

担当教員：川平 友規

この講義 (オンライン, N クラス) について

配布日：12/4/2020 Version：1.0

N クラス担当教員：

講義：川平 友規 (Kawahira, Tomoki；東京工業大学理学院数学系)

講義ウェブサイト：

<http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/20Q4-biseki.html>

講義プリントおよび講義の板書 (いずれも pdf 形式) は OCW-i の講義ページにて配布いたします。こちらのウェブサイトでは、毎週の進捗状況についてコメントしていきます (都合により更新が遅れる可能性があります)。

本授業の概要とねらい (シラバスより)：「微分積分学第一」の内容を踏まえ、数列や関数の極限、一変数関数の微分法や多変数関数の偏微分の応用、級数および関数列について、より厳密な数学的取り扱いについて解説する。

本講義のねらいは、理工学にとって重要な解析学の知識を与えることにある。

到達目標 (シラバスより)：「微分積分学第一・演習」に引き続き、微積分学の内容の理解を深め、発展させる。

講義日と授業内容 (おおまかな予定)：

第 1 回	12/4 金 12	数列の極限, 上限, 下限
第 2 回 ^{*1}	12/7 月 34 (12/9 水 34)	実数の連続性, 単調列, コーシー列 (演習 1)
第 3 回 ^{*1}	12/11 金 12	一変数関数の極限, 連続性, 最大値, 中間値の定理
第 4 回	12/14 月 34 (12/16 水 34)	中間値の定理, ロルの定理, 平均値の定理 (演習 2)
第 5 回	12/18 金 12	テイラーの定理
第 6 回	12/21 月 34 (12/23 水 34)	テイラー展開の応用 (演習 3)
第 7 回	12/25 金 12 (1/6 水 34)	定積分 (演習 4)
第 8 回	1/8 金 12 (1/13 水 34)	点集合・多変数関数の極限, 連続性 (演習 5)
第 9 回 ^{*2}	1/14 木 34	多変数関数の微分
第 10 回	1/18 月 34 (1/20 水 34)	合成関数の微分 (演習 6)
第 11 回	1/22 金 12	テイラー展開と極大と極小
第 12 回	1/25 月 34 (1/27 水 34)	級数の収束・絶対収束 (演習 7)
第 13 回	1/29 金 12	べき級数
第 14 回	2/1 月 34	期末試験 (オンライン)

*1：オンデマンド (ビデオ配信+クイズ) でやります

*2：木曜ですが月曜の講義日です

この講義と演習 (微分積分学演習第二, N クラスは田辺先生担当) は, 内容的には連携していま

すが、前期と異なり別科目ですので、履修登録の際にはご注意ください。(成績も別になります。)

教科書および参考書：教科書は用いない。かわりに、講義プリントを配布する。自習用の参考書として、以下を挙げておく。

- 川平友規,『微分積分—1 変数と 2 変数』, 日本評論社
- 三宅敏恒,『入門微分積分』, 培風館
- 川平友規,『解析学概論第一・第二 (2017)』の講義ノート,
<http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/17S-kaiseki.pdf>

オンライン講義の進め方 (予定) :

- 講義の Zoom URL は講義の初日, OCW を通してメールにてお知らせします。第 4Q 中は同じ URL (受講者専用) を用いる予定です。講義の妨害等を避けるため、十分に注意して管理してください。
- 可能な限り、予習用の講義プリントを配布する予定です。講義中は iPad による電子板書を行い、通常の講義に近い形ですめます。また、講義内課題にも取り組んでいただきます。
- 講義終盤に、Google フォームを用いたクイズ (出席を兼ねた理解度確認テスト) を行います。Google フォームへのリンクは講義中に、Zoom 内のチャットにて配信します。

成績評価の方法：毎週のクイズと期末試験 (オンライン) によって評価する。

質問受付：講義中のチャットにより質問を受け付けます。それ以外の時間でも、メールでの質問を受け付けます。希望が多ければ、Zoom によるオフィスアワーを設定する予定です。別途お知らせする「数学相談室」(月火木金, 18:00-20:00) もご活用ください。

よく使う記号など：数の集合

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (1) $\mathbb{C}$: 複素数全体 | (2) $\mathbb{R}$: 実数全体 | (3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体 |
| (4) $\mathbb{Z}$: 整数全体 | (5) $\mathbb{N}$: 自然数全体 | (6) $\emptyset$: 空集合 |

ギリシャ文字

- | | | | | |
|-------------------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| (1) α : アルファ | (2) β : ベータ | (3) γ, Γ : ガンマ | (4) δ, Δ : デルタ | (5) ϵ : イプシロン |
| (6) ζ : ゼータ | (7) η : エータ | (8) θ, Θ : シータ | (9) ι : イオタ | (10) κ : カッパ |
| (11) λ, Λ : ラムダ | (12) μ : ミュー | (13) ν : ニュー | (14) ξ, Ξ : クシー | (15) $\omicron$: オミクロン |
| (16) π, Π : パイ | (17) ρ : ロー | (18) σ, Σ : シグマ | (19) τ : タウ | (20) υ, Υ : ウプシロン |
| (21) ϕ, Φ : ファイ | (22) χ : カイ | (23) ψ, Ψ : プサイ | (24) ω, Ω : オメガ | |

