

この講義について

配布日：2019 年 10 月 2 日 Version：1.2

担当教員：川平 友規 (Kawahira, Tomoki；理学院数学系・数学コース)

講義ウェブサイト：

<http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/19W-fourier.html>

配布されたプリントの最新版・修正版が pdf 形式でダウンロードできます。また、毎週の進捗状況についてコメントしていきます。



講義の目的：フーリエ解析の基本事項とその応用を学習する。

講義の構成：本講義は数学系 2 年生を対象とした講義科目です。形式的には第 3 クォーターに開講される「応用解析序論第一」と第 4 クォーターに開講される「応用解析序論第二」に分かれており、成績も別々に評価します（それぞれ 1 単位）が、内容的には「第一」と「第二」ふたつを合わせてひとつのまとまった講義・演習となるよう構成されています¹。

講義計画（変更の可能性あり）：

第 3 Q	応用解析序論第一	第 4 Q	応用解析序論第二
10 月 2 日	フーリエの着想と三角級数展開	12 月 4 日	関数空間
10 月 9 日	複素数値関数と関数項級数	12 月 11 日	関数空間の例
10 月 16 日	周期関数のフーリエ級数	12 月 18 日	フーリエ級数と正規直交基底
10 月 23 日	収束定理	12 月 25 日	フーリエ変換とその基本的性質
10 月 30 日	関数の正則性とフーリエ係数の挙動	1 月 8 日	フーリエ変換の例
11 月 6 日	区間上のフーリエ級数	1 月 15 日	フーリエの反転公式
11 月 13 日	フーリエ級数の応用	1 月 22 日	フーリエ変換の応用
11 月 20 日	講義予備日	1 月 29 日	講義予備日

教科書および参考書：教科書代わりの講義プリントを毎回配布します。参考書として以下の本をあげておきます。

- エリアス・スタイン，ラミ・シャカルチ著『フーリエ解析入門』（日本評論社）

また、次のビデオを見ておくとよいです。字幕をつければ英語の勉強にもなるでしょう。

- 3Blue1Brown シーズン 4 エピソード 1 – 5 (QR コード左端)：

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQ0b0WTQDNPOjrT6KVlfJuKtYTftqH6>

- 上の中でも、おすすめはエピソード 4 (同中央)：

But what is a Fourier series? From heat flow to circle drawings

<https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k>

- 3Blue1Brown：But what is the Fourier Transform? A visual introduction (同右端)

<https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY>



¹ただし、平成 26 年度以前に入学した学生はこれらの 2 科目を旧カリキュラムの「応用解析序論」として受講してください。要相談。

成績評価の方法： 応用解析序論第一・第二ともに、次のように成績を評価します：

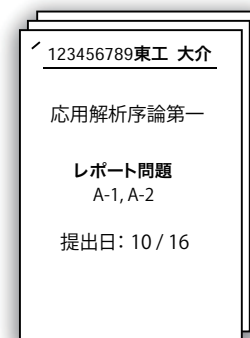
- 講義中の課題プリントの提出 (毎週) を 30 点満点, レポート課題 (隔週) を 70 点満点で評価する.
- 1 クォーター (6~8 回) 中, 課題プリントを 3 回以上出さなかった場合は単位取得を辞退したものとみなす.

レポートの締め切りと提出様式： レポート問題と提出締め切りは毎週配布するプリントで指定します². 講義開始前に教壇前の机か川平のメールボックスに提出してください.

レポートは必ず **A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙**を使用し, 右図のような**表紙をつけて**ください. また, 必ず**左上**をホチキス等でとめてください.

受講者同士で協力し合って解答してもかまいませんし, それによる減点はありません. ただし, かならず協力者の名前も明記するようにしてください. (協力者名がなく, ただの書き写しとみなされるレポートは減点します.)

レポートは採点して返却します. 返却が済むまで, 成績への加点の対象とはしないので注意してください. (返却されたレポートは, 成績が確定するまで手元に保管しておくことをおすすめします.)



- ・必ず A4サイズ, 表紙をつける.
- ・番号・名前は上の方に大きく書く.
- ・左上をホチキスで留める.
- ・解いた問題の番号, 提出日を書く.
- ・裏面はなるべく使わない.

質問受付： 講義終了後, その場で質問を受け付けます. それ以外の時間に質問したい場合はメール等でご相談ください. (もちろん, 授業中の質問は大歓迎です.) 院生のみなさんによる数学相談室 (月・火・木・金の 16:45~18:45, 本館 1 階 H113/114 講義室) もぜひ活用しましょう.

よく使う記号など：数の集合

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (1) $\mathbb{C}$: 複素数全体 | (2) $\mathbb{R}$: 実数全体 | (3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体 |
| (4) $\mathbb{Z}$: 整数全体 | (5) $\mathbb{N}$: 自然数全体 | (6) $\emptyset$: 空集合 |

ギリシャ文字

- | | | | | |
|-------------------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| (1) α : アルファ | (2) β : ベータ | (3) γ, Γ : ガンマ | (4) δ, Δ : デルタ | (5) ϵ : イプシロン |
| (6) ζ : ゼータ | (7) η : エータ | (8) θ, Θ : シータ | (9) ι : イオタ | (10) κ : カッパ |
| (11) λ, Λ : ラムダ | (12) μ : ミュー | (13) ν : ニュー | (14) ξ, Ξ : クシー | (15) $\omicron$: オミクロン |
| (16) π, Π : パイ | (17) ρ : ロー | (18) σ, Σ : シグマ | (19) τ : タウ | (20) υ, Υ : ウプシロン |
| (21) ϕ, Φ : ファイ | (22) χ : カイ | (23) ψ, Ψ : プサイ | (24) ω, Ω : オメガ | |

その他

- (1) $\leq$ と $\leq$, $\geq$ と $\geq$, はそれぞれ同じ意味.
- (2) $A := B$ と書いたら A を B で定義する, という意味. たとえば $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- (3) (文章 1) : $\iff$ (文章 2) と書いたら, (文章 1) の意味は (文章 2) であることと定義する, という意味. たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 : $\iff$ ある実数 M が存在して, すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$.」

※この講義プリントは小森靖さん・坂内健一さん作成のスタイルファイルを使用しています.

²プリントは講義 web page 上にもアップロードされますが, 講義日から 1-2 日遅れることもあります.

フーリエの着想と三角級数展開 (10/2)

配布日: 2019 年 10 月 9 日 Version: 1.1

●●● 前回 (10/2) の講義ノート ●●●

3 つの偏微分方程式 (PDF)

物理学に現れる基本的な方程式を列举してみる. 以下, 「1 次元」とは空間 1 次元・時間 1 次元の関数 $u = u(x, t)$ であり, 「2 次元」とは空間 2 次元・時間 1 次元の関数 $u = u(x, y, t)$ である:

1. 波動方程式. $c > 0$ とし,

$$1 \text{ 次元: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 2 \text{ 次元: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

2. 熱方程式. $c > 0$ とし,

$$1 \text{ 次元: } \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 2 \text{ 次元: } \frac{\partial u}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

3. ポテンシャルの方程式 (ラプラス方程式). 熱方程式の定常状態 ($\partial u / \partial t \equiv 0$) を求める:

$$2 \text{ 次元: } 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

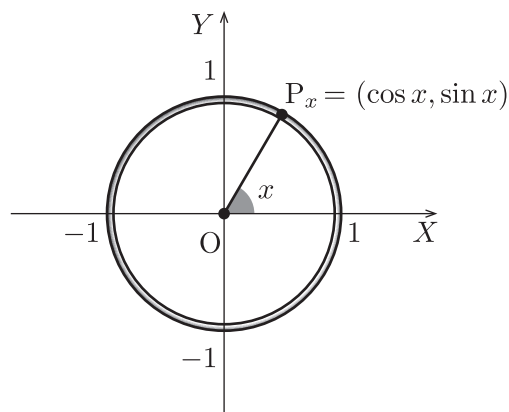
これらの解を求めることは, 産業革命を迎えた 18 世紀から 19 世紀の科学を支える重要な問題であった¹.

フランスの数学者フーリエ (1768–1830) は, 熱方程式に関する考察を経て, 現在「フーリエ級数展開」とよばれる手法に関する重要な発見をした. 以下, 彼のアイディアを詳しく見ていこう.

フーリエによる熱方程式の解法

いま, ある均質な材質 (例えば, 銅の針金) からなる半径 1 の輪 (太さは考えない) を考え, その温度分布を考えよう.

輪には XY 平面上の単位円によって座標を入れる. 定点 $(1, 0)$ から角度 x ラジアン進んだ点を $P_x = (\cos x, \sin x)$ とし, 時刻 0 における P_x での温度が x の関数 $f(x)$ として与えられているとき, 次の問題が考えられる:



時刻 $t > 0$ における P_x での温度 $u = u(x, t)$ を求めよ.

以下, $u = u(x, t)$ は x について 2 回偏微分可能であり, t について 1 回偏微分可能であると仮定しよう.

¹これらの PDE はそれぞれ $T^2 - c^2 X^2$, $T - c^2 X^2$, $X^2 + Y^2$ という 2 次多項式を彷彿とさせる. 実際, 波動方程式, 熱方程式, ポテンシャルの方程式 (ラプラス方程式) はそれぞれ「双曲型」, 「放物型」, 「楕円型」とよばれる.

フーリエによれば, そのような関数 $u = u(x, t)$ は熱方程式

$$(HE) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(ただし, $c > 0$ は熱の伝導率を表す定数, $u_t = cu_{xx}$ と表す) を満たす. さらに,

$$\text{初期条件: } u(x, 0) = f(x)$$

$$\text{周期性: } u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$$

も満たす.

彼が最初に考えたのは, 変数 x のみの関数 $X = X(x)$ と変数 t のみの関数 $T = T(t)$ の積

$$u = XT = X(x)T(t)$$

として表されるような特殊な解の存在 (初期条件を満たすとは限らない) である. (HE) に代入すると,

$$XT_t = cX_{xx}T \iff \frac{T_t}{cT} = \frac{X_{xx}}{X}$$

右の等式は「 $(t$ のみの関数) = $(x$ のみの関数)」の形をしている. そのような関数は定数関数しかありえない². その値を $k \in \mathbb{R}$ とおくと, 2つの常微分方程式

$$T_t = kcT \tag{1.1}$$

$$X_{xx} = kX \tag{1.2}$$

を得る. 逆に, $X = X(x)$ と $T = T(t)$ がこれらの常微分方程式を満たしていれば, $u = XT$ が (HE) を満たしていることはすぐに確認できる.

方程式 (1.1) はもっとも基本的な微分方程式であり, その解は

$$T = T(t) = Ce^{kct} \quad (\text{ただし } C \text{ は任意の定数})$$

の形であることが知られている. 一方, 方程式 (1.2) のほうはもう少し複雑で, k の正負に応じて結果がかなり変化する:

$$X = X(x) = \begin{cases} Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x} & (k > 0) \\ A + Bx & (k = 0) \\ A \cos \sqrt{-k}x + B \sin \sqrt{-k}x & (k < 0) \end{cases}$$

(ただし, A, B は任意の定数.) あとは $u = TX$ とすれば解が得られる, と早合点してはいけない. 私たちは周期性 $u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$ を満たす関数が欲しいのであった. 周期性の条件より, 任意の $t \geq 0$ および $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$X(x)T(t) = X(x + 2\pi)T(t) \quad \text{かつ} \quad X_x(x)T(t) = X_x(x + 2\pi)T(t)$$

が成り立つ. もし $T(t) \equiv 0$ あればこれらの等式が成り立つが, このとき $u \equiv 0$ となり面白い解は得られない. そうでなければ $T(t) = Ce^{kct} \neq 0$ であるから, 条件

$$X(0) = X(2\pi) \quad \text{かつ} \quad X_x(0) = X_x(2\pi)$$

を得る. 簡単な考察により

²たとえば, $(t$ の多項式) = $(x$ の多項式) が恒等式になるには, という問題を考えてみよ.

• $k > 0$ のとき $A = B = 0$, すなわち $X \equiv 0$.

• $k = 0$ のとき $B = 0$, すなわち $X \equiv A$.

よって, 定数関数が解として得られた (自明な解ではあるが).

$k < 0$ のとき, $K := \sqrt{-k}$ とおくと,

$$X = A \cos Kx + B \sin Kx, \quad X_x = -AK \sin Kx + BK \cos Kx$$

より,

$$\begin{cases} A = A \cos 2\pi K + B \sin 2\pi K \\ BK = -AK \sin 2\pi K + BK \cos 2\pi K \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\pi K & -\sin 2\pi K \\ \sin 2\pi K & 1 - \cos 2\pi K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これが $(A, B) = (0, 0)$ 以外の解をもつためには, 行列の判別式を用いた条件

$$(1 - \cos 2\pi K)^2 + (\sin 2\pi K)^2 = 0$$

が成り立つ必要がある. これは K が整数であることと同値である. しかし $K > 0$ という仮定から, K は自然数ということになる. 以上をまとめると, $X = X(x)$ の一般的な形は

$$X = X(x) = A \cos nx + B \sin nx$$

(ただし $n = 0, 1, 2, \dots$, A, B は任意の定数) となる³. このとき, $k = -K^2 = -n^2$ となるから, 対応する $T(t) = Ce^{-cn^2t}$ と合わせると, 求めたかった (特殊な) 解は

$$u = u(x, t) = T(t)X(x) = e^{-cn^2t}(A \cos nx + B \sin nx)$$

(ただし $n = 0, 1, 2, \dots$, A, B は任意の定数. $T(t) = Ce^{-cn^2t}$ の定数 C は A と B の中に含めた) ということになる.

ところで, 熱方程式 (HE) を満たす周期 2π の関数の全体は線型性をもつ⁴から, 負でない整数 n と任意の定数 A_n, B_n を選び

$$u_n = u_n(x, t) = e^{-cn^2t}(A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

(とくに, $u_0 \equiv A_0$, 定数関数) とおくと,

$$u = u(x, t) = \sum_{n=0}^N u_n(x, t)$$

の形の関数も (HE) と周期性を満たす.

初期条件に対する考察. このことから, 初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ について, 次の問題が考えられる:

³定数関数は $n = 0$ のときに含まれている.

⁴すなわち, u_1, u_2 が (HE) を満たせば, 任意の実数 A, B に対し $Au_1 + Bu_2$ も (HE) を満たす. さらに, 周期性も保たれる.

問題. (HE) の周期解 $u = u(x, t) = \sum_{n=0}^N u_n(x, t)$ のうち, 与えられた初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ を満たすものは存在するだろうか? すなわち, 係数 A_n, B_n をうまく選んで, すべての x で

$$f(x) = \sum_{n=0}^N u_n(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (1.3)$$

が成り立つようにできるだろうか? ただし, $N = \infty$ も含めてよいものとする.

フーリエは大胆にも, $N = \infty$ とすれば, (不連続な関数も含む) **任意の関数 $f(x)$ に対して式 (1.3) のような表現が存在する** と主張した. 区分的に連続かつ微分可能な関数が主な研究対象だった当時, フーリエの主張は過激なものであったと想像されるが (実際, この主張は間違っている), 彼なりの根拠も持っていたのである.

レポート問題

締め切りは 10 月 16 日の講義開始前とします. (研究室 (H210) メールボックスへの提出は当日朝 10 時 20 分まで.)

レポート問題 A-1.

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$ は絶対収束することを示せ.

(2) 収束するが絶対収束しない級数の例を 1 つあげよ.

レポート問題 A-2. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の複素数値関数列 $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ がある関数 $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ に I 上で一様収束すると仮定する.

(1) f_n ($n = 1, 2, \dots$) がすべて不連続関数であり, F も不連続関数であるような例を 1 つあげよ.

(2) f_n ($n = 1, 2, \dots$) はすべて不連続関数だが, $F(x)$ は連続関数であるような例を 1 つあげよ.

(3) $F(x)$ が不連続関数であるとき, f_n ($n = 1, 2, \dots$) は十分大きな すべての 自然数 n に対し不連続関数となることを示せ.

ボーナス問題 (+1 point, 締め切りなし). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メール でご指摘ください.

複素数値関数と関数列の一致収束 (10/9)

配布日: 2019 年 10 月 16 日 Version: 1.1

●●● 前回 (10/9) の講義ノート ●●●

前回のつづき.

初期条件に対する考察. 前はフーリエによる熱方程式の周期解に関する考察から、次の問題に至った:

前回の問題の要点. 与えられた関数 $f(x)$ に対し、係数 A_n, B_n をうまく選んで、すべての x で

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (2.1)$$

が成り立つようにできるだろうか?

これに対して、フーリエは次のように主張した:

フーリエの主張. 任意の関数 $f(x)$ に対し、次のように係数 A_n, B_n を定めれば、式 (2.1) の右辺は

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x-\epsilon) + f(x+\epsilon)}{2} \quad (2.2)$$

に収束する:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (\text{これは } f(x) \text{ の平均}) \\ n \geq 1 \text{ のとき } A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \\ n \geq 1 \text{ のとき } B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned}$$

とくに、 f が x において連続であれば式 (2.1) が成り立つ.

この主張は次の意味で「不十分」である

- (1) 係数 A_n, B_n の定義に出てくる積分値はそもそも存在するのか?¹
- (2) 下線部、「任意の関数」というのは (現代風の定義に当てはめた場合) 無理がある. 実際、式 (2.1) の右辺が (ある x で) 発散する $f(x)$ の例が存在する.

しかし、フーリエにはそれなりの根拠があったのである.

