『解析概論』の第1章.

単調列の収束

数列の収束性の定義を眺めていると, 定義の中に「極限の値 A」がすでに使われていることに気がつく. したがって, 極限が存在するかどうかがわからない状況では, 定義に当てはめて収束性を判定することはできない. たとえば, まったく予備知識のない状態で

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad b_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

といった数列が与えられたとき, 私たちにはまだ, これらが「ある実数に収束する」と言い切れるだけの根拠がないのである[1]. 今回はそのあたりの不便を解消していこう.

[1]微分積分学で学ぶように, これらの数列はともに自然対数の底 $e=2.71828\cdots$ に収束する. しかし, ふつうは e それ自体を $e:=\lim_{n\to\infty}a_n$ と定義するので, 値を知る前に数列 $\{a_n\}$ の収束性を何らかの方法で証明する必要がある.

定義 （単調な数列） 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$ を満たすとき**単調増加** (monotone increasing)，$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ を満たすとき**真に単調増加** (strictly increasing) であるという．また，$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots$ を満たすとき**単調減少** (monotone decreasing) $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ を満たすとき**真に単調減少** (strictly decreasing) であるという．

これらの数列はまとめて**単調** (monotone) な数列もしくは**単調列** (monotone sequence) とよばれる．

定義 （有界な数列） 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**上に有界**であるとは，ある実数 M が存在して，すべての n に対し $a_n \le M$ が成り立つことをいう．すなわち，集合

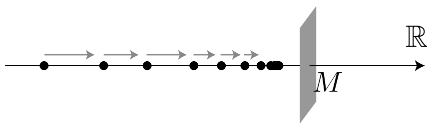
$$S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$$

が上に有界な集合となることをいう．定理 2.2 より，数列 $\{a_n\}$ が定めるこの集合 S には上限が存在する．これを数列 $\{a_n\}$ の**上限**とよび，$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$，$\sup_{n\ge 1} a_n$ （もしくは単に $\sup_n a_n$ ）などと表す．

下に有界な数列やその**下限** $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$，$\inf_{n\ge 1} a_n$ （もしくは単に $\inf_n a_n$ ）なども同様に定義される．また，上にも下にも有界な数列は**有界**な数列 (bounded sequence) とよばれる．

次の定理は，極限を知らない状態で数列の収束性を保証する「十分条件」である：

定理 4.1 (有界単調列は収束) 上に [下に] 有界かつ単調増加 [減少] な数列はある実数に収束する．



証明（定理 4.1）． 集合 $\{a_n\}$ が上に有界であれば，上限 $A = \sup_n a_n$ が存在する（定理 2.2）このとき，任意に小さい $\epsilon > 0$ に対して，$A - \epsilon \le a_N \le A$ を満たす自然数 N が存在する．(そうでないと，すべての n で $a_n \le A - \epsilon < A$ となるが，これは A が上限であったことに反する．) このとき

$$A - \epsilon \le a_N \le a_{N+1} \le a_{N+2} \le \cdots \le A$$

が成り立つから，すべての $n \ge N$ に対し $|a_n - A| < \epsilon$．よって $a_n \to A$ $(n \to \infty)$．下に有界かつ単調減少の場合の証明も同様である．(もしくは，$b_n := -a_n$ とすれば上の場合に帰着される．) ■

例 1（自然対数の底）． 先ほどの $\{a_n\}$ は単調増加かつ上に有界である．(どの微積の教科書にも書いてある．) よって定理 4.1 より収束する．この極限 $2.71828\cdots$ を自然対数の底 e と定めるのであった．

$\{b_n\}$ のほうは明らかに単調増加である．また，$n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \ge 2\cdots 2\cdot 1 = 2^{n-1}$ より，$b_n \le 1 + 1 + 1/2 + \cdots + 1/2^{n-1} < 3$．よって上に有界であるから，$\{b_n\}$ は収束する．(「テイラー展開」を用いると，これが e に収束することが示される．)

コーシー列

定理 4.1 は収束することの十分条件を与えるものであった．次は必要十分条件を考えよう．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　　東京工業大学 理学院（数学系）

数列の収束性の定義に用いた前回の式 (3.1) $|a_n - A| < \epsilon$ は，極限 A の値をあらかじめ知らないとチェックできない．一方，次の「コーシー列」の条件は，数列の値だけでチェックが可能である：

定義　(数列の収束) 数列 $\{a_n\}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し，

$$n \geq m \geq N \quad \text{のとき} \quad |a_n - a_m| < \epsilon \tag{4.1}$$

を満たすことをいう．

このとき，次の定理が成り立つ：

定理 4.2 (収束列 $\Longleftrightarrow$ コーシー列) 実数の列 $\{a_n\}$ が収束することと，コーシー列であることは同値（互いに必要十分条件）である．

すなわち，極限を知らなくても．コーシー列であることが確認できれば収束性が保証される．

式 (4.1) の意味． たとえば $\epsilon = \dfrac{1}{10^M}$ とおくと，$n \geq m \geq N$ のとき（m と n の大小関係は重要ではない）$|a_n - a_m| < \epsilon = \dfrac{1}{10^M}$．これは，$a_n$ と a_m の値が小数点以下 M 桁一致相当の近さをもつことを意味する．すなわち，$a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots$ は（繰り上がりがおきない限り）小数点以下 M 桁が一致し続ける．M がどれだけ大きな自然数であっても，そのような N を見つけることができるのだから，数列 $\{a_n\}$ はその小数が定める実数へと収束していると考えるのが道理にかなっている．

実数の完備性． 有理数からなるコーシー列に関しては，その極限が有理数でないかもしれない．しかし実数からなるコーシー列は，必ず実数の中に極限をもつ．この状況を，「有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は完備でない」,「実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は完備」と表現する．

定理 4.2 の証明（前半）． 「収束列ならばコーシー列であること」の証明は簡単なので先に済ませておこう．

ある実数 A が存在し，任意の $\epsilon > 0$ に対し $N \in \mathbb{N}$ が存在し $n \geq N$ のとき $|a_n - A| < \epsilon/2$ が成り立つと仮定する．$n \geq m \geq N$ のとき，三角不等式

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) - (a_m - A)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

が成り立つ．よって $\{a_n\}$ はコーシー列の条件を満たす．　■(前半)

コーシー列の有界性と区間縮小法

「コーシー列ならば収束列であること」を証明するために，いくつか準備をしておこう．

まず次の補題が必要である：

補題 4.3 (コーシー列の有界性) コーシー列は有界な数列である．また，$\{a_n\}$ がコーシー列であるとき，すべての n に対し集合 $S_n := \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ は有界である．

この補題の証明はレポート問題としよう [2]．

次の定理も重要である：

[2] S_n は無限集合とは限らない．たとえば，数列 $1, 1, 1, \ldots$ が定める集合は一点からなる集合 $\{1\}$ である．

定理 4.4 (区間縮小法) 閉区間の列 $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が次の (I1)，(I2) を満たすと仮定する：

(I1) すべての n に対し，$I_{n+1} \subset I_n$

(I2) $[I_n の長さ] = |b_n - a_n| \to 0$ $(n \to \infty)$

このとき，すべての I_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ に含まれる実数 A がただひとつ存在し，

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ とは $a_n \le b_n$ を満たす実数 a_n, b_n が定める実数の集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid a_n \le x \le b_n\}$ のことをいう．$a_n = b_n$ のとき I_n は 1 点のみからなる集合だが，これも形式的に「閉区間」とみなす．

注意. 主張を集合の記号で表すと，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{A\}$（1 点）ということである．ここでは I_n が「閉区間」の列であることが重要で,「開区間」の場合，極限の存在はわからない．たとえば，$I_n = (0, 1/n)$ は (I1) を満たし長さも 0 に収束するが，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

証明（定理 4.4）. (I1) より

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1$$

が成り立つ．したがって，数列 $\{a_n\}$ は上に有界かつ単調増加，数列 $\{b_n\}$ は下に有界かつ単調減少となることがわかる．定理 4.1 より，$\{a_n\}$ は $A := \sup_n a_n$ に収束し，$\{b_n\}$ は $B := \inf_n b_n$ に収束する．

$A \ne B$ と仮定しよう．このとき，$\delta := |A - B| > 0$ である．$A = \lim_{n\to\infty} a_n$，$B = \lim_{n\to\infty} b_n$ より，ある $N = N(\delta)$ が存在して，$n \ge N$ のとき

$$|a_n - A| < \delta/4 \quad かつ \quad |b_n - B| < \delta/4$$

が成り立つようにできる．これより $|a_n - b_n| \ge |A - B| - (|a_n - A| + |b_n - B|) > \delta/2$ となるが[3]，これは (I2) に反する．よって $A = B$ である．とくに $a_n \le A = B \le b_n$ が成り立つことから，すべての n について $A \in I_n$ がいえる．

最後にそのような A の一意性を示そう．もし A でない A' がすべての n について $A' \in I_n$ を満たせば，$0 < |A - A'| \le |b_n - a_n|$ となる．これは (I2) に矛盾する． ■

証明（定理 4.2）の後半

コーシー列ならば収束であること. 補題 4.3 より，集合 $S_n = \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ はすべて（上下に）有界である．ワイエルシュトラスの定理（定理 2.2）より，S_n には下限 x_n と上限 y_n が存在する．一方，S_n の定義より $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$ が成り立つから，

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots \le y_n \le \cdots \le y_2 \le y_1$$

が成り立つ．よって，区間 $I_n := [x_n, y_n]$ は区間縮小法（定理 4.4）の仮定 (I1) を満たす．これが (I2) も満たすことを示そう．

$\epsilon > 0$ を任意に小さくとり，固定しておく．$\{a_n\}$ はコーシー列であるから，ある自然数 N が存在し，$n \ge m \ge N$ のとき $|a_n - a_m| < \epsilon/2$ が成り立つ．このような N に対し，$S_N = \{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots\}$ を考えよう．$y_N = \sup S_N$ であったから，ある $n' \ge N$ が（少なくともひとつ）存在し，

$$y_N - \epsilon/4 \le a_{n'} \le y_N$$

[3] 図を描けばあたりまえの不等式だが，まじめに証明したければ三角不等式 $|A - B| \le |A - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - B|$ を変形すればよい．

が成り立つ（定理 2.3）．同様に，$x_N = \inf S_N$ であったから，ある $m' \geq N$ が（少なくともひとつ）存在し，

$$x_N \leq a_{m'} \leq x_N + \epsilon/4$$

が成り立つ（レポート問題 2-2）．よって

$$\begin{aligned}|y_N - x_N| &= |y_N - a_{n'} + a_{n'} - a_{m'} + a_{m'} - x_N| \\ &\leq |y_N - a_{n'}| + |a_{n'} - a_{m'}| + |x_N - a_{m'}| < \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4 = \epsilon.\end{aligned}$$

区間 I_n の長さ $|y_n - x_n|$ は単調減少だから，$n \geq N$ のとき，$|y_n - x_n| \leq |y_N - x_N| < \epsilon$．$\epsilon$ は任意だったので，$|y_n - x_n| \to 0$ $(n \to \infty)$．よって閉区間 $I_n = [x_n, y_n]$ は区間縮小法（定理 4.4）の仮定 (I2) を満たす．

定理 4.4 より，すべての n に対し $A \in [x_n, y_n]$ かつ $A = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ を満たす A がただひとつ存在する．いま $a_n \in S_n \subset [x_n, y_n]$ であるから，$|a_n - A| \leq |y_n - x_n| \to 0$ $(n \to 0)$．よって $\{a_n\}$ は収束し，極限 A を持つ． ■

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210 東京工業大学 理学院（数学系）

ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理（5/8）

配布日：2017/05/01　Version：1.1

レポート問題 (5/1 出題)

締め切りは5月8日の講義開始前とします.（研究室 H210 メールボックスへの提出は当日朝10時20分まで.）

問題 5-1. (コーシー列) $|r| < 1$ のとき，$a_n := 1 + r + \cdots + r^{n-1}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ はコーシー列の定義を満たすことを示せ.

問題 5-2. (コーシー列の有界性) 補題 4.3 を示せ.

問題 5-3. (次回の予習) 次回の講義ノートの内容をよく読んで，以下の項目について，定義や条件を適宜補いつつ，合計2ページから3ページでまとめよ.（次回は講義中にこれらに関連した課題を出します.）

(1) $\mathbb{R}$ 内の部分集合に対し，その「集積点」の定義と「集積点を持たない集合」の具体例をふたつ以上挙げよ.

(2) $\mathbb{R}$ 内の真部分集合 S で,「S のすべての点が S の集積点」を満たす例をふたつ以上挙げよ.

(3) 数列の「部分列」の定義を与えよ. また,「任意の自然数 p に対し，p に収束する部分列を含む」ような数列の例をひとつ挙げよ.

(4) 数列の「上極限」と「下極限」の定義を与えよ. また，$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ かつ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ ような数列の例をひとつ挙げよ.

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メールで ご指摘ください.

次回（5/8）の講義ノート

参考文献： • 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第1–2章　• 高木貞治『解析概論』の第1章

集積点とワイエルシュトラスの定理

今回は「有界な数列は収束する部分列をもつ」という「ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理」の証明を目標とする. これは数列がもつ，もっとも重要な性質だといっても過言ではない.

まずはその基盤となる,「集積点」の概念を定義し，さらに「有界集合は集積点を持つ」という「ワイエルシュトラスの定理」を示そう.

有限集合と無限集合. S を $\mathbb{R}$ の部分集合とする. S が**有限集合** (finite set) であるとは，ある自然数 n が存在し，S がちょうど n 個の元からなることをいう[1]. S が**無限集合** (infinite set) であるとは，空集合でも有限集合でもないことをいう.

集積点.

[1] 正確には，自然数の集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ から S への（上への）全単射が存在することをいう.

定義 （集積点） S を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．実数 A が S の**集積点** (accumulation point) であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$|x - A| < \epsilon$ を満たす S の元 x が無限個 存在することをいう．すなわち，集合

$$\{x \in S \mid |x - A| < \epsilon\} = S \cap (A - \epsilon, A + \epsilon)$$

が無限集合となることをいう．

S の集積点 A は S に属するとは限らないことに注意しよう（下の例 1）．集合 S の元で S の集積点でないものは S の**孤立点** (isolated point) とよばれる（今回は使わない）．

集積点の定義は次のように言い換えることができる：

命題 5.1 (集積点の定義の言い換え) S を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．ある実数 A が S の集積点であることは，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$0 < |x - A| < \epsilon$ を満たす S の元 x が存在することと同値である．

すなわち，A のいくらでも近くに A ではない S の元が存在する，ということである．(証明はレポート問題.)

例 1. $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ のとき，$x = 0$ は S の唯一の集積点である．しかし，$0 \notin S$ であることに注意.

例 2. $S = \mathbb{Q}$ （有理数全体の集合）とするとき，任意の実数は S の集積点である [2].

集積点に関して次が成り立つ：

定理 5.2 (ワイエルシュトラス) 有界な無限集合は少なくともひとつ集積点をもつ．

証明. S を $\mathbb{R}$ の有界な無限集合とする．有界性より，$x_0 := \inf S$, $y_0 := \sup S$ が定まる．また，S が無限集合であることから $x_0 < y_0$ である．$I_0 := [x_0, y_0]$ $(\supset S)$ とおく．

ここで $m_0 := \dfrac{x_0 + y_0}{2}$ として，区間 $[x_0, m_0]$ と $[m_0, y_0]$ を考えると，少なくともいずれか一方は（もしくは両方が）S の元を無限個含む．それを（両方の場合はひとつ選んで）$I_1 = [x_1, y_1]$ と改名しよう．

さらに $m_1 := \dfrac{x_1 + y_1}{2}$ として，区間 $[x_1, m_1]$ と $[m_1, y_1]$ を考えると，やはりいずれか一方は S の元を無限個含む．それを $I_2 = [x_2, y_2]$ と改名する．

以下同様の操作を繰り返すと，

$$I_{n+1} \subsetneqq I_n, \quad [I_n の長さ] = \frac{|y_0 - x_0|}{2^n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

を満たす区間の列 $\{I_n\}_n$ を得る．区間縮小法（定理 4.4）より，ある $A \in \mathbb{R}$ がただひとつ存在して，

$$A = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \ \ かつ \ \ {}^{\forall} n \geq 0, \ \ A \in I_n.$$

いま任意の $\epsilon > 0$ に対しある自然数 N が存在して，$[I_N の長さ] = |y_N - x_N| < \epsilon$ が成り立つ．$A \in I_N$ であるから，開区間 $(A - \epsilon, A + \epsilon)$ は閉区間 I_N を含む．$S \cap I_N$ は無限集合であったから，

$$S \cap I_N \subset S \cap (A - \epsilon, A + \epsilon)$$

より，$S \cap (A - \epsilon, A + \epsilon)$ も無限集合である．よって A は S の集積点となる．

■

[2] この性質をもって，「$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の稠密 (ちょうみつ/ちゅうみつ) な部分集合である」とよぶ．

部分列とボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理

数列の「部分列」を定義しよう．

定義 (部分列) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられているとき，自然数の増加列

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots$$

を選んで得られる数列

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ a_{n_4},\ \ldots$$

を数列 $\{a_n\}$ の**部分列** (subsequence) とよび，$\{a_{n_k}\}$ もしくは $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ のように表す．

例 3. $n_k = 2^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ とするとき，$\{a_n\}$ の部分列 $a_2,\ a_4,\ a_8,\ a_{16}, \ldots$ が定まる．

例 4. $\{a_n\}$ の同じ項を繰り返して得られる数列，たとえば $a_1,\ a_1,\ a_1,\ a_1, \ldots$ は部分列とはいわない．添字は（真に）増加列になっていなければならないからである．

例 5. $a_n = (-1)^n$ とするとき，$n_k = 2k$ として得られる数列 $a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8, \ldots$ は値としては $1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots$ であり同じ値を繰り返すが，こちらは「部分列」の条件を満たしている．数列の添字がちゃんと（真に）増加しているからである．

部分列に関するもっとも基本的かつ重要な性質が，次の定理である：

定理 5.3 (ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理) 有界な数列は収束する部分列を含む．

証明. 有界な数列 $\{a_n\}$ が与えられているとき，それを集合として $S := \bigcup_{n\geq 1} \{a_n\} = \{a_n \mid n \geq 1\}$ と表現してみよう[3]．

S が有限集合であれば，$a_n = A$ となる自然数 n が無限個存在するような A が S の中に少なくともひとつ存在する．そのような自然数たちを $n_1 < n_2 < \cdots$ と小さい順に並べれば，部分列 $\{a_{n_k}\}$ は $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$ を満たす．よって収束する部分列が存在する．

S が無限個の元をもつときは，定理 5.2 より S は集積点 A をもつ．とくに，任意の自然数 k に対し，$|A - a_n| < 1/k$ を満たす添字 n が無限個存在する．そこで，まず $k = 1$ に対し，$|A - a_{n_1}| < 1$ を満たす添字 n_1 を自由に選ぶ．次に $k = 2$ のとき，$|A - a_n| < 1/2$ を満たす添字 n は無限個存在するのだから，添字 n_2 を $|A - a_{n_2}| < 1/2$ かつ $n_1 < n_2$ を満たすように選ぶ．$k \geq 3$ のときも同様に，添字 n_k を $|A - a_{n_k}| < 1/k$ かつ $n_{k-1} < n_k$ を満たすように選ぶことができる．このとき，$\{a_{n_k}\}_k$ は $\{a_n\}$ の部分列であり，$a_{n_k} \to A$ $(k \to \infty)$ を満たす． ■

上極限と下極限

ここで，すこし厄介だが重要な概念である数列の「上極限」と「下極限」を定義しよう．

記号の上では，数列 $\{a_n\}$ に対し

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right), \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

[3] たとえば $a_n = (-1)^n$ のとき，$S = \{-1, 1\}$．

をそれぞれ「下極限」「上極限」と定義すればよい（値として $\pm\infty$ も許す）．しかし，その意味を厳密かつ完全に理解するためには，数列が有界な場合とそうでない場合に分けて定義した方がよい．

有界な数列の場合． まず，数列 $\{a_n\}$ が有界な場合を考えよう．(収束性は仮定しない．) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$S_n := \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ とおくと，これは有界な集合であるから，ワイエルシュトラスの定理（定理 2.2）より，S_n には下限 x_n と上限 y_n が存在する．すなわち，

$$x_n := \inf S_n = \inf_{k\geq 0} a_{n+k} = \inf_{k\geq n} a_k,$$
$$y_n := \sup S_n = \sup_{k\geq 0} a_{n+k} = \sup_{k\geq n} a_k.$$

いま S_n は $\{a_n\}_{n\geq 1} = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$ を満たすから，

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq y_2 \leq y_1$$

が成り立つ．すなわち，数列 $\{x_n\}$ は上に有界かつ単調増加，数列 $\{y_n\}$ は下に有界かつ単調減少となることがわかる．定理 4.1（有界単調列は収束）より，$\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は収束する．これらの極限を用いて，数列 $\{a_n\}$ の上極限と下極限を定義する：

定義 （上極限と下極限：有界数列の場合） 有界な数列 $\{a_n\}$ に対し，$x_n := \inf_{k\geq n} a_k$ で定まる数列 $\{x_n\}$ の極限を数列 $\{a_n\}$ の**下極限** (inferior limit) とよび，

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{もしくは} \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n$$

と表す．また $y_n := \sup_{k\geq n} a_k$ で定まる数列 $\{y_n\}$ の極限を数列 $\{a_n\}$ の**上極限** (superior limit) とよび，

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{もしくは} \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

と表す．

このとき，次が成り立つ：

定理 5.4 有界な 数列 $\{a_n\}$ がある実数に収束するための必要十分条件は，その上極限と下極限が一致することである．

証明はレポート問題としよう．

有界でない数列の場合． 有界でない数列の場合も，形式的に $\pm\infty$ も値として許すことにして定義する．

定義 （上極限と下極限：非有界数列の場合） 有界でない数列 $\{a_n\}$ に対し，上極限と下極限は次のように定義する：

- $\{a_n\}$ が下に有界で「ない」とき，$\liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty$，$\{a_n\}$ が上に有界で「ない」とき，$\limsup_{n\to\infty} a_n := \infty$ と定義する．
- $\{a_n\}$ が下に有界で「ない」が上に有界であるとき，$y_n := \sup_{k\geq 0} a_{n+k}$ は単調減少列となり，数列 $\{y_n\}$ は極限をもつか $-\infty$ に発散する．後者を $\lim_{n\to\infty} y_n := -\infty$ と書くことにすれば，$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} y_n$ がつねに定まり，これを $\{a_n\}$ の上極限として定義する．$\{a_n\}$ が上に有界で「ない」が下に有界であるときも，同様にして下極限 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ が定まる．

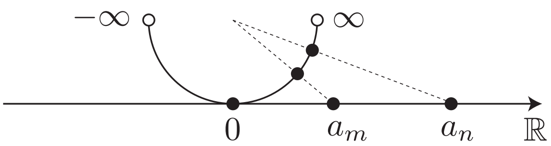
以上の定義から，すべての数列 $\{a_n\}$ に対しその「上極限」と「下極限」が定まることになる．

部分列をもちいた特徴づけ． $\{a_n\}$ を有界数列とするとき，上極限 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ とは「$\{a_n\}$ の部分列で収束させることができる最大の実数」であり，下極限 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ とは「$\{a_n\}$ の部分列で収束させることができる最小の実数」ということになる．(理由を考えてみよ．)

例 6． たとえば $a_n = \dfrac{1}{n}$ の場合，この数列の部分列で収束させることができる数は 0 だけである．よって $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$．

例 7． $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{3}$ の場合，この数列の部分列で収束させることができる数は 0 と $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ だけである．よって $\limsup_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

$\{a_n\}$ が有界で「ない」場合も，ひと工夫すれば同様のアイディアで上極限と下極限を理解することができる．



図のように数直線の原点の上に半円を置くと，数直線全体と半円の端点以外が対応する．このとき，数直線上の収束列は半円上の収束点列に見える．

いま，有界で「ない」数列を半円で見てみよう．このとき，対応する点列はその端点のいくらでも近くに到達できる．すなわち，部分列をうまく選べば端点に「収束する」点列を見つけることができる．右の端点を ∞，左の端点を $-\infty$ と解釈すれば，上極限と下極限は $\pm\infty$ も込みで数列の部分列が収束できる「最大」と「最小」の点ということになる．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

関数の極限と連続性（5/15）

配布日：2017/5/8　Version：1.1

レポート問題 (5/8 出題)

締め切りは 5 月 15 日の講義開始前とします.（研究室 H210 メールボックスへの提出は当日朝 10 時 20 分まで.）

問題 6-1. (集積点) 命題 5.1 を示せ.

問題 6-2. (上極限・下極限) 定理 5.4 を示せ.

問題 6-3. (上極限・下極限) 次の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限と下極限を求めよ（答えのみでよい）.

(1) $a_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{4}$　(2) $a_n = n\sin\dfrac{n\pi}{4}$　(3) $a_n = n^2$　(4) $a_n = -\log n$

問題 6-4. (次回の予習) 次回の講義ノートの内容をよく読んで，以下の項目について，定義や条件を適宜補いつつ，合計 2 ページから 3 ページでまとめよ.（次回は講義中にこれらに関連した課題を出します.）

(1) 区間 I 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が点 $a \in I$ で「連続であること」の定義と「連続でない」ことを ϵ-δ 論法で表現せよ.

(2) 中間値の定理と，それが適用できる例，適用できない例をひとつずつあげよ.

(3) 二分法を用いて $\sqrt{10}$ の近似値 A をできるだけ高精度で求めよ.（最低でも小数点以下 1 桁までは出すこと.）電卓（アプリ）の四則を補助的に用いてもかまわないが，あたかも使ってないかのように文章を仕上げること.

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メールで ご指摘ください.

次回（5/15）の講義ノート

参考文献：
- 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第 1–2 章
- 高木貞治『解析概論』の第 1 章

関数

区間. 変数が動く範囲を指定するときに便利な「区間」という言葉を確認しておこう.

定義 (区間) $a < b$ を満たす実数 a，b に対し，以下の形の集合を**区間**という：

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \qquad (a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} \qquad [a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$$
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \qquad (-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} \qquad (-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$$
$$(-\infty,\infty) := \mathbb{R}\ \text{（実数全体）}$$

とくに (a,b) の形の区間を**開区間**とよび，$[a,b]$ の形の区間を**閉区間**とよぶ．また，∞ のかわりに $+\infty$ と書くこともある.