その他

- (1) $\leq, \geq$ は $\leq, \geq$ と同じ意味。
- (2) $x \in X$ と書いたら、「 x は集合 X に属する」すなわち「 x は X の元」という意味。
- (3) 「…をみたす X の元全体の集合」を $\{x \in X \mid (x \text{ に関する条件})\}$ の形で表す。たとえば「 $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ 」
- (4) $X \subset Y$ と書いたら、「集合 X は集合 Y に含まれる」という意味。 $X \subseteq Y, X \subsetneq Y$ も同じ意味。
- (5) $A := B$ と書いたら A を B で定義する、という意味。たとえば $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 。
- (6) (文章 1) $:\iff$ (文章 2) と書いたら、(文章 1) の意味は (文章 2) であることと定義する、という意味。たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 $:\iff$ ある実数 M が存在して、すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$ 。」

講義第 1 回 (12/1)：数列の収束，上限と下限

配布日：12/1/2020 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 1 章 [三宅] 1.1 と 1.4

誤差と近似

$\sin 60^\circ$ の値が知りたいとき、それが $\sqrt{3}/2$ であることがわかっていても、実用上は役に立たない。 $\sqrt{3}$ を必要な精度で、たとえば小数点以下 100 桁とか、そういう具体的な値を計算する手法が必要である。正弦関数 $\sin x$ の値に限らず、みなさんもこれから、自分で新しい有用な関数を発見し、その値を高い精度で計算する必要が生じるかもしれない。

微分積分学は解析学の土台である以上に、それ自身が「関数の値を任意の精度で求めるための技術」でもある。本講義（微分積分学第二）は、とくにそのような側面を学ぶことになる。いわば、数値や関数の「近似の理論」である。

近似を考える上で、「精度」あるいは「誤差」の値は本質的である。私たちは、「誤差として許せる量」をあらかじめ想定した上で、近似値をいかに効率良く求めるか、という問題を考え続けることになるからである。

ここで、「誤差」には 2 つの種類があることに注意しておこう：

実数 A を近似したい「真の値」とし、実数 a をその近似値とする。このとき、

$$|a - A|$$

を**絶対誤差**といい、 $A \neq 0$ のとき定まる比

$$\frac{|a - A|}{|A|}$$

を**相対誤差**という。

いずれの誤差も、非常に重要な概念である。

数列の収束性について

高校数学において「数列 $\{a_n\}$ が実数 A に収束する」とは、「 n が限りなく増加するとき、 a_n が A に限りなく近づく」ことをいうのであった。

では、次の数列はどうだろうか？

例 1. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ とするとき、 a_n は 1 に限りなく近づく。しかし、たとえば 2 にも「限りなく近づく」のではないだろうか？（実際、 a_n と 2 の距離は n とともに縮まっている。）

例 2. 数列 a_n が $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{20}, \frac{1}{3}, \frac{1}{30}, \frac{1}{4}, \frac{1}{40}, \dots$ は 0 に収束するが、0 から離れた近づくたりしながら収束している。「限りなく近づく」というのは、ただ極限との距離が縮むだけではないらしい。

「近づく」とは。 「近さ」というのは本来相対的な概念であり、比較する対象があつて初めて意味を持つ言葉である。たとえば、東京～大阪間は東京～横浜間に比べると遠いが、東京～ニューヨーク間に比べると近い。このことばを無批判的に無限個の項をもつ数列に当てはめると、「何が何と比べて近いのか」がはっきりとせず、あいまいになってしまう。

「数列の収束」を厳密に定義するには、まずこの点を克服しなくてはならない。

誤差の考え方. 実数の大小関係を把握するために、しばしば、小数展開が用いられる。たとえば円周率 π の小数展開 $3.14159265\dots$ が既知だとして、

$$a_1 = 3.1, a_2 = 3.14, a_3 = 3.141, a_4 = 3.1415, a_5 = 3.14159, \dots$$

という数列を考えると、これは π に収束しているように感じられる。それが本当に収束している根拠は、 a_n と π が小数点 n 桁まで一致することから

$$(a_n \text{ と } \pi \text{ の絶対誤差}) = |a_n - \pi| < \frac{1}{10^n}$$

が成り立つので、 π の近似値として a_n の精度が確実によくなっていることを量的に把握できるからである¹。

一般に、数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ がある実数 A のいくらでも高い精度の近似値を与えるとしよう。ひとつ自由に目標となる精度 (絶対誤差の許容度) $\epsilon > 0$ (たとえば $\epsilon = 10^{-30}$, 小数点以下 30 桁一致相当) を定めたとき、 a_n がある $n = N$ から先でこの目標精度を達成しつづけるならば、「 $n \geq N$ のとき $|a_n - A| < \epsilon$ 」が成り立つ。すなわち、私たちの設定した「目標精度」 ϵ という基準に対し、 $n < N$ のとき a_n はその基準を満たさないかもしれないが、 $n \geq N$ であればそれが確実に満たされている。この意味で、 a_n は $n = N$ を境に、より A に「近づいた」という解釈が可能である。