例. 周期関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のようにさだめる. まず,

$$f(x) = -1 \quad (-\pi < x < 0), \quad f(x) = 1 \quad (0 < x < \pi)$$

¹フーリエの時代には「積分可能性」に関する理論が十分に確立されていなかった. いわゆるリーマン積分、ルベーグ積分はそれぞれ 19 世紀、20 世紀に成立した概念である. そこには、フーリエ級数の収束性を厳密に扱える、より一般的な枠組みをつくらう、という動機があった. ちなみに、(ややこしいことに) 定積分の記号 $\int_a^b f(x) dx$ をはじめて導入したのはフーリエらしい.

と定め、適当に実数 α と β をとり $f(0) = \alpha$, $f(\pi) = \beta$ としておく. あとは周期性条件 $f(x+2\pi) = f(x)$ により関数の定義域を $\mathbb{R}$ に拡張する. すると, $x \neq m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) のとき, 式 (2.1) そのままの等式

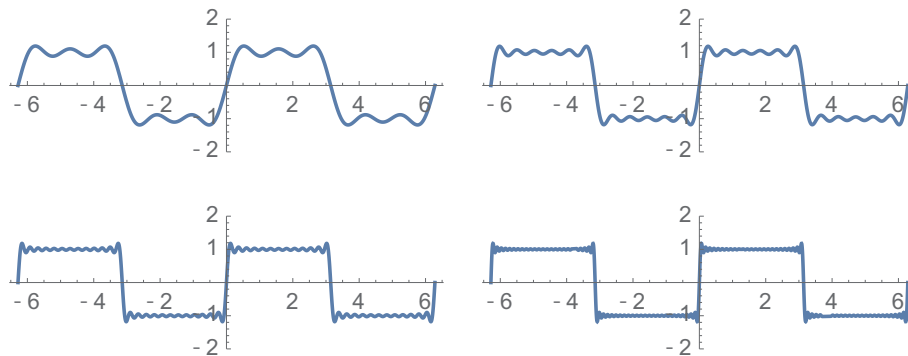
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

が成り立つ². $x = m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) のとき, 右辺の値は 0 なので, 式 (2.2) と一致する. すなわち,

$$0 = \frac{(-1) + 1}{2} = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2}$$

が成立している!³

下の図は, この右辺の級数を $n = 3, 6, 13, 25$ 項まで計算しグラフを描いたものである.



そこで, この講義前半の目標を次のように設定しよう:

「フーリエの主張」をできるだけ (応用上十分な程度に) 正当化する!

級数の収束と発散

級数の収束. 数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, n 項目までの和

$$S_n = \sum_{k=0}^n z_k = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$$

が定める数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n, \quad \sum_{n \geq 0} z_n, \quad z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$$

などと表し, 数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ の定める**級数**という. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が存在するとき, 級数 $z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$ は**収束**するといい, 存在しないとき**発散**するという.

級数の絶対収束性. 数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ が定める級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + \cdots$ が**絶対収束**するとは, 級

数 $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = |z_0| + |z_1| + \cdots$ が収束することをいう.

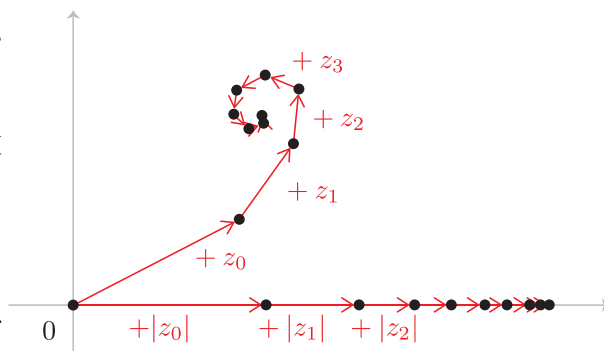
²級数を含む等式は, 「1. 右辺の級数は収束し, 2. その値は左辺の値に一致する」という 2 段階の解釈を要する. 2 つの主張をまとめた式なのである.

³結果的に, α, β の値は役に立たなかったが, このような点をもっとたくさん密に存在している場合はどうだろう? じつは不連続点の「量」をうまく測れば, その影響がでるギリギリのラインを定量的に表現できるようになる.

定理 2.1 絶対収束する級数は収束する.

証明は解析学の教科書等を参考にせよ.

注意. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ はつぎの図のように, 原点 0 から $+z_0$ 移動, さらに $+z_1$ 移動, と繰り返したときの道のりにあたる. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ が収束し有限の正の値であるとき, もとの級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ の表現する (無限に折れ曲がった) 折れ線は有界な範囲に収まり, しかも無限に振動し続けることができない. むしろ, 「発散できない」状態が絶対収束なのである.



指数関数とオイラーの公式

複素数の指数関数を定義しよう.

定理 2.2 (指数関数の定義) すべての複素数 z に対し, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は絶対収束 (よって, 収束) する. その値を e^z または $\exp z$ と表し, z の**指数関数**とよぶ.

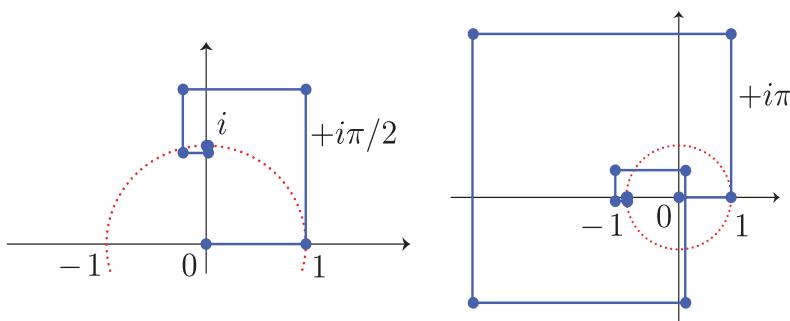
その証明は講義内課題とした.

例 ($e^{\pi i} = -1$). $z = \pi i/2$, $z = \pi i$ のとき, これらの値での指数関数は

$$e^{\pi i/2} := 1 + \frac{\pi i}{2} + \frac{(\pi i/2)^2}{2!} + \frac{(\pi i/2)^3}{3!} + \dots$$

$$e^{\pi i} := 1 + \pi i + \frac{(\pi i)^2}{2!} + \frac{(\pi i)^3}{3!} + \dots$$

と定義される⁴. これを「折れ線」で図示すると, 次のようになる. じつは, $e^{\pi i/2} = i$, $e^{\pi i} = -1$ が成り立つ.



オイラーの公式. 一般化してみよう. 0 でない実数 θ に対し, 指数関数

$$e^{\theta i} = 1 + \theta i + \frac{(\theta i)^2}{2!} + \frac{(\theta i)^3}{3!} + \dots$$

⁴ 「成り立つ」ではない. 左辺を右辺の値で定義するのである.

の右辺で表される級数は、有限の長さ

$$1 + |\theta i| + \left| \frac{(\theta i)^2}{2!} \right| + \left| \frac{(\theta i)^3}{3!} \right| + \cdots = 1 + |\theta| + \frac{|\theta|^2}{2!} + \frac{|\theta|^3}{3!} + \cdots = e^{|\theta|}$$

をもつ棒を無限回折り曲げて得られる複素数である。さらにもとの級数の各項を計算して、

$$e^{\theta i} = 1 + \theta i - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!}i + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5}{5!}i - \cdots$$

と表現してみよう。 θ が正のとき、「折れ線」は右、上、左、下、右、上、左、下と進み、これを無限に繰り返すことがわかる。 θ が負のときは、上と下が入れ替わる。左右の動きと上下の動きは、ベクトルでいうとそれぞれ x 座標と y 座標への作用である。これらは互いに影響がないから、上の式の右辺も実部 (x 座標) と虚部 (y 座標) でまとめてみる:

$$e^{\theta i} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \right).$$

この実部と虚部は微分積分学で学んだ $\cos \theta$ と $\sin \theta$ のマクローリン展開と (奇跡的に!?) 一致するので、

オイラーの公式

$$e^{\theta i} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

が導かれた。右辺の複素数は平面ベクトルでいうと $(\cos \theta, \sin \theta)$ なので、単位円上の角度 θ ラジアンに対応する点である。これで、先ほど図示した $e^{\pi i/2} = i$, $e^{\pi i} = -1$ が正当化された。

三角関数と指数関数. オイラーの公式より、 θ に $-\theta$ を代入することで

$$e^{-\theta i} = \cos \theta - i \sin \theta$$

を得る。オイラーの公式との和と差を考えることで、以下を得る:

$$\cos \theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}. \quad (2.3)$$

指数法則と周期性. 指数関数は次を満たす (証明は複素解析の教科書等を参考にせよ):

定理 2.3 (指数法則) すべての複素数 z, w に対し、

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w.$$

$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ より、次がわかる:

定理 2.4 (指数関数の周期性) すべての複素数 z に対し、

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

すなわち、**指数関数は周期 $2\pi i$ の周期関数**である⁵。

⁵もしある $L \neq 0$ が存在し $e^{z+L} = e^z$ が成り立つならば、 L は $2\pi i$ の整数倍である (証明を考えてみよ)。

複素数値関数

I を $\mathbb{R}$ の区間とし, 関数 $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ を考える. すなわち, 実数 $x \in I$ に対し複素数 $f(x)$ を対応させる関数である. これを**複素数値関数**という.

一般に, $u(x) := \operatorname{Re} f(x)$, $v(x) := \operatorname{Im} f(x)$ とおくことで 2 つの実関数 $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ が定まり, 逆にそのような u と v が与えられたとき, $f(x) = u(x) + v(x)i$ とおくことで複素数値関数が定まる.

- $f(x)$ が $x = \alpha$ において**連続**であるとは, $f(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ が成り立つことをいう. すべての $x \in I$ において $f(x)$ が連続であるとき, 関数 $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ は連続であるという.
- $f(x) = u(x) + v(x)i$ が $x = \alpha$ において**微分可能**であるとは, u と v が $x = \alpha$ において微分可能であることをいう. このとき, $f'(\alpha) = u'(\alpha) + v'(\alpha)i$ と書き, f の $x = \alpha$ における微分係数という. すべての $x \in I$ において $f(x)$ が微分可能であるとき, 関数 $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ は微分可能であるという.
- $f(x) = u(x) + v(x)i$ が連続であるとき,

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx$$

と定める.

例. $I = \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ のとき, $f(x) := e^{pxi} = \cos px + i \sin px$ とおく. このとき,

$$f'(x) = -p \sin px + ip \cos px = pi e^{pxi}.$$

結果として $(e^{pxi})' = pi e^{pxi}$ が成り立ち, 実数値の場合の公式 $(e^{kx})' = k e^{kx}$ を純虚数にまで拡張したことになる. また, $p \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b e^{pxi} dx = \int_a^b \cos px dx + i \int_a^b \sin px dx \\ &= \left[\frac{\sin px}{p} \right]_a^b + i \left[-\frac{\cos px}{p} \right]_a^b = \left[\frac{\sin px - i \cos px}{p} \right]_a^b = \left[\frac{1}{pi} e^{pxi} \right]_a^b. \end{aligned}$$

結果的に,

$$\int_a^b e^{pxi} dx = \left[\frac{1}{pi} e^{pxi} \right]_a^b = \frac{1}{pi} (e^{bpi} - e^{api})$$

となり, 実数の指数関数が満たす公式

$$k \neq 0 \text{ のとき } \int_a^b e^{kx} dx = \left[\frac{1}{k} e^{kx} \right]_a^b$$

を, k が純虚数の場合にまで拡張したことになる.

各点収束と一様収束

関数の列の収束性をふた通り定義する. 以下, $I \subset \mathbb{R}$ を区間とする.

定義 (各点収束と一様収束). 複素数値関数の列 $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ に **各点収束** するとは, すべての $x \in I$ に対し, 数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $F(x)$ に収束すること
をいう. すなわち, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = F(x)$.

また, 複素数値関数の列 $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ に **一様収束** するとは,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall x \in I) \quad |f_n(x) - F(x)| < \epsilon$$

が成り立つことをいう. 言い換えると, $M_n > 0$ かつ $M_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす数列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し, すべての $x \in I$ に対して

$$|f_n(x) - F(x)| \leq M_n$$

が成り立つことをいう.

このとき, 次が成り立つ:

定理 2.5 (一様収束と連続性・積分値) 複素数値関数の列 $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ に 一様収束 するとき, つぎが成り立つ:

- (1) すべての n で f_n が連続であれば, F も連続.
- (2) 任意の閉区間 $[a, b] \subset I$ に対し, すべての f_n が $[a, b]$ 上でリーマン可積分であれば,

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b F(x) dx \quad (n \rightarrow \infty)$$

注意. 同様の定理は通常の実関数で正しいことはいろんな解析学の教科書に書いてある. ここでは「複素数値関数」でもそれが成り立つ, と主張している (証明は全く同じであるが).

補足: リーマン積分

以下では, 実関数の定積分の定義についてまとめておく.

区間上のリーマン積分. 区間 $[a, b]$ 上の (連続とは限らない) 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. 区間 $[a, b]$ から

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

を満たす $N + 1$ 個の点を集めた集合

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N\}$$

を区間 $[a, b]$ の **分割** (partition) という.

分割 Δ が与えられたとき, 各 $k = 1, \dots, N$ に対し $x_{k-1} \leq x_k^* \leq x_k$ を満たす x_k^* を選んで得られる N 点からなる集合

$$\Delta^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*\}$$

を分割 Δ の **代表点集合** (set of representatives) という.

関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 区間 $[a, b]$ の分割 Δ とその代表点集合 Δ^* が定める量

$$\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) := \sum_{k=1}^N f(x_k^*) (x_k - x_{k-1})$$

を関数 f の **リーマン和** (Riemann sum) とよぶ.

定積分. 区間 $[a, b]$ とその分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^N$ に対し, 分割された区間の最大幅を

$$|\Delta| := \max \{x_k - x_{k-1} \mid 1 \leq k \leq N\}$$

と表すことにする.

定義 (リーマン可積分性, 定積分). 関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が **リーマン可積分** (Riemann integrable) であるとは, 以下を満たす実数 A が存在することをいう: 「任意の正の数 ϵ に対し, ある正の数 δ が存在し, すべての $|\Delta| < \delta$ を満たす分割 Δ とその代表点集合 Δ^* に対し,

$$|\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) - A| < \epsilon$$

が成り立つ。」このとき,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \Sigma(f, \Delta, \Delta^*) = A$$

と表す. また, 実数 A を関数 f の $[a, b]$ における **リーマン積分** (Riemann integral) あるいは **定積分** (definite integral) とよび,

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

と表す. 積分可能であるということは, 記号で表すと

$$\begin{aligned} &(\exists A \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \Delta : [a, b] \text{ の分割}) \\ &(\forall \Delta^* : \Delta \text{ の代表点集合}) \\ &|\Delta| < \delta \implies |\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) - A| < \epsilon. \end{aligned}$$

となる. すなわち, 分割 Δ の最大幅 $|\Delta|$ が十分に小さければ, 代表点集合 Δ^* の取り方に依存せずに, リーマン和は ϵ 未満の誤差で A の値を近似するのである.

注意. 関数が「積分可能かどうか」をこの定義どおりに判定するには, 定積分 A の値をあらかじめ知っていないといけない. それでは都合が悪いので, A の値を用いずに積分可能性を判定する方法が必要である⁶.

リーマン可積分性の判定法. 以下, 関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は有界な関数であると仮定する. すなわち, ある実数 $m < M$ が存在して, $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$ と表されるものとする.

区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^N$ が与えられているとき, 各 $k = 1, \dots, N$ に対し

$$\begin{aligned} M_k &:= \sup \{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \\ m_k &:= \inf \{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \end{aligned}$$

とおくことにする. 仮定より $m \leq m_k \leq M_k \leq M$ が成り立つことに注意しよう. さらに,

$$S(f, \Delta) := \sum_{k=1}^N M_k (x_k - x_{k-1}), \quad s(f, \Delta) := \sum_{k=1}^N m_k (x_k - x_{k-1})$$

とおけば, Δ の任意の代表点集合 Δ^* に対し

$$m(b-a) \leq s(f, \Delta) \leq \Sigma(f, \Delta, \Delta^*)$$

⁶ ちょうど, 数列の収束性をコーシー列の収束性に置き換える必要が生じた事情と同じである.

かつ

$$\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) \leq S(f, \Delta) \leq M(b-a)$$

が成り立つ. とくに $s(f, \Delta)$, $S(f, \Delta)$ の取りうる値の範囲は有界であるから, ワイエルシュトラスの定理より

$$S(f) := \inf \{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } [a, b] \text{ の分割}\}$$

$$s(f) := \sup \{s(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } [a, b] \text{ の分割}\}$$

が存在する. このとき, 以下が成り立つ:

定理 2.6 (積分可能性の判定)

有界な関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が積分可能であることの必要十分条件は $S(f) = s(f)$ が成り立つことである.

リーマン可積分であることの十分条件として, 次のものがある:

命題 2.7

有界な関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が高々有限個の点を除いて連続であれば, リーマン可積分である.

注意 ルベグ (Lebesgue) は有界な関数がリーマン可積分となる必要十分条件は不連続点からなる集合が“長さ 0”の集合 (零集合) であることを示した.

一方, f_n が f に各点収束する場合は, 定理 2.5 (2) のような積分の収束性が保証されない. じつは収束性はおろか, 可積分性さえも極限では失われることがある. そのような典型例を見ておこう.

例 (ディリクレ関数). 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合であった. そこで, これを区間 $[0, 1]$ に制限し,

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_1, r_2, \dots\}$$

と表現してみる. さらに, 関数列 $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) を

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x = r_1, \dots, r_n) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定め, 関数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める. このとき, f_n は f に各点収束する. また, 各 f_n は命題 2.7 よりリーマン可積分である. 一方 f については, 任意の分割 Δ に対して $\mathbb{Q}$ の稠密性より $S(f, \Delta) = 1 > 0 = s(f, \Delta)$ となることがわかる. したがって $S(f) = 1 > 0 = s(f)$ であり, そもそもリーマン可積分ではない.