「関数」について，一連の用語を定義しておこう．

定義 (関数，定義域，値域，etc.) D を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．

- D の各元 a にひとつの実数 b を対応させたものを D 上の**関数** (function) という．
- f をそのような関数とするとき，b を a における関数 f の**値** (value) とよび，$b = f(a)$ と表す．
- D を関数 f の**定義域** (domain) とよぶ．
- 集合 $S \subset D$ に対し，集合

$$f(S) := \{f(a) \in \mathbb{R} \mid a \in S\} = \left\{b \in \mathbb{R} \mid {}^{\exists}a \in S, b = f(a)\right\}$$

を関数 f による S の**像** (image) という．とくに，$f(D)$ を関数 f の**値域** (range) とよぶ．

- 関数 f の値域 $f(D)$ が集合 $X \subset \mathbb{R}$ に含まれることがわかっているとき，関数 f を $f : D \to X$ のように表す．

注意． 関数 f を表すのに，しばしば $y = f(x)$ という形が用いられる．この x と y は通常**変数** (variable) とよばれるが，意味としてはそれぞれ定義域と値域の実数を代入しうる「空箱」のようなものである[1]．一般に，関数 f の定義域 D 内のすべての値を自由にとりうる文字として記号 x を用いるとき，これを**独立変数** (independent variable) x とよび，その値 $f(x)$ として記号 y を用いるとき，これを**従属変数** (dependent variable) y とよぶ．

例 1． $f(x) = x^2$ を $x \in D := [-1, 2)$ 上に制限して考える．このとき，値域は $f(D) = [0, 4)$ である．また，この関数の表現として

$$f : [-1, 2) \to [0, 4), \quad f : [-1, 2) \to [0, \infty), \quad f : [-1, 2) \to \mathbb{R},$$

はすべて正しい．

関数の極限

いわゆる ϵ-δ 論法（ϵ 論法）を用いて関数の極限を厳密に定義しよう．

[1]．関数解析では関数 f を $f(\cdot)$ のように表現することも多い．この $(\cdot)$ はまさに，定義域内の実数を挿入する「空箱」であることを表現している．

定義 (関数の極限) I を区間とし，a を区間 I 上の点とする．また，関数 f を $I-\{a\}$ で定義された関数とする．「$x \to a$ のとき $f(x)$ が実数 A に**収束する** (converge)」とは，任意の（任意に小さな）$\epsilon > 0$ に対しある $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在し，

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - A| < \epsilon$$

が成り立つことをいう．これを

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \to A$$

もしくは

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

と表し，A を関数 f の $x \to a$ のときの**極限** (limit) とよぶ．

注意.

- $\delta = \delta(\epsilon)$ というのは，δ が ϵ のとり方に依存することを示唆する記法である [2]．
- $0 < |x-a|$ という条件（すなわち $x = a$ は考えない）が効力を発揮するのは，たとえば関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ のような場合である．$x = 0$ のとき $f(0)$ は $\dfrac{0}{0}$ となり定義できないが，極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は意味をもつ．微分係数を計算するときに考える極限はいつもこの $\dfrac{0}{0}$ の形である．
- $0 < |x-a| < \delta$ という条件には「$x \in I$」という条件も含まれているが，わざわざ書かないのがならわしである.（そもそも $f(x)$ が意味を持つには $x \in I$ が必要である.）例えば $I = [a, b]$ $(a < b)$ のように，a が区間の端点である場合もありうるが，この場合条件 $0 < |x-a| < \delta$ は「$a < x < a+\delta$ であり，しかも $a + \delta \le b$ となるように δ は十分小さくとる」のだと解釈する．
- 任意の（任意に大きな）$M > 0$ に対しある $\delta = \delta(M) > 0$ が存在し，

  $$0 < |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M \quad [f(x) < -M]$$

  が成り立つとき,「$x \to a$ のとき $f(x)$ は ∞ $[-\infty]$ に**発散する** (diverge)」という．これを

  $$x \to a \text{ のとき } f(x) \to \infty \quad [f(x) \to -\infty]$$

  もしくは

  $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad [\lim_{x \to a} f(x) = -\infty]$$

  と表す.（「∞ $[-\infty]$ に収束する」とはいわない，また，∞ $[-\infty]$ のことを「極限」とはいわない.）
- 条件 $0 < |x-a| < \delta$ を

  $$0 < x - a < \delta \text{ すなわち } a < x < a + \delta$$

  に変えたとき，これを

  $$x \to a + 0 \text{ のとき } f(x) \to A$$

  もしくは

  $$\lim_{x \to a+0} f(x) = A$$

  と表し，A を関数 f の a における**右極限** (right-hand limit) とよぶ．

---

[2] 実際には f や a にも依存するので，$\delta = \delta(f, a, \epsilon)$ とすべきかもしれないが，ここでは f や a を固定して考えているのである．

- 同様に，条件 $0 < |x-a| < \delta$ を
$$-\delta < x-a < 0 \quad \text{すなわち} \quad a-\delta < x < a$$
に変えたとき，これを
$$x \to a-0 \text{ のとき } f(x) \to A$$
もしくは
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A$$
と表し，A を関数 f の a における**左極限** (left-hand limit) とよぶ．
- 右極限と左極限を合わせて**片側極限** (one-sided limit) とよぶ．また，$x \to a+0$ と $x \to a-0$ はそれぞれ $x \searrow a$ と $x \nearrow a$ もしくは $x \downarrow a$ と $x \uparrow a$ と表されることも多い．
- $\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty$ といった記号も同様に定義される．

極限の性質． 数列と同様にして，つぎの公式が示される：

公式 6.1 (極限の四則・はさみうちの原理) $\lim_{x \to a} f(x) = A$，$\lim_{x \to a} g(x) = B$（ただし A, B は実数，$\pm\infty$ ではない）のとき，次が成り立つ：

(1) $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = A + B$.

(2) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB$.

(3) $B \neq 0$ のとき $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

(4) $f(x) < g(x)$ であれば，$A \leq B$.

(5) $A = B$ かつ $f(x) < h(x) < g(x)$ のとき，
$$\lim_{x \to a} h(x) = A. \quad \text{（はさみうちの原理）}$$

(4) と (5) の不等号 $<$ はいずれも $\leq$ に変えてもよい．さらに，同様の公式は片側極限についても正しい．

関数の連続性

ϵ 論法を用いると，関数の連続性は次のように表現される：

定義 (連続性) I を区間とし，a を区間 I 上の点とする．また，関数 f を I 上で定義された関数とする．(これを $f: I \to \mathbb{R}$ と表すのであった．)

関数 f が $x = a$ で**連続** (continuous) であるとは，
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
であることをいう．すなわち，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在し，
$$|x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$
が成り立つことをいう．f が I 上のすべての点で連続であるとき，**関数 f は I 上で連続**である，もしくは **f は I 上の連続関数**であるという．

注意. 公式 6.1 より，連続関数の和（差），積，商，合成はいずれも定義可能な範囲で連続となることがわかる．

数列による言い替え. 関数の連続性を数列の言葉に置き換えておくと便利である；

命題 6.2 (数列による連続性の定義) $f: I \to \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で連続であることは，次と同値：「a に収束する I 内の任意の数列 $\{a_n\}_n$ に対し，数列 $\{f(a_n)\}_n$ は $f(a)$ に収束する.」すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(a) \quad \text{:「像の極限は極限の像」}$$

証明はレポート問題としよう．

中間値の定理

連続関数のグラフが「つながっている」ことの根拠とされるのが，次の「中間値の定理」である：

定理 6.3 (中間値の定理) 閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $y = f(x)$ が $f(a) \neq f(b)$ を満たすとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の実数 ℓ に対し，$f(c) = \ell$ を満たす c が区間 (a, b) に少なくともひとつ存在する．

下線部に関する注意. この定理では,「実数の連続性」と関数が「連続関数」であることが重要な役割を果たす．以下の議論のどこでそれらの性質が効いているのか，意識しておこう．

「中間値の定理」の証明を与えるまえに，唐突だが「方程式の数値解法」について考える.（「中間値の定理」は「方程式 $f(x) = \ell$ の解 $c \in (a, b)$ が存在する」と主張しているのだから，決して無関係ではない.）与えられた関数 $y = f(x)$ について方程式 $f(x) = 0$ の解を任意の精度で求める，そのような数値計算でもっとも初歩的な方法が，**二分法**とよばれる次のアルゴリズムである：

二分法. 連続関数 $y = f(x)$ に対し，方程式 $f(x) = 0$ の解 α を数値的に求める次のアルゴリズム（手順）を，**二分法**とよぶ：

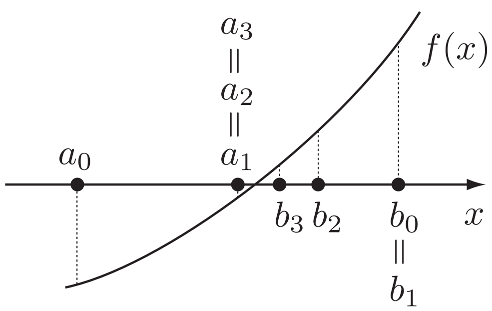
二分法のアルゴリズム. $y = f(x)$ を連続関数とする．

(1) $f(a_0) < 0, f(b_0) > 0$ となるペア (a_0, b_0) を見つける．必要であれば $f(x)$ のかわりに $-f(x)$ を考えることで，$a_0 < b_0$ と仮定してよい．

(2) $n \geq 0$ に対し $f(a_n) < 0$，$f(b_n) > 0$，$a_n < b_n$ となるペア (a_n, b_n) が与えられているとき，その中点を $m_n := \dfrac{a_n + b_n}{2}$ とおく．

(3) $f(m_n)$ の値を計算し，

- $f(m_n) < 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (m_n, b_n)$ とおいて (2) に戻る．
- $f(m_n) > 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (a_n, m_n)$ とおいて (2) に戻る．
- $f(m_n) = 0$ ならば $\alpha := m_n$，計算終了．



二分法は解の存在まで保証するアルゴリズムである：

定理 6.4 (二分法の収束性) 二分法に関して，次のいずれかが成り立つ：

(a) ある自然数 n に対し $f(m_n)=0$ となる．よって $\alpha := m_n$ は解のひとつ．

(b) すべての自然数 n で $f(m_n)\neq 0$ となるが，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は $n\to\infty$ のときそれぞれ同じ極限 α に収束し，$f(\alpha)=0$ を満たす．

いずれの場合も，次のような誤差の評価式が成り立つ．

$$\max\{|a_n-\alpha|,\ |b_n-\alpha|\}\leq \frac{|b_0-a_0|}{2^n}.$$

したがって，十分大きな n に対し a_n もしくは b_n を α の近似値として用いることができる．

証明． (a) でなければ，すべての自然数 n で $f(m_n)\neq 0$ である．このときアルゴリズムの (2) と (3) を繰り返すと，$I_n := [a_n, b_n]$ は $I_{n+1}\subsetneq I_n$ かつ I_n の長さは $|b_0-a_0|/2^n\to 0\ \ (n\to\infty)$ である．よって区間縮小法（定理 4-4）より，すべての n に対し $\alpha\in I_n$ かつ $\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ を満たす α がただひとつ存在する．

関数 $f(x)$ は連続かつ $f(a_n)<0$ より，$f(\alpha)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\leq 0$.（公式 6.1(4)）．同様に $f(b_n)>0$ より，$f(\alpha)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)\geq 0$．よって $f(\alpha)=0$．また，(a)，(b) によらず $a_n\leq\alpha\leq b_n$ であるから，

$$\max\{|a_n-\alpha|,\ |b_n-\alpha|\}\leq |b_n-a_n|=\frac{|b_0-a_0|}{2^n}.$$ ■

例 2（$\sqrt{2}$ の計算）． 連続関数 $f(x)=x^2-2$ に対し，$(a_0,b_0)=(1.0,2.0)$ として二分法のアルゴリズムに従って計算したのが次の表である [3]．

n	a_n	b_n	n	a_n	b_n	n	a_n	b_n
0	1.00000	2.00000	7	1.41406	1.42188	14	1.41418	1.41425
1	1.00000	1.50000	8	1.41406	1.41797	15	1.41418	1.41422
2	1.25000	1.50000	9	1.41406	1.41602	16	1.41420	1.41422
3	1.37500	1.50000	10	1.41406	1.41504	17	1.41421	1.41422
4	1.37500	1.43750	11	1.41406	1.41455	18	1.41421	1.41422
5	1.40625	1.43750	12	1.41406	1.41431	19	1.41421	1.41422
6	1.40625	1.42188	13	1.41418	1.41431	20	1.41421	1.41421

定理 6.4 より，数列 a_n, b_n は $\alpha^2-2=0$ を満たす正の実数 α に収束する．すなわち，$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ の近似値を与える．また，その誤差は $|b_0-a_0|/2^n=1/2^n$ 以下である [4]．

方程式の数値解法としての二分法は収束も遅く有用ではないが,「中間値の定理」の実質的な証明を与えてくれる．

中間値の定理（定理 6.3）の証明． $f(x)$ は連続なので，$F(x)=f(x)-\ell$ も連続関数である．これに $a=a_0$, $b=b_0$ として二分法のアルゴリズムを適用すると，定理 6.4 より $F(c)=0$ を満たす c が区間 (a,b) に見つかる．よって $f(c)=\ell$． ■

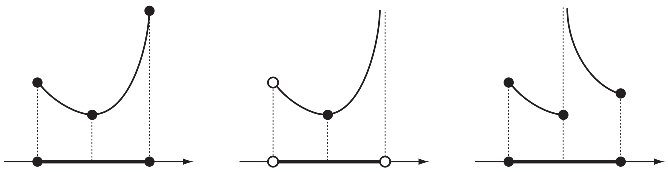
[3] ここに現れる (a_n,b_n) はすべて $k/2^n$ の形の有理数であるが，表の中では収束の様子が分かりやすいように小数で表現している．

[4] 厳密にいうと，定理 6.3 や定理 6.4 からわかるのは「$\alpha^2=2$ を満たす α が区間 $[1,2]$ 内に少なくともひとつ存在する」ということだけである．この α が本当に，私たちが $\sqrt{2}$ とよぶ唯一の数であることを示すには，別の根拠（たとえば関数の単調性，$0\leq x_1<x_2$ のとき $x_1^2<x_2^2$ であること）が必要である．

最大値・最小値の存在定理

次の定理も応用上極めて重要である:

定理 6.5 (最大値・最小値の存在定理) 閉区間 上の 連続関数 はその区間で最大値と最小値をもつ.



注意.

- 定理は,「連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対し,ある α, β が $[a, b]$ に存在し,$a \le x \le b$ のとき $f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$」ということ.
- 「閉区間」であること,「連続」であることは必須である(上の図).

証明(定理 6.5). 連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対し,最大値の存在を示そう.(最小値の存在も同様に示される.) 区間 $[a, b]$ を 2^n 等分($n = 0, 1, 2, \ldots$)して得られる区間の端点の集合を X_n で表す.たとえば $n = 2$ のとき,$X_2 = \{a, (3a + b)/4, (a + b)/2, (a + 3b)/4, b\}$ である.$X_n \subset X_{n+1}$ であるから,$M_n = \max\{f(x) \mid x \in X_n\}$ は $M_n \le M_{n+1}$ を満たす.

各 n に対し,$f(x_n) = M_n$ となる $x_n \in X_n$ を選んでいくと,区間 $[a, b]$ に散らばる数列 $\{x_n\}$ が得られる.この $\{x_n\}$ は有界な数列であるから,ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理(定理 5.3)より収束する部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k \ge 0}$ をとることができるので,その極限を $\beta \in [a, b]$ とし(ここで閉区間であることを用いている),$M := f(\beta)$ とおく.この M が最大値であることを確認しよう.

関数 f は連続なので $k \to \infty$ のとき $M_{n(k)} = f(x_{n(k)}) \to f(\beta) = M$ でなくてはならないが,$M_{n(0)} \le M_{n(1)} \le M_{n(2)} \le \cdots$ より $M_{n(k)} \le M$ がすべての k に対して成り立つ [5].もし $f(y) > M$ となる $y \in [a, b]$ が存在すると,f の連続性より,十分大きな $n(k)$ について,$f(y_{n(k)}) > M$ を満たす $y_{n(k)} \in X_{n(k)}$ が y の近くに存在する.これは $f(y_{n(k)}) \le M_{n(k)} \le M$ に矛盾する.よって $f(\beta) = M$ は関数 f の最大値である. ■

[5] $M_{n(k)} > M$ となる k が存在すると矛盾である.なぜか?

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

一様連続性（5/22）

配布日：2016/05/15　Version：1.1

レポート問題 (5/15 出題)

締め切りは5月22日の講義開始前とします.（研究室 H210 メールボックスへの提出は当日朝10時20分まで.）

問題 7-1. (関数の極限の基本性質) 公式 6.1 を示せ．（Hint 命題 3.1 の ϵ-N 式の議論を ϵ-δ 式に置き換える.）

問題 7-2. (数列による連続性の定義) 命題 6.2 を示せ.

問題 7-3. (次回の予習) 次回の講義ノートの内容をよく読んで，以下の項目について，定義や条件を適宜補いつつ，合計1ページから2ページでまとめよ.（次回は講義中にこれらに関連した課題を出します.）

(1) 区間 I 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が「一様連続であること」の定義.

(2) 区間 I 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が「一様連続」であれば「連続」である．では,「連続」だが「一様連続でない」関数 f の例を挙げよ．さらに「連続」な関数が「一様連続でない」ための十分条件を考えよ.

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メールで ご指摘ください.

次回（5/22）の講義ノート

参考文献：
- 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第2章
- 高木貞治『解析概論』の第1章

一様連続性

以下，I を区間とし，a を区間 I 上の点とする．また，$f(x)$ は区間 I 上の関数とする．関数が「連続」であることの厳密な定義を復習しておこう.

定義 (関数の連続性，再) 関数 f が $x = a$ で連続 (continuous) であるとは,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

であることをいう．すなわち，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し,

$$x \in I \text{ かつ } |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{7.1}$$

が成り立つことをいう．f が I 上のすべての点で連続であるとき，**関数 f は I 上で連続**，もしくは **f は I 上の連続関数**であるという.

ところで，関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が連続であることは,

$$({}^\forall a \in I)\ ({}^\forall \epsilon > 0)\ ({}^\exists \delta > 0)({}^\forall x \in I \mid |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

のようにも表されることに注意しておく．

さて式 (7.1) が成り立つように私たちが δ として選びうる値の範囲は最初に決めた ϵ の値によって制限される [1]．その意味で $\delta = \delta_\epsilon$ と添字にしたり，$\delta = \delta(\epsilon)$ と関数のように表現することもある [2]．しかし厳密には，関数 f や点 a にも依存するのだから，依存性を明確にするならば $\delta = \delta_{f,a,\epsilon}$ あるいは $\delta = \delta(f, a, \epsilon)$ と書くべきかもしれない．

例 1. δ が関数 f，点 a，ϵ に依存する様子を数値的に実感してみよう．$f(x) = x^2$，$\epsilon = 1$，$a = 0, 10$ とするとき，式 (7.1) が成り立つような δ の値の上限を求めてみよう．

$a = 0$ のとき，

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \iff |x^2 - 0^2| < 1 \iff |x|^2 < 1 \iff |x| < 1.$$

最後の式は $|x - a| < 1$ と同値であるから，$\delta = 1$ とすればよい．

$a = 10$ のとき，

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \iff |x^2 - 10^2| < 1 \iff 99 < x^2 < 101$$

$x > 0$ であると仮定してもよいので，上の式が成り立つための十分条件として

$$\sqrt{99} - 10 < x - 10 < \sqrt{101} - 10 \iff -0.0501256\cdots < x - 10 < 0.0498756\cdots$$

が得られる．これより，$\delta = \sqrt{101} - 10 \approx 0.05$ であればギリギリ式 (7.1) が成り立つことがわかる．

一様連続性. 以上を念頭におきつつ，関数の「一様連続性」を次のように定義する：

> **定義 (関数の一様連続性)** 関数 f が I 上で**一様連続** (uniformly continuous) であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し，<u>任意の $a \in I$ に対し</u>
>
> $$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{7.2}$$
>
> が成り立つことをいう．

すなわち，関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が一様連続であることは，

$$({}^\forall \epsilon > 0)\ ({}^\exists \delta > 0)\ ({}^\forall a \in I)\ ({}^\forall x \in I \mid |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

のようにも表される．(単に連続であるときとの違いに注意！）これは，次のように書いてもよい：

$$({}^\forall \epsilon > 0)\ ({}^\exists \delta > 0)\ ({}^\forall x, y \in I \mid |x - y| < \delta) \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

また，関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が一様連続で「ない」ことは，

$$({}^\exists \epsilon > 0)\ ({}^\forall \delta > 0)\ ({}^\exists x, y \in I \mid |x - y| < \delta) \quad |f(x) - f(y)| \geq \epsilon$$

と表される．

この定義で特徴的なのは下線部で，式 (7.2) が成り立つような δ は a には依存せずに選ぶことができる．すなわち，$\delta = \delta(f, a, \epsilon)$ ではなく，$\delta = \delta(f, \epsilon)$ ということである．関数の連続性は各点における性質だが，一様連続性は区間全体にわたる性質である．とくに，一様連続であれば連続である．

---

[1] δ をより小さい正の数に取り替えることはできるから，δ として取りうる値の上限が問題となる．

[2] 実際，任意の ϵ に対してそのような δ をひとつ選んで対応させることができるのだから，関数 $\epsilon \mapsto \delta = \delta(\epsilon)$ を作ることもできる．

定義の意味． 意味を理解するために

$$|x-a|<\delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(a)|<\epsilon$$

という部分を解釈してみよう．x を時間パラメーター（時刻，秒単位）とし，$f(x)$ を動点 P の時刻 x における位置（メートル単位）だとしよう．このとき，上の式は動点 P の移動量について「δ 秒未満の時間で進めるのは ϵ メートルまで」という「移動量の制限」（ある種の「速度制限」）だと解釈できる．

「一様連続性」というのは，先に ϵ メートルという移動量の制限を決めたとき，それ相応の移動時間の制限（δ 秒未満）を設けることで，時刻 $x=a$ **に依存せずに**，「δ 秒未満の時間で進めるのは ϵ メートルまで」という「一様な制限」が実現できる，ということである．

一方，ふつうの「連続性」は「δ 秒未満の時間で進めるのは ϵ メートルまで」という制限を実現するために必要な移動時間の上限 δ の取り方が $x=a$ の値に依存してもかまわないのである．

例題 7.1 (一様連続でない例) 関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ で定める．

(1) 任意の $M>0$ に対し，区間 $[0,M]$ 上では一様連続であることを示せ．

(2) 区間 $[0,\infty)$ 上で一様連続ではないことを示せ．

解答． まず $y=x+\Delta x$ とおくと，

$$|f(y)-f(x)|=|(x+\Delta x)^2-x^2|=|\Delta x||2x+\Delta x|$$

であることに注意しておく．

(1) $x\in[0,M]$ とする．$y=x+\Delta x$，$|\Delta x|\le 1$ と仮定すれば，上の式と三角不等式より $|f(y)-f(x)|=|\Delta x||2x+\Delta x|\le|\Delta x|(2|x|+1)\le|\Delta x|(2M+1)$．よって任意に小さい $\epsilon>0$ が与えられたとき，$\delta=\min\{1,\epsilon/(2M+1)\}$ とおけば，任意の $x,\,y\in[0,M]$ に対し

$$|x-y|=|\Delta x|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\delta(2M+1)<\epsilon$$

とできる．ゆえに，$f(x)$ は $[0,M]$ 上で一様連続である．

(2) $\epsilon=1$ として，任意の $\delta>0$ に対しある $x,\,y\in[0,\infty)$ が存在して $|x-y|<\delta$ かつ $|f(x)-f(y)|\ge 1$ とできることを示そう．

$y=x+\Delta x$ とおき $|\Delta x|\le 1$ と仮定すれば，三角不等式より $|f(y)-f(x)|=|\Delta x||2x+\Delta x|\ge|\Delta x|(2|x|-1)$ が成り立つ．よって $(2|x|-1)\ge 1/|\Delta x|$ となるように x と Δx を選べば，$|f(y)-f(x)|\ge 1$ となる．

以上の計算から，任意に小さく与えられた $\delta>0$ に対して，

$$0<|\Delta x|<\min\{\delta,1\};\quad |x|\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\Delta x|}+1\right);\quad y=x+\Delta x$$

となるように $\Delta x,\,x,\,y$ の順に定めれば，$|x-y|<\delta$ かつ $|f(x)-f(y)|\ge 1$ を満たす．■

閉区間での一様連続性． 実用上重要なのが，次の定理である：

定理 7.1 (閉区間での一様連続性) 閉区間上の連続関数は一様連続である．

証明． 背理法により証明する．ある閉区間 I 上の関数 $f:I\to\mathbb{R}$ が一様連続でなかったとしよう．すなわち，ある $\epsilon>0$ が存在し，任意の（任意に小さい） $\delta>0$ に対し，ある $x=x(\delta),\,y=y(\delta)\in I$ が存在して，$|x-y|<\delta$ かつ $|f(x)-f(y)|\ge\epsilon$ が成り立つ．

とくに自然数 $n=1,2,\cdots$ それぞれに対して $\delta=1/n$ を考えると，$|x_n-y_n|<1/n$ かつ $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\epsilon$ が成り立つような $x_n,y_n\in I$ が存在する．

いま数列 $\{x_n\}$ は有界な閉区間 I 内の数列であるから，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理（定理 5.3）より収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ を持つ．I は閉区間なので，その極限 $A=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$ は I に含まれる．したがって関数の値 $f(A)$ を考えることができる．

このとき，

$$|y_{n_k} - A| \le |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - A| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - A| \to 0 \ \ (k \to \infty)$$

であるから，部分列 $\{y_{n_k}\}_k$ も A に収束する．よって関数 f の連続性より，

$$f(A) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

これは k によらず $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \epsilon$ が成り立つことに反する． ■

注意． 関数の一様連続性は積分可能性を考えるときに重要である．たとえば閉区間上の連続関数が積分可能であることを証明するときに，一様連続性に関する議論が必要である．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

定積分

配布日：2016/05/29　Version：1.1

レポート問題 (5/22 出題)

締め切りは 5 月 29 日の講義開始前とします.（研究室 H210 メールボックスへの提出は当日朝 10 時 20 分まで．返却は第 2 クォーターの講義中に行います.）

問題 8-1. (固定点の存在) 区間 $[0,1]$ 上で定義された連続関数 $y=f(x)$ が $0 \le f(x) \le 1$ を満たすならば，$f(c)=c$ を満たす c が区間 $[0,1]$ に存在することを示せ.（Hint. $x-f(x)$ に中間値の定理を適用する.）

問題 8-2. (一様連続性) 以下の関数は一様連続でないことを示せ.

(1) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$

(2) $f:(0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$

(3) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

問題 8-3. (一様連続性) 以下の関数は一様連続であることを示せ.

(1) $f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$

(2) $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$

5/29 の講義ノート

リーマン和

区間 $[a,b]$ 上の（連続とは限らない）関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を考える．区間 $[a,b]$ から

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

を満たす $n+1$ 個の点を集めた集合

$$\Delta=\{x_0,\,x_1,\,\ldots,\,x_{n-1},\,x_n\}$$

を区間 $[a,b]$ の**分割** (partition) という.