つぎに、 ϵ よりも小さい ϵ' を選んで高い目標精度として設定したとき (たとえば $\epsilon' = 10^{-100}$, 小数点以下 100 桁一致相当), 「 $n \geq N'$ のとき $|a_n - A| < \epsilon'$ 」が成り立つかもしれない。こうして目標精度 $\epsilon > 0$ を繰り返し小さいものに取り替えも、一定以上のすべての n に対して a_n がその目標精度を実現することができるとき、「数列 $\{a_n\}$ は A に収束する」とよぶのは妥当であろう。

こうして「近づく」という概念のあいまいさを克服し数列の収束を定式化したのが、いわゆる ϵ - N 論法 (ϵ - N 論法) とよばれる収束性の定義である：

数列の収束

以下、数列 $a_1, a_2, \dots$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ あるいは単に $\{a_n\}$ と略記する。

定義 (数列の収束) 数列 $\{a_n\}$ が実数 A に**収束する** (converge) とは、任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$n \geq N \quad \text{のとき} \quad |a_n - A| < \epsilon \quad (1.1)$$

を満たすことをいう。このとき、 $a_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$) もしくは $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ と表す。また、 A を数列 a_n の**極限** (limit) とよぶ。

一方、どの実数にも収束しない数列は**発散する** (diverge) という。

注意.

- 「収束」の定義は記号だけで「 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - A| < \epsilon$ 」と表されることもある²。

¹小数には「繰り上がり」という面倒な性質があるので、 $|a_n - A| < 1/10^n$ だからといって a_n と A が小数点以下 n 桁まで一致するとは限らない。この不等式は「小数点以下 n 桁一致相当の精度」だと解釈するのが正しい。たとえば、1.0000 と 0.9995 は $|1 - 0.9995| < 1/10^3$ だから、小数点以下 3 桁一致相当である。

²括弧を使って「 $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) |a_n - A| < \epsilon$ 」と表すこともある。

- a_n は実数 A の近似列だと考えられる. 式 (1.1) の不等式 $|a_n - A| < \epsilon$ は, 「 a_n が A を誤差 ϵ 未満で近似している」と解釈できる. 幾何学的には, 「複素平面内で, a_n が中心 A , 半径 ϵ の円板の内部に入っている」とも解釈できる.
- ϵ は近似精度の目標値であり, 任意に「小さな」正の数を選ぶ. たとえば $\epsilon = \frac{1}{10^5}$ なら小数点以下 5 桁一致相当の精度, $\epsilon = \frac{1}{10^{50}}$ なら小数点以下 50 桁, $\epsilon = \frac{1}{10^{500}}$ なら小数点以下 500 桁, といった具合である.
- N は目標精度 ϵ に依存して決まるので, $N = N(\epsilon)$ とか $N = N_\epsilon$ などと書かれることもある. たとえば $\epsilon = \frac{1}{10^{50}}$ のとき, $n \geq N\left(\frac{1}{10^{50}}\right)$ であれば a_n は A を小数点以下 50 桁一致相当の精度で近似する.
- 収束する数列は**収束列** (convergent sequence) とよばれる.

例題 1.1 (数列の収束) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$ を示せ.

解答. $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$ であることに注意する. 任意の (任意に小さな) $\epsilon > 0$ に対し, ある (十分に大きな) $N \in \mathbb{N}$ が存在して $1/N < \epsilon$ とできる³. よって $n \geq N$ のとき,

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

ゆえに $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$).

命題 1.1 (極限の性質) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ のとき, 次が成り立つ:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB$
- (3) $B \neq 0$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.
- (4) すべての n で $a_n < b_n$ が成り立つとき, $A \leq B$.
- (5) $A = B$ かつすべての n で $a_n < c_n < b_n$ が成り立つとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

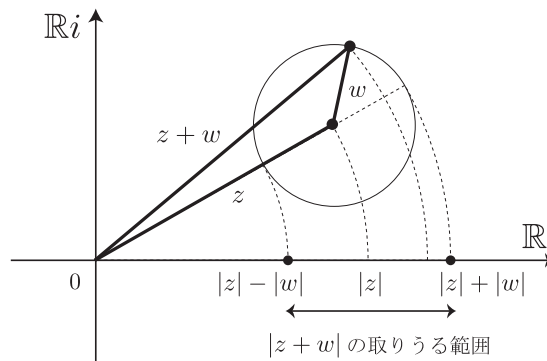
a_n, b_n がそれぞれ A, B の近似値であれば, $a_n + b_n$ は $A + B$ の近似値となるであろう. この命題はそのことを正当化したものである. (4) で等号が成立する簡単な例として, $a_n = -1/n, b_n = 1/n$ がある.