注意. 関数 f はディリクレ関数とよばれており,

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \{\cos(m! \pi x)\}^{2n} \right)$$

と表される.

ボーナス問題 (+1 point, 締め切りなし). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください.

フーリエ級数 (10/16)

配布日: 2019 年 10 月 23 日 Version: 1.0

●●● 前回 (10/16) の講義ノート ●●●

関数項級数の収束

フーリエ級数とは関数項級数の一種であるから, まずは関数項級数に関する言葉遣いを明確にしておこう.

$I \subset \mathbb{R}$ を区間とし, $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{C}\}_{n=0}^{\infty}$ を関数列とする. このとき, 各 $n \geq 0$ に対し関数 $S_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$S_n(x) := f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)$$

と定める.

定義 (関数項級数の収束) 関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が I 上で**各点/一様収束する**とは, 関数列 $\{S_n : I \rightarrow \mathbb{C}\}_{n=0}^{\infty}$ がある関数 $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ に各点/一様収束することをいう. このとき,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{または} \quad F(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots$$

と表す (各点収束か一様収束かは別で述べる必要がある).

例. $I = (-1, 1)$ とするとき, I 上で

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

が成り立つ. このままでは少し不親切なので, 「等号は各点収束の意味」といい添えたり, 最初から「関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は I 上で関数 $\frac{1}{1-x}$ に各点収束する」と書いたほうが明快である. また,

関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は I 内の任意の閉区間 $[a, b]$ 上で関数 $\frac{1}{1-x}$ に一様収束する.

一様収束性への十分条件.

定理 2.1 (ワイエルシュトラスの M テスト) $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし, $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{C}\}_{n=0}^{\infty}$ を関数列とする. つぎの (1) と (2) を満たす正数列 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在するとき, 関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ はある関数 $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ に一様収束する.

(1) 任意の $n \geq 0$ と $x \in I$ に対し, $|f_n(x)| \leq M_n$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ は収束する.

証明はコーシー列などの知識を用いる.

例. $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin nx$ ($n \in \mathbb{N}$) と定めると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $|f_n(x)| \leq 1/n^2$ なので, $M_n := 1/n^2$ とおけば

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots < \infty$$

となる. よって定理 2.1 が適用できて, 級数

$$\sin x + \frac{1}{2^2} \sin 2x + \frac{1}{3^2} \sin 3x \cdots$$

は (ある $\mathbb{R}$ 上の関数に) 一様収束する.

項別積分. 項別積分について, 次が成り立つ:

定理 2.2 (一様収束ならば項別積分可能) I 上で積分可能な関数からなる関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ がある関数に I 上で一様収束するとき, 任意の閉区間 $[a, b] \subset I$ に対し,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

証明. 前回のプリント定理 2-5(2) より, $S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \end{aligned}$$

■

フーリエ級数

いま, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を周期 2π の周期関数 (すなわち, 任意の x に対し $f(x+2\pi) = f(x)$) とする¹. ここで $f(x)$ が**区分的に連続**であるとは,

- 区間 $[0, 2\pi]$ 上の不連続点は有限個; かつ
- x_0 が不連続点であるとき (不連続点でなくても), 左右からの片側極限

$$f(x_0+0) := \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \quad \text{および} \quad f(x_0-0) := \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

が存在する.

例. 前回考えた $f(x) = -1$ ($-\pi < x < 0$), $f(x) = 1$ ($0 < x < \pi$) を満たす関数を周期 2π で拡張したものは, 区分的に連続である. (x が π の整数倍であるときは不連続点となるが, そこの値によらず, 左右からの片側極限は存在する.)

例 (区分的に連続ではない例). 周期 2π の関数として $f(x) = \tan x$ を考える. ただし, x が $\pi/2$ の奇数倍の場合は仮に $f(x) = 0$ としておき, $\mathbb{R}$ 上の周期関数とみなすことにする. このと

¹以後の議論では $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ としても構わないが, 話を簡単にするために $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の場合のみを考えることにする.

き, $f(x)$ は区分的に連続とはいわない. x が $\pi/2$ の奇数倍であるとき, これは不連続点ではあるが, 左右からの片側極限が存在しないからである.

定義 (フーリエ係数とフーリエ級数). 周期 2π をもつ区分的に連続な関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 実数

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

を $f(x)$ の**フーリエ係数**といい,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.3)$$

と表す. また, 右辺の関数項級数を $f(x)$ の**フーリエ級数**という.

注意

- b_0 は 0 となるので考えない.
- 式 (2.3) はイコール (=) で結ばれた等式ではない. 左辺から右辺の関数項級数が定まる (しかもこの時点で収束性はわからない), という「対応関係」だとみなすのがちょうど良い.
- a_n, b_n を定める定積分は必ず存在する. 区分的に連続な関数は (リーマン) 積分可能だからである.
- $f(x)$ が奇関数であるとき ($f(x) = -f(-x)$), $a_n = 0$ である. また, $f(x) \sin nx$ は偶関数であるから,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

- 同様に, $f(x)$ が偶関数であるとき ($f(x) = f(-x)$), $b_n = 0$ である. また, $f(x) \cos nx$ は偶関数であるから,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

レポート問題

締め切りは 10 月 30 日の講義開始前とします. (研究室 (H210) メールボックスへの提出は当日朝 10 時 20 分まで.)

レポート問題 B-1. $f: (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = -1$ ($-\pi < x < 0$), $f(x) = 1$ ($0 < x < \pi$), $f(0) = f(\pi) = 0$ と定め, これを周期 2π で $\mathbb{R}$ 上の関数に拡張したものをまた $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と表す. このとき, $f(x)$ のフーリエ係数 a_n, b_n を求めよ.

レポート問題 B-2. $g: (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(x) = x^2$ と定め, これを周期 2π で $\mathbb{R}$ 上の関数に拡張したものをまた $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と表す. このとき, $g(x)$ のフーリエ係数 a_n, b_n を求めよ.

ボーナス問題 (+1 point, 締め切りなし). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください.

複素フーリエ級数 (10/23)

配布日: 2019 年 10 月 30 日 Version: 1.1

●●● 前回 (10/23) の講義ノート ●●●

フーリエ級数の具体例

まずは復習から. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を周期 2π の周期関数 (すなわち, 任意の x に対し $f(x+2\pi) = f(x)$) とする. $f(x)$ が **区分的に連続** であるとは,

- 区間 $[0, 2\pi]$ 上の不連続点は有限個; かつ
- x_0 が不連続点であるとき (不連続点でなくても), 左右からの片側極限

$$f(x_0+0) := \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \quad \text{および} \quad f(x_0-0) := \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

が存在する.

このとき, 次のように定める.

定義 (フーリエ係数とフーリエ級数). 周期 2π をもつ区分的に連続な関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 実数

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

を $f(x)$ の **フーリエ係数** といい,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.3)$$

と表す. また, 右辺の関数項級数を $f(x)$ の **フーリエ級数** という.

具体例を計算してみよう. その前に, 次の事実を確認しておく:

区間 $[a, b]$ 上で積分可能な関数 $f(x)$ に対し, $[a, b]$ 内の有限個の点で $f(x)$ の値を別の値に変更しても, 積分の値は変わらない.

以下ではこれ (リーマン積分の定義に帰れば証明できる. プリント 02 参照) を認めて, 適宜利用することにしよう.

フーリエ級数の計算例. まず, $f(x) = x$ ($-\pi \leq x < \pi$) とおき, これを周期 2π で $\mathbb{R}$ 上の関数に拡張した $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. x が π の奇数倍で「ない」とき, $f(x) = -f(-x)$ (奇関数の関係式) を満たすことに注意しよう (図を描いて考えよ).

まず $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し, $f(x)$ の周期性より

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

積分区間において, $f(x) \cos nx$ は $x = \pm\pi$ を除いて奇関数とみなせるから, $a_n = 0$ となる.

つぎに $n = 1, 2, \dots$ に対し, $f(x)$ の周期性より

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

積分区間 $[-\pi, \pi]$ においては $f(x) = x$ が $x = \pi$ を除いて成り立つから¹,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \quad (\leftarrow x \sin nx \text{ は偶関数}) \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[x \cdot \frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{-\cos nx}{n} \, dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\pi \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0 \right) + \left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right\} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

よって

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx = 2 \left\{ \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right\}.$$

複素フーリエ級数

フーリエ級数をオイラーの公式 $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ を通して書き換えてみよう. まず $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\cos nx = \frac{e^{nxi} + e^{-nxi}}{2} \quad \sin nx = \frac{e^{nxi} - e^{-nxi}}{2i}$$

が成り立つことから, $f(x)$ のフーリエ級数は

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{e^{nxi} + e^{-nxi}}{2} + b_n \frac{e^{nxi} - e^{-nxi}}{2i} \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - b_n i}{2} e^{nxi} + \frac{a_n + b_n i}{2} e^{-nxi} \right\} \end{aligned}$$

と変形できる. そこで,

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \quad c_n := \frac{a_n - b_n i}{2}, \quad c_{-n} := \overline{c_n} = \frac{a_n + b_n i}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

と定め, これらを関数 $f(x)$ の**複素フーリエ係数**という. また,

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi}$$

と表し, 右辺を関数 $f(x)$ の**複素フーリエ級数**という.

注意.

¹積分区間 $[0, 2\pi]$ の場合, $f(x) = x$ とならない部分がでてしまう.

- 記号 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ は本来 $\lim_{M,N \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^N$ (ここで、 M と N は独立に無限大に発散し、特別な関

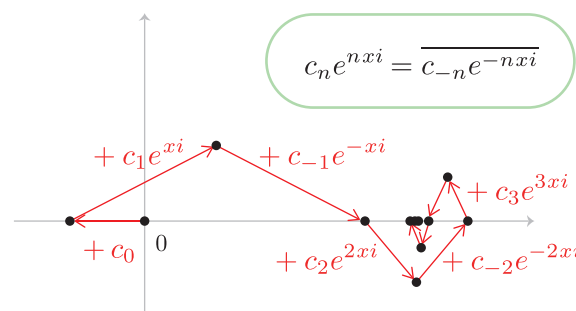
係は期待しない) と解釈すべきなのだが、フーリエ級数に限っては $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N$ と解釈する²。すなわち、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \lim_{N \rightarrow \infty} \{c_{-N}e^{-Nxi} + \cdots + c_{-2}e^{-2xi} + c_{-1}e^{-xi} + c_0 + c_1e^{xi} + c_2e^{2xi} + \cdots + c_Ne^{Nxi}\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \{c_0 + (c_1e^{xi} + c_{-1}e^{-xi}) + (c_2e^{2xi} + c_{-2}e^{-2xi}) + \cdots + (c_Ne^{Nxi} + c_{-N}e^{-Nxi})\} \end{aligned}$$

- $\frac{a_n \pm b_n i}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(\cos nx \pm i \sin nx) dx$ が成り立つから、 $n \in \mathbb{Z}$ に対し直接

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-nxi} dx$$

と定義しても良い。



ボーナス問題 (+1 point, 締め切りなし)。このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください。

²両側無限級数は絶対収束していれば項を足す順序を入れ替えてもよいので、 $\lim_{M,N \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^N$ と $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N$ の結果に違いはでない。そうでない場合は、 M と N の発散のスピードに応じて級数の発散・収束や値が変化する可能性がある。る。 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N (-1)^n$ と $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{N+1} (-1)^n$ を比べてみよ。

ベッセルの不等式とリーマン・ルベーグの補題 (10/30)

配布日: 2019 年 11 月 6 日 Version: 1.2

●●● 前回 (10/30) の講義ノート ●●●

フーリエ多項式による最小 2 乗近似

複素数値関数 $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$P(x) = \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{nxi}$$

(ただし, $N \in \mathbb{N}$, $\gamma_n \in \mathbb{C}$) の形で表されるとき, $P(x)$ を **(複素) N 次フーリエ多項式**という. $e^{nxi} = e^{n(x+2\pi)i}$ より, $P(x)$ は周期 2π の周期関数である. また, すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\gamma_n = \overline{\gamma_{-n}}$ が成り立つとき, $P(x)$ を **実 N 次フーリエ多項式**という. 実際,

$$\overline{P(x)} = \overline{\sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{nxi}} = \sum_{n=-N}^N \overline{\gamma_n} e^{-nxi} = \sum_{n=-N}^N \gamma_{-n} e^{-nxi} = P(x)$$

であるから, $P(x)$ の値は実数である.

与えられた関数の最小 2 乗近似. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$) を区分的に連続な周期 2π とする. このとき, 各整数 n に対し $f(x)$ の複素フーリエ係数

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-nxi} dx$$

が定まり, $f(x)$ が実数値のときは

$$c_n = \overline{c_{-n}}$$

が成り立つのであった¹.

ここで, 次のような問題を考えてみよう:

問題. 与えられた自然数 N に対し, N 次フーリエ多項式 $P(x)$ で, 上の関数 $f(x)$ に対し,

$$E := \int_0^{2\pi} |f(x) - P(x)|^2 dx$$

が最小となるようなものは何か?

ここで, $E/(2\pi)$ は $f(x)$ と $P(x)$ の「2 乗誤差平均」と呼ばれるものである. この値を最小する, という意味において, 「 $f(x)$ を最も良く近似する N 次フーリエ多項式 $P(x)$ を求めよ」というのがこの問題の趣旨である. もちろん現時点で, そのような最小値を実現する $P(x)$ が存在する保証はない.

問題への解答. 以下では, f が複素数値でも通用する解答を与える. E を定義する積分を変形すると,

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi} (f(x) - P(x)) \overline{(f(x) - P(x))} dx \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}_{(1)} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \overline{f(x)} P(x) dx}_{(2)} - \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x) \overline{P(x)} dx}_{(3)} + \underbrace{\int_0^{2\pi} P(x) \overline{P(x)} dx}_{(4)} \end{aligned}$$

¹ $f(x)$ が区分的に連続という条件から, 関数 $f(x)e^{-nxi}$ の実部と虚部はそれぞれ $[0, 2\pi]$ 上で積分可能である.

ここで, 下線 (1) の積分は $f(x)$ が区分的に連続であるという性質から, 有限の値をとる. とくに, $f(x)$ のみに依存する定数である.

その他の積分を詳しく計算するために $P(x) = \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{nxi}$ とおくと, 下線 (2) の積分² は

$$\begin{aligned} (2) &= \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{nxi} dx = \sum_{n=-N}^N \gamma_n \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} e^{nxi} dx \\ &= \sum_{n=-N}^N \gamma_n \overline{\int_0^{2\pi} f(x) e^{-nxi} dx} = 2\pi \sum_{n=-N}^N \gamma_n \overline{c_n}. \end{aligned}$$

同様に, 下線 (3) の積分は

$$(3) = \int_0^{2\pi} f(x) \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{nxi} dx = \sum_{n=-N}^N \overline{\gamma_n} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-nxi} dx = 2\pi \sum_{n=-N}^N \overline{\gamma_n} c_n.$$

下線 (4) を計算しよう. $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\int_0^{2\pi} e^{(n-m)x i} dx = \begin{cases} \int_0^{2\pi} 1 \cdot dx = 2\pi & (n = m) \\ \left[\frac{e^{(n-m)x i}}{(n-m)i} \right]_0^{2\pi} = 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned} (4) &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{nxi} \right) \overline{\left(\sum_{m=-N}^N \gamma_m e^{mxi} \right)} dx \\ &= \sum_{n,m=-N}^N \gamma_n \overline{\gamma_m} \int_0^{2\pi} e^{(n-m)x i} dx = 2\pi \sum_{n=-N}^N \gamma_n \overline{\gamma_n}. \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} -(2) - (3) + (4) &= 2\pi \sum_{n=-N}^N \{-\gamma_n \overline{c_n} - \overline{\gamma_n} c_n + \gamma_n \overline{\gamma_n}\} \\ &= 2\pi \sum_{n=-N}^N \{c_n \overline{c_n} - \gamma_n \overline{c_n} - \overline{\gamma_n} c_n + \gamma_n \overline{\gamma_n}\} - 2\pi \sum_{n=-N}^N c_n \overline{c_n} \\ &= 2\pi \sum_{n=-N}^N (c_n - \gamma_n) \overline{(c_n - \gamma_n)} - 2\pi \sum_{n=-N}^N c_n \overline{c_n} \\ &= 2\pi \sum_{n=-N}^N |c_n - \gamma_n|^2 - 2\pi \sum_{n=-N}^N |c_n|^2. \end{aligned}$$

²ここで, 複素数値関数 $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は一般に $\int_a^b \overline{H(x)} dx = \overline{\int_a^b H(x) dx}$ を満たすことを用いた. この性質はリーマン積分の定義から確認できる.

最後の $|c_n|^2$ の和の項も $f(x)$ にのみ依存する定数であるから, 結局

$$E = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \right\}_{(*)} + 2\pi \sum_{n=-N}^N |c_n - \gamma_n|^2.$$

よって E の最小値は $-N \leq n \leq N$ に対し $\gamma_n = c_n$ と置いたときに実現され, その値は $(*)$ つき中括弧の中身である. すなわち,

定理 5.0. 与えられた自然数 N に対し, $E = \int_0^{2\pi} |f(x) - P(x)|^2 dx$ を最小にする N 次フーリエ多項式は

$$P(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{nxi}$$

によって与えられる. ただし, c_n は $f(x)$ の n 次の複素フーリエ係数である. また, f が実数値関数であるとき, $c_n = \overline{c_{-n}}$ より $P(x)$ は実 N 次フーリエ多項式である.