分割 Δ が与えれたとき，各 $k=0,1,\ldots,n-1$ に対し $x_k\le x_k^*\le x_{k+1}$ を満たす x_k^* を選んで得られる n 点からなる集合

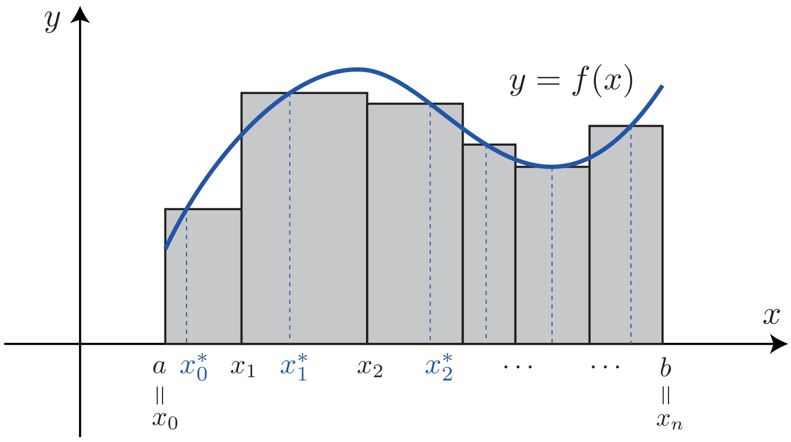
$$\Delta^*=\{x_0^*,\,x_1^*,\,\ldots,\,x_{n-1}^*\}$$

を分割 Δ の**代表点集合** (set of representatives) という.

関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し，区間 $[a,b]$ の分割 Δ とその代表点集合 Δ^* が定める量

$$\Sigma(f,\Delta,\Delta^*):=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

（ただし $\Delta x_k:=x_{k+1}-x_k>0$）を関数 f の**リーマン和**（Riemann sum）とよぶ.



直感的には，関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる領域の面積を長方形（「短冊」）で近似しているのだと考えられる[1]．

定積分 区間 $[a, b]$ とその分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ に対し，分割された区間の最大幅を

$$|\Delta| := \max\{\varDelta x_k = x_{k+1} - x_k \mid 0 \le k \le n-1\}$$

と表すことにする．

定義（積分可能性，定積分）． 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が**積分可能** (integrable) であるとは，以下を満たす実数 A が存在することをいう：「任意の正の数 ϵ に対し，ある正の数 δ が存在し，すべての $|\Delta| < \delta$ を満たす分割 Δ とその代表点集合 Δ^* に対し，

$$|\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) - A| < \epsilon$$

が成り立つ．」このとき，

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \Sigma(f, \Delta, \Delta^*) = A$$

と表す．また，実数 A を関数 f の $[a, b]$ における**定積分** (definite integral) とよび，

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

と表す．積分可能な関数は**可積分関数** (integrable function) とよばれる．

積分可能であるということは，記号で表すと

$$(^\exists A \in \mathbb{R})(^\forall \epsilon > 0)(^\exists \delta > 0)(^\forall \Delta \ : [a, b] \text{ の分割})(^\forall \Delta^* \ : \Delta \text{ の代表点集合})$$
$$|\Delta| < \delta \implies |\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) - A| < \epsilon.$$

となる．すなわち，分割 Δ の最大幅 $|\Delta|$ が十分に小さければ，代表点集合 Δ^* の取り方に依存せずに，リーマン和は ϵ 未満の誤差で A の値を近似するのである．

直観的には，定積分は「関数のグラフと軸が囲む部分の符号つき面積」であり，リーマン和はそれを「短冊」（細長い長方形）の面積和で近似したものである，その近似の精度を上げるために

[1] ただし，「面積」の概念はむしろ積分（重積分）を経由して定義されるものであるから，堂々巡りにならないように「面積」という言葉は表にださずに議論しなくてはならない．

は，短冊の幅を細かくする必要があるだろう．これを数学的に定式化したのが上の積分可能性なのである．

注意． 関数が「積分可能かどうか」をこの定義どおりに判定するには，定積分 A の値をあらかじめ知っていなくてはならない．それでは都合が悪いので，A の値を用いずに積分可能性を判定する方法が必要である [2]．

注意． 上記の意味で可積分関数は「リーマン可積分な関数」とよばれ，のちに学ぶ「ルベーグ可積分な関数」と区別される．

積分可能性の判定方法

以下，関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は有界な関数であると仮定する．すなわち，ある実数 $m<M$ が存在して，$f:[a,b]\to[m,M]$ と表されるものとする．

区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^n$ が与えられているとき，各 $k=0,1,\dots,n-1$ に対し

$$M_k := \sup\{f(x)\mid x_k\le x\le x_{k+1}\}$$
$$m_k := \inf\{f(x)\mid x_k\le x\le x_{k+1}\}$$

とおくことにする．仮定より $m\le m_k\le M_k\le M$ が成り立つことに注意しよう．さらに，

$$S(f,\Delta) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k\,\Delta x_k$$
$$s(f,\Delta) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k\,\Delta x_k$$

（ただし $\Delta x_k := x_{k+1}-x_k$）とおけば， Δ の任意の代表点集合 Δ^* に対し

$$m(b-a)\le s(f,\Delta)\le \Sigma(f,\Delta,\Delta^*)\le S(f,\Delta)\le M(b-a)$$

が成り立つ．とくに $s(f,\Delta)$, $S(f,\Delta)$ の取りうる値の範囲は有界であるから，ワイエルシュトラスの定理（定理 2.2）より

$$S(f) := \inf\{S(f,\Delta)\mid \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割}\}$$
$$s(f) := \sup\{s(f,\Delta)\mid \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割}\}$$

が存在する．このとき，以下が成り立つ：

定理 8.1 (ダルブー (Darboux) の定理) 有界な関数 $f:[a,b]\to[m,M]$ に対し，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f,\Delta)=S(f),\qquad \lim_{|\Delta|\to 0} s(f,\Delta)=s(f)$$

が成り立つ．すなわち，任意の正の数 $\epsilon>0$ に対しある $\delta>0$ が存在し $|\Delta|<\delta$ であれば $|S(f,\Delta)-S(f)|<\epsilon$ かつ $|s(f,\Delta)-s(f)|<\epsilon$ とできる．

証明． $S(f)$ に関して証明しよう．$s(f)$ についても同様である．

任意の $\epsilon>0$ を固定する．このとき，$S(f)$ の定義からある分割 Δ_0 が存在して

$$S(f)\le S(f,\Delta_0)<S(f)+\epsilon \tag{8.1}$$

[2] ちょうど，数列の収束性をコーシー列の収束性に置き換える必要が生じた事情と同じである．

を満たす．この Δ_0 は $N+1$ 個の点からなり，区間 $[a,b]$ を N 個の区間に分割するものとする．また，分割された区間の長さの最小値を δ とする.（このとき $0<\delta\le|\Delta_0|$ である.）

さて区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^n$ で，$|\Delta|<\delta$ を満たすものを任意に選んで，

$$S(f,\Delta)-S(f,\Delta\cup\Delta_0)$$

という量を評価してみよう．$|\Delta|<\delta$ より，分割 Δ が定める各区間 $[x_k,x_{k+1}]$ は分割 Δ_0 の点を高々ひとつしか含まない．例えば，ある $[x_k,x_{k+1}]$ 内に $x_k<\xi<x_{k+1}$ を満たす $\xi\in\Delta_0$ が存在したと仮定する.（Δ_0 は (a,b) 内にちょうど $N-1$ 個の点をもつから，そのような k は高々 $N-1$ 個しかない.）区間 $[x_k,\xi]$ と $[\xi,x_{k+1}]$ における関数 f の上限をそれぞれ $M_1,M_2\in[m_k,M_k]$ とおくと，

$$M_k\left(x_{k+1}-x_k\right)\ge M_1\left(\xi-x_k\right)+M_2\left(x_{k+1}-\xi\right)>m_k\left(x_{k+1}-x_k\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}0\le&M_k\left(x_{k+1}-x_k\right)-\left\{M_1\left(\xi-x_k\right)+M_2\left(x_{k+1}-\xi\right)\right\}\\\le&\left(M_k-m_k\right)\left(x_{k+1}-x_k\right)\\\le&(M-m)|\Delta|\end{aligned}\tag{8.2}$$

が成り立つ．一方，もし開区間 (x_k,x_{k+1}) 内に Δ_0 の点がなければ区間 $[x_k,x_{k+1}]$ 上に対応する $S(f,\Delta)$ と $S(f,\Delta\cup\Delta_0)$ への寄与は相殺されるので，結局 $S(f,\Delta)-S(f,\Delta\cup\Delta_0)$ という量は高々 $N-1$ 個の式 (8.2) 右辺の形の量の和であり，

$$0\le S(f,\Delta)-S(f,\Delta\cup\Delta_0)\le(M-m)|\Delta|\times(N-1)$$

を満たす．とくに $|\Delta|<\delta':=\epsilon/\{(M-m)(N-1)\}$ とすれば

$$0\le S(f,\Delta)-S(f,\Delta\cup\Delta_0)<\epsilon$$

が成り立つ．これより，$S(f,\Delta\cup\Delta_0)\le S(f,\Delta)$ であるから，$S(f)\le S(f,\Delta\cup\Delta_0)$ と 式 (8.1) より，

$$0\le S(f,\Delta\cup\Delta_0)-S(f)\le S(f,\Delta_0)-S(f)<\epsilon.$$

ゆえに

$$0\le S(f,\Delta)-S(f)=S(f,\Delta)-S(f,\Delta\cup\Delta_0)+S(f,\Delta\cup\Delta_0)-S(f)<2\epsilon.$$

すなわち，任意の $\epsilon>0$ に対し，$|\Delta|<\min\{\delta,\delta'\}$ であれば $|S(f,\Delta)-S(f)|<2\epsilon$ を満たす．■

定理 8.2 (積分可能性の判定) 有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が積分可能であることの必要十分条件は $S(f)=s(f)$ が成り立つことである．

証明． f が積分可能であると仮定し，$A:=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とおく．このとき，$S(f)\le A$ を示そう．$\epsilon>0$ を任意に選び固定する．区間 $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^n$ に対し，$M_k-\epsilon<f(x_k^*)\le M_k$ を満たす $x_k^*\in[x_k,x_{k+1}]$ を選べば，代表点集合 $\Delta^*=\{x_k^*\}_{k=0}^{n-1}$ が定めるリーマン和 $\Sigma(f,\Delta,\Delta^*)$ は

$$S(f)\le S(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k\le\sum_{k=0}^{n-1}\{f(x_k^*)+\epsilon\}\Delta x_k\le\Sigma(f,\Delta,\Delta^*)+\epsilon(b-a)$$

を満たす．f は積分可能であったから，ある $\delta > 0$ が存在し $|\Delta| < \delta$ のとき $|\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) - A| < \epsilon$ を満たす．よって

$$S(f) \le \Sigma(f, \Delta, \Delta^*) + \epsilon(b-a) \le (A+\epsilon) + \epsilon(b-a)$$

となる．ϵ の取り方は任意であったから，$S(f) \le A$ が成り立つ．同様の議論により $A \le s(f)$ が示されるから，$A \le s(f) \le S(f) \le A$．よって $s(f) = S(f)$ が成り立つ．

次に $S(f) = s(f)$ と仮定する．ダルブーの定理より，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し，$\Delta| < \delta$ を満たす分割 Δ に対し $|S(f, \Delta) - S(f)| < \epsilon$ かつ $|s(f, \Delta) - s(f)| < \epsilon$ となる．Δ の代表点集合 Δ^* を任意に選ぶと，

$$s(f) - \epsilon < S(f, \Delta) \le \Sigma(f, \Delta, \Delta^*) \le S(f, \Delta) < S(f) + \epsilon$$

が成り立つ．よって $A := S(f) = s(f)$ に対し，$|\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) - A| < \epsilon$ が成り立つ．すなわち，f は積分可能である． ■

例 1． 関数 $f : [a, b] \to \{0, 1\}$ を x が有理数のとき $f(x) = 0$，無理数のとき $f(x) = 1$ として定める．区間 $[a, b]$ の任意の分割 Δ に対し，分割点の間には必ず有理数と無理数が含まれることから，$S(f, \Delta) = 1$ かつ $s(f, \Delta) = 0$ となる．したがって $S(f) = 1 > 0 = s(f)$ であり，定理 8.2 から f は積分可能ではない[3]．

例 2（連続関数）． 積分可能となる十分条件を一つ与えよう：

> **定理 8.3 (連続関数は積分可能)** 閉区間上の連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は積分可能である．

証明には，前回学んだ「連続関数の一様連続性」が使われる．

証明． 定理 6-4 より閉区間上の連続関数は最大値と最小値をもつから，f は有界な関数である．また，定理 7-1 より，f は一様連続でもある．とくに，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し，$x, y \in [a, b]$ が $|x - y| < \delta$ を満たすとき $|f(x) - f(y)| < \epsilon/(b-a)$ を満たす．

いま $|\Delta| < \delta$ を満たす区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ をとる．このとき，f は各 $[x_k, x_{k+1}]$ 上連続であり，最大値と最小値をもつ．より具体的に，ある $\alpha_k, \beta_k \in [x_k, x_{k+1}]$ が存在して，

$$\begin{aligned} f(\beta_k) &= \max\{f(x) \mid x_k \le x \le x_{k+1}\} = \sup\{f(x) \mid x_k \le x \le x_{k+1}\} = M_k \\ f(\alpha_k) &= \min\{f(x) \mid x_k \le x \le x_{k+1}\} = \inf\{f(x) \mid x_k \le x \le x_{k+1}\} = m_k \end{aligned}$$

が成り立つ．とくに $|\alpha_k - \beta_k| \le x_{k+1} - x_k < \delta$ であることに注意すると，一様連続性より

$$\begin{aligned} |S(f, \Delta) - s(f, \Delta)| &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \{f(\beta_k) - f(\alpha_k)\} \Delta x_k \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \epsilon. \end{aligned}$$

一方，ダルブーの定理（定理 8.1）より（必要なら δ をさらに小さく取り直して）

$$|S(f, \Delta) - S(f)| < \epsilon \quad \text{かつ} \quad |s(f, \Delta) - s(f)| < \epsilon$$

[3] リーマン可積分ではないが，ルベーグ可積分ではある．

が成り立つことから，

$$|S(f)-s(f)| \le |S(f)-S(f,\Delta)| + |S(f,\Delta)-s(f,\Delta)| + |s(f,\Delta)-s(f)| < 3\,\epsilon.$$

ϵ は任意なので $S(f)=s(f)$ が成り立つ．定理 8.2 より f は積分可能である．■

例 3（単調関数）． 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が**単調増加** [**単調減少**] であるとは，$x \ge y$ のとき $f(x) \le f(y)$ [$f(x) \ge f(y)$] が成り立つことをいう．単調増加または単調減少な関数は**単調関数** (monotone function) とよばれる．単調関数は有界であることに注意しよう．なぜなら，単調性より自動的に $f(a)$ と $f(b)$ が最大値あるいは最小値を与えるからである．

このとき，以下が成り立つ：

> **定理 8.4 (単調関数は積分可能)** 閉区間上の単調関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は積分可能である．

単調関数は連続とは限らないので，不連続点は無限個存在するかもしれない．それでも，積分可能性は保証されるのである．

証明． 単調増加の場合を示す.（単調減少の場合も同様である.）いま $|\Delta|<\delta$ を満たす区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_k\}_{k=0}^n$ をとる．単調増加性より区間 $[x_k,x_{k+1}]$ 上の最大値（上限）は $M_k=f(x_{k+1})$ であり，最小値（下限）は $m_k=f(x_k)$ で与えられる．よって

$$\begin{aligned} 0 < S(f,\Delta)-s(f,\Delta) &= \sum_{k=0}^{n-1}\{f(x_{k+1})-f(x_k)\}\varDelta x_k \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1}\{f(x_{k+1})-f(x_k)\}|\Delta| = \{f(b)-f(a)\}|\Delta|. \end{aligned}$$

よって $|\Delta|$ を十分に小さくとれば $|S(f,\Delta)-s(f,\Delta)|$ は任意に小さくできる．あとは定理 8.3 と同様にして，ダルブーの定理（定理 8.1）より $S(f)=s(f)$ がわかる．■

定積分の基本性質

定積分は $a<b$ を満たす積分区間 $[a,b]$ に対して定義されたが，それ以外の場合にも次のように拡張しておくと便利である：$a<b$ のとき，

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

定積分は以下の性質を満たす（証明は略）：

> **定理 8.5 (定積分の基本性質)** 区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ と $g(x)$ が積分可能であるとき，$f(x)+g(x)$，$f(x)g(x)$ は積分可能である．さらに，以下が成り立つ：
>
> (1) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
>
> (2) 任意の実数 C に対し，$\displaystyle\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$
>
> (3) 任意の実数 $\alpha,\beta,\gamma\in[a,b]$ に対し，$\displaystyle\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx$
>
> (4) $[a,b]$ 上で関数 $f(x)\le g(x)$ が成り立つとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

定理 8.6 (定積分の基本性質 2) 区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ が積分可能であるとき，以下が成り立つ：

(1) 区間 $[a,b]$ 上 $m \le f(x) \le M$ であり，関数 $g:[m,M] \to \mathbb{R}$ が連続関数であるとき，$g(f(x))$ は積分可能である．

(2) とくに $|f(x)|$ は積分可能であり，$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$. さらに $[a,b]$ 上で $|f(x)| \le K$ が成り立つとき，

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le K\,(b-a).$$

(3) **積分の平均値の定理**：区間 $[a,b]$ 上 $m \le f(x) \le M$ であるとき，

$$m \le \mu \le M \quad \text{かつ} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

を満たす実数 μ が存在する．とくに，$f(x)$ が区間 $[a,b]$ 上で連続ならば，$\mu = f(c)$ を満たす c が区間 (a,b) に存在する．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

微分可能性・テイラー展開（6/12）

配布日：2017/06/12　Version：1.1

6/12 の講義ノート

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I,II』（岩波書店）の第 3 章　　• 高木貞治『解析概論』の第 2 章

微分可能性の新しい定義

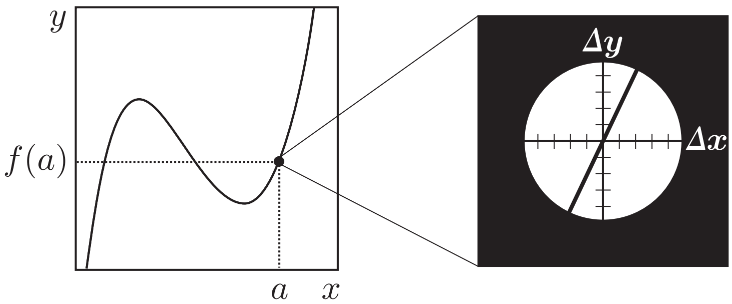
以下，I を区間とし，a を区間 I 上の点とする．また，$f : I \to \mathbb{R}$ を関数とする．
まず，高校で学んだ「微分可能性」と「微分係数」の定義を確認しよう．

定義 （微分可能性の定義 1） 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $x = a$ で**微分可能** (differentiable) であるとは，極限

$$A = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{9.1}$$

が存在することをいう．この極限 A を a における**微分係数** (derivative/differential coefficient) とよび，$f'(a)$ と表す．

顕微鏡の中の比例関数． 式 (9.1) の意味を詳しく解釈してみよう．



たとえば図のような関数 $y = f(x)$ のグラフを，点 $(a, f(a))$ を中心にして顕微鏡で拡大してみる．倍率を上げていくと，拡大されたグラフの断片の凹凸は次第に和らぎ，いつかは線分（直線の断片）のように見えてくるだろう．直観的には，その線分の傾きが微分係数 A だと考えられる．

そこで，式 (9.1) が成り立つことを仮定して，実際に「傾き A の線分（直線）の方程式」を抽出してみよう．

まず「式 (9.1) が成り立つ」ことは,「ある実数 A が存在して

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \right| \to 0 \quad (x \to a)$$

が成り立つ」ことと同値である．そこで，式 (9.1) の lim の中の「平均変化率」と定数 A との差をあらわす関数

$$\eta_a(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - A & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases}$$

を導入する．式 (9.1) よりこの関数は $x = a$ で連続であり，

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \underline{\eta_a(x)(x - a)} \tag{9.2}$$

を満たす．式 (9.2) の下線部は

$$\frac{\eta_a(x)(x-a)}{x-a} = \eta_a(x) \to 0 \quad (x \to a)$$

を満たすので，ランダウの記号[1] を用いると $\eta_a(x)(x-a) = o(x-a)$ と書ける．よって,「式 (9.1) が成り立つ」ことから

$$^{\exists}A \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a) \tag{9.3}$$

がいえる．逆に，この式 (9.3) が成り立つとき

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + \frac{o(x-a)}{x-a} \to A \quad (x \to a)$$

であるから，式 (9.1) が成立する．

以上の考察より，微分可能性の定義 1 は次の定義と同値である：

定義　(微分可能性の定義 2) 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $x = a$ で**微分可能**であるとは，ある実数 A が存在して，$x \to a$ のとき

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a) \tag{9.4}$$

が成り立つことをいう．この極限 A を a における**微分係数**とよび，$f'(a)$ と表す．式 (9.4) の右辺から $o(x-a)$ を除いた 1 次関数 $y = f(a) + A(x-a)$ を関数 $f(x)$ の（グラフの） $x = a$ における**接線** (tangent line) **の方程式**もしくは **1 次近似** (もしくは**線形近似**，linear approximation) とよぶ．

この「接線」は，顕微鏡で拡大したときに見えてきた「線分」にほかならない．式 (9.4) 右辺の $o(x-a)$ は，関数 $f(x)$ を接線の方程式で近似したときの「誤差」にあたる量である．これは $|x-a|$ に比べて相対的に速く小さくなるから，顕微鏡の拡大率を上げると私たちには知覚できなくなってしまうのである．

注意（区間の端点における微分）． 式 (9.1) や式 (9.4) の条件 $x \to a$ では暗に $x \in I$ が仮定されていることを思い出そう．たとえば $I = [a, b]$ の場合，すなわち a が区間 I の左の端点である場合，式 (9.1) の極限は

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ということである．この場合，右辺の右極限が存在するとき，その値 A をもって $f'(a) := A$ と定義するのである．

---

[1] 与えられた関数 $f(x)$ がある基準となる関数 $g(x)$ よりも「相対的に速く」 0 に収束することを，$f(x) = o(g(x))$ と表すのが**ランダウの記号（記法）**(Landau symbol/notation) であった．この $o(g(x))$ は「スモールオー $g(x)$」と読む.（本当はギリシャ文字のオミクロン (omicron) なのだという.）厳密には，次のように定義する：

定義　(ランダウの記号) 関数 $f(x)$ が $x \to a$ のとき 0 に収束し，さらに別の関数 $g(x)$ に対し

$$\frac{[f(x) \text{ と } 0 \text{ の距離}]}{[g(x) \text{ と } 0 \text{ の距離}]} = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \to 0$$

を満たすとき，$f(x) = o(g(x)) \ \ (x \to a)$ と表す．

$f(x) = o(g(x))$ のあとの $(x \to a)$ は文脈から明らかな場合しばしば省略される．

同様に，右端の点 b においても（左）極限

$$B = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b-0} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

が存在するとき，$f'(b) := B$ と定義する [2]．

例 1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ で定める．任意の実数 a に対し恒等式 $x^2 = a^2+2a(x-a)+(x-a)^2$ が成り立つ．$(x-a)^2 = o(x-a)$ $(x\to a)$ なので，$A=2a$ とおくと

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a)$$

が成り立つ．すなわち，f はすべての $x=a$ において微分可能であり，$f'(a)=2a$．

例 2（ライプニッツ則，the Leibniz rule）． ふたつの関数 $f, g: I\to\mathbb{R}$ が $a\in I$ で微分可能であったとしよう．すなわち，関数 $r_a(x) := f(x) - \{f(a)+f'(a)(x-a)\}$，$s_a(x) := g(x) - \{g(a)+g'(a)(x-a)\}$，とおくとき

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+r_a(x), \quad r_a(x) = o(x-a) \\ g(x) &= g(a)+g'(a)(x-a)+s_a(x), \quad s_a(x) = o(x-a) \end{aligned}$$

を満たす．これらの式の積をとると，

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big\{f(a)+f'(a)(x-a)+r_a(x)\big\}\big\{g(a)+g'(a)(x-a)+s_a(x)\big\} \\ &= f(a)g(a) + \big\{f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\big\}(x-a) + R_a(x), \\ \text{ただし}\quad R_a(x) &= \big\{f(a)+f'(a)(x-a)\big\}s_a(x) + \big\{g(a)+g'(a)(x-a)\big\}r_a(x) + r_a(x)s_a(x) \end{aligned}$$

となる．$x\to a$ のとき

$$\frac{R_a(x)}{x-a} = \big\{f(a)+f'(a)(x-a)\big\}\frac{s_a(x)}{x-a} + \big\{g(a)+g'(a)(x-a)\big\}\frac{r_a(x)}{x-a} + r_a(x)\frac{s_a(x)}{x-a} \to 0$$

なので，$R_a(x) = o(x-a)$．よって関数 $f(x)g(x)$ も $x=a$ で微分可能であり，その微分係数は $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ である．

連続性との関係． 「微分可能性」の定義には，「連続性」が仮定されていない．仮定しなくても，次の命題から自動的に導かれるからである：

> **命題 9.1 (微分可能なら連続)** 関数 $y=f(x)$ が $x=a$ において微分可能であれば，$x=a$ において連続．

証明． 式 (9.4) より $x\to a$ とすれば $f(x)\to f(a)$ は明らか． ■

導関数

> **定義 （導関数）** 関数 $f: I\to\mathbb{R}$ が集合 $X\subset I$ のすべての点で微分可能であるとき，f は X 上で微分可能であるという．f が定義域 I 上で微分可能であるときは，単に f は微分可能（な関数）であるという．このとき，$x\mapsto f'(x)$ で定まる I 上の関数 $f': I\to\mathbb{R}$ を f の導関数 (derivative) とよび，$y=f(x)$ のとき次のようにあらわされる：
>
> $$y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ \{f(x)\}',\ \frac{df}{dx}(x),\ Df(x),\ \text{etc.}$$

[2] この場合，f は $x=a$ で**右微分可能** (right differentiable)，$x=b$ で**左微分可能** (left differentiable) とよび A を**右微分係数** (right derivative)，B を**左微分係数** (left derivative) という．

例 3. 関数 f と g が I 上で微分可能であるとき，例 2 より $h(x) := f(x)g(x)$ で定まる関数 h も I 上で微分可能であり，

$$h'(x) = \{f(x)g(x)\}' = \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

導関数の公式. 導関数については以下の公式が成立するのであった.

公式 9.2 (導関数の公式) 関数 $f(x), g(x)$ が微分可能な関数であるとき，以下が成り立つ;

(1) $\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$.