証明の前に, 解析学でもっとも基本的な不等式である「三角不等式」を確認しておこう:

命題 1.2 (三角不等式) z, w を複素数とするとき,

$$|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|. \quad (1.2)$$

³次の性質 (「アルキメデスの原則」とよばれる) を用いている: 任意の正の数 ϵ, a に対し, $n\epsilon > a$ を満たす自然数 n が存在する. 証明を考えてみよう. (Hint: 背理法. 結果を否定すると自然数に上限が存在することになる.)



証明は各自の練習問題としよう（見た目よりは難しいので，実数の場合だけでも十分）．

証明. まず仮定より,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \quad |a_n - A| < \epsilon \quad \text{and} \quad |b_n - B| < \epsilon \quad (1.3)$$

としてよい⁴.

(1) 三角不等式 (1.2) と式 (1.3) より, $n \geq N$ のとき $|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$. ϵ は任意だったんで, 2ϵ も任意に小さく選ぶことができる. よって $a_n + b_n \rightarrow A + B$ ($n \rightarrow \infty$).

(2) 収束性の定義より, $\epsilon_0 = 1$ とおくと, ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N_0$ のとき $|a_n - A| < \epsilon_0 = 1$ が成り立つ. 三角不等式 (1.2) より, $|a_n| - |A| < 1$, よって $|a_n| < |A| + 1$.

いま $n \geq \max\{N_0, N\}$ とすれば, ふたたび三角不等式 (1.2) より

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| = |a_n(b_n - B) + (a_n - A)B| \\ &\leq |a_n| |b_n - B| + |a_n - A| |B| \\ &< (|A| + 1)\epsilon + \epsilon |B| \\ &= (|A| + |B| + 1)\epsilon. \quad (\text{注：これは誤差の評価式になっている}) \end{aligned}$$

ϵ は任意なので, $(|A| + |B| + 1)\epsilon$ も任意に小さくとれる. よって $a_n b_n \rightarrow AB$ ($n \rightarrow \infty$)

(3) (2) より, $B \neq 0$ のとき $1/b_n \rightarrow 1/B$ ($n \rightarrow \infty$) を示せば十分である. 収束性の定義より, $\epsilon_0 = |B|/2 > 0$ とおくと, ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N_0$ のとき $|b_n - B| < \epsilon_0 = |B|/2$ が成り立つ. よって $|b_n| > |B|/2$ が成り立つ⁵.

いま $n \geq \max\{N_0, N\}$ とすれば, 三角不等式 (1.2) より

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - b_n|}{|b_n||B|} < \frac{\epsilon}{(|B|/2)|B|} = \frac{2\epsilon}{|B|^2}. \quad (\text{注: これも誤差の評価式})$$

ϵ は任意なので, $(2\epsilon)/|B|^2$ も任意に小さくとれる. よって $1/b_n \rightarrow 1/B$ ($n \rightarrow \infty$).

(4) と (5) は各自の練習問題としよう.

記号の濫用. いま, 数列 $\{a_n\}$ が

任意の (任意に大きな) $M > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n > N$ のとき $a_n > M$

を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は **(正の) 無限大に発散する** といひ，

$$a_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{もしくは} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

と表す. 同様に,

⁴正確には, $n \geq N_A$ のとき $|a_n - A| < \epsilon$, $n \geq N_B$ のとき $|b_n - B| < \epsilon$ となるように N_A, N_B を選び, $N := \max\{N_A, N_B\}$ とおけばよい.

⁵三角不等式 (1.2) を用いて $|-B| - |b_n| \leq |-B + b_n| < |B|/2$, よって $|b_n| > |B|/2$. 複素数だと思って幾何学的に考えたほうがわかりやすいかもしれない.

任意の (任意に大きな) $M > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N$ のとき
 $a_n < -M$

を満たすとき, 数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散する**といい,

$$a_n \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{もしくは} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

と表す. 収束する数列と同じ記号を用いているが, 「無限大に収束する」とはいわないのがならわしである.

上限と下限 数列の収束性というのは非常にデリケートな概念で, 数学者がそれを理論的に厳密に扱えるようになったのは, 人類の長い歴史のなかでもつい最近 (1860 年ごろ) なのである. その基礎づけを説明するために, 実数からなる集合の「上限」と「下限」の概念を定義しよう.

上限と下限

解析学を学ぶ上でマスターしておきたいのが, ここで紹介する「上限」と「下限」の概念である.