したがって, フーリエ級数は $f(x)$ を近似する関数としてなかなか筋の良い選択になっていることがわかる.

ベッセルの不等式とリーマン・ルベークの補題

以上の議論において, $E = \int_0^{2\pi} |f(x) - P(x)|^2 dx$ は 0 以上の値であることは明らかであるから, その最小値 (すなわち, $(*)$ つき中括弧の中身) も 0 以上である. よって,

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \geq 2\pi \sum_{n=-N}^N |c_n|^2$$

が成り立つ. 自然数 N は任意に大きくできるから, 次の定理を得る:

定理 5.1 (ベッセル (Bessel) の不等式) 区分的に連続な周期 2π の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

ただし, c_n は $f(x)$ の n 次の複素フーリエ係数である.

右辺の積分は $f(x)$ が区分的に連続であることから有限の値である. よって, 左辺の級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 + (|c_1|^2 + |c_{-1}|^2) + (|c_2|^2 + |c_{-2}|^2) + (|c_3|^2 + |c_{-3}|^2) + \cdots$$

は上に有限であり, 収束する. とくに, $n \rightarrow \infty$ のとき $|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 \rightarrow 0$ であり,

$$c_n, c_{-n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を得る.

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-nxi} dx = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx - i \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \right\}$$

であり, $f(x)$ が実数値関数であるとき $c_{-n} = \overline{c_n}$ であったから, 次の定理を得る:

定理 5.2 (リーマン (Riemann)・ルベグ (Lebesgue) の補題) 区分的に連続な周期 2π の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, $n \rightarrow \infty$ のとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \rightarrow 0. & (2) \quad & \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \rightarrow 0. \\ (3) \quad & \int_0^{2\pi} f(x) e^{\pm nxi} \, dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

注意.

- 以上の一連の議論は, $f(x)$ が 2 乗可積分であれば (すなわち, $|f(x)|^2$ が可積分であれば) 区分的に連続でなくても成立する. また, ルベグ積分の意味でも成立する.
- 定理 5.2 は $f(x)$ を階段関数で近似することで直接証明することができる.
- ベッセルの不等式は, 一定の条件下で「等式」となる. これを **パーセバルの等式** という.
- 周期 2π であることから, 定理 5.2 は積分区間を $[-\pi, \pi]$ に変えても成立する.

レポート問題

締め切りは 11 月 13 日の講義開始前とします. (研究室 (H210) メールボックスへの提出は当日朝 10 時 20 分まで.)

レポート問題 C-1. 区分的に連続かつ周期 2π の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 複素フーリエ係数を $c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-nxi} \, dx$ ($n \in \mathbb{Z}$) とおく. 自然数 N に対し

$$S_N(x) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{nxi}, \quad D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{nxi},$$

とおくとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) \, dt$$

レポート問題 C-2 (リーマン・ルベグの定理の一般形). 区分的に連続な関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ と自然数 n に対し,

$$\int_a^b f(x) e^{nxi} \, dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を示せ.

ボーナス問題 (+1 point, 締め切りなし). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください.

収束定理 (1) (11/6)

配布日: 2019 年 11 月 13 日 Version: 1.0

●●● 前回 (11/6) の講義ノート ●●●

区分的に滑らかな関数

区分的に連続な関数に関しては (複素) フーリエ係数が定義され, 同時に (複素) フーリエ級数が定義できるのであった. しかし, それが何かしらの値に収束するのかという問題と, その値が $f(x)$ と一致するというフーリエの主張が正当化できるのか, という問題は未解決である.

じつは, 「区分的に連続」という条件だけではフーリエ級数の収束性は保証できない. 不連続点を許さず「連続」に変えてもまだダメで, 「フーリエ級数が発散してしまう実数 x 」が存在するような例が構成できてしまうのである.

そこで, 考える関数の条件を, 実用性が損なわれない範囲でもう少しだけ強めよう.

定義 (区分的に滑らかな関数). 周期 2π の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (もしくは $\mathbb{C}$) が**区分的に滑らか**であるとは, 次の 2 条件が満たされることをいう:

- (1) 区間 $[0, 2\pi)$ からある有限個の点 $c_1, \dots, c_N$ を除くと, $f(x)$ は微分可能かつ $f'(x)$ は連続.
- (2) 各 c_k ($k = 1, \dots, N$) に対し $f(c_k \pm 0)$ および $f'(c_k \pm 0)$ が存在する (片側極限として実数が確定する).

関数 $f(x)$ はある x で微分可能であれば, そこで連続であることに注意しよう. したがって, $f(x)$ が区分的に滑らかであれば $f(x)$ と $f'(x)$ は区分的に連続であり, それぞれのフーリエ係数やフーリエ級数が意味をもつ.

また, f が区分的に滑らかであれば, 各 x に対し, 片側極限

$$f(x \pm 0) = \lim_{t \rightarrow \pm 0} f(x+t), \quad f'(x \pm 0) = \lim_{t \rightarrow \pm 0} f'(x+t)$$

は必ず存在する. たとえば, $f'(x+0) = A$, $f(x+0) = B$ とするとき, 十分小さな $t > 0$ に対し $f(x+t) = At + B + o(t)$ が成立する. (いわば, 「接半直線」が存在する. 補題 6.5 のあとの注意を参照せよ.)

例. $f(x) = -1$ ($-\pi < x < 0$), $f(x) = 1$ ($0 < x < \pi$) を満たす関数を周期 2π で拡張したものは, x が π の整数倍であるときは不連続点となる. しかし, すべての x において $f(x)$, $f'(x)$ の左右からの片側極限は存在する.

例. $-\pi \leq x < \pi$ に対し $f(x) = |x|$ と定義し, これを周期 2π で $\mathbb{R}$ 上の関数として拡張したものは「連続かつ区分的に滑らか」な関数の例になっている.

例 (区分的に滑らかではない例). $\pi \leq x < \pi$ に対し $f(x) = \sqrt{|x|}$ と定義し, これを周期 2π で $\mathbb{R}$ 上の関数として拡張したものは「連続だが区分的に滑らかではない」関数の例になっている. 実際, $x \rightarrow \pm 0$ のとき $f'(x)$ は $\pm\infty$ に発散し, 片側極限として実数が定まらないからである.

例 (区分的に滑らかではない例). $f(0) = 0$, $-\pi \leq x < 0$ または $0 < x < \pi$ のとき $f(x) = |x| \sin \frac{\pi}{|x|}$ と定義し, これを周期 2π で $\mathbb{R}$ 上の関数として拡張したものは「連続だが区分的に滑らかではない」関数の例になっている. こちらも, $x \rightarrow \pm 0$ のとき $f'(x)$ は激しく振動し, 片側極限が存在しないからである.

ディリクレの収束定理

以下に述べる定理はディリクレによる (らしい) .

定理 6.1 (ディリクレの収束定理) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (もしくは $\mathbb{C}$) は周期 2π の区分的に滑らかな関数とする. 整数 n に対しフーリエ係数を

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-nxi} dx$$

とおくとき, 任意の実数 x に対しフーリエ級数は収束し,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (6.1)$$

が成り立つ. とくに, 関数 f が x において連続であるとき,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi} = f(x).$$

ただし, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ はいつものように $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N$ であるものと約束する.

以下, 定理 6.1 の仮定のもと, 証明に必要な補題を 4 つ準備する.

補題 6.2 (ディリクレ核) 自然数 N に対し

$$S_N(x) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{nxi}, \quad D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{nxi},$$

とおくとき, 次の等式が成り立つ:

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt.$$

この D_N を N 次の**ディリクレ核**という.

証明. まず, フーリエ係数の定義と関数の周期性より

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-nyi} dy \right) e^{nxi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sum_{n=-N}^N e^{(x-y)ni} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=-N}^N e^{(x-y)ni} dy \end{aligned}$$

と変形できる. さらに $t = y - x$ と変数変換すると, 上の式につづけて

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \sum_{n=-N}^N e^{-tni} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt \quad (\leftarrow \text{周期性}). \end{aligned}$$

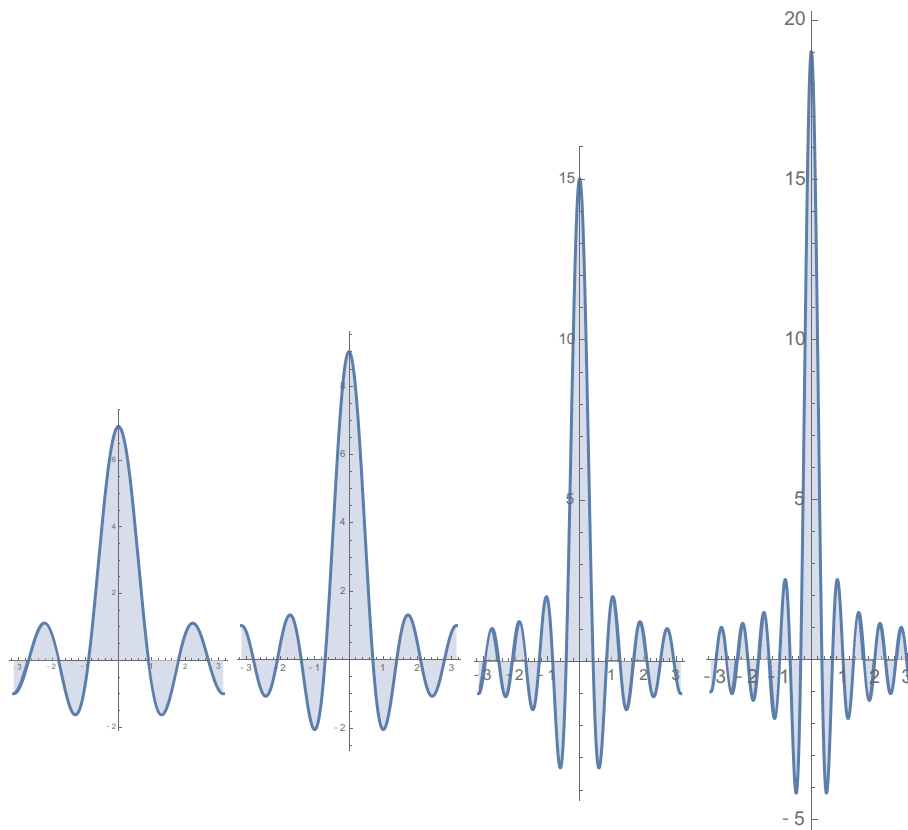
二番目の等号では, ディリクレ核が偶関数であることを用いた. ■

補題 6.3 ディリクレ核 D_N ($N \in \mathbb{N}$) に対し, $-\pi \leq t \leq \pi$ のとき

$$D_N(t) = \begin{cases} \frac{\sin \{(N+1/2)t\}}{\sin(t/2)} & (0 < |t| \leq \pi) \\ 2N+1 & (t=0) \end{cases}$$

が成り立つ.

次のグラフは, $N = 3, 5, 7, 9$ に対してディリクレ核のグラフを描いたものである.



証明. $t=0$ のときは明らか. $0 < |t| \leq \pi$ のとき, $\omega = e^{ti} \neq 1$ とおくと,

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N \omega^n = \omega^{-N} \sum_{n=0}^{2N} \omega^n = \omega^{-N} \cdot \frac{\omega^{2N+1} - 1}{\omega - 1} = \frac{\omega^{N+1} - \omega^{-N}}{\omega - 1}.$$

したがって,

$$D_N(t) = \frac{e^{(N+1)ti} - e^{-Nti}}{e^{ti} - 1} = \frac{e^{(N+1/2)ti} - e^{-(N+1/2)ti}}{e^{ti/2} - e^{-ti/2}} = \frac{\sin \{(N+1/2)t\}}{\sin(t/2)}.$$

■

補題 6.4 区分的に連続な関数 $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, $N \rightarrow \infty$ のとき

$$\int_0^\pi g(x) \sin \{(N+1/2)x\} dx \rightarrow 0.$$

証明. 区分的に連続な奇関数 $\tilde{g}: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める:

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & (0 < x \leq \pi) \\ 0 & (x = 0) \\ -g(-x) & (-\pi \leq x < 0) \end{cases}.$$

このとき $\tilde{g}(x) \sin(N + 1/2)x$ は偶関数であり

$$I_N := \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(x) \sin \{(N + 1/2)x\} dx = 2 \int_0^{\pi} g(x) \sin \{(N + 1/2)x\} dx$$

が成り立つから, $I_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) を示せば十分である. 加法定理より

$$I_N = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(x) \cos(x/2) \sin Nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(x) \sin(x/2) \cos Nx dx$$

となるが, 下線部は区分的に連続であるから, リーマン・ルベークの補題 (定理 5.2, これは積分区間を $[-\pi, \pi]$ としても成り立つ) より $I_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$). ■

補題 6.5 $x \in \mathbb{R}$ を固定し, 関数 $g_{\pm}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (以下複号同順) を

$$g_{\pm}(t) = \begin{cases} \frac{f(x \pm t) - f(x \pm 0)}{2 \sin(t/2)} & (0 < t \leq \pi) \\ f'(x \pm 0) & (t = 0) \end{cases}$$

と定める. このとき, $g_{\pm}$ は区分的に連続である.

証明. f が区分的に連続であることから, $t \mapsto f(x \pm t)$ は $0 \leq t \leq \pi$ において区分的に連続である. よって $g_{\pm}(t)$ は $0 < t \leq \pi$ のとき区分的に連続. また, $0 < t \leq \pi$ かつ $t \rightarrow +0$ とき,

$$\frac{f(x \pm t) - f(x \pm 0)}{2 \sin(t/2)} = \frac{f(x \pm t) - f(x \pm 0)}{t} \cdot \frac{t/2}{\sin(t/2)} \rightarrow f'(x \pm 0)$$

より, $g_{\pm}(t)$ は $t = 0$ で連続である. ■

注意. 念のため,

$$\frac{f(x \pm t) - f(x \pm 0)}{t} \rightarrow f'(x \pm 0) \quad (t \rightarrow +0) \quad (6.2)$$

であることを確認しておこう. プラス (+) の方だけ示す: いま, 十分に小さな $t > 0$ を固定するとき, f および f' は区間 $(x, x+t]$ で連続としてよい. また, $f(x+0)$ が存在することから, 平均値の定理が適用できて,

$$f(x+t) - f(x+0) = f'(x+s)t$$

を満たす $s \in (0, t)$ が存在する. $t \rightarrow +0$ のとき $s \rightarrow +0$ であるから, 式 (6.2) を得る.

ここで, 上の式において $f'(x+0) = A$, $f(x+0) = B$ とするとき, $f'(x+s) = A + o(1)$ と表されることから, 十分小さな $t > 0$ に対し $f(x+t) = At + B + o(t)$ が導かれる.

ボーナス問題 (+1 point, 11 月 20 日まで). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください.

収束定理 (2) (11/13)

配布日: 2019 年 12 月 4 日 Version: 1.0

●●● 前回 (11/13) の講義ノート ●●●

ディリクレの収束定理の証明

前回のプリントで与えた 4 つの補題を駆使して, 次の定理の証明を与えよう.

定理 6.1 (再, ディリクレの収束定理) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (もしくは $\mathbb{C}$) は周期 2π の区分的に滑らかな関数とする. 整数 n に対しフーリエ係数を

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-nxi} dx$$

とおくとき, 任意の実数 x に対しフーリエ級数は収束し,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (6.1)$$

が成り立つ. とくに, 関数 f が x において連続であるとき,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi} = f(x).$$

ただし, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ はいつものように $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N$ であるものと約束する.

補題 6.2 より, 自然数 N に対し

$$S_N(x) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{nxi}, \quad D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{nxi},$$

とおくとき, 次の等式が成り立つ:

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt. \quad (6.2)$$

定理の主張は, 任意の実数 x を固定するとき,

$$S_N(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (N \rightarrow \infty), \quad (6.3)$$

あるいは (全体に 2π をかけて)

$$2\pi S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt \rightarrow \pi \{f(x+0) + f(x-0)\} \quad (N \rightarrow \infty) \quad (6.4)$$

を示すことと同値である. 積分区間を原点で分割すれば, 式 (6.4) は次の (A) と (B) から導かれることがわかる: $N \rightarrow \infty$ のとき,

$$(A) \int_0^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt \rightarrow \pi f(x+0); \text{ かつ}$$

$$(B) \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_N(t) dt \rightarrow \pi f(x-0)$$

(B) について, $t \mapsto -t$ という変数変換を行うと, $D_N(t) = D_N(-t)$ であることから

$$\int_{-\pi}^0 f(x+t) D_N(t) dt = \int_0^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt$$

であることがわかる. また,

$$\int_0^{\pi} D_N(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N e^{nti} dt = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

が成り立つ ($n \neq 0$ のとき $\int_{-\pi}^{\pi} e^{nti} dt = 0$, $n = 0$ のとき $\int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi$ であることを用いた).
これらのことから, (A) および (B) は次を (複号同順で) 示すことと同値である:

$$\int_0^{\pi} f(x \pm t) D_N(t) dt \rightarrow \int_0^{\pi} f(x \pm 0) D_N(t) dt \quad (N \rightarrow \infty).$$

すなわち,

$$I_N := \int_0^{\pi} \{f(x \pm t) - f(x \pm 0)\} D_N(t) dt \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

を示せば十分である. 前回の補題 6.3 より, $0 < t \leq \pi$ のとき

$$D_N(t) = \frac{\sin \{(N+1/2)t\}}{\sin(t/2)}$$

であったから, 補題 6.5 で定義した関数 $g_{\pm} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて

$$I_N = \int_0^{\pi} \{f(x \pm t) - f(x \pm 0)\} \frac{\sin \{(N+1/2)t\}}{\sin(t/2)} dt = 2 \int_0^{\pi} g_{\pm}(t) \sin \{(N+1/2)t\} dt.$$

補題 6.5 で示したように, $g_{\pm}(t)$ は区分的に連続であるから, 補題 6.4 より, $I_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) がわかる. よって (A) かつ (B) が示された. ■

応用例

収束定理から結論されることを具体例で見よう.