(2) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.（ライプニッツ則）

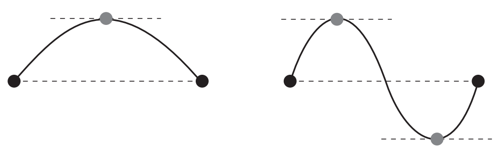
(3) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$.　（$g(x) \neq 0$ となる x において）

(4) $\{g(f(x))\}' = g'(f(x))\,f'(x)$.　（$g(f(x))$ が定義できるとき）

ロルの定理と平均値の定理

定理 6.5（閉区間における最大・最小値の存在）の主張によれば,「閉区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数 $y=f(x)$ は，最大値と最小値を持つ」のであった.

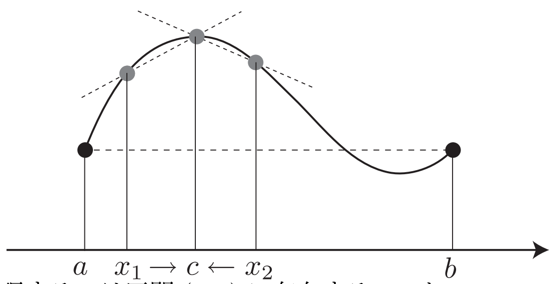
いま $f(a)=f(b)$ を仮定しよう．さらに開区間 (a,b) 上で微分可能であれば，最大値もしくは最小値を実現する点では微分係数が 0 になるであろう（右図）．すなわち，次が成り立つ：



定理 9.3 (ロルの定理) 閉区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数 $y=f(x)$ は，開区間 (a,b) 上で微分可能であり，$f(a)=f(b)$ を満たすとする．このとき，$f'(c)=0$ となる c が (a,b) に（少なくともひとつ）存在する.

証明.

$f(x)$ が定数関数のとき定理は明らかなので，$f(x)$ は定数関数でないと仮定する．関数 $y=f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続なので最大値 M と最小値 m を持つ（定理 6.5）が，定数関数ではないので $m<M$ を満たしている．このとき，$m \le f(a)=f(b)<M$ もしくは $m<f(a)=f(b)\le M$ のうち，少なくとも一方が成り立つ.



$m \le f(a)=f(b)<M$ のとき，最大値 $f(c)=M$ を実現する c は区間 (a,b) に存在する．いま $x_1 \to c-0$ かつ $x_2 \to c+0$ のとき，$f(x_1)\le f(c)$ かつ $f(c)\ge f(x_2)$ より

$$f'(c) = \lim_{x_1\to c}\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c} \ge 0 \quad かつ \quad f'(c) = \lim_{x_2\to c}\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c} \le 0$$

が成り立つ．よって $f'(c)=0$．$m<f(a)=f(b)\le M$ の場合は最小値 $f(c)=m$ を実現する c が区間 (a,b) に存在するので，同様の議論で $f'(c)=0$ がわかる. ■

平均値の定理． ロルの定理（定理 9.3）から，次の「平均値の定理」がただちに導かれる：

定理 9.4 (平均値の定理) 関数 $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上で連続，開区間 (a, b) 上で微分可能とする．このとき

$$\boldsymbol{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),} \tag{9.5}$$

すなわち

$$\boldsymbol{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)} \tag{9.6}$$

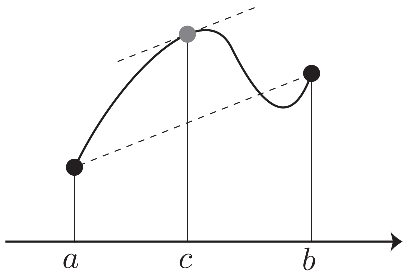
を満たす c が (a, b) に（少なくともひとつ）存在する．

式 (9.5) の図形的な意味は,「点 $(a, f(a))$ と点 $(b, f(b))$ を結ぶ線分と平行な接線をもつ点 $(c, f(c))$ が $y = f(x)$ のグラフ上に存在する」ということである．(式 (9.5) の左辺は a から b までの**平均変化率**とよばれる量であった.）とくに，$f(a) = f(b)$ のときはロルの定理そのものである．また，式 (9.6) は次章で学ぶテイラー展開の特別な場合になっていて，応用上もこの形で用いられることが多い

証明． 点 $(a, f(a))$ と点 $(b, f(b))$ を結ぶ線分 ℓ の傾きを $A = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ とおき，関数 $F(x)$ を

$$F(x) := f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}$$

と定める（中括弧内は線分 ℓ の方程式である.）このとき $F(x)$ はロルの定理（定理 9.3）の仮定をすべて満たすから，$F'(c) = 0$ を満たす c が区間 (a, b) に存在する．$F'(x) = f'(x) - A$ より，$f'(c) = A$. ■



関数の増減への応用

高校で学んだように，微分係数の正負を確認することで関数の増減や極大・極小が判定できるのであった．ロルの定理（定理 9.3）と平均値の定理（定理 9.4）の応用として，その根拠を厳密な形で与えよう．

極大と極小． まずは「極大値」と「極小値」について，その定義を確認する：

定義 (極大と極小) $x = c$ を含むある開区間の上で「$x \neq c$ ならば $f(x) < f(c)$」 が成り立つとき，$f(x)$ は $x = c$ で**極大**であるといい，$f(c)$ を**極大値**とよぶ．また，$x = c$ を含むある開区間の上で「$x \neq c$ ならば $f(x) > f(c)$」 が成り立つとき，$f(x)$ は $x = c$ で**極小**であるといい，$f(c)$ を**極小値**とよぶ．極大値と極小値をあわせて**極値**とよぶ．

極値をとる点では，グラフの接線の傾きが 0 となるのであった．ロルの定理（定理 9.3）のアイディアで，それを証明してみよう．

命題 9.5 (極値なら微分が 0) 微分可能な関数 $f(x)$ が $x = c$ で極値をとるならば，$f'(c) = 0$.

注意． $f'(c) = 0$ であっても，極値とならない場合がある．たとえば定数関数，$f(x) = x^3$ の $x = 0$ など．

証明． まず $x = c$ で極大と仮定する．$x = c$ を含む十分小さな区間上で $x \neq c$ のとき $f(x) < f(c)$．ロル

の定理の証明と同様に左右からの平均変化率の極限をとることで $f'(c) \geq 0$ かつ $f'(c) \leq 0$ を得る．よって $f'(c) = 0$．$x = c$ で極小の場合も同様.（もしくは，$-f(x)$ を考えれば極大の場合に帰着される．）■

関数の増減. グラフを描くときに重宝する次の定理は，平均値の定理（定理 9.4）を用いて証明される：

定理 9.6 (微分係数と増減) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続であり，開区間 (a,b) 上で微分可能とする．このとき，以下が成り立つ：

(1) 区間 (a,b) 上で $f'(x) > 0$ ならば，$f(x)$ は (a,b) 上で真に単調増加.

(2) 区間 (a,b) 上で $f'(x) < 0$ ならば，$f(x)$ は (a,b) 上で真に単調減少.

(3) 区間 (a,b) 上で $f'(x) = 0$（一定）ならば，$f(x)$ は (a,b) 上で定数関数.

証明. まず $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ を満たす x_1 と x_2 を任意に選び，関数 $y = f(x)$ を閉区間 $[x_1, x_2]$ に制限する．これに平均値の定理（定理 9.4）を適用しよう．すなわちある c が区間 (x_1, x_2) に存在して，式 (9.6) より

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

を満たす．$x_2 - x_1 > 0$ より，左辺の符号は $f'(c)$ の符号で決まる．たとえば $f'(c) > 0$ であれば $f(x_2) > f(x_1)$ となり，$f'(c) < 0$ であれば $f(x_2) < f(x_1)$，$f'(c) = 0$ であれば $f(x_1) = f(x_2)$ となる．x_1，x_2 は自由に選べるので定理を得る．■

高階導関数

定義 (n 階導関数) 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対し，（存在するかどうかは別にして，形式的に）

$$\boldsymbol{f^{(0)}(x) := f(x), \quad f^{(n+1)}(x) := \left(f^{(n)}\right)'(x)}$$

と定義する．集合 $X \subset I$ と負でない整数 n に対し，すべての $x \in X$ において $f^{(n)}(x)$ が定義できるとき，$\boldsymbol{f}$ **は** $\boldsymbol{X}$ **上で** $\boldsymbol{n}$ **回微分可能**であるといい，X 上の関数 $f^{(n)} : x \mapsto f^{(n)}(x)$ を f の $\boldsymbol{n}$ **階導関数**という．$y = f(x)$ と表すとき，$f^{(n)}(x)$ は

$$\boldsymbol{y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad D^n f(x)}$$

のようにも表される．また，$f^{(2)}(x), f^{(3)}(x)$ はそれぞれ $\boldsymbol{f''(x)}$**,** $\boldsymbol{f'''(x)}$ のようにも表す．関数 f が定義域 I 上で n 回微分可能であるとき，f は $\boldsymbol{n}$ **回微分可能（な関数）**であるという．

「n 回微分可能な関数」よりも使い勝手がよく応用上重要なのが，次の「C^n 級関数」である：

定義 (C^n 級関数) ある負でない整数 n に対し $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上で n 回微分可能であり，$f^{(n)}$ が I 上で連続であるとき，f **は（I 上で）C^n 級**もしくは f **は（I 上の）C^n 級関数**であるという．また，任意の自然数 n について関数 f が I 上で C^n 級であるとき，f **は（I 上で）C^∞ 級**もしくは f **は（I 上の）C^∞ 級関数**であるという．

関数の「滑らかさ」に応じて等級をつけたのである [3]．

[3] 関数の集まりとしての包含関係を「滑らかさの等級の大小」として表現すると，「関数 $<$ 連続関数 $= C^0$ 級 $<$ 微分可能 $< C^1$ 級 $<$ 2 回微分可能 $< C^2$ 級 $<$ 3 回微分可能 $< C^3$ 級 $< \cdots < C^\infty$ 級 $<$ 解析的 $= C^\omega$ 級」

注意.

- C^0 級関数とは，ようするに連続関数のことである．
- f が n 回微分可能でも，C^n 級とはかぎらない．すなわち，「$f^{(n)}$ は存在するが，連続ではない」ような関数が存在する．

例 4. $y = f(x)$ を $f(0) = 0$，$x \neq 0$ のとき $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ と定義する．この関数は，「$\mathbb{R}$ 上で 1 回微分可能だが，C^1 級ではない関数」の例である（→レポート問題）．

テイラー展開

実数の小数展開を思い出そう．たとえば $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ は，級数

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots$$

にほかならない．これを有限項で打ち切ることで，$\sqrt{2} \approx 1.41$ といった近似値が得られるのである．

同じことを関数でやってみよう．たとえば $f(x) = x^3$ を

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 \tag{9.7}$$

のように変形してから，さらに $x = 1.1 = 1 + 1/10$ を代入すると，

$$(1.1)^3 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} = 1.331$$

と楽に計算できる．同様に $x = 1.02$ とおくと，

$$\begin{aligned}(1.02)^3 &= 1 + 3 \times 0.02 + 3 \times (0.02)^2 + (0.02)^3 \\ &= 1 + 0.06 + 0.0012 + 0.000008 \\ &= 1.061208\end{aligned}$$

を得るが，実用上は必要な精度にあわせて計算を打ち切って，「1 次近似」1.06，「2 次近似」1.0612，「3 次近似」1.061208 のいずれかを選ぶのが効率的だろう．

一般の関数を計算するときにも，同様の多項式展開ができれば単純な四則だけで満足のいく近似値が得られると期待される．その期待に応えてくれるのが，次の「テイラー展開」である：

定理 9.7 (テイラー展開) 関数 $y = f(x)$ は区間 I 上で n 回微分可能とする．$a \in I$ を固定するとき，すべての $x \in I$ に対して

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots} \\ \boldsymbol{+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}} \end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

$$\boldsymbol{+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n} \quad \text{(ii)}$$

を満たす c が a と x の間に存在する．

定義 (テイラー展開・マクローリン展開) 上の式を $f(x)$ の $x = a$ における（n 次）**テイラー展開** (Taylor expansion) とよぶ．とくに $a = 0$ のとき，（n 次）**マクローリン展開** (Maclaurin expansion) ともよばれる．また，(i) の部分を $(n-1)$ **次テイラー多項式**，(ii) の部分を**剰余項** (remainder) とよぶ．

テイラー展開の剰余項を「誤差項」として無視することで，関数の多項式近似が得られるわけである．

注意． テイラー展開について，いくつか注意事項をまとめておこう．

- **c の表現：** c は x （と a）に依存して決まる「正体不明の数」である．$x \neq a$ の場合，大小関係として $a < c < x$ の場合と $x < c < a$ の場合が考えられる．いずれの場合も c は a と x の内分点なので，ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$c = (1-\theta)a + \theta x \iff c = a + \theta(x-a)$$

と表される（θ はやはり正体不明）．ここで $x \to a$ とすれば $c \to a$ であるから，$x = a$ の場合は $c = a$ と選ぶのが妥当であろう.（形式的にはどんな $c \in I$ でもテイラー展開の式は成り立つ.）

- **最良の多項式近似：** $f(x)$ の $(n-1)$ 次テイラー多項式を $F(x)$ とおくと，これは

$$f(a) = F(a),\ f'(a) = F'(a),\ \cdots,\ f^{(n-1)}(a) = F^{(n-1)}(a)$$

を満たす「唯一の」$(n-1)$ 次多項式である．この意味で，テイラー多項式は $(n-1)$ 次以下の多項式の中で関数 $f(x)$ のもっとも良い近似だといえる．たとえば,「1 次テイラー多項式」は接線の方程式にほかならない．

- **平均値の定理との関係：** $n = 1$ のときテイラー展開は平均値の定理（定理 9.4）になっている．実際，$x = b$ とすればテイラー展開は

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \iff f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

- **剰余項の表現あれこれ：** (ii) の剰余項はさまざまな形で表現できる．一般にこれを $R_n = R_n(f,a,x)$ と表すと，定理のなかの剰余項は**ラグランジュ(Lagrange) の剰余項**とよばれている形である．ほかにも，**コーシー (Cauchy) の剰余項**とよばれる

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n$$

（ただし $0 < \theta < 1$，一般には上の θ とは異なる）や，**積分形の剰余項**とよばれる

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$

もある．これらの存在は記憶にとどめつつ，とりあえず (ii)（ラグランジュの剰余項）を完全に覚えておけば十分である．

定理 9.7 の証明． 便宜的に定理中の x を b に置き換えて証明する．また，$b \neq a$ の場合を示せば十分である．いま定数 A を

$$A := \frac{f(b) - \left\{ f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \right\}}{(b-a)^n}$$

と定めると，次が成り立つ：

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + A(b-a)^n \tag{9.8}$$

このとき，a と b の間にある c が存在して，$A = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$ と表されることを示そう．

区間 I 上の関数 $F(x)$ を

$$F(x) := f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + A(b-x)^n$$

とおく．$F(b)$ の値は $f(b)$ であり，式 (9.8) より $F(a)$ の値も同じく $f(b)$ だとわかる．$F(x)$ の微分は

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}\right) - nA(b-x)^{n-1} \\ &= \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - nA(b-x)^{n-1} \end{aligned}$$

と計算できるので，$F(x)$ は微分可能である．よってロルの定理（定理 9.3）より，a と b を端点にもつ開区間の中に $F'(c)=0$ を満たす c が存在する．そのような $x=c$ を $F'(x)$ の式に代入すると，$b\neq c$ より求める等式 $A=f^{(n)}(c)/n!$ を得る． ■

漸近展開． 関数 f が $x=a$ で微分可能であれば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad (x\to a)$$

が成り立つのであった（ほとんど微分可能性の定義 2 そのまま）．これを拡張しよう．

定理 9.8 (漸近展開) $f(x)$ を $x=a$ を含む区間上で定義された C^n 級関数とする．$x\to a$ のとき，次が成り立つ：

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)} \tag{9.9}$$

定義 式 (9.9) を $f(x)$ の $x=a$ における（n 次）漸近展開とよぶ．

証明． x が a に近いとき，n 次のテイラー展開ができて

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

ただし c は x と a の間の数である．これより

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$f(x)$ が C^n 級という仮定より $f^{(n)}(x)$ は連続である．$x\to a$ のとき $c\to a$ であるから，$f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(a)$．よって $\dfrac{[\text{上の式の右辺}]}{(x-a)^n}\to 0 \ \ (x\to a)$． ■

注意． 定理 9.8 の仮定は弱めることができる．式 (9.9) が成り立つには，f が $x=a$ を含む区間上で $n-1$ 回微分可能であり，$x=a$ において $f^{(n-1)}$ が微分可能であればよい．すなわち，微分係数 $f^{(n)}(a)$ が存在すればよい．([小平] の §3.4，[高木] の定理 29 を参照せよ.)

例 5． 指数関数は C^∞ 級なので，任意の $n=0,1,2,\cdots$ について定理 9.8 を適用できる．すなわち $x\to 0$ のとき，

$$e^x = 1 + o(1),\quad e^x = 1 + x + o(x),\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2),\ \cdots.$$

関数の凸性と 2 階微分

2 階微分係数の極限表示． $f: I\to\mathbb{R}$ が C^2 級関数であるとき，$a\in I$ に対し漸近展開 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2! + o((x-a)^2)$ が成り立つ．ここで a は I の端点でないも

のとし，$x = a \pm h,\ h \to 0$ を代入すると，

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + o(h^2),$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + o(h^2)$$

となるから，これら 2 式の和をとると

$$f(a+h)+f(a-h)-2f(a) = f''(a)h^2+o(h^2) \iff f''(a) = \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} + \frac{o(h^2)}{h^2}$$

よって，次の公式を得る：

公式 9.9 (2 階微分係数の極限表示) 関数 $f(x)$ が $x = a$ を含む開区間上で C^2 級であるとき，

$$f''(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

この公式は数値計算において 2 階微分を近似するために用いられる．

関数の凸性 高校では関数のグラフの凹凸を 2 階微分の正負で定義した．ここではもう少し幾何学的な定義を与え，それと 2 階導関数との関係を調べておこう．

定義 (下に凸，上に凸) 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が**下に凸** (convex) であるとは，任意の異なる $p, q \in I$ と任意の $t \in (0,1)$ に対し，

$$f(tp+(1-t)q) \le t\,f(p) + (1-t)\,f(q) \tag{9.10}$$

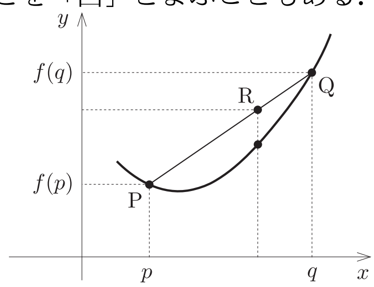
が成り立つことをいう．式 (9.10) で等号成立がないとき，f は**真に下に凸** (strictly convex) という．

関数 $-f(x)$ が下に凸 [真に下に凸] であるとき，f は**上に凸** (concave) [**真に上に凸** (strictly concave)] であるという．

上に凸もしくは下に凸な関数は**凸関数**とよばれる．

「下に凸」であることを単に「凸」,「上に凸」であることを「凹」とよぶこともある．

幾何学的には，グラフ上の異なる 2 点を結ぶ線分がつねにグラフの「上」にある状態が「下に凸」である．実際，式 (9.10) の右辺はグラフ上の点 P $(p, f(p))$ と点 Q $(q, f(q))$ を $(1-t):t$ に内分する点 R の y 座標にあたり，その x 座標 $x = tp+(1-t)q$ における関数 $y = f(x)$ の値が式 (9.10) の左辺である．



例 6. $y = x^2$ は真に下に凸．$y = |x|$ は下に凸だが「真に下に凸」ではない．

定理 9.10 (2 階微分と凹凸) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を C^2 級関数とする．

(1) (a,b) 上 $f''(x) \ge 0 \iff f$ は下に凸．

(2) (a,b) 上 $f''(x) > 0 \implies f$ は真に下に凸．

注意． (2) の逆（$\Longleftarrow$）は成り立たない．たとえば $f(x) = x^4$ は真に下に凸だが $f''(0) = 0$．

証明. (1) の「$\Longleftarrow$」: f が下に凸であったと仮定する．$x \in (a,b)$ を固定し，$h > 0$ を十分小さくとって $x \pm h \in (a,b)$ とすれば，式 (9.10) を $t = 1/2$ について適用できて

$$f(x) = f\left(\frac{(x+h)+(x-h)}{2}\right) \le \frac{1}{2}\{f(x+h)+f(x-h)\}.$$

よって公式 9.9 より，

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \ge 0.$$

(1) の「$\Longrightarrow$」: 逆に，(a,b) 上で $f''(x) \ge 0$ を仮定する．$a < p < q < b$ を満たす p, q と $t \in (0,1)$ を任意に選び，$\alpha = tp + (1-t)q$ とおく．このときテイラー展開（定理 9.7）より，

$$f(p) - f(\alpha) = f'(\alpha)(p-\alpha) + \frac{1}{2}f''(c_p)(p-\alpha)^2$$
$$f(q) - f(\alpha) = f'(\alpha)(q-\alpha) + \frac{1}{2}f''(c_q)(q-\alpha)^2$$

を満たす「p と α の内分点 c_p」と「q と α の内分点 c_q」 が存在する．上の式を t 倍，下の式を $(1-t)$ 倍して足し合わせると，

$$tf(p) + (1-t)f(q) - f(\alpha) = \frac{1}{2}\left\{t\,f''(c_p)(p-\alpha)^2 + (1-t)\,f''(c_q)(q-\alpha)^2\right\}$$

となるが，仮定より $f''(c_p) \ge 0$ かつ $f''(c_q) \ge 0$ であったから $tf(p) + (1-t)f(q) - f(\alpha) \ge 0$．すなわち

$$f(tp + (1-t)q) \le tf(p) + (1-t)f(q).$$

(2)： (a,b) 上で $f''(c_p) > 0$ かつ $f''(c_q) > 0$ となることから同様の議論により証明される． ■

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

一様収束（6/19）

配布日：2017/06/19　Version：1.1

レポート問題 (6/12 出題)

締め切りは 6 月 19 日の講義開始前とします.（研究室 H210 メールボックスへの提出は当日朝 10 時 20 分まで.）

問題 10-1. (微分可能性と一様連続性) 開区間 I 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は微分可能であり，ある正の定数 $K > 0$ が存在して，すべての $a \in I$ に対し $|f'(a)| \le K$ が成り立つ．このとき，f は I 上一様連続であることを示せ．(Hint. 平均値の定理．)

問題 10-2. (微分可能性) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(0) = 0$, $x \neq 0$ のとき $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ と定める．このとき，次を示せ：

(1) f は $\mathbb{R}$ 上で微分可能.（Hint. $x = 0$ では定義通りに微分係数が求まる.）

(2) 導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ で連続ではない.

したがって，$f(x)$ は微分可能だが C^1 級ではない関数の例である

問題 10-3. (次回の予習) 次回の講義ノートの内容をよく読んで，以下の項目について，定義や条件を適宜補いつつ，合計 2 ページから 3 ページでまとめよ.（次回は講義中にこれらに関連した課題を出します.）

(1) 区間 I 上の関数の列 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が「各点収束すること」,「一様収束すること」,「広義一様収束すること」の定義を述べよ．さらに，以下のような具体例（プリントにはない独自のもの）を構成せよ.

(a) 「各点収束」するが「一様収束」しない例.

(b) 「広義一様収束」するが「一様収束」しない例.

(c) 「各点収束」する連続関数の列だが，その極限の関数は連続でない例.

(d) 「一様収束」する連続でない関数の列だが，その極限の関数は連続となる例.

(e) 「一様収束」する微分可能な関数の列だが，その極限の関数は微分可能ではない例.

(2) 区間 I 上の関数の列 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ に対し，関数項級数 $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が「各点収束すること」,「一様収束すること」,「広義一様収束すること」の定義を述べよ.

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メールで ご指摘ください.

6/19 の講義ノート

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I,II』の第 5 章　• 高木貞治『解析概論』の第 4 章

関数の収束

以下，$I \subset \mathbb{R}$ を区間とし，関数の列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ を考え，それがある関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に「収束する」ことを二通りの方法で定義する．ひとつは「各点収束」とよばれ，もうひとつは「一様収束」とよばれる．こうして定義される「極限」$f := \lim_{n\to\infty} f_n$ に対して，以下の問題を考えよう：

(Q1) f_n がすべて連続なとき,「極限」$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ も連続か？

(Q2) f_n がすべて微分可能なとき,「極限」$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ も微分可能か？そのとき，$f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ がいえるか？

(Q3) 積分値は収束するか？すなわち，$n \to \infty$ のとき $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ か？

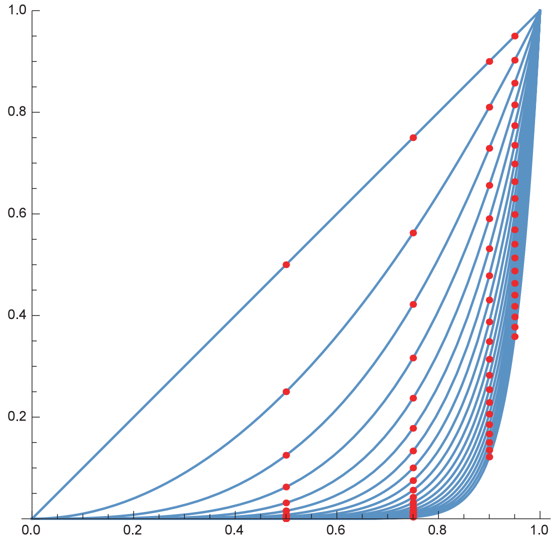
各点収束

定義 (各点収束) 関数列 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に**各点収束** (pointwise convergence) するとは，任意の $a \in I$ に対し，数列の意味で $f_n(a) \to f(a)$ $(n \to \infty)$ が成り立つことをいう．すなわち，

$$(^\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I})(^\forall \epsilon > 0)(^\exists N \in \mathbb{N})(^\forall n \geq N) \quad |f_n(a) - f(a)| < \epsilon.$$

このとき関数 f を関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限関数**もしくは**各点収束極限**とよぶ.