アイデア. 実数からなる集合 S が与えられているとき, 一般に「最小値」や「最大値」が存在するとは限らないが, 「最小値っぽいもの」や「最大値っぽいもの」を考えたいことがある.

たとえば S が閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ の場合は文句なしに最小値 a , 最大値 b をもつ. 一方 S が开区間 (a, b) の場合, これらの値は S 自体には含まれないので「 S は最小値 a を持つ」「 S は最大値 b を持つ」といういい方にはどこか違和感がある⁶. こういうときに, 私たちは「 S は下限 a を持つ», 「 S は上限 a を持つ」といいたいのである.

上界と下界.

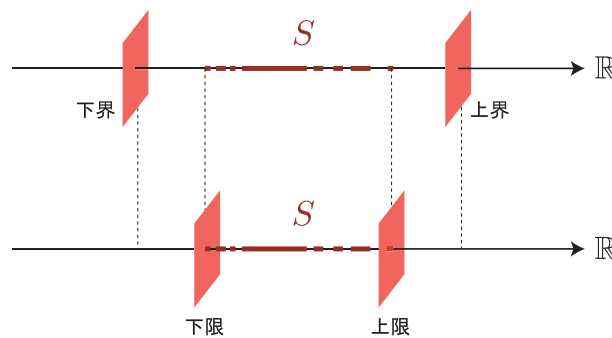
定義 (上に有界・下に有界・上界・下界)

- $\mathbb{R}$ の部分集合 S が**上に有界** (bounded to the above) であるとは, ある実数 M が存在して, S の任意の元 x が $x \leq M$ を満たすことをいう. このような M を S の**上界** (upper bound) とよぶ.
- $\mathbb{R}$ の部分集合 S が**下に有界** (bounded to the below) であるとは, ある実数 M が存在して, S の任意の元 x が $x \geq M$ を満たすことをいう. このような M を S の**下界** (かかい, lower bound) とよぶ.
- S が上にも下にも有界であるとき, 単に**有界** (bounded) であるという.

言い換えると, 実数 M が S の「上界」であるとは, 数直線上で M より右側には S の元が存在しないことが確実にわかっている状態をいう. また, S が上に有界で M をその上界とすると, M 以上の実数はすべて S の上界となる. すなわち, S の「上界」というのはひとつの値に決まるものではない.

例. S が开区間 (a, b) であるとき, b 以上の実数はすべて S の上界である. 同様に, a 以下の実数はすべて S の下界である.

⁶ S の中だけでは達成できない値を, あたかも実現したかのように聞こえる.



上限と下限. 上界・下界はひとつの値に定まらないが、「上界の最小値」「下界の最大値」は、もしそれらが存在するならば、ひとつに定まる（理由を考えよ）．その存在を保証するのが、次の「実数の連続性の公理」、あるいは「ワイエルシュトラスの定理」ともよばれる主張である⁷：

実数の連続性の公理（ワイエルシュトラスの定理）

$\mathbb{R}$ の部分集合 S が上に有界であるとき、 S の上界の最小値が存在する．

これから「 $\mathbb{R}$ の部分集合 S が下に有界であるとき、 S の下界の最大値が存在する」ことがわかる⁸．

そこで、集合 S の「上限」と「下限」を次のように定める：

定義（上限・下限） S の上界の最小値を S の**上限** (supremum) とよび、 $\sup x$ もしくは $\sup S$ と表す．また、 S の下界の最大値を S の**下限** (infimum) とよび、 $\inf x$ もしくは $\inf S$ と表す．

直観的にいうと、数直線上で上界を数直線上で左に移動させていき、初めて S とタッチするか、もしくは S とタッチしないギリギリの点が $\sup S$ である．

例（区間）. S が开区間 (a, b) であるとき、 $\inf_{x \in (a, b)} x = a$ かつ $\sup_{x \in (a, b)} x = b$ ． S が閉区間 $[a, b]$ であるときも、 $\inf_{x \in [a, b]} x = a$ かつ $\sup_{x \in [a, b]} x = b$ が成り立つ．

例（有界でない集合）. S が $\mathbb{R}$ 自身であるとき、そもそも上にも下にも有界ではなく、上限も下限も存在しない． S が整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ であるとき、同様の理由で上限も下限も存在しない．

一方、 $S = \mathbb{N}$ であるとき、上限は存在しないが下限は $\inf_{x \in \mathbb{N}} x = 1$ ．

注意. S が上に有界でないときは $\sup x = \infty$ ，下に有界でないときは $\inf x = -\infty$ と表すことがある（あくまで記号であり、 ∞ のことを上限といったりはしない）．