例 1. α, β を任意の実数とし, $f(x) = -1$ ($-\pi < x < 0$), $f(x) = 1$ ($0 < x < \pi$), $f(0) = \alpha f(\pi) = \beta$ と定め, これを $\mathbb{R}$ 全体の関数として周期 2π で拡張しておく.

このとき, 各整数 n に対するフーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-nxi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nxi} dx.$$

よって

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot e^{-nxi} dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-nxi} dx = -\int_0^{\pi} e^{nxi} dx + \int_0^{\pi} e^{-nxi} dx = -2i \int_0^{\pi} \sin nx dx.$$

$n = 0$ のとき, この積分は 0. $n \neq 0$ のとき,

$$2\pi c_n = -2i \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2i}{n} \{(-1)^n - 1\} \iff c_n = \frac{i}{n\pi} \{(-1)^n - 1\}.$$

n が自然数のとき, $c_n = (a_n - b_n i)/2$ であったから,

$$a_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad b_n = \begin{cases} 0 & (n: \text{偶数}) \\ 4/(n\pi) & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

が成り立つ. したがって, 関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$$

収束定理の結果から, 以下が成り立つ:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} = \begin{cases} 1 & (0 < x \leq \pi) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \\ 0 & (x = 0, \pi) \end{cases}$$

とくに, $x = \pi/2$ を代入すると,

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} = 1 \iff 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{ライプニッツ})$$

例 2. $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x < \pi$) とし, これを $\mathbb{R}$ 全体の関数として周期 2π で拡張しておく.

このとき, 各整数 n に対するフーリエ級数を計算しよう. 先の例と同様にして,

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^0 (-x) \cdot e^{-nxi} dx + \int_0^{\pi} x \cdot e^{-nxi} dx = 2 \int_0^{\pi} x \cos nx dx.$$

$n = 0$ のとき,

$$2\pi c_n = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi^2 \iff c_n = \frac{\pi}{2}.$$

$n \neq 0$ のとき, 部分積分を用いて計算すると,

$$2\pi c_n = \frac{2}{n^2} \{(-1)^n - 1\} \iff c_n = \frac{1}{n^2 \pi} \{(-1)^n - 1\}.$$

n が自然数のとき, $c_n = (a_n - b_n i)/2$ であったから,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \begin{cases} 0 & (n: \text{偶数}) \\ -4/(\pi n^2) & (n: \text{奇数}) \end{cases}, \quad b_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. したがって, 関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

収束定理の結果から, 以下が成り立つ:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2} = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

とくに, $x = -\pi$ を代入すると,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1}{(2m-1)^2} = \pi \iff 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

これより, 次の等式 (オイラーが 1735 年に発見) も得られる (導出方法を考えよ):

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

レポート問題 C-2 に関する注意

積分 $I_n = \int_a^b f(x)e^{nxi} dx$ が 0 に収束することの証明で,

$$2I_n = \int_a^{a-\pi/n} f(x)e^{nxi} dx + \int_a^{b-\pi/n} \{f(x) - f(x+\pi/n)\}e^{nxi} dx + \int_{b-\pi/n}^b f(x)e^{nxi} dx$$

であることを証明し, $n \rightarrow \infty$ のとき

(1) 右辺第 1 項目と第 3 項目は「積分区間の長さが 0 に近づく」

(2) 右辺第 2 項目は「 $f(x) - f(x+\pi/n)$ が 0 に近づく」

という理由で, $2I_n \rightarrow 0+0+0=0$ ($n \rightarrow \infty$) としている人がたくさんいました. いい線はいつてますし結果は間違っていないのですが, 残念ながら理由づけとしては不十分です (マイナス 2 点).

(1) に関しては定数 n の積分

$$\int_0^{1/n} n dx = 1$$

を考えれば, 積分区間の長さよりも「関数の絶対値が発散しない」ことのほうが重要だとわかります. (2) は $f(x) \neq f(x+0)$ が成り立つような不連続点において成立しませんし, 仮に $g_n(x) = f(x) - f(x+\pi/n)$ が各 x に対し $n \rightarrow \infty$ のときに 0 に収束したとしても, 次のような例があるので積分が 0 に収束するとまでは結論できません:

関数は 0 に (各点) 収束するが, 積分は 0 に収束しない例. $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を $g_n(0) = 0$, $x \in (0, 1/n]$ のとき $g_n(x) = -n^2(x - 1/n)$, $x \in (1/n, 1]$ のとき $g_n(x) = 0$ と定義すると, 任意の $x > 0$ に対し $x > 1/N$ となる十分に大きな自然数 N をとれば, $n \geq N$ のとき $g_n(x) = 0$ より $g_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). しかし,

$$\int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^{1/n} -n^2(x - 1/n) dx = \frac{1}{2}.$$

考えられる修正案. 少なくとも

(1) 右辺第 1 項目と第 3 項目は「積分区間の長さが 0 に近づき, しかも被積分関数が定義域上で有界」

(2) 右辺第 2 項目は「関数 $\{f(x) - f(x+\pi/n)\}$ が, 区間 $[a, b-\pi/n]$ 上で n によらず一様に有界であり, 不連続点のまわりの除いたところで定数関数 0 に一様収束する」

ぐらいは書いてくれないと点数は乗せられません. (2) はこれでもまだ厳密性に欠けますから, 気になる人はぜひ, ちゃんとした証明を書き下してみてください.

内積空間 (12/04)

配布日: 2019 年 12 月 11 日 Version: 1.0

●●● 前回 (12/4) の講義ノート ●●●

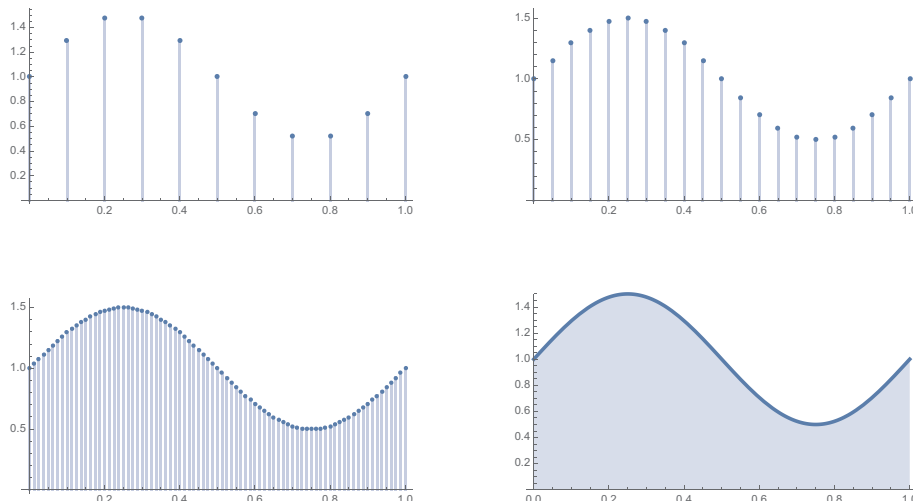
有限次元ベクトル空間から無限次元へ

今回から、関数たちのなす空間において、ちょっとした幾何学を展開したい。ここでは、 n 次元のベクトル空間から無限次元のベクトル空間へ緩やかな橋渡しを試みよう。

ベクトルのグラフ表示. N を自然数とし、 N 次元数空間 (N 次元ユークリッド空間)

$$\mathbb{R}^N := \{(a_1, \dots, a_N) \mid a_k \in \mathbb{R}\}$$

を考える。これは $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 (線形代数の教科書をみて定義を確認せよ) である。いま、 $\vec{a} = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ をひとつ選び、これを、「1 から N までの自然数にそれぞれ実数 a_1 から a_N を対応させる関数 (写像)」だとみなし、その「グラフ」を xy 平面に、次のように描くことにする: 本来は点の集合 $\{(k, a_k) \mid 1 \leq k \leq N\}$ をプロットするべきだが、 x 軸方向に全体を $1/N$ して (すなわち、 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ に収まるように $\{1/N, 2/N, \dots, 1\}$ 上の関数 $\vec{a}: k/N \mapsto a_k$ とみなして)、点の集合 $\{(k/N, a_k) \mid 1 \leq k \leq N\}$ をプロットするのである。



N が大きくなるとあたかも $[0, 1]$ 区間上の関数のように見えてくるから、「関数とは無限次元のベクトルである」というのもそれなりに納得できるであろう。

たとえば、 $[0, 1]$ 区間上の各 x に $f(x)$ を対応させる関数全体 (連続性も何も仮定せず、考えられるすべての関数を考える) を $\mathbb{R}^{[0,1]}$ と表せば、その「グラフ」として xy 平面に集合 $\{(x, f(x)) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ プロットするのは自然であり、むしろ当たり前のことであろう。

ベクトル空間における内積

xy 平面や xyz 空間での幾何学において、ベクトル (線分) の「長さ」や、ベクトル間の「角度」は基本的な概念である。これらを定義するときには本質的な役割をもつのが、「内積」である。

有限次元の場合: N を自然数、 $\vec{a} = (a_1, \dots, a_N), \vec{b} = (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^N$ とするとき、その内積 (ユークリッド内積) を

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \sum_{k=1}^N a_k b_k$$

と定義するのであった。このとき,

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}, \quad \cos \theta := \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

とおき, $\|\vec{a}\|$ を $\vec{a}$ の**長さ**, θ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす**角**というのであった。

無限次元の場合. では, 2つの関数 $\vec{f} = f(x), \vec{g} = g(x) \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ に対して内積を定義することはできるだろうか?たとえば

$$\vec{f} \cdot \vec{g} := \sum_{x=0}^1 f(x) g(x)$$

などとしてみたくなるが, 「 $x=0$ から 1 まですべてにわたる和」というのは意味不明である。しかし, ここから「積分」を想起しない人は少ないであろう。 $[0, 1]$ 区間上の関数の空間において, 「積分」は内積の候補として非常に有力である。すなわち,

$$\vec{f} \cdot \vec{g} := \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

と定義すれば良いではないか?

しかし, この積分が意味を持つためには, 関数に様々な条件をつけなくてはならない。もっとも簡単なのは, 関数 $f(x), g(x)$ は $[0, 1]$ 上の連続関数である, という条件をつけることである。このとき,

$$\|\vec{f}\| := \sqrt{\vec{f} \cdot \vec{f}}, \quad \cos \theta := \frac{\vec{f} \cdot \vec{g}}{\|\vec{f}\| \|\vec{g}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

とおき, $\|\vec{f}\|$ を $\vec{f}$ の「長さ」, θ を $\vec{f}$ と $\vec{g}$ のなす「角」と定義するのは自然に思えてくる。たとえば, $\vec{f} \cdot \vec{g} = \int_0^1 f(x) g(x) dx = 0$ であれば, これらの関数は「直交する」と言ってもよいのではないか。

以下では, このようなアイデアをもう少し一般的な枠組みで定式化する。

内積空間

定義 X を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする。すべての $\vec{u}, \vec{v} \in X$ に対し, ある複素数 $(\vec{u}, \vec{v})$ が定まり, 以下の (I1)~(I3) を満たすものとする:

(I1) $\forall \vec{u} \in X, (\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$. とくに, 等号成立は $\vec{u} = \vec{0}$ のときのみ。

(I2) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in X, (\vec{u}, \vec{v}) = \overline{(\vec{v}, \vec{u})}$.

(I3) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},$

$$(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \vec{w}) = \alpha (\vec{u}, \vec{w}) + \beta (\vec{v}, \vec{w}),$$

$$(\vec{w}, \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \overline{\alpha} (\vec{w}, \vec{u}) + \overline{\beta} (\vec{w}, \vec{v}).$$

このような性質をもつ複素数 $(\vec{u}, \vec{v})$ を, $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の**内積**という。内積が定まっているベクトル空間 X を**内積空間**もしくは**ブレ・ヒルベルト空間**という。

例 1 (エルミート内積) N を自然数, $X = \mathbb{C}^N$ とするとき, $\vec{z} = (z_1, \dots, z_N)$, $\vec{w} = (w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{C}^N$ に対し

$$(\vec{z}, \vec{w}) := \sum_{k=1}^N z_k \overline{w_k}$$

と定める. これによって, $\mathbb{C}^N$ は内積空間となる. ($\mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ であり, それに制限したものが通常のユークリッド内積である.)

例 2 (複素数値関数の内積) 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続な複素数値関数全体を $C[0, 1]$ と表すことにする. 2つの関数 $\vec{f} = f(x)$, $\vec{g} = g(x) \in C[0, 1]$ に対して,

$$(\vec{f}, \vec{g}) := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \quad (8.1)$$

と定める (連続性より, 右辺の積分はかならず存在する. 必要ならば, 実部と虚部にわけて考えよ). これによって, $C[0, 1]$ は内積空間となる.

注意. 一方, $[0, 1]$ 上の区分的に連続な複素数値関数全体を $\hat{C}[0, 1]$ と表す. このとき, 2つの関数 $\vec{f} = f(x)$, $\vec{g} = g(x) \in \hat{C}[0, 1]$ に対し式 (8.1) 右辺の積分は存在するが, 「内積」の性質を満たさない (レポート問題).

ノルムとシュワルツの不等式

定理 8.1 X を $\mathbb{C}$ 上の内積空間とし, $\vec{u}, \vec{v} \in X$ に対し, 内積 $(\vec{u}, \vec{v})$ が定まるものとする. また, すべての $\vec{u} \in X$ に対し

$$\|\vec{u}\| := \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$$

と定める. このとき, 以下の (N1)~(N3) が成り立つ:

(N1) $\forall \vec{u} \in X, \|\vec{u}\| \geq 0$. とくに, 等号成立は $\vec{u} = \vec{0}$ のときのみ.

(N2) $\forall \vec{u} \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$.

(N3) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in X,$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

(N1)~(N3) のような性質をもつ 0 以上の実数 $\|\vec{u}\|$ を, $\vec{u}$ の **ノルム** といい, ノルムが定まっているベクトル空間 X を **ノルム空間** という. 定理は, 「内積空間はノルム空間」¹だと主張しているのである. その証明はレポート問題とするが, 次の「シュワルツの不等式」が必要になる:

補題 8.2 (シュワルツの不等式) X を $\mathbb{C}$ 上の内積空間とし, $\vec{u}, \vec{v} \in X$ に対し, 内積 $(\vec{u}, \vec{v})$ が定まるものとする. このとき, すべての $\vec{u}, \vec{v} \in X$ に対し,

$$|(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

が成り立つ.

¹一般に逆は成り立たない.

証明. $\vec{v} = \vec{0}$ のとき, 不等式は「 $0 = 0$ 」となり, 明らかに 成り立つ. 以下, $\vec{v} \neq \vec{0}$ と仮定する. いま, $\alpha = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{v}\|^2} \in \mathbb{C}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \alpha\vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \alpha\vec{v}, \vec{u} - \alpha\vec{v}) \\ &= (\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, -\alpha\vec{v}) + (-\alpha\vec{v}, \vec{u}) + (-\alpha\vec{v}, -\alpha\vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \overline{\alpha}(\vec{u}, \vec{v}) - \alpha(\vec{v}, \vec{u}) + \alpha\overline{\alpha}\|\vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \overline{\alpha}(\vec{v}, \vec{u}) - \alpha(\vec{v}, \vec{u}) + |\alpha|^2\|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{v}, \vec{u}) &= \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{v}\|^2} \overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{|(\vec{u}, \vec{v})|^2}{\|\vec{v}\|^2} > 0, \\ |\alpha|^2\|\vec{v}\|^2 &= \left| \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{v}\|^2} \right|^2 \|\vec{v}\|^2 = \frac{|(\vec{u}, \vec{v})|^2}{\|\vec{v}\|^2} > 0\end{aligned}$$

を代入すると, $0 \leq \|\vec{u} - \alpha\vec{v}\|^2$ より

$$0 \leq \|\vec{u}\|^2 - \frac{|(\vec{u}, \vec{v})|^2}{\|\vec{v}\|^2}.$$

この式を変形すれば求める不等式となる. ■

レポート問題

締め切りは 12 月 18 日の講義開始前とします. (研究室 (H210) メールボックスへの提出は当日朝 10 時 20 分まで.)

レポート問題 D-1. 補題 8.2 を活用し, 定理 8.1 を証明せよ.

レポート問題 D-2. 例 2 のあとの注意にあるように, 2 つの関数 $\vec{f} = f(x), \vec{g} = g(x) \in \hat{C}[0, 1]$ に対し式 (8.1) 右辺の積分は存在するが, 「内積」の性質を満たさない. その理由を説明せよ.

レポート問題 D-3 (中線定理). 定理 8.1 の仮定のもと, すべての $\vec{u}, \vec{v} \in X$ に対し

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$$

が成り立つことを示せ².

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください.

²逆に, 中線定理が成り立つようなノルム空間は内積空間となる.

ヒルベルト空間 (12/11)

配布日: 2019 年 12 月 18 日 Version: 1.0

●●● 前回 (12/11) の講義ノート ●●●

内積の連続性

以下, X を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, すべての $\vec{u}, \vec{v} \in X$ に対し, その内積 $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{C}$ が定まる内積空間であるとする.