どの $a \in I$ をとっても，グラフを直線 $x = a$ 上に制限すれば，点 $(a, f_n(a))$ の y 座標が収束するということである．もちろん，収束の速度にはばらつきがあるかもしれない．



注意. このあと「一様収束」を定義するので，混乱を避けるために $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ や $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ といった記号はあえて使わないでおこう．

例 1（各点収束と連続性）． $I = [0, 1]$ とし，$f_n(x) = x^n$ とする．$0 \leq a < 1$ のとき，$f_n(a) = a^n \to 0$ $(n \to \infty)$ であり，$a = 1$ のとき，任意の $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $f_n(1) = 1$ である．よって関数 $f : I \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

と定義すると，関数列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ は関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に各点収束する．

この例では $\{f_n\}$ は連続かつ微分可能な関数の列だが，極限として得られる関数 f は連続関数ではない．（したがって微分可能でもない．）よって，次のことがわかる：関数の極限を各点収束で定義したとき，

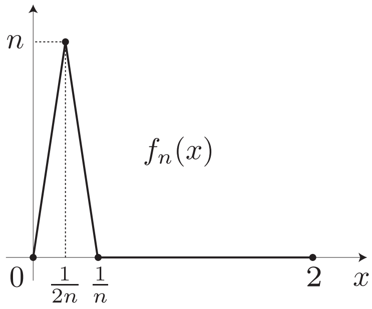
(Q1) NO! 連続関数の「各点収束」による極限は連続とは限らない．

(Q2) NO! 微分可能な関数の「各点収束」による極限は微分可能とは限らない．

例 2（各点収束と積分）． $I = [0, 2]$ とする．図のようにグラフ（原点，$(1/(2n), n)$, $(1/n, 0)$,$(2, 0)$ を順に線分で結んだもの）が与えられる連続関数の列 $f_n : I \to \mathbb{R}$ は $f(x) = 0$（定数関数）に各点収束するが，積分値は $n \to \infty$ としても

$$\int_0^2 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^2 f(x)\,dx$$

となり収束しない．よって



(Q3) NO! 連続関数の「各点収束」列に対しても，積分値の極限が極限関数の積分値と一致するとは限らない．

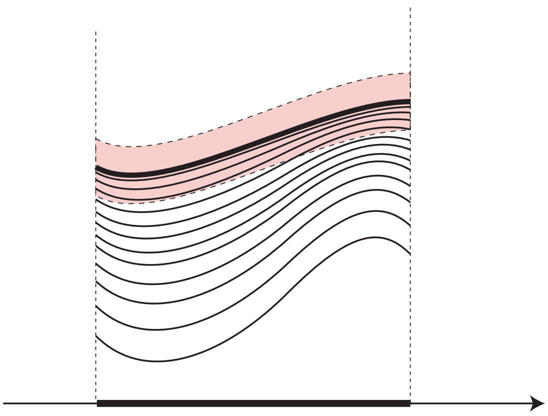
一様収束

「各点収束」では収束列の性質が極限関数にうまく遺伝しない．そこで,「収束」の条件を厳しくした次のものを考える：

定義 (一様収束) 関数列 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に**一様収束** (uniform convergence) するとは，次が成り立つことをいう：

$$({}^{\forall}\epsilon > 0)({}^{\exists}N \in \mathbb{N})({}^{\forall}n \geq N)({}^{\forall}\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I}) \quad |f_n(a) - f(a)| < \epsilon.$$

このとき関数 f を関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**一様収束極限**とよばれる．



まず次の命題は明らかであろう：

命題 10.1 (一様収束なら各点収束) 一様収束する関数列は各点収束する．

したがって,「一様収束極限」は「各点収束極限」でもある．いずれの場合も，f は極限関数と呼ばれる．

グラフでいうと，十分大きな n に対し，$y = f_n(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフから上下それぞれ ϵ 未満の範囲に収まることを意味する．

例 3. 自然数 n に対し，$f_n(x) = x^n$，$f(x) = 0$ (定数関数) とおき，それぞれ閉区間 $I = [0, 1/2]$ 上の関数とみなす.（$0 \le a \le 1/2$ のとき，$0 \le a^n \le (1/2)^n$ であることに注意しておく.）

任意に小さい $\epsilon > 0$ を固定するとき，$1/2^N < \epsilon$ となる自然数 N をとれば，$n \ge N$ のとき，任意の $a \in I$ に対し

$$|f_n(a) - f(a)| = a^n \le \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2^N} < \epsilon$$

が成り立つので，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束する．

広義一様収束. 実用上重要な概念である「広義一様収束」について述べておこう：

> **定義 (広義一様収束)** 関数列 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に**広義一様収束**（もしくは**コンパクト一様収束**，uniform convergence on compact sets) するとは，任意の閉区間 $[a, b] \subset I$ 上に制限すれば，関数列 $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ が $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に一様収束することをいう．

たとえば例 1 や例 3 の $f_n(x) = x^n$ の場合，区間 $I = [0, 1]$ 上では「各点収束」のみで「一様収束」しないが，任意の $0 < r < 1$ を固定し $I_r = [0, r]$ とすれば，その上で「一様収束」する．さらに半開半閉区間 $I' = [0, 1)$ 上では「広義一様収束」している．実際，I' 内の任意の閉区間 $[a, b]$ はある I_r に含まれていて，そこでは「一様収束」になっているからである．

コーシーの判定法. 数列の場合と同様に,「極限関数が何かわからない」状況で関数列の収束性を述べるには次の定理が便利である：

> **定理 10.2 (コーシーの判定法)** 関数列 $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ がある I 上の関数に一様収束することの必要十分条件は
>
> $$({}^{\forall}\epsilon > 0)({}^{\exists}N \in \mathbb{N})({}^{\forall}n \ge {}^{\forall}m \ge N)\boldsymbol{({}^{\forall}a \in I)} \quad |f_n(a) - f_m(a)| < \epsilon$$
>
> が成り立つことである．

証明はレポート問題としよう．例えば関数項級数の収束性（後述）を調べるときに活躍する．

例 4（一様収束と微分可能性）. $I = \mathbb{R}$ とし，$\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数列 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ $(n \in \mathbb{N})$ を考える．この関数列は $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = |x|$ に一様収束するが，この関数は $x = 0$ で微分可能ではない．

例 5（一様収束と微分可能性）. $I = \mathbb{R}$ とし，$\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数列 $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx$，$f(x) = 0$ (定数関数) を考える．任意の $a \in I = \mathbb{R}$ に対し

$$|f_n(a) - f(a)| = \left|\frac{1}{n}\sin na - 0\right| \le \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つから，例 3 と同様の議論により，$\{f_n\}$ は f に一様収束する．

この場合，導関数は $f_n'(x) = \cos nx$，$f'(x) = 0$ と計算できるが，$f_n'(x)$ は $f'(x)$ に各点収束すらしていない．

以上の例から，次がわかる：

(Q2) NO! 微分可能な関数の「一様収束」による極限は微分可能とは限らない．仮に極限が微分可能であっても，導関数が（「各点収束」の意味ですら）収束するとは限らない．

一様収束と連続性・定積分

一様収束列については，次が成立する：

(Q1) YES! 連続関数列の「一様収束」による極限は連続である．

(Q3) YES! 連続関数列が「一様収束」するとき，それらの積分の極限は極限関数の積分．

これらを定理の形で述べて証明しよう．

一様収束と連続性． 一様収束列の連続性は極限にまで「遺伝」する：

> **定理 10.3 (連続性の保存)** 連続関数の列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に一様収束するとき，f も連続関数である．

証明． $a \in I$ を固定するとき，

$$(^{\forall}\epsilon > 0)(^{\exists}\delta > 0) \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

を示せばよい．いま，任意に（小さい）$\epsilon > 0$ を固定する．一様収束性より，

$$(^{\exists}N \in \mathbb{N})(^{\forall}n \geq N)(^{\forall}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}) \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3.$$

とくに $x = a$ についても $n \geq N$ であれば $|f_n(a) - f(a)| < \epsilon/3$ を満たす．
いまこの N に対し，仮定より $f_N : I \to \mathbb{R}$ は連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - a| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(a)| < \epsilon/3$$

を満たす．したがって $|x - a| < \delta$ のとき，

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.\end{aligned}$$

よって f は $x = a$ において連続である． ■

積分の収束． 積分に関しては次が成り立つ：

> **定理 10.4 (積分の収束)** 連続関数の列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に一様収束するとき，任意の閉区間 $[a, b] \subset I$ において
>
> $$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx. \quad (n \to \infty)$$

$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ と表すとき，$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ が成り立つ．標語的にいえば，「積分の極限は極限の積分」が成り立つのである．

注意（積分可能性）． 積分は通常のリーマン積分の意味で考えている．閉区間上の連続関数はリーマン可積分であった．定理 10.3 より極限も連続であるから，一様収束性は極限の可積分性も保証してくれるのである．

証明． 一様収束性より，任意の $\epsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在し，$n \geq N$ のとき任意の $x \in [a, b]$ について $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ が成り立つ．さらに，

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \{f_n(x) - f(x)\}\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \epsilon(b - a).$$

ϵ は任意だったから，定理は示された [1]． ■

注意（広義一様収束の場合）． 定理 10.3 と定理 10.4 は条件にある「一様収束」を「広義一様収束」に変えても正しい．証明は全く同じである．

関数項級数

関数からなる級数を考えよう．

定義 （関数項級数） $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ を I 上の関数からなる列とする．また，$S_n(x) := f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ とおく．関数列 $\{S_n(x)\}_{n\geq 0}$ がある I 上の関数 $S(x)$ に各点収束 [一様収束] するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **は** I **上で関数** $S(x)$ **に各点収束 [一様収束] するといい，**

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots \tag{10.1}$$

のように表す．

式 (10.1) において，収束が「各点」か「一様」かは文脈で判断され，記号では区別しない．また，「広義一様収束」も同様に定義する．

例 6. $f_n(x) = x^n$ のとき，

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

$S(x) = 1/(1-x)$ とおくと，

- $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ とみなすとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ は $S : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ に各点収束するが，一様収束はしない（レポート）．
- $f_n : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ とみなすとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = 1+x+x^2+\cdots$ は $S : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ に一様収束する．

例 7（先が見えない例）． 例 4 は極限が具体的にわかっていたが，次の例は極限がどのような関数になるのか，わからない：

例題 10.1 $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + n^2}$ $(n \geq 1)$ のとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ．

解答． まず各点収束することを示そう．部分和を $S_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ とする．各 $x \in \mathbb{R}$ を固定するとき，$n > m$ に対し

$$\begin{aligned}|S_n(x) - S_m(x)| &= \left|\frac{1}{x^2 + (m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{x^2 + n^2}\right| \leq \left|\frac{1}{x^2 + (m+1)^2}\right| + \cdots + \left|\frac{1}{x^2 + n^2}\right| \\ &\leq \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \int_m^n \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

[1] 閉区間 $[a, b]$ と書いた時点で $a < b$ を暗に仮定する．もちろん，積分が収束すること自体は $a > b$ の場合でも正しい．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

よって任意に小さい $\epsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して $n > m \geq N$ のとき $|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon$ とできる [2]．すなわち（x ごとに）$\{S_n(x)\}$ はコーシー列であるから，収束する．その極限を $S(x)$ とおけば，関数 $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が定まり，関数の列 $\{S_n\}$ は S に各点収束する．

つぎに一様収束性を示す．いま上と同じ状況で $n > m \geq N$ のとき $|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon$ であったが，$m \geq N$ を固定し $n \to \infty$ としたとき，$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ より $|S(x) - S_m(x)| \leq \epsilon$ が成り立つ．ϵ は任意であり，N の取り方は x に依存しないから，関数の列 $\{S_m\}$ は S に一様収束する．■

べき級数について

一般に，実数 a と x，数列 $A_1, A_2, \cdots$ によって定まる級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-a)^n = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots$$

を a を中心とする**べき級数**という．また，ある関数 $f(x)$ について，$|x - a| < R$ を満たすすべての実数 x に対し等式 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-a)^n$ が成り立つ（すなわち右辺のべき級数は収束し，その極限が $f(x)$ と一致する）とき，この等式を関数 $f(x)$ の a を中心とする**べき級数展開**とよぶ．x の範囲を制限する定数 R が（∞ もこめて）どの程度大きくとれるかは，係数の列 $\{A_n\}$ のみで決まり，中心 a には依存しない．そのような R で最大のもの（∞ も許す）はべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-a)^n$ の**収束半径**とよばれる [3]．

べき級数については，次の事実が知られている：

> **べき級数の性質．** 0 を中心とするべき級数 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ は，$x = x_0 \neq 0$ のとき収束すると仮定する．このとき，
>
> (1) 区間 $I_0 = (-|x_0|, |x_0|)$ 内のすべての x に対し，べき級数 $F(x)$ は収束する．
>
> (2) 関数 $F(x)$ は I_0 上で微分可能であり，$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^{n-1}$ が成り立つ．
>
> (3) $x \in I_0$ のとき，$\int_0^x F(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n+1} x^{n+1}$ が成り立つ．
>
> ただし (2) と (3) の等式は，「$x \in I_0$ のとき右辺のべき級数は収束し，その値は左辺の関数の値と一致する」と解釈する．また，これらのべき級数は I_0 上で広義一様収束する．すなわち，I_0 内に含まれる任意の閉区間上で一様収束する．

べき級数のこうした性質は，複素関数の理論によって見通しよく説明され，(2) や (3) のような項ごとの微分と積分も正当化されるのである．

---

[2] $1/N < \epsilon$ となるようにとればよい．

[3] じつは，$R = 1/\limsup |A_n|^{1/n}$ であることが知られている．ただし，$1/0 := \infty, 1/\infty := 0$ と（ここだけの）約束をしておく．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

ユークリッド空間（6/26）

配布日：2017/06/19　Version：1.1

レポート問題 (6/19 出題)

締め切りは 6 月 26 日の講義開始前とします.（研究室 **H210** メールボックスへの提出は当日朝 **10** 時 **20** 分まで.）

問題 11-1. (コーシーの判定条件) 定理 10.2（コーシーの判定法）を示せ.

問題 11-2. (関数項級数)

(1) 関数項級数 $S(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ について正しいものを選び，証明せよ.

あ. $S(x)$ は区間 $(-1, 1)$ 上で各点収束する.

い. $S(x)$ は区間 $(-1, 1)$ 上で一様収束する.

う. $S(x)$ は区間 $(-1, 1)$ 上で広義一様収束する.

(2) 関数項級数 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ が $\mathbb{R}$ 上で一様収束（もしくは各点収束）するかどうか判定せよ.（Hint. 例題 10.1 を参考にせよ.）

問題 11-3. (次回の予習) 次回の講義ノートの内容をよく読んで，以下の項目について，定義や条件を適宜補いつつ，合計 2 ページから 3 ページでまとめよ.（次回は講義中にこれらに関連した課題を出します.）

(1) n を自然数とするとき，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の定義.

(2) $\mathbb{R}^n$ の元（ベクトル）に対する和・定数倍・内積・長さの定義.

(3) $n = 2, 3$ のときシュワルツの不等式を証明せよ.

(4) $\mathbb{R}^n$ 内の点列（ベクトルの列）が収束すること，コーシー列であること，有界であることの定義.

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください.

6/26 の講義ノート

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I,II』の第 6 章　• スピヴァック『多変数の解析学』の第 1 章

n 次元ユークリッド空間

高次元の空間としてもっとも基本的なのが，次の「ユークリッド空間」とよばれる集合である：

定義（ユークリッド空間） n を自然数とし，n 個の実数に順番をつけて並べたもの $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を n **次元数ベクトル**もしくは単に**ベクトル** (vector) とよぶ．また，その全体からなる集合

$$\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, {}^{\forall} i = 1, 2, \cdots, n\right\}$$

を n **次元ユークリッド空間** (n dimensional Euclidean space，もしくは n **次元数空間**，n **次元数ベクトル空間**，n dimensional coordinate space) とよび，$\mathbb{R}^n$ で表す．ベクトル $\vec{\mathbf{0}} := (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})$ を**ゼロベクトル** (zero vector) もしくは**原点** (origin) とよぶ．

- ベクトルは「ユークリッド空間内の**点** (point)」とよばれることも多い．
- $\mathbb{R}^1$ は通常，実数の集合 $\mathbb{R}$ （数直線）と同一視される．また，しばしば $\mathbb{R}^2$ は xy 平面と，$\mathbb{R}^3$ は xyz 空間と解釈される．
- ベクトル $(a_1, \cdots, a_n)$ は上つき添字で $(a^1, \cdots, a^n)$ と書かれることもある．この場合，a^1 の 2 乗は $(a^1)^2$ のように表す．

和とスカラー倍，内積． $\mathbb{R}^n$ はいわゆるベクトル空間（線形空間）の構造をもっている．ベクトルの基本的な演算である，和，実数倍，内積の定義を確認してよう．

定義（和・実数倍・内積・長さ） $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$，$\vec{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ を $\mathbb{R}^n$ 内のベクトル，t を実数とするとき，次のように定義する：

- $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和** (sum)：　$\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} := (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{b_1}, \cdots, \boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{b_n})$.
- $\vec{a}$ の**実数倍** (multiple of a real number)：　$\boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{a}} := (\boldsymbol{ta_1}, \cdots, \boldsymbol{ta_n})$.
- $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積** (inner product)：　$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} := \boldsymbol{a_1 b_1} + \boldsymbol{a_2 b_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n b_n}$
- $\vec{a}$ の**長さ** (modulus)：　$\|\vec{\boldsymbol{a}}\| := \sqrt{\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}} = \sqrt{\boldsymbol{a_1^2} + \boldsymbol{a_2^2} + \cdots + \boldsymbol{a_n^2}}$.

ベクトルの「長さ」は線形代数では**ノルム** (norm) と呼ばれる．これらの演算の基本的な性質については線形代数の教科書などを参照せよ．

内積は次の「シュワルツの不等式」(the Schwarz inequality) を満たす：

命題 11.1 (シュワルツの不等式) $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$，$\vec{b} = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$|\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}| \le \|\vec{\boldsymbol{a}}\|\|\vec{\boldsymbol{b}}\| \quad \text{すなわち} \quad \left(\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_i}\, \boldsymbol{b_i}\right)^{\mathbf{2}} \le \left(\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_i}^{\mathbf{2}}\right)\left(\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{b_i}^{\mathbf{2}}\right). \qquad (11.1)$$

証明はレポート問題としよう．シュワルツの不等式より，

$$-\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \le \vec{a} \cdot \vec{b} \le \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$$

が成り立つ．とくに，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに $\vec{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ でないとき，

$$-1 \le \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \le 1$$

が成り立つ．このことから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす「角度」を定義できる：

定義 (ベクトルのなす角，垂直，平行) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに $\vec{0}$ でないとき，

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}}{\|\vec{\boldsymbol{a}}\|\|\vec{\boldsymbol{b}}\|}$$

を満たす実数 $\theta \in [0,\pi]$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす**角** (angle) という．さらに，$\theta = \pi/2$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**垂直** (perpendicular) であるといい，$\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{b}}$ と表す．また，$\theta = 0$ あるいは π のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行** (parallel) であるといい，$\vec{\boldsymbol{a}} /\!/ \vec{\boldsymbol{b}}$ と表す．

ちなみに，平行を表す記号の世界標準は傾けない $\vec{a} \parallel \vec{b}$ なのだという．

三角不等式. シュワルツの不等式から，次の「三角不等式」がわかる：

命題 11.2 (三角不等式) 任意の $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，次の不等式が成り立つ：

$$\|\vec{\boldsymbol{a}}\| - \|\vec{\boldsymbol{b}}\| \le \|\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}\| \le \|\vec{\boldsymbol{a}}\| + \|\vec{\boldsymbol{b}}\| \tag{11.2}$$

この証明もレポート問題としよう．

ユークリッド距離.

定義 (ユークリッド距離) $\mathbb{R}^n$ 内の 2 点 $\vec{a}, \vec{b}$ の**距離** (distance)（もしくは**ユークリッド距離** (Euclidean distance) を

$$\boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}) := \|\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}\|$$

と定義する．

このとき，次が成り立つ：

命題 11.3 (距離空間としての $\mathbb{R}^n$) 距離 $d(\cdot,\cdot)$ は次の (D1)〜(D3) を満たす：

(D1) $\boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}) = \boldsymbol{0} \iff \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}}$.

(D2) $\boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}) = \boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{a}})$.

(D3) $\boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}) \le \boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{c}}) + \boldsymbol{d}(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{b}})$. (三角不等式)

証明はレポート問題とする．

注意. 一般に，(D1)〜(D3) を満たすような関数 $d : X \times X \to [0,\infty)$ が定義されているような集合 X を**距離空間** (metric space) という．

ある不等式. ベクトルの列と極限を考えるときに必要となる不等式を述べておこう：

命題 11.4 (ノルムの max 評価) 任意の $\vec{a} = (a_1, \cdots a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\max_{1\le i\le n} |\boldsymbol{a}_i| \le \|\vec{\boldsymbol{a}}\| \le \sqrt{\boldsymbol{n}} \max_{1\le i\le n} |\boldsymbol{a}_i|.$$

証明. 明らかに

$$\max\{a_1^2, \cdots, a_n^2\} \le a_1^2 + \cdots + a_n^2 \le n \max\{a_1^2, \cdots, a_n^2\}$$

が成り立つので，それぞれの平方根をとればよい． ■

点列の収束

ベクトルの列の収束性を定義しよう．

定義 (点列の収束，コーシー列)

- $\mathbb{R}^n$ のベクトルからなる列 $\{\overrightarrow{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は**点列** (sequence (of points)) とよばれる．
- 点列 $\{\overrightarrow{a_k}\}$ が**収束する** (converge) とは，ある $\overrightarrow{A} \in \mathbb{R}^n$ が存在し，

$$\|\overrightarrow{a_k} - \overrightarrow{A}\| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

となることをいう．すなわち，

$$({}^\forall \epsilon > 0)({}^\exists N \in \mathbb{N})({}^\forall k \ge N) \quad \|\overrightarrow{a_k} - \overrightarrow{A}\| < \epsilon.$$

このとき，$\overrightarrow{A} = \lim_{k\to\infty} \overrightarrow{a_k}$ と表す．

- 点列 $\{\overrightarrow{a_k}\}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは，

$$({}^\forall \epsilon > 0)({}^\exists N \in \mathbb{N})({}^\forall k \ge {}^\forall l \ge N) \quad \|\overrightarrow{a_k} - \overrightarrow{a_l}\| < \epsilon$$

が成り立つことをいう．

- 点列 $\{\overrightarrow{a_k}\}$ が**有界** (bounded) であるとは，

$$({}^\exists M > 0)({}^\forall k \in \mathbb{N}) \quad \|\overrightarrow{a_k}\| \le M$$

が成り立つことをいう．

点列の収束性を次のようにいい換えておくと便利である．

命題 11.5 (収束性のいい換え) $\{\overrightarrow{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}^n$ 内の点列とし，$\overrightarrow{a_k} = (a_k^1, a_k^2, \cdots, a_k^n)$ と表すことにする．このとき，以下はすべて同値：

(1) $\{\overrightarrow{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する．

(2) すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し，実数列 $\{a_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する．

(3) $\{\overrightarrow{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$ はコーシー列．

証明. (1) を仮定すると，ある $\overrightarrow{A} = (A^1, \cdots, A^n) \in \mathbb{R}^n$ が存在し，$\|\overrightarrow{a_k} - \overrightarrow{A}\| \to 0$ $(k \to \infty)$．このとき命題 11.4 より，すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について $|a_k^i - A^i| \to 0$ $(k \to \infty)$．よって (2) が成り立つ．(2) が成り立つとき，収束する実数列 $\{a_k^i\}_{k \ge 1}$ はコーシー列であるから，

$$({}^\forall \epsilon > 0)({}^\exists N_i \in \mathbb{N}) \ \ k > l \ge N_i \implies |a_k^i - a_l^i| < \epsilon/\sqrt{n}.$$

ここで $N = \max\{N_i \mid 1 \le i \le n\}$ とすれば，命題 11.4 より，$k > l \ge N$ のとき，

$$\|\overrightarrow{a_k} - \overrightarrow{a_l}\| \le \sqrt{n} \max_{1\le i\le n} |a_k^i - a_l^i| < \sqrt{n} \cdot \epsilon/\sqrt{n} = \epsilon.$$

よって (2) ならば (3) が成り立つ．

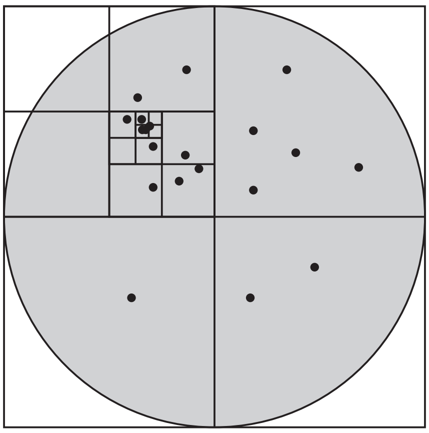
同様の議論により，(2) ならば (1)，(3) ならば (2) が証明される． ■

点列が有界であることは，命題 11.4 より，点列の各座標値からなる数列が有界であることと同値である．それを踏まえて，次の基本的な定理を示そう．

命題 11.6 (多次元版ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理) $\mathbb{R}^n$ 内の有界な点列は収束する部分列を含む．

証明. 有界な点列は各座標の値が有界なので，たとえば第 1 座標が収束するような部分列を選ぶことができる．その中から，さらに第 2 座標が収束するような部分列を選び…と続けていけば，すべての座標値が収束するような部分列を選ぶことができる．命題 11.5 より，このとき点列自体もあるベクトルに収束する．■

証明その 2. 区間縮小法の考え方を用いた証明もできる．アイディアを明確にするために $n = 2$ の場合で示そう．$\|\overrightarrow{a_k}\| \le M$ を満たす有界点列 $\{\overrightarrow{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$ があるとき，これは（集合としては）原点中心半径 M の（境界を含む）円板に含まれる．とくに，正方形 $Q_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le M, |y| \le M\}$ にも含まれている．この正方形を 1 辺が半分になるように 4 等分すると，そのうちの少なくともひとつは点列 $\{\overrightarrow{a_k}\}$ の無限個の項を含む[1]．それを Q_1 とし，さらに 1 辺が半分になるように 4 等分する．そのうちの少なくともひとつは点列 $\{\overrightarrow{a_k}\}$ の無限個の項を含むので，それを Q_2 とする．この操作を繰り返すと，$Q_0 \supsetneq Q_1 \supsetneq Q_2 \supsetneq \cdots$ という縮小する正方形の列を得る．区間縮小法の原理により x 座標，y 座標はそれぞれ極限をもつから，添字の増加列 $k_1 < k_2 < \cdots$ を $\{\overrightarrow{a_{k_j}}\} \in Q_j$ となるように選べば，収束する部分列を得る． ■



1 次関数

1 次関数とは次のような形の関数である（小文字が変数，大文字が定数）：

1 変数：	$y = Ax + B$
2 変数：	$z = Ax + By + C$
3 変数：	$w = Ax + By + Cz + D$
n 変数：	$y = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n + B$

（$A_1 = \cdots = A_n = 0$ の場合は定数関数なので正確には「1 次以下の関数」だが，この場合も 1 次関数とよぶことにする．）

[1] 点として見たときは無限個とは限らないが，$\overrightarrow{a_k}$ がその正方形に入るような k が無限個ある，ということ．

n 変数の場合，ベクトル定数 $\overrightarrow{A}=(A_1,\cdots,A_n)$ とベクトル変数 $\overrightarrow{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ を用いると

$$\boldsymbol{y=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{x}+B}$$

と表される．

1 次関数の性質． 次は 1 次関数 $y=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{x}+B$ のもつ重要な性質（一様性）である．