今回はこの公理の重要性を学ぶ．

参考：上極限と下極限

ここで、すこし厄介だが重要な概念である数列の「上極限」と「下極限」を定義しよう⁹．

⁷ 「実数」を公理的に定義する（実数の満たすべきルールを列挙して、矛盾がなければその具体的な構成方法は問わない）場合は「公理」となる．一方、「実数」というものを適切に構成すればその構成方法から導かれる「定理」となる．

⁸ S のすべての元にマイナスをつけたものを考えればよい．逆に、こちらを仮定すれば、上の「実数の連続性の公理」も得られる．すなわち、互いに必要十分条件ということ．

⁹ べき級数の理論まで、これらの概念は使わないかもしれない．

担当教員: 川平 友規

部分列. 数列 $\{a_n\}$ は収束しなくても、そこから収束する数列を選び出すことができるかもしれない。いま、自然数の「増加列」

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

を選んで得られる数列

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\}$$

を数列 $\{a_n\}$ の**部分列** (subsequence) という。

例. $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, すなわち $a_n = n$ のとき, $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ は $\{a_n\}$ の部分列だが, $\{1, 1, 1, 1, \dots\}$ は部分列ではない。

拡張された実数. ここで, 集合 $\overline{\mathbb{R}}$ を実数の全体 $\mathbb{R}$ と $\infty, -\infty$ の形式的な和集合として定める。すなわち,

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}.$$

また, 任意の実数 x に対し大小関係

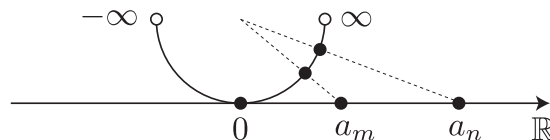
$$-\infty < x \quad \text{かつ} \quad x < \infty$$

(略して $-\infty < x < \infty$) が成り立つものと約束しておく。

$\overline{\mathbb{R}}$ の部分集合 X に対し, $x \in X$ が X の**最大値** (**最小値**) であるとは, 任意の $y \in X$ に対し $y = x$ または $y < x$ ($y > x$) が成り立つことをいう。

例. $X = [0, 1]$ の場合, 最大値は 1, 最小値は 0 である。 $X = \mathbb{R}$ の場合, 最大値と最小値は存在しないが, $X = \overline{\mathbb{R}}$ の場合, 最大値は ∞ , 最小値は $-\infty$ である。

注意. ひと工夫すれば, $\overline{\mathbb{R}}$ も図示することができる。次の図のように数直線の原点の上に半円を置くと, 数直線全体と半円の端点以外が過不足なく対応する (このとき, 数直線上の収束列は半円上の収束点列に見える)。この半円において, 右の端点を ∞ , 左の端点を $-\infty$ と解釈すれば, $\overline{\mathbb{R}}$ とは半円にこの両端の点を加えたものだと考えられる。こうすれば, 「無限大に発散」する数列に対して用いる記号 $a_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) も, さほど違和感がなくなるだろう。



定義 (上極限と下極限) 数列 $\{a_n\}$ に対し,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$$

を満たす部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在するような $A \in \overline{\mathbb{R}}$ からなる集合を S とする。このとき, 集合 $S \subset \overline{\mathbb{R}}$ の最大値を数列 $\{a_n\}$ の**上極限** (superior limit) といい

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{もしくは} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

と表す。また, S の最小値を数列 $\{a_n\}$ の**下極限** (inferior limit) といい

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{もしくは} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

と表す。

実数の連続性の公理を用いると、 S は必ず最大値と最小値を持つことを示すことができる（証明略）。すなわち、次が成り立つ：

命題 1.3 任意の数列 $\{a_n\}$ に対し、上極限と下極限は存在する。

また、次が成り立つ：

定理 1.4 有界な数列 $\{a_n\}$ がある実数に収束するための必要十分条件は、その上極限と下極限が一致することである。

例. $a_n = \frac{1}{n}$ の場合、この数列の部分列で収束させることができる数は 0 だけである。よって $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

例. $a_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ の場合、この数列の部分列で収束させることができる数は 0 と $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ だけである。よって $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

注意. 記号の上では、数列 $\{a_n\}$ に対し

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} a_k \right), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right)$$

をそれぞれ「下極限」「上極限」と定義すればよい（値として $\pm\infty$ も許す）。ここで、 $\inf_{k \geq n} a_k$ は

集合 $\inf \left(\bigcup_{k \geq n} \{a_k\} \right)$ を略記したものである。

講義第 2 回 (12/7)：実数の連続性，単調列，コーシー列

配布日：12/7/2020 Version：1.0

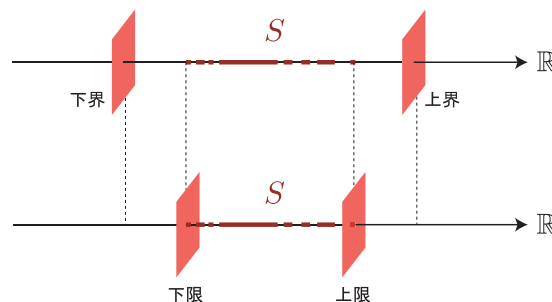
参考書の該当箇所：[川平] 1 章 [三宅] 1.1 と 1.4

追加の参考文献：高木貞治『解析概論』の第 1 章，小平邦彦『解析入門 I, II』(岩波書店) の第 1 章.