定義 (収束列) $\vec{u}, \vec{u}_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) とする. ベクトルの列 $\{\vec{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\vec{u} \in X$ に**収束する**とは, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\|\vec{u}_n - \vec{u}\| \rightarrow 0$ が成り立つことをいう. すなわち,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \|\vec{u}_n - \vec{u}\| < \epsilon.$$

また, このとき

$$\vec{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{u}_n \quad \text{または} \quad \vec{u}_n \rightarrow \vec{u} \quad (n \rightarrow \infty)$$

と表す.

このとき, 次が成り立つ:

命題 8.1 (内積の連続性) X 内の収束する列 $\vec{u}_n \rightarrow \vec{u}$ および $\vec{v}_n \rightarrow \vec{v}$ ($n \rightarrow \infty$) に対し,

$$(\vec{u}_n, \vec{v}_n) \rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

期待通りの結果ではあるが, 内積を定めるたった 3 つの条件 (I1)~(I3) から直ちにわかるような自明な性質ではないことに注意しよう.

証明. $n \rightarrow \infty$ のとき, $|(\vec{u}_n, \vec{v}_n) - (\vec{u}, \vec{v})| \rightarrow 0$ を示せばよい. 複素数に関する三角不等式より,

$$\begin{aligned} |(\vec{u}_n, \vec{v}_n) - (\vec{u}, \vec{v})| &= |(\vec{u}_n, \vec{v}_n) - (\vec{u}, \vec{v}_n) + (\vec{u}, \vec{v}_n) - (\vec{u}, \vec{v})| \\ &\leq |(\vec{u}_n - \vec{u}, \vec{v}_n)| + |(\vec{u}, \vec{v}_n - \vec{v})|. \end{aligned}$$

この最後の式の第 1 項目と第 2 項目がそれぞれ 0 に収束することを示せばよい. まず第 2 項目について, 仮定である $\|\vec{v}_n - \vec{v}\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) とシュワルツの不等式 (補題 8.2) より

$$|(\vec{u}, \vec{v}_n - \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}_n - \vec{v}\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

第 1 項目については, 若干注意が必要である. 同様に計算すれば

$$|(\vec{u}_n - \vec{u}, \vec{v}_n)| \leq \|\vec{u}_n - \vec{u}\| \|\vec{v}_n\|$$

となるが, $\|\vec{u}_n - \vec{u}\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であることに逆らって $\|\vec{v}_n\| \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) で「ない」ことを示さなくてはならない. (第 2 項目の場合は, $\|\vec{u}\|$ は定数なのでそのような心配はなかった.)

仮定より, $\|\vec{v}_n - \vec{v}\|$ は 0 に収束することから, ある十分に大きな自然数 N が存在し, $n \geq N$ のとき $\|\vec{v}_n - \vec{v}\| \leq 1$ であると仮定してよい. したがって, $n \geq N$ のとき

$$\|\vec{v}_n\| = \|\vec{v}_n - \vec{v} + \vec{v}\| \leq \|\vec{v}_n - \vec{v}\| + \|\vec{v}\| \leq 1 + \|\vec{v}\|.$$

よって, $n \geq N$ を満たす n に対して,

$$|(\vec{u}_n - \vec{u}, \vec{v}_n)| \leq \|\vec{u}_n - \vec{u}\| \|\vec{v}_n\| \leq \|\vec{u}_n - \vec{u}\| (1 + \|\vec{v}\|) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

■

完備性とヒルベルト空間

X 内のベクトルの列 $\{\vec{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**コーシー列**であるとは,

$$|\vec{u}_n - \vec{u}_m| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

が成り立つことをいう。すなわち,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |\vec{u}_n - \vec{u}_m| < \epsilon$$

が成り立つことをいう。

定義 (完備性・ヒルベルト空間) X を内積空間とする。 X が**完備**であるとは、すべてのコーシー列が (それぞれある X の元に) 収束することをいう。完備な内積空間はとくに**ヒルベルト空間**と呼ばれる。

例 1. $X = \mathbb{C}$ とする。複素数 z, w に対しエルミート内積 $(z, w) := z\bar{w}$ を定めることで内積空間となる。これは完備であり、ヒルベルト空間である。確認してみよう。ノルムは $\|z\| = \sqrt{z\bar{z}} = |z|$, 要するに普通の絶対値であることに注意すると, $\{z_n = x_n + y_n i\}_{n=1}^{\infty}$ ($x_n, y_n \in \mathbb{R}$) がコーシー列であるとき,

$$|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m| = \|z_n - z_m\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

同様に $|y_n - y_m| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$) もわかるから, z_n の実部からなる列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および虚部からなる列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに実数の意味でコーシー列である。実数においてコーシー列と収束列は同値¹であるから, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ には極限 a と b が存在する。よって, $A := a + bi$ とおくと, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$|z_n - A| = |(x_n + y_n i) - (a + bi)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \rightarrow 0.$$

すなわち, コーシー列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $A \in \mathbb{C}$ に収束する。

例 2. 同様の議論により, $\mathbb{C}^N$ (N は自然数) も内積空間として完備であり, ヒルベルト空間となることがわかる。

ルベグ積分について. 今後用いる積分は, 前にやったリーマン積分ではなく, ルベグ積分というものを使います。参考文献として以下の講義ノートを上げておきます。

川平友規『ルベグ積分の基礎のキソ』

<http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/lebesgue.pdf>

「川平 ルベグ」で検索したらたぶん 3 番目ぐらいに出てきます。

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください。

¹そうなるように実数は構成されている。

正規直交系 (12/18)

配布日: 2019 年 12 月 25 日 Version: 1.0

●●● 前回 (12/18) の講義ノート ●●●

無限次元のヒルベルト空間

以下, 無限次元ヒルベルト空間 (=完備な内積空間) の具体例として, 「 L^2 空間」を導入しよう.

零集合

定義 (零集合) $A \subset \mathbb{R}$ が**零集合** (れいしゅうごう, ぜろしゅうごう) であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある区間の列 $I_1, I_2, \dots$ が存在し, 以下の 3 条件を満たすことをいう.

- (1) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [a_n, b_n] \ (a_n < b_n).$ (2) $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \epsilon.$

ここで, $b_n - a_n$ とは区間 I_n の「長さ」にあたるものである. (3) より, その長さの総和はいくらでも小さくできるので, (2) より, 集合 A の「長さ」として自然な値は 0 だといえるであろう. この 0 が「零集合」の名前の由来である. また, ここでいう「長さ」は, ルベーグ積分論において「1 次元ルベーグ測度」という言葉で定式化される.

例 1. ある実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ とする. ただし, 数列の中には重複があってもよいとする. このとき, A は零集合である.

例 1 の証明. $n \in \mathbb{N}$ に対し, $I_n = [a_n, a_n + \epsilon/2^{n+1}]$ とおく. このとき, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ かつ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{「} I_n \text{ の長さ」} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

■

例 2. 有理数全体からなる集合 $\mathbb{Q}$ は零集合である.

例 2 の証明. 例 1 のように, $\mathbb{Q}$ の元が適当な数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ によって $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}$ (重複を許す) と表されればよい. 任意の 0 でない有理数は $\pm p/q$ ($p, q \in \mathbb{N}$) の形で書けることに注意すると,

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{1}, \dots$$

などと並べていけばよい. ■

L^2 空間. 以下, Ω を $\mathbb{R}$ 上の区間とする. 例えば, $[a, b], (a, b)$ など. $(-\infty, \infty)$ のように, 非有界な区間も含むものとする.

定義 (関数の同一視) 複素数値関数 $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に対し, 集合

$$\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$$

が零集合であるとき, 「 f と g はほとんどいたるところで等しい」といい, $f = g$ a.e. もしくは単に $f = g$ と表す.

注意. a.e. は almost everywhere の略である. ルベグ積分論において, 零集合は「感知できない」集合であり, そのような集合上での違いは無視して関数を同一視しよう, というのがここでの重要なアイデアである¹.

例 3. $\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ とし, Ω 上の関数 f, g を $f(x) = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$), $g(x) = 1$ ($\forall x \in \mathbb{Q}$), $g(x) = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$), と定める. このとき, $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\} = \mathbb{Q}$ であるから, $f = g$ (a.e.) である.

例 4. $\Omega = (-\pi, \pi)$ とし, Ω 上で区分的に連続な関数 f を考える. 高々有限個の不連続点が存在するが, そのような点での値を自由に変えても, f は上記の同一視の意味で f のままであり, 「同じ関数」だとみなされる.

このような同一視は無用な混乱を招くように思われるが, それでも得られるもののほうが遥かに多いのである.

2 乗可積分性. 複素数値関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が **2 乗可積分**であるとは,

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty$$

が成立することをいう (すなわち, 左辺の積分が定義され, しかも有限の値となる). ただし, この積分はルベグ積分である.

注意.

- ルベグ積分はリーマン積分の一般化である. 実際, Ω 上でリーマン可積分な関数はルベグ可積分であり, そのリーマン積分はルベグ積分と同じ値となる.
- $\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx = 0$ のとき, ある 零集合 $A \subset \Omega$ が存在し, $\Omega - A$ 上で $f(x) = 0$ が結論できる. すなわち, f と定数 0 をとる関数はほとんどいたるところで等しい.

定義 (L^2 空間). Ω 上の複素数値 2 乗可積分関数の全体を $L^2(\Omega)$ と表す. また, $\Omega = [a, b], (a, b)$ のとき $L^2[a, b], L^2(a, b)$ などとも表す. ただし, $f, g \in L^2(\Omega)$ に対し, $f = g$ a.e. であれば, すなわち f と g がほとんどいたるところで等しければ, 同じ元 (関数) とみなす.

定理 10.1 (L^2 はヒルベルト) $L^2(\Omega)$ は (関数の和, 定数倍によって) $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間となる. また, $f, g \in L^2(\Omega)$ に対し内積

$$(f, g) := \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

と定義するとき, $L^2(\Omega)$ はヒルベルト空間となる.

この定理を証明するには, ルベグ積分への理解が必要である. この講義ではそれを認めて以下の議論を進める.

注意. $L^2(\Omega)$ のノルムは

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

¹厳密には, 「同値関係を入れて商集合をとる」という操作により本当に同じ関数 (あるいは同じ「積分できる何か」) だと定式化できる.

によって与えられる. このことから, $L^2(\Omega)$ とは $\|f\|$ が計算でき, しかも $\|f\| < \infty$ であるような関数全体のことだとわかる.

正規直交系

X をヒルベルト空間とする. $\vec{u}, \vec{v} \in X$ に対し $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ が成り立つとき, $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は**直交する**といい, $\vec{u} \perp \vec{v}$ と表す².

N を自然数もしくは $N = \infty$ とする. X の部分集合 $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^N$ が**正規直交系**であるとは,

$$(\vec{e}_j, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

が成り立つことをいう.

例 5. $X = \mathbb{C}^N$ (N は自然数) に対し,

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_N = (0, 0, \dots, 1)$$

は正規直交系を成す.

例 6. $X = L^2(-\pi, \pi)$ において,

$$\vec{e}_n := \frac{e^{nxi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とおくと, $\{\vec{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は正規直交系となる³.

実際, 簡単な積分の計算により

$$(\vec{e}_j, \vec{e}_k) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{jxi}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \overline{\frac{e^{kxi}}{\sqrt{2\pi}}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(j-k)xi} dx = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

ここで, 連続関数であればリーマン積分可能であり, このときリーマン積分とルベーグ積分の値が一致する, という事実をもちいている. さらにいうと, この計算をもつて $\vec{e}_n \in L^2(-\pi, \pi)$ の確認もできたことになる.

レポート問題は次のページに!

² $\vec{0}$ はすべての元と直交する. 幾何学的には理解しづらいが数学的にはそのほうが扱いやすい.

³ 添字 n は $\mathbb{Z}$ をわたり $k = 1$ から $N = \infty$ までではないが, $\vec{e}_0, \vec{e}_{-1}, \vec{e}_1, \vec{e}_{-2}, \vec{e}_2, \vec{e}_{-3}, \vec{e}_3, \dots$ と並べて, その k 番目を $\vec{e}_k$ と改名すれば $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ の形になる.

レポート問題

締め切りは 1 月 8 日の講義開始前とします。(研究室 (H210) メールボックスへの提出は当日朝 10 時 20 分まで。)

レポート問題 F-1. $L^2(-\pi, \pi)$ において,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3x, \dots$$

は完全正規直交系であることを示せ.

レポート問題 F-2 (ベッセルの不等式). X をヒルベルト空間とする. 自然数 N もしくは $N = \infty$ に対し, X の正規直交系 $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^N$ をとるとき, 任意の $\vec{u} \in X$ に対しベッセルの不等式

$$\sum_{k=1}^N |(\vec{u}, \vec{e}_k)|^2 \leq \|\vec{u}\|^2$$

が成り立つことを示せ.

レポート問題 F-3 (定理 5.1 の改良). $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を区分的に滑らかな周期 2π の周期関数, $c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nxi} dx$ ($n \in \mathbb{Z}$, 複素フーリエ係数) とする. このとき, パーセヴァルの等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

が成り立つ. 例 6 の $\{\vec{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が $L^2(-\pi, \pi)$ の完全正規直交系である (第 11 回の講義内容) ことをヒントにして, その理由を述べよ.

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください.

フーリエ級数再訪 (12/25)

配布日: 2020 年 1 月 8 日 Version: 1.0

●●● 前回 (12/25) の講義ノート ●●●

ベッセルの不等式: 前回の補足

定理 11.1 (ベッセルの不等式) X をヒルベルト空間とする. 自然数 N もしくは $N = \infty$ に対し, X の正規直交系 $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^N$ をとるとき, 任意の $\vec{u} \in X$ に対し**ベッセルの不等式**

$$\sum_{k=1}^N |(\vec{u}, \vec{e}_k)|^2 \leq \|\vec{u}\|^2$$

が成り立つ.

証明は前回のレポート問題とした. フーリエ級数に対して成立するベッセルの不等式と比較せよ.

完全正規直交系

$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ を 1 つ固定すると, 任意の $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ に対し

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

を満たす実数の組 (a_1, a_2, a_3) がただ 1 つ定まる. これは, 基底という基準となるベクトルの組を指定することで, $\vec{x}$ というベクトルの「座標値」が一意的に定まる, ということである. とくに, 正規直交基底としての重要な性質として, $k = 1, 2, 3$ に対し

$$a_k = (\vec{a}, \vec{e}_k)$$

が成り立つ, ということがある. 正規直交基底に属するベクトルとの内積は, そのベクトルが定める「軸」に関する「座標値」を与えるのである. また, このことから等式

$$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sum_{k=1}^3 (\vec{a}, \vec{e}_k)^2$$

や, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) = \sum_{k=1}^3 (\vec{a}, \vec{e}_k)(\vec{b}, \vec{e}_k)$$

が成り立つのであった.

(無限次元の) ヒルベルト空間においても, 適切な条件を満たせば, 同様のことが成り立つ.

完全性

X をヒルベルト空間, $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^N$ を正規直交系とする (ただし, $N \leq \infty$). このとき,

$$M_0 := \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{e}_k \in X \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}$$

とする¹. すなわち, 正規直交系のうち有限個の元から線形結合をとったものの全体である. これは X の部分ベクトル空間となる. さらに,

$$M := M_0 \cup \{M_0 \text{ 内のコーシー列の極限}\} \subset X$$

とおく. X の完備性より X のコーシー列と収束列は同値であるから, $\vec{u} \in M$ であるとはある M_0 内の列 $\{\vec{u}_n\}_{n=1}^\infty$ が存在し, $\vec{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{u}_n$ が成り立つことと同値である. とくに, $\vec{u} \in M_0$ であれば $\vec{u}_n = \vec{u}$ ($n \in \mathbb{N}$) とすることで自明に $\vec{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{u}_n$ と書けることから, 最初から

$$M := \{M_0 \text{ 内のコーシー列の極限}\} \subset X$$

と定義しても同じことである. このとき, M は X の完備な部分ベクトル空間となり, 「正規直交系 $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^N$ によって張られる閉部分空間」とも呼ばれる.

定理 11.2 (と定義: 完全正規直交系) 上のようにあたえられたヒルベルト空間 X , 正規直交系 $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^N$, 部分空間 M に対し, 以下は同値.

(1) $X = M$.

(2) 任意の $\vec{u} \in X$ に対し, $\vec{u} = \sum_{k=1}^N (\vec{u}, \vec{e}_k) \vec{e}_k$.

(3) 任意の $\vec{u} \in X$ に対し, $\|\vec{u}\|^2 = \sum_{k=1}^N |(\vec{u}, \vec{e}_k)|^2$. (パーセヴァルの等式)

(4) 任意の $\vec{u}, \vec{v} \in X$ に対し, $(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{k=1}^N (\vec{u}, \vec{e}_k)(\vec{v}, \vec{e}_k)$.

(5) ある $\vec{u} \in X$ が「任意の $\vec{e}_k$ に対し $(\vec{u}, \vec{e}_k) = 0$ 」を満たすならば, $\vec{u} = \vec{0}$.

(1) から (5) までの条件が成り立つとき, $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^N$ を X の**完全正規直交系**もしくは**正規直交基底**という.

証明は省略する². フーリエ解析を学ぶ私たちにとって重要なのは, 次の事実である:

定理 11.3 (L^2 空間の完全正規直交系) $L^2(-\pi, \pi)$ において,

$$\left\{ \vec{e}_n = \frac{e^{nxi}}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

は完全正規直交系である.

系として, (とくに定理 11.2(2) より) 次の主張を得る:

¹ N が有限の場合, $k > N$ に対して $\vec{e}_k$ は考えないものとする.

²ほとんどの関数解析の教科書に書いてある.