命題 11.7 (1 次関数の等高線・等位面) $\overrightarrow{A}\neq\overrightarrow{0}$ とする．与えられた実数 k に対し，1 次関数 $y=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{x}+B$ の値がちょうど k となるようなベクトル $\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n$ の集合を

$$\boldsymbol{E_k=\{\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n\mid k=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{x}+B\}}$$

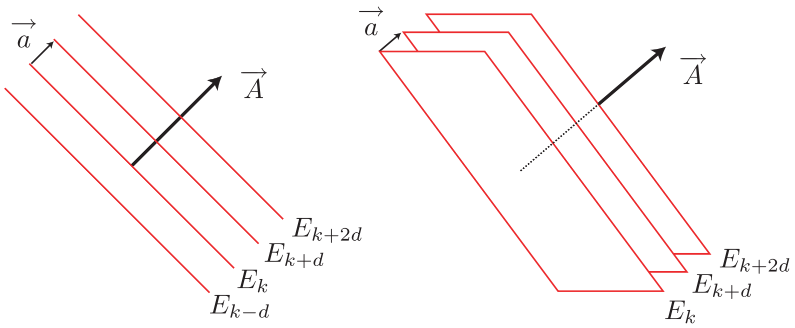
と表すことにする．このとき，以下が成り立つ：

(i) $n=2$ のとき，E_k はベクトル $\overrightarrow{A}$ に垂直な直線となる．

(ii) $n=3$ のとき，E_k はベクトル $\overrightarrow{A}$ に垂直な平面となる．

(iii) d を任意の実数とするとき，E_{k+d} は E_k を $\dfrac{d}{\|\overrightarrow{A}\|^2}\overrightarrow{A}$ 平行移動させたものである．とくに $d>0$ のとき，等差数列 $k,\ k+d,\ k+2d,\ \cdots$ に対応する $E_k,\ E_{k+d},\ E_{k+2d},\ \cdots$ は $\overrightarrow{A}$ の方向に等間隔に並ぶ．

E_k のような集合は 1 次関数の**等高線**もしくは**等位面** (contour) とよばれる．一般に，n 次元ユークリッド空間上の一次関数の等位面は $(n-1)$ 次元**超平面** (hyperplane) とよばれるものになる [2]．



証明． (i) と (ii) の証明はレポート問題としよう．(iii) は $B=0$ の場合を示せば十分である．$\overrightarrow{a}:=(d/\|\overrightarrow{A}\|^2)\overrightarrow{A}$ とおくと，$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{a}=d$ が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}\in E_{k+d} &\iff \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{x}=k+d \iff \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{x}=k+\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{a}\\ &\iff \overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a})=k \iff \overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}\in E_k.\end{aligned}$$

よって E_{k+d} は E_k をベクトル $\overrightarrow{a}$ 分だけ平行移動させたものである．同様に，E_{k+jd} は E_k をベクトル $j\overrightarrow{a}$ 分平行移動させたものである．とくに，$d>0$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{a}$ は $\overrightarrow{A}$ の正の定数倍であるから，等高線 $E_k,\ E_{k+d},\ E_{k+2d},\ \ldots$ は $\overrightarrow{A}$ と同じ方向に等間隔で並んでいる． ■

[2] $\mathbb{R}^n$ をベクトル空間として考えたとき，その $(n-1)$ 次元部分空間を平行移動させて得られるのが $(n-1)$ 次元超平面である．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210 東京工業大学 理学院（数学系）

多変数関数の微分（7/3）

配布日：2017/06/26　Version：1.1

レポート問題 (6/26 出題)

締め切りは7月3日の講義開始前とします．（研究室 H210 メールボックスへの提出は当日朝10時20分まで．）

問題 12-1. (シュワルツの不等式) 命題 11.1 を示せ．（Hint．2次（以下の）関数 $f(t) := \sum_{k=1}^{n}(ta_k + b_k)^2$ が $f(t) \geq 0$ を満たすことを用いる．）

問題 12-2. (三角不等式) 命題 11.2 と命題 11.3 の (D3) を示せ．ただし，シュワルツの不等式は用いてよい．

問題 12-3. (1 次関数の等高線・等位面) 命題 11.7 の (i) を証明せよ．

問題 12-4. (次回の予習) 次回の講義ノートの内容をよく読んで，以下の項目について，定義や条件を適宜補いつつ，合計2ページから3ページでまとめよ．（次回は講義中にこれらに関連した課題を出します．）以下，n は2以上の自然数とする．

(1) $\mathbb{R}^n$ 内の開集合，閉集合，コンパクト集合，領域の定義．

(2) 関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ で全微分可能であることの定義．

(3) 関数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ は点 $(1, -1, 2)$ で全微分可能であることを示せ．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メールで ご指摘ください．

7/3 の講義ノート

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I,II』の第6章　• スピヴァック『多変数の解析学』の第1-2章

開集合・閉集合・コンパクト集合

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の集合に関する定義をまとめておこう．

（ア）． $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対し，集合

$$\mathbb{B}(\vec{a}, r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$$

を中心 $\vec{a}$，半径 r の**球** (ball) もしくは**開球** (open ball) とよぶ．

（イ）内点・外点・境界点． S を $\mathbb{R}^n$ の部分集合，$\vec{x}$ を $\mathbb{R}^n$ 内のベクトルとする．

- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ が S の**内点** (interior point) であるとは，十分小さな $r > 0$ が存在して，$\mathbb{B}(\vec{x}, r) \subset S$ とできることをいう．

例 1. 球 $S = \mathbb{B}(\vec{a}, R)$ $(R > 0)$ に含まれる点はすべて内点である．一点からなる集合 $S = \{\vec{a}\}$ は内点を持たない．

- $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ が S の**外点** (exterior point) であるとは，十分小さな $r > 0$ が存在して，$\mathbb{B}(\overrightarrow{x}, r) \subset \mathbb{R}^n - S$ とできることをいう．
- $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ が S の**境界点** (boundary point) であるとは，$\overrightarrow{x}$ が S の内点でも外点でもないことをいう．すなわち，すべての $r > 0$ に対して，$\mathbb{B}(\overrightarrow{x}, r) \cap S \neq \emptyset$ かつ $\mathbb{B}(\overrightarrow{x}, r) \cap (S - \mathbb{R}^n) \neq \emptyset$ が成り立つことをいう．
- S の境界点全体からなる集合を ∂S と表し，S の**境界** (boundary) という．
- $\overrightarrow{x}$ が S の内点であれば $\overrightarrow{x} \in S$，外点であれば $\overrightarrow{x} \notin S$ であるが，境界点の場合はどちらの場合もありえる．

例 2. 半径 $R > 0$ の球 $S = \mathbb{B}(\overrightarrow{a}, R)$ に対し，$\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\| = R$ を満たす $\overrightarrow{x}$ はすべて境界点だが，$\overrightarrow{x} \notin S$ である．

注意. この例のように，一般には集合 S の境界点が S に含まれているとは限らない．

（ウ）開集合と閉集合.

- 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が**開集合** (open set) であるとは，S に属する点がすべて S の内点であることをいう．
- S に属する点は S の内点か境界点である．S が開集合であるとは,「S が境界点を含まない」ことと同値である．すなわち，$S \cap \partial S = \emptyset$．
- 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が**閉集合** (closed set) であるとは，$\mathbb{R}^n - S$ が開集合となることをいう．
- 定義より $\partial S = \partial(\mathbb{R}^n - S)$ となることに注意しよう．$\mathbb{R}^n - S$ が開集合ということは，$\mathbb{R}^n - S$ が境界点を含まないことを意味する．よって，S が閉集合であるとは,「S が境界点をすべて含む」ことと同値である．すなわち，$\partial S \subset S$．

注意. $\mathbb{R}^n$ は開集合であるから，その補集合である空集合 $\emptyset$ は閉集合である．また，$\mathbb{R}^n$ は境界点を持たないので，$\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$．これは $\partial \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ を意味するので，$\mathbb{R}^n$ も閉集合でもある．ゆえに，その補集合である空集合 $\emptyset$ は開集合でもある．

じつは，$\mathbb{R}^n$ の部分集合で開集合かつ閉集合であるものは $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ そのものしか存在しない [1]．

（エ）有界集合とコンパクト集合. $S \subset \mathbb{R}^n$ が**有界** (bounded) であるとは，ある定数 $M > 0$ が存在して，任意の $\overrightarrow{a} \in S$ に対し $\|\overrightarrow{a}\| \leq M$ が成り立つことをいう．

S が有界な閉集合であるとき，**コンパクト（集合）** (compact (set)) であるという [2]．

（オ）領域・閉領域. 開集合 S が**連結** (connected) であるとは，S 内の任意の 2 点を S の中だけを通る折れ線で結ぶことができることをいう．

連結な開集合は**領域** (domain) とよばれる．領域 S にその境界 ∂S を加えた閉集合 $S \cup \partial S$ を**閉領域** (closed domain) という．

[1]「開かつ閉」の部分集合は英語で “clopen set” とよばれることもある．位相空間としての「連結性」は,「空集合と全体集合以外に “clopen set” は存在しない」と言い換えることができる．

[2] 位相空間論では,「開被覆」という概念を用いてコンパクト性を定義する．

担当教員：川平 友規 研究室：本館 H210 東京工業大学 理学院（数学系）

多変数関数

定義 （関数，定義域，値域，etc.） X を $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合とする．

- X の各元 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ にひとつの実数 y を対応させたものを X 上の**関数** (function) という．$n \ge 2$ のときは**多変数関数** (multivariable function) ともよばれる．
- f をそのような関数とするとき，y を $\vec{x}$ における関数 f の**値** (value) とよび，

$$y = f(\vec{x}), \qquad f : \vec{x} \mapsto y, \qquad \vec{x} \stackrel{f}{\longmapsto} y$$
$$y = f(x_1, \dots, x_n), \qquad f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto y, \qquad (x_1, \dots, x_n) \stackrel{f}{\longmapsto} y$$

  などと表す．
- X を関数 f の**定義域** (domain) とよぶ．
- 集合 $S \subset X$ に対し，集合

$$\boldsymbol{f(S) := \{f(\vec{x}) \in \mathbb{R} \mid \vec{x} \in S\} = \{y \in \mathbb{R} \mid {}^{\exists}\vec{x} \in S,\ y = f(\vec{x})\}}$$

  を関数 f による S の**像** (image) という．とくに，定義域 X の像 $f(X)$ を関数 f の**値域** (range) とよぶ．
- 関数 f の値域 $f(X)$ が集合 $Y \subset \mathbb{R}$ に入っていることがわかっているとき，関数 f を $f : X \to Y$ のように表す．

注意（関数の呼び方）． 「関数 f」のことを,「関数 $y = f(\vec{x})$」，あるいは「関数 $y = f(x_1, \dots, x_n)$」などとよぶことも多い．このとき，記号 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ は**ベクトル変数** (または変数ベクトル, variable vector) とよばれ，X 内のベクトルを自由に代入できる「箱」のようなものだと解釈される．記号 y もまた，関数 f が生成する実数が代入される「箱」のようなものである．(特定の $\vec{x} \in X$ における特定の値 $y = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ を表すわけではない．この場合は，記号をより定数らしい記号に変えて，$b = f(\vec{a})$ のように表現することが多い.)

例 3. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) := {x_1}^2 + {x_2}^2$ と定める．このとき，$f(\vec{x}) \ge 0$ なので，$f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ と表される．

等位面.

定義 （等位面） 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と与えられた実数 k に対し，集合

$$\boldsymbol{E_f(k) = \{\vec{x} \in X \mid f(\vec{x}) = k\}}$$

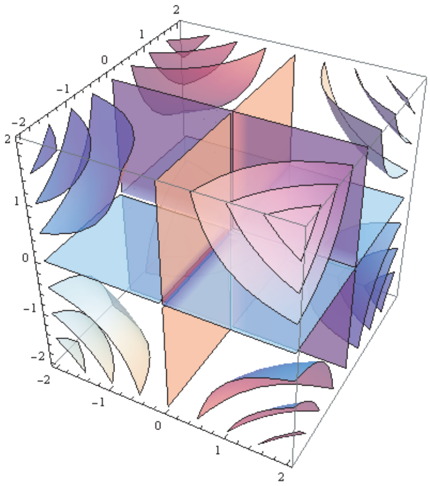
を関数 f の高さ f の**等位面** (contour) とよぶ．

「等位面」は「等高線」「等ポテンシャル面」と呼ばれることもある．写像の言葉を用いると $E_f(k)$ とは k の f による逆像のことである．すなわち，$E_f(k) := f^{-1}(\{k\})$ とも定義できる．

また,「等位面」は「曲面」とは限らないことに注意しよう．

例 4（1 次関数）． 前回の議論により，1 次関数 $y = \vec{A} \cdot \vec{x} + B$ $(\vec{A} \neq \vec{0})$ の等位面は $n = 2$ のとき $\vec{A}$ と垂直な直線，$n = 3$ のとき $\vec{A}$ と垂直な平面である．

例 5． 関数 $w = f(x, y, z) = xyz$ の等位面は右の図のようになる（各座標が絶対値 2 以下の範囲）．



極限と連続性

以下，X は空でない $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．

定義 （関数の極限） $\vec{a} \in X \cup \partial X$ とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $\vec{x} \to \vec{a}$ のとき実数 A に**収束する** (converge) とは，

$$(^\forall \epsilon > 0)(^\exists \delta > 0)(^\forall \vec{x} \in X) \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \implies |f(\vec{x}) - A| < \epsilon$$

が成り立つことをいう．このとき，

$$f(\vec{x}) \to A \ \ (\vec{x} \to \vec{a}) \quad \text{もしくは} \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = A$$

と表し，A を関数 f の $\vec{x} \to \vec{a}$ のときの**極限** (limit) という．

例 6． $X = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ において定義された関数 $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ は，極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$ をもつ．このとき $(0, 0) \notin X$ だが $(0, 0) \in \partial X$ である．

定義 （関数の連続性） $\vec{a} \in X$ とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $\vec{a}$ において**連続** (continuous) であるとは，$\vec{x} \to \vec{a}$ のとき $f(\vec{x}) \to f(\vec{a})$ が成り立つことをいう．すなわち，

$$(^\forall \epsilon > 0)(^\exists \delta > 0)(^\forall \vec{x} \in X) \quad \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \implies |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \epsilon$$

が成り立つことをいう．f が X 上のすべての点で連続であるとき,「f は X 上で連続」あるいは「f は X 上の連続関数」であるという．

次は連続関数のもっとも重要な性質だといってよい：

定理 12.1 (最大値・最小値の存在) 空でないコンパクト集合上の連続関数は最大値と最小値をもつ．すなわち，X が空でないコンパクト集合であり，$f : X \to \mathbb{R}$ が連続であるとき，ある $\vec{a}$, $\vec{b} \in X$ が存在して，任意の $\vec{x} \in X$ に対し

$$f(\vec{a}) \le f(\vec{x}) \le f(\vec{b})$$

が成り立つ．

証明はレポート問題としよう．

微分可能性

1 変数関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $a \in I$ で「微分可能」であるとは，

$$f(x) = \underbrace{f(a) + A(x-a)}_{1\text{ 次関数}} + \underbrace{o(|x-a|)}_{\text{誤差}} \quad (x \to a)$$

を満たす定数 $A \in \mathbb{R}$ が存在することをいうのであった．

多変数関数の場合も，まったく同様の方法で「微分可能性」を定義する：

定義 (多変数関数の微分可能性) 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $\vec{a} \in X$ において**全微分可能** (totally differentiable) であるとは，あるベクトル $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ が存在し，$\vec{x} \to \vec{a}$ のとき

$$\boldsymbol{f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|)} \tag{12.1}$$

が成り立つことをいう．このとき，$\vec{A}$ を関数 f の $\vec{a}$ における**勾配ベクトル** (gradient vector) とよび，

$$\boldsymbol{\nabla f(\vec{a}),\quad Df(\vec{a}),\quad \mathrm{grad}\, f(\vec{a})}$$

などと表す．

注意.

- 式 (12.1) の正確な意味は次の通り：関数 $y = f(\vec{x})$ を 1 次関数 $y = f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a})$ で近似した誤差

$$E(\vec{x}) := f(\vec{x}) - \{f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a})\}$$

について，$\dfrac{E(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \to 0$ $(\vec{x} \to \vec{a})$ が成り立つ．この $E(\vec{x})$ をランダウ記号で $o(\|\vec{x} - \vec{a}\|)$ と表しているのである[3]．

- 「全微分可能」とは本来「微分可能」とよばれるべきものだが，後で出てくる「偏微分可能」(partially differentiable) との区別を強調するためにこのようによばれる．$n = 1$ のときはふつうの「微分可能性」のことである．また,「勾配ベクトル」は「微分係数」に相当する[4]．

- 記号 ∇ は**ナブラ** (nabla) と読む．

[3]もしくは次のように表現してもよい：任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し，$\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$ のとき $|E(\vec{x})| \le \epsilon\|\vec{x} - \vec{a}\|$.

[4]実際に，この $\vec{A}$ を**微分係数** (derivative) とよぶこともある．

- 念のために $n=3$ のとき式 (12.1) を成分で表してみよう．$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$\vec{A}=(A_1,A_2,A_3)$ とするとき，

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= f(a_1,a_2,a_3)+\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1-a_1\\x_2-a_2\\x_3-a_3\end{pmatrix}+o(\sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_3-a_3)^2})\\
&= f(a_1,a_2,a_3)+\sum_{i=1}^{3}A_i(x_i-a_i)+o\left(\left(\sum_{i=1}^{3}(x_i-a_i)^2\right)^{1/2}\right).
\end{aligned}
$$

例 7（1 次関数）． 1 次関数 $y=f(\vec{x})=\vec{A}\cdot\vec{x}+B$ はすべての点 $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$ で微分可能であり，一定の勾配ベクトル $\nabla f(\vec{a})=\vec{A}$ をもつ．実際，

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x})-f(\vec{a}) &= (\vec{A}\cdot\vec{x}+B)-(\vec{A}\cdot\vec{a}+B)\\
&= \vec{A}\cdot(\vec{x}-\vec{a})
\end{aligned}
$$

であるから，誤差なしで微分可能性の式 (12.1) を満たす．

例題 12.1 (微分可能性) 2 次関数 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ は点 $(1,2)$ で微分可能であることを示せ．また，その勾配ベクトルを求めよ．

解答． $\Delta x=x-1$, $\Delta y=y-2$ とおく．このとき

$$f(x,y)=(\Delta x+1)^2+(\Delta y+2)^2=5+2\Delta x+4\Delta y+\Delta x^2+\Delta y^2$$

であるから，

$$f(x,y)=5+2(x-1)+4(y-2)+\underline{(x-1)^2+(y-2)^2}.$$

を得る．$f(1,2)=5$ であり，下線部は $(x,y)\to(1,2)$ のとき

$$\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\to 0$$

を満たすので，$o\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)$ と表される．よって点 $(1,2)$ において微分可能性の式 (12.1) を満たす．勾配ベクトルは $(2,4)$ である． ■

連続性と微分可能性． 最後に，微分可能性から連続性が自動的に導かれることを示そう：

命題 12.2 (微分可能なら連続) $f:X\to\mathbb{R}$ が $\vec{a}$ で微分可能であれば，$\vec{a}$ で連続である．

証明． $\vec{a}$ において式 (12.1) が成り立つとしよう．$\vec{x}\to\vec{a}$ のとき明らかに $f(\vec{x})\to f(\vec{a})$ であるから，$\vec{a}$ において連続である． ■

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

方向微分と偏微分（7/17）

配布日：2017/07/03　Version：1.1

レポート問題 (7/3 出題)

締め切りは 7 月 17 日の講義開始前とします.（研究室 **H210** メールボックスへの提出は当日朝 10 時 20 分まで.）

問題 13-1. (開集合)

(1) $a_1 < b_1$，$a_2 < b_2$ とするとき，$\mathbb{R}^2$ 内の集合

$$Q_2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 < x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2\right\}$$

は領域（連結な開集合）であることを示せ.

(2) より一般に，$a_1 < b_1$，$\cdots$，$a_n < b_n$ とするとき，$\mathbb{R}^n$ 内の集合

$$Q_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 < x_1 < b_1, \cdots, a_n < x_n < b_n\}$$

は領域であることを示せ.

問題 13-2. (全微分可能性) 次の関数が与えられた点で全微分可能であることを示せ．また，そこでの勾配ベクトルを求めよ.

(1) $z = x^2 + y^2$,　$(x, y) = (a, b)$

(2) $w = xyz$,　$(x, y, z) = (1, 1, 2)$

問題 13-3. (次回の予習) 次回の講義ノートの内容をよく読んで，以下の項目について，定義や条件を適宜補いつつ，合計 2 ページから 3 ページでまとめよ.（次回は講義中にこれらに関連した課題を出します.）以下，n は 2 以上の自然数，$f : X \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^n$ 内の領域 X 上の関数とする.

(1) $f : X \to \mathbb{R}$ の $\vec{a} \in X$ における速度ベクトル $\vec{v}$ に沿った方向微分の定義.

(2) $f : X \to \mathbb{R}$ の $\vec{a} \in X$ における第 i 偏微分係数の定義（ただし $i = 1, 2, \ldots, n$.）.

(3) 関数 $w = f(x, y, z) = xyz$ （定義域は $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$）に対し，以下の値を求めよ.

(a) 点 $(1, 1, 1)$ における $(1, 1, 1)$ に沿った方向微分.

(b) 点 $(1, 1, 1)$ における第 1 偏微分係数.

(c) 点 $(1, 2, 3)$ における第 3 偏微分係数.

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メールで ご指摘ください.

7/17 の講義ノート（7/10 は休講です.）

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I, II』の第 6 章　• スピヴァック『多変数の解析学』の第 2 章

方向微分

大学 1 年生のときに学ぶ多変数（2 変数）の微分積分では,「偏微分」が重要な役割を果たしていた．たとえば $z=f(x,y)$ の偏微分とは，x 軸と y 軸方向という特定の 2 方向に関する関数の変化率を表現するものである．しかし自然界には x 軸や y 軸といった軸が引かれているわけではなく，これらの方向は私たち人間が設定する便宜的な座標系にすぎない．したがって，自然現象を記述する際には，特定の座標系に依存しない形で表現することが求められる．関数の微分に関していえば，あらゆる方向に対して関数の変化率を調べることが必要となるであろう．

そのために必要なのが，次の「方向微分」である．

以下，$X\subset\mathbb{R}^n$ を領域（連結な開集合）であり，$f:X\to\mathbb{R}$ を関数とする．

定義（方向微分）． $\vec{a}\in X$ と $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ を固定して，時刻 $t=0$ に $\vec{a}$ を速度 $\vec{v}$ で通る直線 $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{v}$ を考える．このとき，極限

$$\boldsymbol{K=\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{a}+t\vec{v})-f(\vec{a})}{t}}$$

が存在するとき，これを関数 f の点 $\vec{a}$ における**速度ベクトル** $\boldsymbol{\vec{v}}$ **に沿った方向微分（係数）**(directional derivative) とよび，次のように表す．

$$\boldsymbol{K=D_{\vec{v}}f(\vec{a}).}$$

この極限 K は 0 に十分近い実数 t に対して

$$t\mapsto\vec{a}+t\vec{v}\overset{f}{\longmapsto}f(\vec{a}+t\vec{v})\in\mathbb{R}$$

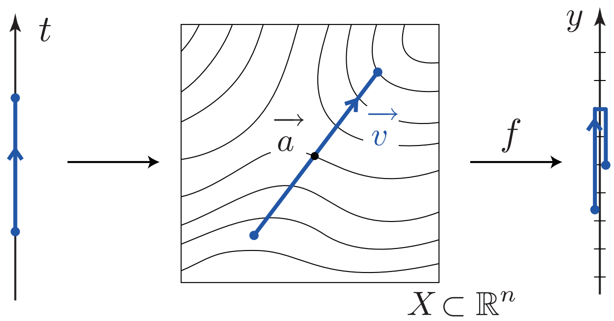
と合成して得られる 1 変数関数 $F(t):=f(\vec{a}+t\vec{v})$ の，$t=0$ における微分係数である．また，私たちの微分係数の定義に即して書けば，$t\to 0$ のときある定数 K が存在して

$$F(0+t)=F(0)+K\,t+o(t)$$

と書けるとき，すなわち

$$f(\vec{a}+t\vec{v})=f(\vec{a})+K\,t+o(t) \tag{13.1}$$

と書けるとき，この定数 K を関数 f の点 $\vec{a}$ における速度ベクトル $\vec{v}$ に沿った方向微分とよぶのである．



例 1. $f(x,y)=x^2+y^2$ の $\vec{a}=(1,2)$ におけるベクトル $\vec{v}=(1,-1)$ に沿った方向微分を求めてみよう．

$$(x,y)=\vec{a}+t\vec{v}=(1,2)+t(1,-1)=(1+t,2-t)$$

で表される直線上での f の値を考えればよい：

$$\begin{aligned} f(\vec{a}+t\vec{v})-f(\vec{a}) &= f(1+t,2-t)-f(1,2)=(1+t)^2+(2-t)^2-(1^2+2^2) \\ &= -2t+2t^2 \end{aligned}$$

より，$f(\vec{a}+t\vec{v})=f(\vec{a})-2t+o(t)$ であり，

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{a}+t\vec{v})-f(\vec{a})}{t}=-2+2t\to -2 \quad (t\to 0).$$

よって求める方向微分は -2 である．

定理 13.1 (全微分可能性と方向微分) $f: X\to\mathbb{R}$ が $\vec{a}\in X$ で全微分可能であるとき，任意の「速度ベクトル」 $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ に沿った方向微分 $D_{\vec{v}}f(\vec{a})$ が存在する．さらに，次が成り立つ：

$$\boldsymbol{D_{\vec{v}}f(\vec{a})=\nabla f(\vec{a})\cdot\vec{v}}. \tag{13.2}$$

ここで，右辺は「勾配ベクトル」と「速度ベクトル」の内積である．

例 2. 前回計算したように例 1 の関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ は点 $(1,2)$ において全微分可能であり，そこでの勾配ベクトルは $(2,4)$ であった，一方定理 13.1 より，勾配ベクトル $(2,4)$ と速度ベクトル $(1,-1)$ の内積の値は -2 である．すなわち，例 1 の結果とつじつまが合っている．

証明. $\vec{a}$ で全微分可能なので，勾配ベクトルを $\vec{A}:=\nabla f(\vec{a})$ とおくと，$\vec{x}\to\vec{a}$

$$f(\vec{x})=f(\vec{a})+\vec{A}\cdot(\vec{x}-\vec{a})+o(\|\vec{x}-\vec{a}\|) \tag{13.3}$$