上限と下限 (再)

定義 (上に有界・下に有界・上界・下界)

- $\mathbb{R}$ の部分集合 S が**上に有界** (bounded to the above) であるとは，ある実数 M が存在して， S の任意の元 x が $x \leq M$ を満たすことをいう．このような M を S の**上界** (upper bound) とよぶ．
- $\mathbb{R}$ の部分集合 S が**下に有界** (bounded to the below) であるとは，ある実数 M が存在して， S の任意の元 x が $x \geq M$ を満たすことをいう．このような M を S の**下界** (かかい, lower bound) とよぶ．
- S が上にも下にも有界であるとき，単に**有界** (bounded) であるという．



実数の連続性の公理 (ワイエルシュトラスの定理)

$\mathbb{R}$ の部分集合 S が上に (下に) 有界であるとき， S の上界の最小値 (下界の最大値) が存在する．

定義 (上限・下限) $\mathbb{R}$ の部分集合 S が上に有界であるとき， S の上界の最小値を S の**上限** (supremum) とよび，

$$\sup_{x \in S} x \quad \text{もしくは} \quad \sup S$$

と表す．集合 S が下に有界であるとき， S の下界の最大値を S の**下限** (infimum) とよび，

$$\inf_{x \in S} x \quad \text{もしくは} \quad \inf S$$

と表す．また， S が上に有界でないときは $\sup S = \infty$ ，下に有界でないときは $\inf S = -\infty$ と表す．

例 (区間). S が开区間 (a, b) であるとき, $\inf S = a$ かつ $\sup S = b$. S が閉区間 $[a, b]$ であるとき, $\inf S = a$ かつ $\sup S = b$ が成り立つ.

例 (有界でない集合). S が $\mathbb{R}$ 自身, または整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ であるとき, そもそも上にも下にも有界ではなく, 上限も下限も存在しないが, 記号の上で $\inf S = -\infty$, $\sup S = \infty$ と約束する.

一方, $S = \mathbb{N}$ (1 以上の整数全体) であるとき, 下限は $\inf S = 1$, 上限は存在しないが, 記号の上で $\sup S = \infty$ と表す.

上限・下限の特徴づけ. 「上限」の定義はつぎのように必要十分条件 (同値な条件) で置き換えておくと便利である (下限についても同様. 証明は各自の練習問題とするが, まずはその意味を考えて欲しい):

定理 2.1 (上限・下限の特徴づけ) S が上に有界な集合とする. $a \in \mathbb{R}$ が S の上限であることは次の (S1) と (S2) が成り立つことと同値:

(S1) a は S の上界. すなわち, $x \in S$ のとき $x \leq a$.

(S2) 任意の $\epsilon > 0$ に対し, $a - \epsilon < x$ を満たす $x \in S$ が少なくともひとつ存在する.

(2) の ϵ は「任意に小さい正の数」だと解釈してよい. 数直線上を a から少しでも左に移動し $a - \epsilon$ にいくと, その途中で S の元に触れてしまう, ということである.

単調列の収束

数列の収束性の定義を眺めていると, 定義の中に「極限の値 A 」がすでに使われていることに気がつく. したがって, 極限が存在するかどうかかわからない状況では, 定義に当てはめて収束性を判定することはできない. たとえば, まったく予備知識のない状態で

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

といった数列が与えられたとき, 私たちにはまだ, これらが「ある実数に収束する」と言い切れるだけの根拠がないのである¹. 今回はそのあたりの不便を解消していこう.

定義 (単調な数列) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$$

を満たすとき**単調増加** (monotone increasing),

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$$

を満たすとき**真に単調増加** (strictly increasing) であるという. また, 同様に $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ を満たすとき**単調減少** (monotone decreasing) $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ を満たすとき**真に単調減少** (strictly decreasing) であるという.

これらの数列はまとめて**単調** (monotone) な数列もしくは**単調列** (monotone sequence) とよばれる.

¹微分積分学で学ぶように, これらの数列はともに自然対数の底 $e = 2.71828\cdots$ に収束する. しかし, ふつうは e それ自体を $e := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と定義するので, 値を知る前に数列 $\{a_n\}$ の収束性を何らかの方法で証明する必要がある.