系 11.4 (L^2 フーリエ展開) 任意の関数 $\vec{f} = f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ に対し, 次が成り立つ:

$$\vec{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\vec{f}, \vec{e}_n) \vec{e}_n. \quad (11.1)$$

すなわち, $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\vec{f}, \vec{e}_n) \in \mathbb{C} \ (n \in \mathbb{Z})$ とおくと,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi}. \quad (11.2)$$

式 (11.1), あるいは式 (11.2) は関数からなる級数の各点収束や一様収束ではなく, 「 L^2 収束」と呼ばれるものになっているので, 少し勝手が違っている。

例. これは「区分的に滑らかな周期関数」のフーリエ展開の拡張になっている。確認してみよう。 $\vec{f} = f(x)$ を周期 2π の区分的に滑らかな周期関数とすると, これは $L^2(-\pi, \pi)$ の元である。また, ディリクレの収束定理によって

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nxi} dx$$

とおくと, 区間 $(-\pi, \pi)$ 内の有限個の x を除いて

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{nxi}$$

が成立する。すなわち, 右辺の級数は収束し, 値は左辺と一致する。ここで,

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\overline{e^{nxi}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\vec{f}, \vec{e}_n)$$

が成り立つことに注意すれば,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\vec{f}, \vec{e}_n) \frac{e^{nxi}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\vec{f}, \vec{e}_n) \vec{e}_n.$$

L^2 収束の意味. 上の式は式 (11.1) と同じものに見えるが, かなり状況は異なっている。まず, $L^2(-\pi, \pi)$ における収束は内積が定めるノルムを用いて定義されているから, 式 (11.1) は

$$\left\| \vec{f} - \sum_{n=-N}^N (\vec{f}, \vec{e}_n) \vec{e}_n \right\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$$

あるいは, 積分を用いて

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{nxi} \right|^2 dx \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$$

ということを意味する。直感的には, この式から区間 $(-\pi, \pi)$ の「ほとんどいたるところ」で

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi}$$

(右辺は収束し左辺に一致, 各点収束) が成り立つような気がするが, そうは問屋がおろさない.
たとえば, $L^2(-\pi, \pi)$ 内の関数列 $g_1, g_2, \dots$ で

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすものが存在するとき, 任意に選んだ $x \in (-\pi, \pi)$ に対し $g_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が言えるか, という問題を考えてみよう. 一般には, $(-\pi, \pi)$ 上のすべての x で $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が収束しないような例が存在するのである.

話を簡単にするために区間を変えて $L^2[0, 1]$ で考えよう. また, 区間 $[a, b] \subset [0, 1]$ で値 1 をとり, それ以外では 0 となる関数を $\chi_{[a, b]}$ と表すことにする. このとき, g_n を次のように与えるのである (グラフを描きながら考えてみよ):

$$g_1 = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}, \quad g_2 = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]},$$

$$g_3 = \chi_{[0, \frac{1}{4}]}, \quad g_4 = \chi_{[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]}, \quad g_5 = \chi_{[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}]}, \quad g_6 = \chi_{[\frac{3}{4}, 1]},$$

$$g_7 = \chi_{[0, \frac{1}{8}]}, \quad g_8 = \chi_{[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]}, \quad g_9 = \chi_{[\frac{2}{8}, \frac{3}{8}]}, \quad g_{10} = \chi_{[\frac{3}{8}, \frac{4}{8}]}, \quad g_{11} = \chi_{[\frac{4}{8}, \frac{5}{8}]}, \quad \dots$$

このとき, $\int_0^1 |g_n(x)|^2 dx$ は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束するが, 任意の点 x での値は 0 と 1 の値を繰り返しとる (振動する) ので, 収束はしない.

すなわち, 式 (11.1) において, $f(x)$ の値と有限和 $\sum_{n=-N}^N c_n e^{nxi}$ の差は $N \rightarrow \infty$ のとき上の例のように振動している可能性があり, 区分的に滑らかな関数のときのような収束性は一般には成立しない (かもしれない) のである.

実際にどのぐらいたくさんの点でフーリエ級数が収束するのか, という問題は長い間未解決であったが, 20 世紀の半ばになって, 次の決定的な定理が証明された:

定理 11.5 (カルソン (カルレソン), 1966) 任意の関数 $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ に対し, ある零集合 $A \subset (-\pi, \pi)$ が存在し, すべての $x \in (-\pi, \pi) - A$ において f のフーリエ級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi}$ は $f(x)$ に収束する. すなわち, フーリエ展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi}$$

はほとんどいたるところで (各点収束の意味で) 成立する.

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください.

フーリエ変換 (1/8)

配布日: 2020 年 1 月 15 日 Version: 1.0

●●● 前回 (1/8) の講義ノート ●●●

広義積分と (リーマン) 可積分性

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は区分的に連続であるとする. (すなわち, 高々有限個の不連続点をもち, それらの点への左右からの片側極限が存在する. 周期性は必ずしも仮定しない.)

このとき, 任意の閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ においてリーマン積分の意味での定積分 $\int_a^b f(x) dx$ が存在する¹. そこで, $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$ (a と b は無関係) としたときの極限

$$A = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{C}$$

が存在するとき, $f(x)$ は**広義リーマン可積分**あるいは単に**可積分**であるといい²,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

と表す. また, $\mathbb{R}$ 上の関数 $x \mapsto |f(x)|$ が広義リーマン可積分であるとき, $f(x)$ は**絶対可積分**であるといい, そのことをしばしば

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

のように表す³. このとき, 「絶対収束する級数は収束する」という定理に対応する次の結果が知られている:

命題 12.1 (絶対可積分性) $f(x)$ が絶対可積分であれば, 広義リーマン可積分である.

注意. $f(x)$ が絶対可積分であっても, $f(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) とは限らない⁴.

フーリエ変換

以下, 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を絶対可積分な関数であるとする.

このとき, 与えられた $\xi \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi x i} dx$$

と定める. このとき, 右辺の積分は存在し, $\hat{f}(\xi)$ はある複素数である. 実際, $|f(x) e^{-\xi x i}| = |f(x)|$ であるから, $f(x)$ の絶対可積分性より $f(x) e^{-\xi x i}$ も絶対可積分, よって広義リーマン可積分である. ゆえに $\mathbb{R}$ 上の複素数値関数 $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が定まる. これを f の**フーリエ変換**といい,

$$\hat{f} = \mathcal{F}[f]$$

と表すこともある.

¹この場合はルベグ積分でも同じ値になる.

²こちらの「可積分」という言葉はルベグ積分の意味での可積分性とは異なるので, 念のため使わない.

³こちらがルベグ可積分性と同値 (区分的に連続, という仮定のもと).

⁴講義ではそのような例を与えた. 一方, (絶対) 収束する級数 $a_0 + a_1 + \dots$ は $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすのであった.

フーリエ変換の意味. フーリエ変換とは何なのだろうか. フーリエ展開の係数にも似ているが, そもそも周期関数を扱っているわけでもないし, 積分区間も有限ではない. ここでは, 厳密さにはこだわらず, 式を一旦「離散的に近似」することでフーリエ展開との関係を調べてみよう.

まずは関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を絶対可積分かつ区分的に滑らか (すなわち, 高々有限個の点を除いて $f'(x)$ が存在し, $f'(x)$ についてそれらの点への左右からの片側極限が存在する. ここでも, 周期性は必ずしも仮定しない) な関数であると仮定しよう.

いま, $L > 0$ を任意に選び固定する. 関数 $f_L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f_L(x) := \begin{cases} f(x) & (|x| \leq L) \\ 0 & (|x| > L) \end{cases}$$

と定める. これは区分的に滑らかかつ絶対可積分な関数であり, $L \rightarrow \infty$ のとき f_L は f に各点収束する. フーリエ展開と関係させるために, $y = (\pi/L)x$ とおき, $g_L(y) := f_L((L/\pi)y)$ とおこう. この関数の, 区間 $(-\pi, \pi]$ の部分を周期 2π で周期的に拡張したものを $\tilde{g}_L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ とおくと, これは区分的に滑らかであるから, フーリエ展開

$$\tilde{g}_L(y) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(L) e^{nyi}, \quad c_n(L) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}_L(y) e^{-nyi} dy$$

をえる. とくに, ディリクレの定理より, $-\pi \leq y \leq \pi$ かつ y が g_L の不連続点でなければ,

$$g_L(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(L) e^{nyi}, \quad c_n(L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_L(y) e^{-nyi} dy$$

が成り立つことに注意しよう. これより, $-L \leq x \leq L$ かつ x が f_L の不連続点でなければ,

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(L) e^{n\pi xi/L}, \quad c_n(L) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(x) e^{-n\pi xi/L} dx$$

を得る. これは f_L の「フーリエ展開」と呼ぶべきものであろう. そこで, $\xi \in \mathbb{R}$ に対し, 「フーリエ変換もどき」として

$$\hat{f}_L(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f_L(x) e^{-\xi xi} dx$$

と定義してみる. (積分区間では $f_L = f$ が成り立つことに注意.) このとき,

$$c_n(L) = \frac{\pi}{L} \hat{f}_L\left(\frac{n\pi}{L}\right)$$

が成立するから, f_L の「フーリエ展開」は

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{L} \hat{f}_L\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{n\pi xi/L}$$

となり, これは「フーリエ展開」において $e^{n\pi xi/L}$ の表す関数の「貢献度」が相対的に $\hat{f}_L\left(\frac{n\pi}{L}\right)$ で表現されている, ということである⁵. さらに $\xi_n := n\pi/L$, $\Delta\xi = \pi/L$ とおくと,

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_L(\xi_n) e^{\xi_n xi} \Delta\xi$$

⁵音楽などで, 特定の周波数の音の「音量」をその音の「貢献度」と考えている,

というリーマン和の形になることから, $L \rightarrow \infty$ とした「極限」として

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi \quad (12.1)$$

が成立するのではないか, と期待する.

逆フーリエ変換. 関数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は絶対可積分であるとする. このとき,

$$\check{F}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{\xi x i} d\xi$$

を F の**フーリエ逆変換**といい, $\check{F} = \mathcal{F}^{-1}[F]$ と表すこともある.

このとき, 式 (12.1) は

$$f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$$

と書き直すことができる. この等式は, どのような f に対して成立するのであろうか?

レポート問題

締め切りは 1 月 22 日 (最終回) の講義開始前とします. (研究室 (H210) メールボックスへの提出は当日朝 10 時 20 分まで. レポート返却は数学事務室 (H332B) で 2 月 15 日まで行いますので, かならず取りに来てください.)

レポート問題 G-1. 定数 $k > 0$ を固定し, 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \cos kx & (|x| \leq \pi) \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$$

と定める. このとき, フーリエ変換 $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi x i} dx$ を求めよ. (HINT. $\cos x = (e^{xi} + e^{-xi})/2$ を用いる.)

レポート問題 G-2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を (実数値) 絶対可積分関数とする. f が偶関数であれば,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \xi x dx$$

が成り立つことを示せ. また, 奇関数の場合はどうか?

レポート問題 G-3 (微分とフーリエ変換). $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は C^1 級かつ絶対可積分, $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ も絶対可積分であるとする. このとき, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ が成り立つことを既知として,

$$\hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$

を示せ. (HINT. 部分積分.)

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください (2 月 10 日まで).

フーリエの反転公式 (1/15)

配布日: 2020 年 1 月 22 日 Version: 1.0

●●● 前回 (1/15) の講義ノート ●●●

フーリエ変換の 3 つの流儀

本講義では, 区分的に連続な絶対可積分関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対しそのフーリエ変換を

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi x i} dx$$

と定義した. また, 同様に, 区分的に連続な絶対可積分関数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し, そのフーリエ逆変換を

$$\check{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{\xi x i} d\xi$$

と定義した. しかし, フーリエ変換の定義には様々な流儀があつて, この定義に近いものでも

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi x i} dx, \quad \text{or} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi x i} dx, \quad \text{or} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi x i} dx$$

の 3 通りがあり, 対応する逆変換も順に

$$\check{F}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{\xi x i} d\xi \quad \text{or} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{\xi x i} d\xi \quad \text{or} \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{\xi x i} d\xi.$$

となる¹. いずれの定義にもそれぞれ利点があるが, 今後別の書籍などで勉強する際には注意しよう.

フーリエ変換の性質と例

フーリエ変換の基本的な性質を見ておこう. まず, フーリエ変換は線形である. すなわち, 任意の複素数 A と区分的に連続な絶対可積分関数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し,

$$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}, \quad \widehat{Af} = A\hat{f}$$

が成り立っている. よって, 区分的に連続な絶対可積分関数全体の空間 (それはベクトル空間になることを確かめよ) 上に線形写像として作用する².

また, 次が成り立つ:

定理 13.1 区分的に連続な絶対可積分関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し, そのフーリエ変換 $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は有界かつ連続である.

下の証明からわかるように, じつは「区分的に連続」という条件は不要である.

証明 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ と $\epsilon > 0$ を固定する. このとき, 絶対可積分性より, ある十分に大きな $L > 0$ が存在し,

$$\int_{-\infty}^{-L} |f(x)| dx < \epsilon, \quad \int_L^{\infty} |f(x)| dx < \epsilon$$

¹積分の部分が同じだが, その前の定数が異なる. 左が多数派で物理・工学に多く, 中央は変換・逆変換の対称性が高く (ユニタリ性をもつ) 数学者好み, 右は少数派という感じがする. 本講義は「少数派」なのでご注意を.

²しかし, その像が再び「区分的に連続な絶対可積分関数全体の空間」に入るとは限らない. 下の例を参照せよ.

とできることに注意する.
つぎに $\eta \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\widehat{f}(\xi + \eta) - \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-(\xi+\eta)xi} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi xi} dx$$

という量を考える.

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{-L} + \int_{-L}^L + \int_L^{\infty}$$

と積分区間を分割すれば, $|f(x)e^{-(\xi+\eta)xi}| = |f(x)e^{-\xi xi}| = |f(x)|$ と三角不等式より,

$$|\widehat{f}(\xi + \eta) - \widehat{f}(\xi)| < 4 \times \frac{\epsilon}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-L}^L f(x) \{e^{-(\xi+\eta)xi} - e^{-\xi xi}\} dx \right|.$$

いま, η を $|\eta|L < \pi/2$ をみたすようにとると, $|x| \leq L$ のとき

$$|e^{-(\xi+\eta)xi} - e^{-\xi xi}| \leq |\eta x| \leq |\eta|L$$

(これは単位円周上の 2 点間の距離と弧長に関する不等式である) が成り立つから,

$$\left| \int_{-L}^L f(x) \{e^{-(\xi+\eta)xi} - e^{-\xi xi}\} dx \right| \leq |\eta|L \int_{-L}^L |f(x)| dx \leq |\eta|L \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

よって, η を $|\eta| < \delta := \left(L \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right)^{-1} \epsilon$ となるように選べば,

$$|\widehat{f}(\xi + \eta) - \widehat{f}(\xi)| < 4 \times \frac{\epsilon}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \cdot \epsilon < \frac{5\epsilon}{2\pi}.$$

ϵ は任意であったから, $\widehat{f}$ はすべての ξ において連続である. (δ が ξ に依存しないことから, 一様連続性もいえる.) ■

次に, フーリエ変換の例を計算してみよう.

例 1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

と定義する. このとき,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi xi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-\xi xi} dx.$$

$\xi = 0$ のとき, 被積分関数は 1 となるので,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 = \frac{1}{\pi}.$$

$\xi \neq 0$ のとき, 被積分関数の原始関数をもとめて

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-\xi xi}}{-\xi i} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{\pi \xi} \cdot \frac{-e^{-\xi i} + e^{\xi i}}{2i} = \frac{\sin \xi}{\pi \xi}.$$

このようにして定まる $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は $\xi = 0$ も含めて連続となることに注意しよう. また, 絶対可積分で「ない」ことも証明できるので, $\widehat{f}$ に逆変換を定義することはできない.

例 2. 定数 $k > 0$ をとり, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-kx} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

と定義する. このとき,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi x i} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-kx} e^{-\xi x i} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(k+\xi i)x} dx.$$

こちらは $k + \xi i \neq 0$ が成り立つので, 場合わけの必要はなく,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-(k+\xi i)x}}{-(k+\xi i)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{0-1}{-(k+\xi i)} = \frac{1}{2\pi(k+\xi i)}.$$

ただし, $|e^{-(k+\xi i)x}| = e^{-kx} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) を用いた. この $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ も, 連続ではあるが絶対可積分で「なく」, 逆変換を定義することはできない.

フーリエ積分とフーリエの反転公式

少し唐突だがフーリエ級数のおさらいをしておく. 周期 2π の区分的に連続な関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を考え, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対しその「フーリエ係数」

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nxi} dx$$

が定まるので, 関数 f に対し

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi} \quad \left(:= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{nxi} \right) \quad (13.1)$$

と表して, この右辺を「フーリエ級数」とよぶのであった. この右辺の級数がどのような f に対して, また, どのような x に対して収束し, 等式になるのかを論じたのがフーリエ級数の理論である. たとえば f が区分的に滑らかであれば, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{nxi} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

がすべての x で成り立つのであった (ディリクレの定理). とくに, x が連続点であれば式 (13.1) の $\sim$ は等号 $=$ に置き換えることができる.

さて, 本題にもどろう. 区分的に連続な絶対可積分関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を考え, 各 $\xi \in \mathbb{R}$ に対しその「フーリエ変換」

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi x i} dx$$

が定まるので³, 関数 f に対し

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi \quad \left(:= \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi \right) \quad (13.2)$$

³ いまさらだが指数の部分, ξ (ギリシャ語 xi, クシー) のあとに $x i$ と続くのは何かのシャレなんだろうか?