がなりたつ．いま任意に速度ベクトル $\vec{v}$ を固定し，$\vec{x}(t):=\vec{a}+t\vec{v}$ で表される $\mathbb{R}^n$ 内の直線を考える．t が十分 0 に近いとき，$\vec{x}(t)$ は $\vec{a}$ の十分近くにあり，$\vec{x}(t)\in X$ となる．とくに，$t\to 0$ のとき $\vec{x}(t)\to\vec{a}$ となるから，式 (13.3) より

$$\begin{aligned} & f(\vec{a}+t\vec{v})=f(\vec{a})+\vec{A}\cdot(t\vec{v})+o(\|t\vec{v}\|) \\ \iff & f(\vec{a}+t\vec{v})-f(\vec{a})=(\vec{A}\cdot\vec{v})t+o(|t|) \end{aligned}$$

となるから，$\vec{v}$ に沿った方向微分 $D_{\vec{v}}f(\vec{a})$ は存在し，その値は $\vec{A}\cdot\vec{v}=\nabla f(\vec{a})\cdot\vec{v}$ である． ■

偏微分

方向微分の特別な場合として，「偏微分」を定義しよう．まず線形代数で学ぶ「標準基底」の定義を思い出しておく：

定義 (標準基底)
- $\mathbb{R}^n$ の元で，第 i 成分のみが 1 であとは 0 であるものを $\vec{e}_i$ で表す．すなわち，

$$\vec{e}_1:=(1,0,\cdots,0),\quad \vec{e}_2:=(0,1,\cdots,0),\quad \ldots,\quad \vec{e}_n:=(0,0,\cdots,1).$$

これらを組にしたものを，$\mathbb{R}^n$ の**標準基底** (canonical basis) とよぶ．

定義 (偏微分) • $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を変数とする関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in X$ に対し，$\vec{e_i}$ に沿った方向微分係数

$$D_{\vec{e_i}} f(\vec{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{e_i}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + t, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{t}$$

を関数 f の $\vec{a}$ における**第 i 偏微分係数** (*i*th partial derivative) もしくは **x_i 偏微分係数** (partial derivative with respect to x_i) とよび，

$$\partial_i f(\vec{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{a}), \quad f_{x_i}(\vec{a})$$

などと表す．

• すべての偏微分係数 $\partial_1 f(\vec{a}), \ldots, \partial_n f(\vec{a})$ が存在するとき，関数 f は $\vec{a}$ において**偏微分可能** (partially differentiable) であるという．

定理 13.1 より，次の定理を得る：

定理 13.2 (全微分可能なら偏微分可能) $f : X \to \mathbb{R}$ が $\vec{a} \in X$ で全微分可能であれば，その点で偏微分可能である．また，勾配ベクトルを $\vec{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ と表すとき，$i = 1, 2, \ldots, n$ に対し

$$\partial_i f(\vec{a}) = A_i.$$

したがって，勾配ベクトルは偏微分係数を用いて次のように書ける：

$$\nabla f(\vec{a}) = \Big(\partial_1 f(\vec{a}), \partial_2 f(\vec{a}), \ldots, \partial_n f(\vec{a})\Big).$$

証明. 定理 13.1 より，各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して第 i 偏微分係数，すなわち $\vec{e_i}$ に沿った方向微分 $\partial_i f(\vec{a}) = D_{\vec{e_i}} f(\vec{a})$ が存在する．式 (13.2) より，

$$\partial_i f(\vec{a}) = D_{\vec{e_i}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{e_i} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot \vec{e_i} = A_i.$$ ■

定義 (偏導関数) 関数 f は X 上のすべての点で偏微分可能であるとき，$\vec{a} \in X$ に第 i 偏微分係数 $\partial_i f(\vec{a})$ を対応させる関数を関数 f の**第 i 偏導関数** (*i*th partial derivative)（もしくは **x_i 偏導関数** (partial derivative for x_i) とよび，関数を $y = f(\vec{x})$ と表すとき，

$$\partial_i y = \partial_i f(\vec{x}), \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}), \quad y_{x_i} = f_{x_i}(\vec{x})$$

などと表す．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

テイラー展開と合成関数の微分（7/24）

配布日：2017/07/24　Version：1.1

レポート問題 (7/17 出題)

締め切りは 7 月 24 日の講義開始前とします.（研究室 H210 メールボックスへの提出は当日朝 10 時 20 分まで.）

問題 14-1. (勾配ベクトルの線型性とライプニッツ則) ある領域 X 上で定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と 関数 $g : X \to \mathbb{R}$ は点 $\vec{a} \in X$ において全微分可能であるとする．このとき，以下を示せ．

(1) 任意の実数 α, β に対し $h(\vec{x}) := \alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})$ とおくとき，

$$\nabla h(\vec{a}) = \alpha \nabla f(\vec{a}) + \beta \nabla g(\vec{a}).$$

(2) $h(\vec{x}) := f(\vec{x})g(\vec{x})$ とおくとき，

$$\nabla h(\vec{a}) = \Big(\nabla f(\vec{a})\Big) g(\vec{a}) + f(\vec{a}) \nabla g(\vec{a}).$$

問題 14-2. (方向微分の線型性とライプニッツ則) ある領域 X 上で定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と 関数 $g : X \to \mathbb{R}$ は点 $\vec{a} \in X$ において全微分可能であるとする．このとき，以下を示せ．

(1) 任意の実数 α, β とベクトル $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$D_{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}} f(\vec{a}) = \alpha D_{\vec{u}} f(\vec{a}) + \beta D_{\vec{v}} f(\vec{a}).$$

(2) $h(\vec{x}) := f(\vec{x})g(\vec{x})$ とおくとき任意の $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$D_{\vec{v}} h(\vec{a}) = \Big(D_{\vec{v}} f(\vec{a})\Big) g(\vec{a}) + f(\vec{a}) D_{\vec{v}} g(\vec{a}).$$

問題 14-3. (次回の予習) 次回の講義ノートの内容をよく読んで，以下の項目について，定義や条件を適宜補いつつ，合計 2 ページから 3 ページでまとめよ.（次回は講義中にこれらに関連した課題を出します.）以下，n は 2 以上の自然数，$f : X \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^n$ 内の領域 X 上の関数とする．

(1) f が C^N 級関数（$N = 0, 1, \cdots, \infty$）であることの定義.

(2) f が C^1 級関数であることの利点は何か？また，C^2 級関数であることの利点は何か？

(3) 多変数平均値の定理.

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メールで ご指摘ください.

7/17 の講義ノート（7/10 は休講です.）

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I, II』の第 6 章　• スピヴァック『多変数の解析学』の第 2 章

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210 東京工業大学 理学院（数学系）

合成関数の微分

微分可能な曲線． まず $\mathbb{R}^n$ における「曲線」を定義する．

定義（曲線，速度ベクトル） • 閉区間 $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ を動く変数 t に対し，$\mathbb{R}^n$ 内のベクトル

$$\overrightarrow{x}(t)=(x_1(t),\,x_2(t),\,\cdots,\,x_n(t))$$

をひとつ対応させる．この $\overrightarrow{x}(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ が $\mathbb{R}^n$ 内の**曲線** (curve) であるとは，各 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ がすべて t の連続関数であることをいう．また，変数 t を曲線 $\overrightarrow{x}(t)$ の**パラメーター** (parameter) もしくは**時刻** (time) とよぶ．

- 曲線 $\overrightarrow{x}(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ が**微分可能** (differentiable) であるとは，各 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ がすべて t について微分可能な関数であることをいう

- 微分可能な曲線 $\overrightarrow{x}(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ に対し，

$$\frac{d\overrightarrow{x}}{dt}(t):=\left(\frac{dx_1}{dt}(t),\cdots,\frac{dx_n}{dt}(t)\right)$$

を $\overrightarrow{x}(t)$ のパラメーター（時刻）t における**速度ベクトル** (velocity) とよぶ．

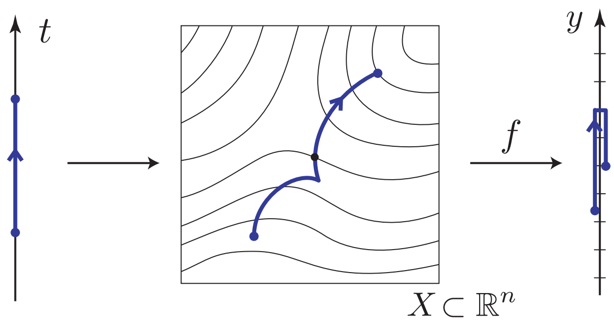
注意． 集合 $\left\{\overrightarrow{x}(t)\mid\alpha\le t\le\beta\right\}$ のことも「曲線」とよばれる．

注意． 「微分可能」を「C^1 級」に変えることで,「C^1 級曲線」が定義される．C^1 級曲線の速度ベクトルがどの時刻でもゼロベクトルにならないとき,「滑らかな曲線」とよばれる [1]．

曲線と関数の合成とその微分． 以下，X は $\mathbb{R}^n$ 内の領域とし，$f:X\to\mathbb{R}$ を関数とする．f が全微分可能であるとき，その勾配ベクトルは

$$\nabla f(\overrightarrow{x})=\left(\partial_1 f(\overrightarrow{x}),\,\cdots,\,\partial_n f(\overrightarrow{x})\right)$$

と偏微分係数を用いて表現できるのであった．



このとき，次が成り立つ：

[1] 滑らかでない C^1 曲線は速度がゼロベクトルになる点において「カド」をもつことができる．たとえば，(t^2,t^3) や $(t^3,|t^3|)$ を $-1\le t\le 1$ で図示してみよ．

命題 14.1 (合成関数の微分) $f : X \to \mathbb{R}$, $y = f(\vec{x})$ は全微分可能な関数とする．また，微分可能な曲線 $\vec{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ $(\alpha \le t \le \beta)$ はすべての t で $\vec{x}(t) \in X$ をみたしているものとする．このとき，合成関数 $F(t) := f(\vec{x}(t))$ の t に関する微分は

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}(t) &= \nabla f\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \frac{d}{dt}\vec{x}(t) \quad \text{：勾配ベクトルと速度ベクトルの内積}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\vec{x}(t)\big)\frac{dx_i}{dt}(t).\end{aligned}$$

注意. $\dfrac{d(f \circ \vec{x})}{dt} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$ と表現されることも多い．

注意. 曲線の速度ベクトル $\dfrac{d\vec{x}}{dt}(t)$ を $\vec{v}$ とおくとき，この微分の値は関数 f の $\vec{v}$ に沿った方向微分 $D_{\vec{v}}f(\vec{x}(t))$ と一致する．

証明. $t \in [\alpha, \beta]$ を固定し，$\vec{v} := \dfrac{d\vec{x}}{dt}(t)$ とおく．いま，$t + \Delta t \in [\alpha, \beta]$ を満たしながら $\Delta t \to 0$ とすると，曲線 $\vec{x}(t)$ の微分可能性より

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \vec{x}(t) + \vec{v}\Delta t + \vec{o}(\Delta t)$$

(ただし，$\vec{o}(\Delta t)$ は各成分が $o(\Delta t)$ と表されるようなベクトル) と表される．そこで $\vec{A} := \nabla f(\vec{x}(t))$ とおけば，関数 f の全微分可能性より

$$\begin{aligned}f\big(\vec{x}(t+\Delta t)\big) - f\big(\vec{x}(t)\big) &= \vec{A} \cdot \big(\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)\big) + o\big(\big\|\vec{x}(t+\Delta t)) - \vec{x}(t)\big\|\big)\\ &= \vec{A} \cdot \big(\vec{v}\Delta t + \vec{o}(\Delta t)\big) + o\big(\big\|\vec{v}\Delta t + \vec{o}(\Delta t)\big\|\big)\\ &= \big(\vec{A} \cdot \vec{v}\big)\Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$

微分係数の定義より，時刻 t における $F(t)$ の微分係数は $\vec{A} \cdot \vec{v} = \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \dfrac{d\vec{x}}{dt}(t)$ である． ■

例 1. $f(x, y, z)$ が C^1 級であるとき，t の関数 $F(t) := f(t, t^2, e^t)$ の導関数を求めよう．まず曲線 $t \mapsto (t, t^2, e^t)$ で定まる関数の速度ベクトルは $(1, 2t, e^t)$ なので，

$$\frac{dF}{dt}(t) = \begin{pmatrix} f_x(t, t^2, e^t) \\ f_y(t, t^2, e^t) \\ f_z(t, t^2, e^t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{pmatrix} = f_x(t, t^2, e^t) + 2tf_y(t, t^2, e^t) + e^t f_z(t, t^2, e^t).$$

高階導関数と C^n 級関数

以下，X を $\mathbb{R}^n$ 内の領域もしくは閉領域とし，$f : X \to \mathbb{R}$ を関数とする．

定義 （高階導関数） • $f : X \to \mathbb{R}$ は偏微分可能であるとする．$i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し，第 j 偏導関数の第 i 偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) = \partial_i(\partial_j f) = (f_{x_j})_{x_i}$$

を

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i}$$

などと表す．とくに，$i = j$ のときは $\dfrac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} f = {\partial_i}^2 f$ とも表す．これらを関数 f の **2 階偏導関数** (second partial derivative) とよぶ．すべての 2 階導関数 $f_{x_j x_i}$ が存在するとき，f は **2 回偏微分可能**という．同様に、自然数 N に対して関数 f の N **階偏導関数**と N **回偏微分可能**性が定まる．

- 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が連続であることを $\boldsymbol{C^0}$ **級**であるという．また，自然数 N に対し，関数 $f : X \to \mathbb{R}$ の N 階までの導関数が存在し，しかもそれらがすべて連続であるとき，関数 f は $\boldsymbol{C^N}$ **級（関数）** (function of class C^N) であるという．
- 関数 f がすべての自然数 N に対して C^N 級であるとき，$\boldsymbol{C^\infty}$ **級（関数）** (function of class C^∞) もしくは**滑らか** (smooth) であるという

C^1 級関数と全微分可能性． 「C^1 級関数」を考える最大の理由は，次の定理が成り立つことにある：

定理 14.2 （**C^1 級なら全微分可能**） $f : X \to \mathbb{R}$ が C^1 級関数であれば，すなわち，偏導関数 $\partial_1 f, \cdots, \partial_n f$ が存在しすべて連続であれば，関数 f は全微分可能である．とくに，勾配ベクトルは偏微分係数を用いて次のように書ける：任意の $\vec{a} \in X$ に対し，

$$\boldsymbol{\nabla f(\vec{a}) = \Big(\partial_1 f(\vec{a}),\ \partial_2 f(\vec{a}),\ \ldots,\ \partial_n f(\vec{a})\Big).}$$

証明． 2 変数の場合と同様． ■

注意． 一般に，与えられた関数が与えられた点で微分可能であることを定義通りに確認するには、巧みな（もしくは、単に面倒な）式変形が必要となり，あまり実用的とはいえない．一方，与えられた関数が C^1 級関数であることを確認するのは比較的やさしい．実際，偏微分の計算自体は本質的に 1 変数の微分計算であり，得られた偏導関数が連続であるかどうかも式の形から一目で判定できることが多い．

例 2． xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = xy^2 \sin e^{x^2+y^2}$ はすべての点で全微分可能であることを確認してみよう．

いま，f_x と f_y も x と y の連続関数の和，積，合成で書けることが（計算するまでもなく）わかるので，連続である．したがって f は C^1 級関数であり，定理 14.2 より全微分可能である．

C^2 級関数と偏微分の順序交換． 「C^2 級以上の関数」を考える利点は，次の定理が成り立つことにある：

定理 14.3 (偏微分の順序交換) $f : X \to \mathbb{R}$ が C^2 級関数であれば，任意の $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ と任意の $\vec{a} \in X$ に対し，

$$\partial_i \partial_j f(\vec{a}) = \partial_j \partial_i f(\vec{a}).$$

とくに，C^N 級であれば，N 階までの偏微分の順序は自由に交換してよい．

証明. 2 変数の場合と同様. ■

平均値の定理とテイラー展開

内分点. $\mathbb{R}^n$ 内の $\vec{x}$ がベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の**内分点** (internally dividing point) であるとは，ある $\theta \in [0, 1]$ が存在して，$\vec{x} = (1-\theta)\vec{p} + \theta\vec{q}$ と表されることをいう [2]．また，内分点全体の集合を $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を結ぶ線分とよぶ．

平均値の定理. 次の定理は，1 変数関数の「平均値の定理」にあたるものである：

定理 14.4 (多変数関数の平均値の定理) $f : X \to \mathbb{R}$ を領域 X 上の C^1 級関数とし，X に含まれる開球 $\mathbb{B}(\vec{a}, r)$ を任意に選ぶ．このときすべての $\vec{x} \in \mathbb{B}(\vec{a}, r)$ に対し，$\vec{x}$ と $\vec{a}$ の内分点 $\vec{c}$ が存在し，

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}). \tag{14.1}$$

注意. 下記の証明からもわかるが，$\vec{x}$ と $\vec{a}$ を結ぶ線分がすべて X に含まれていれば，式 (14.1) を満たす $\vec{c}$ が線分上に存在する．すなわち，開球全体が X に含まれている必要はない．また，関数 f は全微分可能であればよく，C^1 級でなくてもよい．

証明. $\vec{v} := \vec{x} - \vec{a}$，$\vec{p}(t) := \vec{a} + t\vec{v}$ $(0 \le t \le 1)$ とおく．このとき，$\vec{p}(t)$ は $\vec{x}$ と $\vec{a}$ の内分点である．

いま，1 変数関数 $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ を $F(t) := f(\vec{p}(t))$ と定義しよう．$\vec{p}(t)$ は微分可能な曲線であり，f は全微分可能であるから，命題 14.1 より

$$\frac{dF}{dt}(t) = \nabla f(\vec{p}(t)) \cdot \vec{v}$$

が成り立つ．よって F は t に関して微分可能であり，C^1 級関数でもある．そこで，(1 変数関数の）平均値の定理を適用すると，

$$F(1) - F(0) = \frac{dF}{dt}(\theta)(1-0) = \frac{dF}{dt}(\theta)$$

を満たす $\theta \in (0, 1)$ が存在することがわかる．すなわち，

$$\begin{aligned} & f(\vec{p}(1)) - f(\vec{p}(0)) = \nabla f(\vec{p}(\theta)) \cdot \vec{v} \\ \iff & f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{p}(\theta)) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) \end{aligned}$$

が成り立つ．よってこの $\vec{p}(\theta)$ を $\vec{c}$ とおけばよい． ■

テイラー展開. 「多変数関数の平均値の定理」(定理 14.4）の証明と同じアイディアで，次の「多変数関数のテイラー展開」を証明できる．

[2] $\vec{p} = \vec{q}$ の場合も認める．

定理 14.5 (多変数関数のテイラー展開) $f : X \to \mathbb{R}$ を領域 X 上の C^N 級関数とし，X に含まれる開球 $\mathbb{B}(\vec{a}, r)$ を任意に選ぶ．このときすべての $\vec{x} \in \mathbb{B}(\vec{a}, r)$ に対し，$\vec{x}$ と $\vec{a}$ の内分点 $\vec{c}$ が存在し，$\vec{x} - \vec{a} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ とおくとき，

$$\boldsymbol{f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}(\Delta x_1 \partial_1 + \cdots + \Delta x_n \partial_n)^k f(\vec{a}) + \frac{1}{N!}(\Delta x_1 \partial_1 + \cdots + \Delta x_n \partial_n)^N f(\vec{c}).}$$

この式を関数 $y = f(\vec{x})$ の $\vec{a}$ における N **次テイラー展開**とよぶ．ただし，たとえば $(\Delta x_1 \partial_1 + \Delta x_2 \partial_2)^2 f(\vec{a})$ はまず形式的に $(\Delta x_1^2 \partial_1^2 + 2\Delta x_1 \Delta x_2 \partial_1 \partial_2 + \Delta x_2^2 \partial_2^2) f(\vec{a})$ と展開した上で，$\Delta x_1^2 f_{x_1 x_1}(\vec{a}) + 2\Delta x_1 \Delta x_2 f_{x_1 x_2}(\vec{a}) + \Delta x_2^2 f_{x_2 x_2}(\vec{a})$ と計算する．

注意． $\Delta\vec{x} := \vec{x} - \vec{a} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ とおき，さらに形式的に $\nabla := (\partial_1, \ldots, \partial_n)$，$\Delta\vec{x} \cdot \nabla := \Delta x_1 \partial_1 + \cdots + \Delta x_n \partial_n$ と表現すれば，テイラー展開は

$$\boldsymbol{f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}(\Delta\vec{x} \cdot \nabla)^k f(\vec{a}) + \frac{1}{N!}(\Delta\vec{x} \cdot \nabla)^N f(\vec{c})}$$

とも表される.（実用的に欠けるが，形がきれいなので紹介しておく.）

ヘッセ行列と 2 次形式． $f : X \to \mathbb{R}$ を C^2 級関数とする．$\vec{a} \in X$ に対し，n 次正方行列（すなわち，$n \times n$ 行列）で (i, j) 成分を $h_{ij} := \partial_i \partial_j f(\vec{a})$ にもつものを $\boldsymbol{Hf(\vec{a})}$ で表し，**ヘッセ行列** (Hesse matrix）という．定理 14.3 より，ヘッセ行列は $h_{ij} = h_{ji}$ を満たす．すなわち，対称行列である．

いま $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ を取るとき，これらを縦ベクトル (すなわち $n \times 1$ 行列）とみなせば、$\vec{p}$ の転置 ${}^{\mathrm{t}}\vec{p}$ は横ベクトル（$1 \times n$ 行列）であり，行列としての積

$${}^{\mathrm{t}}\vec{p}\, Hf(\vec{a})\, \vec{q} = (p_1 \ \ldots \ p_n) \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

は実数（1×1 行列）である [3]．ヘッセ行列を用いて，C^2 級関数の 2 次のテイラー展開を表現することができる．

[3] 任意の $\vec{p} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ に対して ${}^{\mathrm{t}}\vec{p}\, M\, \vec{p} > 0$ が成り立つような n 次対称行列は**正定値対称行列** (positive-definite symmetric matrix) とよばれる．

定理 14.6 (n **変数関数の 2 次テイラー展開**) 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は C^2 級であり，定義域 X は $\vec{a}$ 中心の球 $\mathbb{B}(\vec{a}, r)$ を含んでいるとする．このとき，すべての $\vec{x} \in \mathbb{B}(\vec{a}, r)$ に対し，$\vec{x}$ と $\vec{a}$ の内分点 $\vec{c}$ が存在し，

$$\boldsymbol{f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2}{}^t(\vec{x} - \vec{a}) Hf(\vec{c})(\vec{x} - \vec{a})}$$

が成り立つ．また，$\vec{x} \to \vec{a}$ のとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f(\vec{x})} &\boldsymbol{= f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})} \\ &\quad \boldsymbol{+ \frac{1}{2}{}^t(\vec{x} - \vec{a}) Hf(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|^2)}\end{aligned}$$

が成り立つ．

これら 2 式は，それぞれ関数 $y = f(\vec{x})$ の 2 次の**テイラー展開**，2 次の**漸近展開**とよばれる．このままではわかり辛いから，具体例を見てみよう．

例題 14.1 (多項式のテイラー展開) $w = f(x, y, z) = xyz$ の点 $(1, -1, 2)$ における 2 次のテイラー展開と漸近展開を計算せよ．

解答． 勾配ベクトルは $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (yz, zx, xy)$，ヘッセ行列は $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$ である．$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x-1, y+1, z-2)$ とおくとき，ある $c \in (0,1)$ が存在して [4]

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(1,-1,2) + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta x \ \ \Delta y \ \ \Delta z) \begin{pmatrix} 0 & 2 + c\Delta z & -1 + c\Delta y \\ 2 + c\Delta z & 0 & 1 + c\Delta x \\ -1 + c\Delta y & 1 + c\Delta x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\ &= -2 - 2\Delta x + 2\Delta y - \Delta z + 2\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta z - \Delta z\Delta x + 3c\Delta x\Delta y\Delta z. \end{aligned}$$

同様に漸近展開は

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(1,-1,2) + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta x \ \ \Delta y \ \ \Delta z) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + o(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \\ &= -2 - 2\Delta x + 2\Delta y - \Delta z + 2\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta z - \Delta z\Delta x + o(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2). \end{aligned}$$

■

[4] この場合，$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ に依存せず $c = 1/3$ だとわかる．

担当教員：川平 友規　研究室：本館 H210　東京工業大学 理学院（数学系）

ベクトル値関数と逆関数定理（7/31）

配布日：2017/07/24　Version：1.1

7/31 の講義ノート

参考文献：　• 小平邦彦『解析入門 I, II』の第 6 章　• スピヴァック『多変数の解析学』の第 2 章

ベクトル値関数

n, m を自然数とし，X を $\mathbb{R}^n$ 内の領域もしくは閉領域とする．X 上を動くベクトル変数 $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ に対し，m 個の C^1 級関数

$$y_1 = f_1(\overrightarrow{x}),\ y_2 = f_2(\overrightarrow{x}),\ \cdots,\ y_m = f_m(\overrightarrow{x})$$

を並べて得られる m 次元ベクトル

$$\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) := (y_1, \cdots, y_m) = (f_1(\overrightarrow{x}), \cdots, f_m(\overrightarrow{x})) \in \mathbb{R}^m \tag{15.1}$$

を $f : X \to \mathbb{R}^m$ と表し，X 上の m 次元 C^1 級**ベクトル値関数** (vector-valued function) とよぶ[1]．

例 1（線形関数）． $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を $(x + 2y, x - y, 3x + 5y) \in \mathbb{R}^3$ に対応させたものは $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級ベクトル値関数である．実際，$f_1(x, y) = x + 2y$, $f_2(x, y) = x - y$, $f_3(x, y) = 3x + 5y$ とおくと，これらは C^1 級関数である．

このベクトル値関数の特徴は

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と行列の積で表現されることである．すなわち，線形代数学で学ぶ「線形写像」である．

例 2（グラフ）． xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $z = g(x, y)$ が与えられているとき，平面ベクトル (x, y) に空間ベクトル $(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ を対応させたものはベクトル値関数である．その像は関数 g の**グラフ** (graph) とよばれるものである．

たとえば (x, y) を原点中心半径 1 の閉円板に制限すると，$g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフはベクトル値関数 $(x, y) \mapsto (x, y, g(x, y))$ の像であり，半球面となる．

例 3（球面と球体の極座標表示）． $r > 0$ を固定するとき，ベクトル値関数

$$F : (\theta, \phi) \mapsto (r \sin\theta \cos\phi,\ r \sin\theta \sin\phi,\ r \cos\theta)$$

は半径 r の球面（θ, ϕ の範囲によってはその一部）のパラメーター表示を与える．また，$r > 0$ を変数とみなしたベクトル値関数

$$\widetilde{F} : (r, \theta, \phi) \mapsto (r \sin\theta \cos\phi,\ r \sin\theta \sin\phi,\ r \cos\theta)$$

は空間の極座標変換を与える．

例 4（$n = 1$ もしくは $m = 1$ のとき）． xyz 空間内の滑らかな曲線 $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ もベクトル値関数の一種（$n = 1$）である．曲線や曲面（もしくはそれを一般化した「多様体」とよばれる集合）をより高い次元の空間に実現する（埋め込む）とき，ベクトル値関数が用いられる．

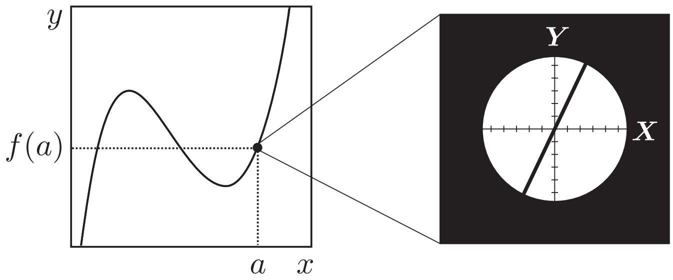
[1] 縦ベクトル，横ベクトルの区別は原則としてしないが，微分を考えるときには必要に応じて行列として表現する．その際はちゃんと断ってから書くことにする．また，X から $\mathbb{R}^m$ への C^1 **級写像** (map, mapping) とよぶことも多い．

その他，ふつうの多変数関数 $y = f(x_1, \cdots, x_n)$ も広い意味ではベクトル値関数（$m = 1$）である [2].