と表して, この右辺を**フーリエ積分**とよぶ⁴. この右辺の広義積分は, どのような f に対して, また, どのような x に対して収束し (値が確定し), 等式になるのだろうか? すなわち, **フーリエの反転公式**とよばれる等式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi \quad (13.3)$$

が成立するための (十分) 条件を考えよう.

定理 13.2 f が区分的に滑らかで絶対可積分であれば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

(ただし, N は正の実数で自然数とは限らない) がすべての x で成り立つ.

注意. 左辺の積分区間の両端が「符号違いで揃っている」ことに注意.

この定理より, f が区分的に滑らかで絶対可積分であるとき, **もしフーリエ積分が存在すれば**, その値は $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ となる. とくに, x において f が連続であれば, 式 (13.2) は等号となる.

証明のスケッチ⁵. 正の実数 N (整数とは限らない) をとり,

$$f_N(x) := \int_{-N}^N \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi = \int_{-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\xi t i} dt \right) e^{\xi x i} d\xi$$

とおく. x を任意にとり固定するとき, 積分の順序交換ができる⁶ことが分かって,

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\xi(x-t)i} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \int_{-N}^N e^{\xi(x-t)i} d\xi.$$

下線の積分は $t = x$ のとき $2N$ となり, $t \neq x$ のときは $e^{\xi(x-t)i}$ の原始関数を求めて計算すれば $\frac{2 \sin N(x-t)}{x-t}$ となる. とくに, 下線の積分は x の値によらず, t に関する有界な連続関数である. $x = t$ のときは t の積分においては無視してよいので,

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt$$

と表しても混乱はないであろう. さらに積分区間を $t = 0$ で 2 分割し, それぞれに変数変換を用いると,

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+u) \frac{\sin Nu}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x-u) \frac{\sin Nu}{u} du$$

をえる. $\int_0^{\infty} \frac{\sin Nu}{u} du = \int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} dv = \frac{\pi}{2}$ (絶対可積分ではないが広義リーマン可積分) であることが知られているので, フーリエ級数のときと同様に

$$\frac{f_N(x)}{2} - \frac{f(x \pm 0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{f(x \pm u) - f(x \pm 0)\} \frac{\sin Nu}{u} du \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

(複号同順) を示せば十分である. 任意の $\epsilon > 0$ を固定すると, 十分大きな L をとれば, $f(x)$ の絶対可積分性より

$$\left| \int_L^{\infty} f(x \pm u) \frac{\sin Nu}{u} du \right| \leq \int_L^{\infty} |f(x \pm u)| \frac{1}{L} du < \epsilon$$

⁴上の例で見たように, f が絶対可積分でも, $\hat{f}$ はそうとは限らない. したがって, フーリエ積分が収束するかどうかは自明ではない.

⁵証明はディリクレの定理によく似ているので, そちらも参照されたい.

⁶下記命題 13.5 参照. $f(x)$ の絶対可積分性と $|f(t)| = |f(t)e^{\xi(x-t)i}|$ から従う.

とできる. また, $\frac{\sin Nu}{u}$ の広義リーマン可積分性と $\int_L^\infty \frac{\sin Nu}{u} du = \int_{NL}^\infty \frac{\sin v}{v} dv$ より, $N > 1$ と仮定すれば

$$\left| \int_L^\infty f(x \pm 0) \frac{\sin Nu}{u} du \right| = |f(x \pm 0)| \left| \int_{NL}^\infty \frac{\sin v}{v} dv \right| < \epsilon$$

ともできる. よって, 積分区間を $u = L$ で分割し, 三角不等式を適用して

$$\left| \frac{f_N(x)}{2} - \frac{f(x \pm 0)}{2} \right| \leq \frac{1}{\pi} \left| \int_0^L \{f(x \pm u) - f(x \pm 0)\} \frac{\sin Nu}{u} du \right| + \frac{\epsilon}{\pi} \cdot 2 \quad (13.4)$$

を得る. 次に, $u > 0$ に対し

$$g_\pm(u) := \frac{f(x \pm u) - f(x \pm 0)}{\pm u}$$

とおく. $u \rightarrow +0$ とした極限をとって $g_\pm(0) := f'(x \pm 0)$ が定まり, $g: [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ は連続関数となるから, リーマン・ルベグの補題より, ある $N_0 \geq 1$ が存在し, $N \geq N_0$ のとき

$$\left| \int_0^L \{f(x \pm u) - f(x \pm 0)\} \frac{\sin Nu}{u} du \right| < \epsilon$$

が成り立つ. よって式 (13.4) と合わせて,

$$\left| \frac{f_N(x)}{2} - \frac{f(x \pm 0)}{2} \right| \leq \frac{3\epsilon}{\pi}$$

を得る. ■

定理 13.3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は C^2 級かつ f, f', f'' はいずれも絶対可積分であると仮定する. このとき, 以下が成り立つ:

- (1) f のフーリエ変換 $\widehat{f}$ は絶対可積分.
- (2) 等式 $f(x) = \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi$ が成り立つ (フーリエの反転公式).
- (3) 等式 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$ が成り立つ (プランシュレルの等式).

証明には, 以下の命題を用いる:

命題 13.4 (フーリエ変換と微分) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が C^n 級かつ $f^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) が絶対可積分であるとき,

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \widehat{f}(\xi).$$

証明. レポート問題 ($k = 1$ の場合を部分積分を用いて証明し, あとは数学的帰納法). ■

証明 (定理 13.3). (1) 上の命題より $\widehat{f''}(\xi) = -\xi^2 \widehat{f}(\xi)$ であるが, f'' の絶対可積分性より

$$|\widehat{f''}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^\infty |f''(x)| dx =: M < \infty$$

が成り立つことから, $|\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)| \leq M$. とくに $\xi \neq 0$ のとき $|\widehat{f}(\xi)| \leq M/|\xi|^2$ が成り立つ. $a < -1$ かつ $b > 1$ のとき

$$\int_a^b |\widehat{f}(\xi)| d\xi = \int_a^{-1} |\widehat{f}(\xi)| d\xi + \int_{-1}^1 |\widehat{f}(\xi)| d\xi + \int_1^b |\widehat{f}(\xi)| d\xi \leq \int_{-1}^1 |\widehat{f}(\xi)| d\xi + 2 \int_1^\infty \frac{M}{\xi^2} d\xi$$

であり, $|\hat{f}(\xi)|$ は区間 $[-1, 1]$ 上で連続かつ有界となることから, 最右辺の式は正の有限値である. よって, $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$ とした極限が存在する.

(2) (1) より, フーリエ積分は存在する. よって 定理 13.2 より, フーリエの反転公式が成立する.

(3) (1) で得られた評価 $|\hat{f}(\xi)| \leq M/|\xi|^2$ ($\xi \neq 0$) から, $L > 0$ に対し,

$$\left| \int_{-\infty}^{-L} \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{-L} \frac{M}{|\xi|^2} d\xi = M \int_L^{\infty} \frac{1}{\xi^2} d\xi = \frac{M}{L},$$

同様に $\left| \int_L^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi \right| \leq \frac{M}{L}$ が成り立つから,

$$\left| f(x) - \int_{-L}^L \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi - \int_{-L}^L \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi \right| \leq \frac{M}{L} \cdot 2.$$

いま, $f(x)$ の絶対収束性より積分順序の交換ができて (下記の命題 13.5 参照),

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{-L}^L \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi = \int_{-L}^L \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi x i} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\left(\int_{-L}^L \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi \right)} dx \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx - \int_{-L}^L |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\left(f(x) - \int_{-L}^L \hat{f}(\xi) e^{\xi x i} d\xi \right)} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2M}{L} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \rightarrow 0 \quad (L \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

■

積分の順序交換.

命題 13.5 (広義積分と有限積分の順序交換) 複素数値関数 $F(x, t)$ は $(x, t) \in \mathbb{R} \times [A, B] \subset \mathbb{R}^2$ において定義され, 連続であるとする. また, ある定数 $M > 0$ が存在し, 任意の $t \in [A, B]$ に対し次が成り立つものとする:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x, t)| dx \leq M.$$

このとき, 関数 $G: t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t) dx$ は区間 $[A, B]$ 上で連続であり,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_A^B F(x, t) dt \right) dx = \int_A^B \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(x, t) dx \right) dt.$$

証明は練習問題としよう.

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください (2月10日まで).

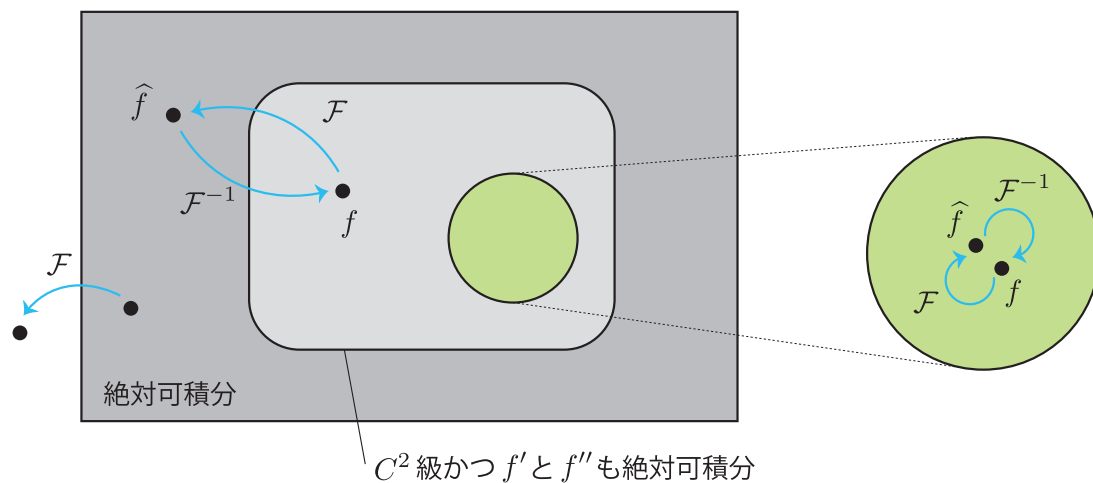
フーリエの変換の応用 (1/22)

配布日: 2020 年 1 月 30 日 Version: 1.0

●●● 前回 (1/22) の講義ノート ●●●

急減少関数とフーリエ変換のユニタリー性

絶対可積分な関数 $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対しフーリエ変換 $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ とフーリエ逆変換 $\check{F} = \mathcal{F}^{-1}[F]$ が定義され, 前回の定理 13.3 で, 「 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が C^2 級かつ f, f', f'' が絶対可積分であれば, $\hat{f}$ は絶対可積分であり, フーリエの反転公式が成り立つ」ことを確認した. フーリエの反転公式は $f = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}[f]$ と表されるから, 下記の図のような状況になっている:



これは, 「 $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ は絶対可積分であっても, C^2 級かつ $(\hat{f})', (\hat{f})''$ が絶対可積分とは限らない」という状況を表している (実際, そのような例が存在する). しかし, 図の右手の緑色の領域のように, $\mathcal{F}$ や $\mathcal{F}^{-1}$ の作用が自己完結するような関数のクラスは存在するだろうか?

急減少関数

定義. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が急減少関数であるとは, C^∞ 級であり, 任意の負でない整数 n と k に対し,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^n |f^{(k)}(x)| < \infty$$

となることをいう. また, そのような関数全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ と表す.

例 1. ある有界な閉区間 $I = [a, b]$ が存在し, その外で恒等的に $f(x) = 0$ となるような C^∞ 級関数は急減少関数である.

例 2. 定数 $k > 0$ に対し $f(x) = e^{-kx^2}$ とおくと, これは急減少関数である. 実際, 任意の多項式 $P(x)$ に対し $P(|x|)e^{-kx^2} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) が成り立つ.

注意. f が急減少関数であれば, すべての k に対し $f^{(k)}$ は絶対可積分となる. 実際, ある定数 $M > 0$ が存在し $(1 + |x|)^2 |f^{(k)}(x)| \leq M$ とできることから, $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{M}{(1 + |x|)^2}$. 右辺の関数は絶対可積分であるから, $f^{(k)}$ もそうである.

定理 14.1 $\mathbb{R}$ 上の急減少関数全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ と表す. このとき, 以下が成り立つ:

- (1) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であれば, $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ かつ $\mathcal{F}^{-1}[f] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- (2) $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \text{id}$. とくに, $\mathcal{F}$ は全単射. すなわち, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の元から $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の元への過不足のない対応を与える.
- (3) $\|f\|_2 = \sqrt{2\pi} \|\widehat{f}\|_2$. ただし, $\|f\|_2 := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.

注意.

- フーリエ変換の係数部分を変えて $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi x i} dx$ と定義すれば, 最後の等式は $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ となる. すなわち, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は等長変換 (じつは, ユニタリー変換) となる.
- 例 1 のような $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の元は $L^2(\mathbb{R})$ 内で稠密¹である. このことから, 上のように L^2 ノルムを保存する形で $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上のフーリエ変換を定義したとき, やはり L^2 ノルムを保存するような $L^2(\mathbb{R})$ 内の「フーリエ変換」へと拡張できる².

フーリエ変換の熱方程式への応用

いま, 数直線 $\mathbb{R}$ を均質な材質でできた細い棒だと思い, 時刻 $t = 0$ において, 棒の $x \in \mathbb{R}$ にあたる部分での温度を $f(x)$ と表すことにする. また, 時刻 $t > 0$ におけるその部分での温度を $u = u(x, t)$ と表すことにする. 一般に, 関数 $u = u(x, t)$ は次の熱方程式に従って変化する:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2)$$

ただし, c は正の定数である. この方程式を (適切な仮定のもとで) フーリエ変換を用いて解いてみよう.

仮定. f は有界, 連続, 絶対可積分とする. また, u は t について C^1 級, x について C^2 級であり, u, u_t, u_x, u_{xx} はそれぞれ絶対可積分とする.

フーリエ変換による方程式の書き換え. 上記の仮定のもと, 式 (1) の両辺をフーリエ変換することができて,

$$\widehat{(u_t)}(\xi, t) = c \widehat{(u_{xx})}(\xi, t) \iff \widehat{u}_t(\xi, t) = -c \xi^2 \widehat{u}(\xi, t) \quad (\widehat{1})$$

を得る. ただし, $\widehat{(u_{xx})} = (i\xi)^2 \widehat{u}$ および $\widehat{(u_t)} = \widehat{u}_t$ (こちらは積分と微分の順序交換を用いている) を用いた. 一方, 式 (2) の両辺をフーリエ変換して

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) \quad (\widehat{2})$$

¹すなわち, $L^2(\mathbb{R})$ 内の元は, ある有界閉区間以外で恒等的に 0 となるような関数の列によって好きなだけ近似できる. ただし, 誤差は L^2 ノルムによって測る.

²たとえば $2^{\sqrt{2}}$ を定義するにあたって, まずは 2 の有理数乗を定義し, さらに $\sqrt{2}$ へ収束する有理数列 $\{x_n\}$ をとって, 2^{x_n} の極限をとるのであった. フーリエ変換を拡張するときも, 同様の極限操作を用いればよいのである.

を得る. (1) と (2) を, ξ をパラメータとする関数族 $U(t) := \hat{u}(\xi, t)$ に対する常微分方程式 $U_t = -c\xi^2 U$ とみなし, t について解くと

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-c\xi^2 t}$$

が得られる. 両辺に対しフーリエ逆変換を施して,

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, t) e^{\xi x i} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-c\xi^2 t + \xi x i} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\xi y i} dy \right) e^{-c\xi^2 t + \xi x i} d\xi.$$

となる. このとき, 積分順序の交換が可能であることがわかるので,

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct\xi^2 - \xi(y-x)i} d\xi \right) dy.$$

このあと証明する補題において, k, x, ξ をそれぞれ $ct, \xi, y-x$ と見なせば括弧の中の積分は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct\xi^2 - \xi(y-x)i} d\xi = \frac{e^{-(y-x)^2/(4ct)}}{2\sqrt{c\pi t}}$$

となることがわかるので,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{e^{-(y-x)^2/(4ct)}}{2\sqrt{c\pi t}} dy = \frac{1}{2\sqrt{c\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(y-x)^2/(4ct)} dy.$$

以上で解の「見立て」が得られたわけだが, これが実際に熱方程式の解を与えることも確認できる.

$$\text{補題 14.2 } F(x) = e^{-kx^2} \text{ のとき, } \hat{F}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2 - \xi x i} dx = \frac{e^{-\xi^2/(4k)}}{2\sqrt{k\pi}}.$$

証明. $\hat{F}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2 - \xi x i} dx$ の両辺を ξ で微分する. このとき, 積分記号下の微分ができて,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{F}}{d\xi}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-kx^2 - \xi x i} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -xi \cdot e^{-kx^2 - \xi x i} dx \\ &= \frac{i}{4\pi k} \left[e^{-kx^2 - \xi x i} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{\xi}{4\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2 - \xi x i} dx \\ &= 0 - \frac{\xi}{2k} \hat{F}(\xi). \end{aligned}$$

よって, 微分方程式 $\frac{d\hat{F}}{d\xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2k} \hat{F}(\xi)$ (これは変数分離形) を解いて, $\hat{F}(\xi) = K e^{-\xi^2/(4k)}$ (K は定数) の形となることがわかる. また, $\xi = 0$ を代入して,

$$K = \hat{F}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{k}} = \frac{1}{2\sqrt{k\pi}}.$$

よって, $\hat{F}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2/(4k)}}{2\sqrt{k\pi}}$ を得る. ■

かくしてこの講義は, 熱方程式に始まり, 熱方程式で終わった.

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールでご指摘ください (2月10日まで).