ヤコビ行列

ベクトル値関数の「微分 (係数)」とは何か考えよう．

1 変数の場合． まず，1 変数関数 $y = f(x)$ の微分可能性の幾何学的な意味を思い出してみる．



$x = a$ において $A := f'(a)$ を満たすとき，そこでのグラフを顕微鏡で拡大していくと，グラフの凹凸は次第に和いでほとんど「線分」に見えてくる．より正確には，顕微鏡内の XY 座標系に関して比例関係 $Y = AX$ を満たす「線分」に見える．実際，$X := x - a$，$Y := f(x) - f(a)$ とおくと，近似式 $f(x) - f(a) \approx A(x - a)$ すなわち $Y \approx AX$ が成立するのであった．この意味で,「微分係数」A とは，局所的な「比例定数」だと解釈できるわけである．

n 変数の場合． 1 変数の場合を念頭におき，高次元ベクトル値関数の微分について考えてみよう．

X 上の m 次元 C^1 級ベクトル値関数 $f : X \to \mathbb{R}^m$ が式 (15.1) のように与えられているとしよう．また，定点 $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in X$ において $f(\vec{a}) = \vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ であるとする．各 $i = 1, \ldots, m$ に対し，ベクトル値関数 $\vec{y} = f(\vec{x})$ の第 i 成分 $y_i = f_i(\vec{x})$ は全微分可能な関数である．すなわち，各 $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ において，$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ が $\vec{a}$ に十分近いとき，f_i の勾配ベクトル

$$\nabla f_i(\vec{a}) = (A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}) \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, \cdots, m)$$

が存在し，$\vec{x} \to \vec{a}$ のとき

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{a}) + \nabla f_i(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|)$$

が成り立つ． すなわち

$$y_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x_j - a_j) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|)$$

が成り立つ．したがって，これを i 行目の成分とする $m \times 1$ 行列（すなわち縦ベクトル）を考えるとき，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(\|\vec{x} - \vec{a}\|) \\ \vdots \\ o(\|\vec{x} - \vec{a}\|) \end{pmatrix}.$$

[2] もちろん，$n = m = 1$ の場合，これはただの 1 変数関数だが，多変数関数の特殊な場合とみなすことができる．

右辺の第 3 項は誤差だとみなせば，近似式

$$\begin{pmatrix} y_1 - b_1 \\ \vdots \\ y_m - b_m \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \tag{15.2}$$

が成立する．すなわち，右辺の行列を A と表すと，

$$\vec{y} - \vec{b} \approx A(\vec{x} - \vec{a})$$

と表される．この式の意味を解釈すると，

『m 次元ベクトル $\vec{y} - \vec{b} = f(\vec{x}) - f(\vec{a})$ は n 次元ベクトル $\vec{x} - \vec{a}$ に $m \times n$ 行列 A を掛ける線形写像によって近似される』

ということである．

先ほどの図のように，ベクトル値関数の $\vec{y} = f(\vec{x})$ の「想像上の」グラフを考えてみよう．横軸は n 次元，縦軸は m 次元のユークリッド空間であり，点 $(\vec{a}, f(\vec{a}))$ を中心に顕微鏡で拡大する．このとき，顕微鏡内の横軸 $\vec{X} = \vec{x} - \vec{a}$ と縦軸 $\vec{Y} = \vec{y} - \vec{b}$ の間には，近似的に「比例関係」$\vec{Y} = A\vec{X}$ が成り立つ[3]．すなわち，「比例定数」にあたる式 (15.2) の行列 A はベクトル値関数 $f : X \to \mathbb{R}^m$ の $\vec{a}$ における「微分係数」にあたるものだと考えられる．実際，行列 A の i 行 j 列目の成分は関数 f_i の変数 x_j に関する偏微分係数

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a})$$

（これは f と $\vec{a}$ で決まる具体的な数値）であり，m 個の関数の n 個の変数に関するそれぞれの変化率を総当たり的に計算して並べたものだといえる．

この $m \times n$ 行列 A をベクトル値関数 $f : X \to \mathbb{R}^n$ の $\vec{a}$ における**ヤコビ行列** (Jacobian matrix) もしくは単に**微分** (derivative) とよび，$\boldsymbol{Df(\vec{a})}$ と表す．すなわち，

$$\boldsymbol{Df(\vec{a})} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}.$$

ヤコビ行列は（見た目は仰々しいが，実際は）f と $\vec{a}$ で決まる具体的な数値を成分とする行列であることに注意しよう．

もちろん，f は C^1 級であったから，各 $\vec{x} \in X$ に対してヤコビ行列 $Df(\vec{x})$ が定まり，しかもすべての成分はそれぞれ $\vec{x}$ の連続関数になっている．すなわち，$Df(\vec{x})$ は $\vec{x}$ の連続関数を成分とする $n \times n$ 行列のようにも解釈できる．

例 5（線形写像のヤコビ行列）． 例 1 の線形写像 $(x, y) \mapsto (x + 2y, x - y, 3x + 5y)$ を $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ とおくと，任意の点（ベクトル）$\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$Df(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

[3]比例関数 $F(x)$ とは，任意の実数 k に対して $F(kx) = kF(x)$ が成り立つものをいうのであった．線形写像はこの性質を持つから，比例関数の自然な高次元化だと言える．

一般に，線形写像のヤコビ行列はその写像を定める行列そのものである．

例 6（球面と球体の極座標表示）． 例 3 の半径 $r > 0$ の球面を与えるベクトル値関数

$$(x, y, z) := F(\theta, \phi) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)$$

の，点 (θ, ϕ) におけるヤコビ行列は

$$DF(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} x_\theta & x_\phi \\ y_\theta & y_\phi \\ z_\theta & z_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

となる．一方，$r > 0$ を変数とみなしたベクトル値関数

$$(x, y, z) := \tilde{F}(r, \theta, \phi) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)$$

の，点 (r, θ, ϕ) におけるヤコビ行列は

$$DF(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

合成関数と連鎖律． 1 変数関数の場合,「連鎖律」（the chain rule）とよばれる合成関数の微分公式 $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ が成り立つのであった．これらを高次元化すると，ヤコビ行列に関する「連鎖律」が成立する：

> **定理 15.1 (連鎖律)** $X \subset \mathbb{R}^n$，$Y \subset \mathbb{R}^m$ をそれぞれ領域もしくは閉領域とする．ふたつの関数 $f : X \to Y$，$g : Y \to \mathbb{R}^l$ がともに C^1 級であれば，合成関数 $g \circ f : X \to \mathbb{R}^l$ も C^1 級であり，任意の $\vec{a} \in X$ に対し
>
> $$\boldsymbol{D(g \circ f)(\vec{a}) = Dg(f(\vec{a}))\, Df(\vec{a})}$$
>
> が成り立つ．

証明は例えば，[スピヴァック] の定理 2-2 を見よ．ベクトル値関数は局所的に（顕微鏡の中では）線形写像に見えるのだから，その誤差にあたる部分を極限をとって処理すればよい．

逆関数定理

まず $n = m = 1$ の場合に，微分可能な 1 変数関数 $y = f(x)$ が局所的に連続な逆関数を持つかどうかを考えてみよう．

さきほどの「顕微鏡」の図をもう一度眺めてみよう．$x = a$ において $A := f'(a)$ を満たすとき，$y = f(x)$ のグラフを $(a, f(a))$ を中心に顕微鏡で拡大していくと，それは顕微鏡内の XY 座標系に関して比例関係 $Y = AX$ を満たす「線分」に見える．とくに $f'(a) = A \neq 0$ のときは,「水平でない線分」に見えるであろう．このとき，直感的には「局所的に連続な逆関数」が「線分」の方程式から $X = Y/A$ に近い関数として存在すると考えられる [4]．

同様の考察を $n = m > 1$ の場合にしてみよう．ベクトル値関数 $f : X \to \mathbb{R}^n$ の局所的な変化はヤコビ行列による線形写像によって近似されるのであった．したがってこのヤコビ行列が逆行列を持てば，局所的には逆写像が存在すると期待される．

[4] 正確には，$x = a$ を含む区間 I で $f'(x) > 0$ であれば平均値の定理より単調増加であり関数は I 上で 1 対 1 となる．したがって逆関数が存在する．

定理 15.2 (逆関数定理 (inverse function theorem)) X を $\mathbb{R}^n$ 内の空でない開集合，$f: X \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級ベクトル値関数とする．$\vec{a} \in X$ においてヤコビ行列 $Df(\vec{a})$ が逆行列を持つとき，すなわち $\det Df(\vec{a}) \neq 0$ であるとき，$\vec{a}$ を含むある球 $U \subset X$ が存在し，f を U に制限した関数 $f|_U$ は C^1 級の逆関数を持つ．すなわち，ある C^1 級関数 $g: f(U) \to U$ が存在し，次を満たす：

(1) すべての $\vec{x} \in U$ に対し，$g(f(\vec{x})) = \vec{x}$.

(2) すべての $\vec{y} \in f(U)$ に対し，$f(g(\vec{y})) = \vec{y}$.

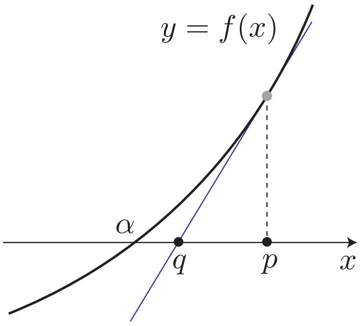
さらに，すべての $\vec{x} \in U$ に対し，$\vec{y} = f(\vec{x})$ のとき $Dg(\vec{y}) = Df(\vec{x})^{-1}$.

注意． $f|U$ および $g = (f|_U)^{-1}$ は U と $f(U)$ の間に過不足のない，連続な対応を与えている [5].

注意． 重要なのは，「C^1 級の」，とくに連続な逆関数が存在することである．たとえば $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $(x \in [-1,1])$ に対し $y \in [0,1]$ が有理数のとき $x = g(y) = \sqrt{1-y^2}$，無理数のとき $x = g(y) := -\sqrt{1-y^2}$ とすれば，連続でない逆関数も作ることができる．

ニュートン法とその簡易版． この定理の証明には，方程式の数値解法であるニュートン法を簡易化したような手法を用いることができる．その原理が非常に面白いので，1 変数の場合だけでも見ておこう．

まず関数のグラフ $y = f(x)$ の形状をある程度調べて，グラフが x 軸と交わるあたりに目星をつけておく．たとえば計算したい未知の解が $x = \alpha$ だとして，その付近の値 $x = p$ をひとつ選ぼう．次に点 $(p, f(p))$ における関数 $f(x)$ のグラフの接線を引き，x 軸との交点を求め，その x 座標を q とする．図を描いてみると，q は p よりも α に近づいているように見える．



いま，接線の方程式は $y = f(p) + f'(p)(x-p)$ であるから，$q = p - f(p)/f'(p)$ が成り立つ．「p から $p - f(p)/f'(p)$ を計算し，その値をまた p と思う」という操作を反復すれば，α に収束する数列が得られるのではないか．すなわち，解にある程度近い $p = p_1$ からスタートして，漸化式 $p_{n+1} = p_n - f(p_n)/f'(p_n)$ によって生成される数列を計算すれば，解 α の近似列を与えると期待される．これが**ニュートン法** (Newton's method) とよばれる方程式の近似計算のアイディアである．

しかし，一般には微分係数 $f'(p_n)$ の計算が難しいこともある．もし f が C^1 級であれば，f' は連続関数であるから，$x = \alpha$ の十分近くでの $f'(x)$ の値は $A := f'(p_1)$ からほとんど変化しないと考えてよい．このとき，漸化式は $p_{n+1} = p_n - f(p_n)/A$ となって，少しだけ簡単になる．

実際，次が証明できる：

命題 15.3 (簡易ニュートン法) C^1 級関数 $y = f(x)$ は $x = \alpha$ で $f(\alpha) = 0$ かつ $A := f'(\alpha) \neq 0$ をみたすものとする．このとき，ある $\delta > 0$ が存在し，$|p_1 - \alpha| < \delta$ のとき漸化式 $p_{n+1} = p_n - f(p_n)/A$ で与えられる数列 $\{p_n\}$ は α に収束する．

[5] 一般に位相空間 X と Y に対し，写像 $h: X \to Y$ が全単射であり，h と h^{-1} がともに連続であるとき，h は X から Y への**同相写像** (homeomorphism, topological map) とよばれる．このような h が存在するとき，位相空間 X と Y は互いに**同相** (homeomorphic) であるという．

注意. 実際には f' が $x = a$ において連続であれば，C^1 級でなくてもよい．(証明を参照．実用上そのようなケースはまれだと思われるが，念のため.)

証明. $N(x) := x - f(x)/A$ とおく．このとき，$N(\alpha) = \alpha$ であり，導関数は $N'(x) = 1 - f'(x)/A$ で与えられる．また，平均値の定理より $N(x) - N(\alpha) = N'(c)(x - \alpha)$ を満たす c が x と α の間に存在する．とくに $x = p_n$ のとき，

$$N(p_n) - N(\alpha) = N'(p_n)(p_n - \alpha) \iff p_{n+1} - \alpha = (1 - f'(p_n)/A)(p_n - \alpha).$$

いま f は C^1 級なので，f' は連続である．よってある $\delta > 0$ が存在し，$|x-\alpha| < \delta$ のとき $|f'(x)-A| < |A|/2$ が成り立つとしてよい．すなわち，$|1 - f'(x)/A| < 1/2$ である．そこで，もし p_n が $|p_n - \alpha| < \delta$ を満たせば，上の式より

$$|p_{n+1} - \alpha| = |1 - f'(p_n)/A| \cdot |p_n - \alpha| < \frac{1}{2}|p_n - \alpha|.$$

とくに，$|p_{n+1} - \alpha| < \delta/2 < \delta$ も成り立つ．よって $|p_1 - \alpha| < \delta$ となるように p_1 を選べば，帰納的に $|p_n - \alpha| < (1/2)^{n-1}\delta \to 0$ $(n \to \infty)$ が得られる． ■

$n = 1$ のときの逆関数定理の証明

アイディアをクリアにするために，あえて $n = 1$ に制限して証明を書いてみよう．$n \geq 2$ の場合は練習問題としておこう（下にヒントを与える）.

$n = 1$ のときの逆関数定理の証明. 開区間 $X \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^1 級関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が与えられており，$a \in X$ において $A := f'(a) \neq 0$ であると仮定する．また，$b = f(a)$ とおく．

いま f は C^1 級なので，f' は連続である．よって $\epsilon_0 = |A|/2 > 0$ にたいし，ある $\delta > 0$ が存在し，$|x-a| < \delta$ のとき $x \in X$ であり，$|f'(x) - A| < \epsilon_0 = |A|/2$ が成り立つとしてよい．いま，$|y_0 - b| < |A|\delta/2$ を満たす y_0 を任意にとって固定する．このとき，$f(x_0) = y_0$ をみたすような x_0 で $|x_0 - a| < \delta$ を満たすものが存在することを証明しよう．これは，関数 $F(x) = F_{y_0}(x) := f(x) - y_0$ が 0 となる点を求める問題だと解釈できる．いま $F'(x) = f'(x)$ であり，x が a に近いとき，具体的には，$|x - a| < \delta$ であるとき，$|F'(x) - A| < |A|/2$ が成り立つことに注意する．そこで，命題 15.3 を参考にして，漸化式 $p_1 := a,\ p_{k+1} := p_k - F(p_k)/A = p_k - (f(p_k) - y_0)/A$ で得られる数列を考えてみよう．まず $p_2 = p_1 - (f(p_1) - y_0)/A = p_1 - (b - y_0)/A$ より，$|p_2 - p_1| = |b - y_0|/|A| < \delta/2$，すなわち $|p_2 - a| < \delta/2 < \delta$ を得る．

いま $k \geq 2$ に対し，$k' = 1, 2, \ldots, k$ のとき $|p_{k'} - a| < \delta$ が成り立つと仮定しよう．漸化式より

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1} - \frac{f(p_k) - f(p_{k-1})}{A}$$

が成り立つが，平均値の定理より

$$f(p_k) - f(p_{k-1}) = f'(q_k)(p_k - p_{k-1})$$

となる p_k と p_{k-1} の内分点 q_k が存在する．よって

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1} - \frac{f'(q_k)(p_k - p_{k-1})}{A} = \left(1 - \frac{f'(q_k)}{A}\right)(p_k - p_{k-1}).$$

q_k のとり方から $|q_k - a| < \delta$ であるから，$|f'(q_k) - A| < |A|/2$，すなわち $|f'(q_k)/A - 1| < 1/2$．よって

$$|p_{k+1} - p_k| = \left|\left(1 - \frac{f'(q_k)}{A}\right)(p_k - p_{k-1})\right| < \frac{1}{2}|p_k - p_{k-1}|. \tag{15.3}$$

同様の議論により，

$$|p_{k+1} - p_k| < \frac{1}{2}|p_k - p_{k-1}| < \frac{1}{2^2}|p_{k-1} - p_{k-2}| < \cdots < \frac{1}{2^{k-1}}|p_2 - p_1| < \frac{\delta}{2^k}.$$

したがって（$p_1 = a$ より）

$$|p_{k+1} - a| \leq |p_{k+1} - p_k| + |p_k - p_{k-1}| + \cdots + |p_2 - p_1| < \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2}\right)\delta < \delta.$$

よってすべての自然数 k について $|p_k - a| < \delta$ が成り立つ．また，任意の自然数 k と l に対し

$$|p_{k+l} - p_k| \le |p_{k+l} - p_{k+l-1}| + \cdots + |p_{k+1} - p_k| < \left(\frac{1}{2^{l-1}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right)\frac{\delta}{2^k} < \frac{\delta}{2^{k-1}}$$

が成り立つので，数列 $\{p_k\}$ はコーシー列である．よって極限 $x_0 := \lim_{k\to\infty} p_k$ が存在し，$|x_0 - a| < \delta$ を満たす[6]．p_k の満たす漸化式より，$x_0 = x_0 - (f(x_0) - y_0)/A$，すなわち $f(x_0) = y_0$ が成り立つ．この x_0 を $g(y_0)$ と表そう．

以上の議論から，区間 $V := (b - |A|\delta/2, b + |A|\delta/2)$ 上で定義された関数 $g : V \to g(V) \subset (a - \delta, a + \delta)$ が存在し $y_0 \in V$ のとき $f(g(y_0)) = y_0$ を満たす．この関数が連続であることを示そう．

いま $y_0, y_1 \in V$ とし，$x_0 := g(y_0), x_1 := g(y_1)$ とおく．このとき $x_0, x_1 \in (a - \delta, a + \delta)$ である．平均値の定理より

$$y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0)$$

となる x_0 と x_1 の内分点 c が存在するが，$|c - a| < \delta$ より $|f'(c) - A| < |A|/2$．とくに $|A|/2 < |f'(c)| < 3|A|/2$ を得るから，$(|A|/2)|x_1 - x_0| \le |y_1 - y_2| \le (3|A|/2)|x_1 - x_0|$．等号は $x_0 = x_1$ のときのみ成立し，このとき $y_0 = y_1$ である．すなわち，$g : V \to g(V)$ は 1 対 1 の関数である．また，$(3|A|/2)^{-1}|y_1 - y_0| \le |x_1 - x_0| \le (|A|/2)^{-1}|y_1 - y_0|$ でもあるから，y_1 を変数と思い $y_1 \to y_0$ とすれば，$x_1 \to x_0$ が得られる．すなわち $g(y_1) \to g(y_0)$ であり，g は V 上で連続である．

次に微分可能性を確認しよう．先ほどの $y_0 \in V$ を固定すると，$x = x_0 = g(y_0)$ における f の微分可能性より，

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \ \ (x \to x_0). \tag{15.4}$$

いま $|x_0 - a| < \delta$ であったから，$|f'(x_0) - A| < |A|/2$，とくに $|f'(x_0)| > |A|/2 > 0$ であることに注意しよう．

一般に $E(x) = o(|x - x_0|)$ $(x \to x_0)$ と表される関数があるとき，$y \to y_0$ のとき $g(y) = x \to x_0$ であるから，

$$\frac{|E(g(y))|}{|y - y_0|} < \frac{|E(x)|}{(|A|/2)|x - x_0|} \to 0$$

が成り立つ．よって微分可能性の式 (15.4) は

$$y - y_0 = f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(|y - y_0|) \ \ (y \to y_0).$$

と書き直すことができる．すなわち

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + o(|y - y_0|) \ \ (y \to y_0).$$

これは g が $y = y_0$ で微分可能であり，$g'(y_0) = 1/f'(x_0)$ であることを示している．導関数 f'（と関数 g）は連続であったから，$g'(y) = 1/f'(g(y))$ も連続である．すなわち g は V 上の C^1 級関数である．

U の存在． 最後に，定理の主張にあるような「球」（この場合は開区間）U が存在することを確認しておこう．$g : V \to g(V) \subset X$ に対し $g'(b) = 1/A \ne 0$ であるから，これまでの議論の f と g を置き換えることで（g における V に対応するものとして）a を含むある区間 $U \subset X$ がとれて，$f(U) \subset V$ かつ 定理の (1)「$x \in U$ のとき $g(f(x)) = x$」を満たす．定理の残りの主張も U と g の構成方法から確認できる．

以上で逆関数定理が $n = 1$ の場合に示された． ■

$n \ge 2$ の場合

$n = 1$ のときの証明はほとんどそのまま $n \ge 2$ の場合の証明に翻訳できるが，いくつか重要な不等式は高次元版を確認しておく必要がある．まず式 (15.3) にあたる式を示すには，次の補題が重要である：

[6] 一般に，数列が $a_n \to a_\infty$ $(n \to 0)$ を満たし $|a_n| < \delta$ であるとき，$|a_\infty| \le \delta$ であるが，$x_0 = \lim p_n$ に関しては $|x_0 - a| \le \delta$ ではなく $|x_0 - a| < \delta$ が成り立つ．なぜか？

補題 15.4 (偏微分係数によるノルム評価) X を $\mathbb{R}^n$ 内の開球，$f : X \to \mathbb{R}^m$ を $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in X$ を $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_m) = (f_1(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x}))$ に移す C^1 級ベクトル値とする．さらに，ある定数 $M \geq 0$ が存在し，任意の $\vec{a} \in X$，$i = 1, \cdots, m$，$j = 1, \ldots, n$ に対し

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a})\right| \leq M$$

が成り立つと仮定する．このとき，任意の $\vec{p}, \vec{q} \in X$ に対し

$$\|\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{p}}) - \boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{q}})\| \leq \sqrt{\boldsymbol{mn}}\boldsymbol{M}\|\vec{\boldsymbol{p}} - \vec{\boldsymbol{q}}\|. \tag{15.5}$$

証明． 仮定より，任意の点 $\vec{a} \in X$ と $i = 1, \ldots, m$ に対し，$\vec{a}$ における関数 $f_i : X \to \mathbb{R}$ の勾配ベクトル $\nabla f_i(\vec{a}) = (\partial_1 f_i(\vec{a}), \ldots, \partial_n f_i(\vec{a})) \in \mathbb{R}^n$ は一様に $\|\nabla f_i(\vec{a})\| = \left\{\sum_{j=1}^n |\partial_j f_i(\vec{a})|^2\right\}^{1/2} \leq \sqrt{n}M$ を満たす．

次数 1 のテイラー展開（平均値の定理）より，ある $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の内分点 $\vec{r_i}$ が存在し，

$$f_i(\vec{p}) - f_i(\vec{q}) = \nabla f_i(\vec{r_i}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}).$$

が成り立つ．ただし，この右辺は内積である．よってシュワルツの不等式より，

$$\left|f_i(\vec{p}) - f_i(\vec{q})\right| \leq \|\nabla f_i(\vec{r_i})\|\|\vec{p} - \vec{q}\| \leq \sqrt{n}M\|\vec{p} - \vec{q}\|.$$

ゆえに

$$\|f(\vec{p}) - f(\vec{q})\|^2 = \sum_{i=1}^m \left|f_i(\vec{p}) - f_i(\vec{q})\right|^2 \leq mnM^2\|\vec{p} - \vec{q}\|^2. \qquad \blacksquare$$

行列の積・逆関数の連続性． 連続な逆関数の存在を示すには上の補題だけで十分であるが，それが C^1 級であることを示すには，逆関数のヤコビ行列（すなわち，f のヤコビ行列の逆行列）の各成分が連続に変化することを示さなくてはならない．そのために必要な補題を与えておこう．

以下自然数 $n \geq 2$ を固定し，n 次正方行列 A の (i, j) 成分 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ が a_{ij} であるとき $A = (a_{ij})$ と表すことにする．

行列に関する次の補題も重要である：

補題 15.5 (行列の積と逆行列の連続性) ふたつの n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ に対し，$AB = (x_{ij})$ と表されるならば，各成分 x_{ij} は A と B の成分（合計 $2n^2$ 個の文字）による多項式として表現される．
また，A が正則行列であるとき，行列式 $\det A$ は A の成分（合計 n^2 個の文字）による多項式であり，逆関数 A^{-1} の各成分は A の成分による多項式を $\det A$ で割った有理関数として表される．

証明のスケッチ． 積と行列式が成分の多項式であることは定義よりほとんど明らかであろう．逆行列については余因子展開を用いればよい． $\blacksquare$

練習問題 1. 上記ふたつの補題を用いて，$n \geq 2$ の場合でも逆関数定理の証明を書き下せ．

練習問題 2. 命題 15.3 を高次元ベクトル値関数に拡張せよ．