定義 (有界な数列) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であるとは、ある実数 M が存在して、すべての n に対し $a_n \leq M$ が成り立つことをいう。すなわち、集合

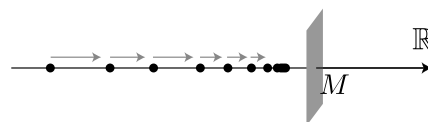
$$S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$$

が上に有界な集合となることをいう。実数の連続性の公理 (ワイエルシュトラスの定理) より、数列 $\{a_n\}$ が定めるこの集合 S には上限が存在する。これを数列 $\{a_n\}$ の**上限**とよび、 $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $\sup_{n \geq 1} a_n$ (もしくは単に $\sup a_n$) などと表す。

下に有界な数列やその**下限** $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $\inf_{n \geq 1} a_n$ (もしくは単に $\inf a_n$) などと同様に定義される。また、上にも下にも有界な数列は**有界な数列** (bounded sequence) とよばれる。

次の定理は、極限を知らない状態で数列の収束性を保証する「十分条件」である：

定理 2.2 (有界単調列は収束) 上に [下に] 有界かつ単調増加 [減少] な数列はある実数に収束する。



証明 (定理 2.2). 集合 $\{a_n\}$ が上に有界であれば、上限 $A = \sup_n a_n$ が存在する (実数の連続性)。このとき、任意に小さい $\epsilon > 0$ に対して、 $A - \epsilon \leq a_N \leq A$ を満たす自然数 N が存在する。(そうでないと、すべての n で $a_n \leq A - \epsilon < A$ となるが、これは A が上限であったことに反する。) このとき

$$A - \epsilon \leq a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \cdots \leq A$$

が成り立つから、すべての $n \geq N$ に対し $|a_n - A| < \epsilon$ 。よって $a_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$)。下に有界かつ単調減少の場合の証明も同様である。(もしくは、 $b_n := -a_n$ とすれば上の場合に帰着される。) ■

例 1 (自然対数の底). 先ほどの $\{a_n\}$ は単調増加かつ上に有界である。(どの微積分の教科書にも書いてある。) よって定理 2.2 より収束する。この極限 $2.71828 \cdots$ を自然対数の底 e と定めるのであった。

$\{b_n\}$ のほうは明らかに単調増加である。また、 $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \geq 2 \cdots 2 \cdot 1 = 2^{n-1}$ より、 $b_n \leq 1 + 1 + 1/2 + \cdots + 1/2^{n-1} < 3$ 。よって上に有界であるから、 $\{b_n\}$ は収束する。(「テイラー展開」を用いると、これが e に収束することが示される。)

コーシー列

定理 2.2 は収束することの十分条件を与えるものであった。次は必要十分条件を考えよう。

数列の収束性の定義に用いた前回の式 (1.1) $|a_n - A| < \epsilon$ は、極限 A の値をあらかじめ知らないとチェックできない。一方、次の「コーシー列」の条件は、数列の値だけでチェックが可能である：

定義 (数列の収束) 数列 $\{a_n\}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$n \geq m \geq N \quad \text{のとき} \quad |a_n - a_m| < \epsilon \quad (2.1)$$

を満たすことをいう。

このとき、次の定理が成り立つ:

定理 2.3 (収束列 $\iff$ コーシー列) 実数の列 $\{a_n\}$ が収束することと、コーシー列であることは同値 (互いに必要十分条件) である.

すなわち、極限を知らなくても、コーシー列であることが確認できれば収束性が保証される.

式 (2.1) の意味. たとえば $\epsilon = \frac{1}{10^M}$ とおくと、 $n \geq m \geq N$ のとき (m と n の大小関係は重要ではない) $|a_n - a_m| < \epsilon = \frac{1}{10^M}$. これは、 a_n と a_m の値が小数点以下 M 桁一致相当の近さをもつことを意味する. すなわち、 $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ は (繰り上がりがおきない限り) 小数点以下 M 桁が一致し続ける. M がどれだけ大きな自然数であっても、そのような N を見つけることができるのだから、数列 $\{a_n\}$ はその小数が定める実数へと収束していると考えるのが道理にかなっている.

参考: 実数の完備性. 有理数からなるコーシー列に関しては、その極限が有理数でないかもしれない. しかし実数からなるコーシー列は、必ず実数の中に極限をもつ. この状況を、「有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は完備でない」、「実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は完備」と表現する.

定理 2.3 の証明 (前半). 「収束列ならばコーシー列であること」の証明は簡単なので先に済ませておこう. ある実数 A が存在し、任意の $\epsilon > 0$ に対し $N \in \mathbb{N}$ が存在し $n \geq N$ のとき $|a_n - A| < \epsilon/2$ が成り立つと仮定する. $n \geq m \geq N$ のとき、三角不等式

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) - (a_m - A)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

が成り立つ. よって $\{a_n\}$ はコーシー列の条件を満たす.

■(前半)

コーシー列の有界性と区間縮小法

「コーシー列ならば収束列であること」を証明するために、いくつか準備をしておこう. まず次の補題が必要である:

補題 2.4 (コーシー列の有界性) コーシー列は有界な数列である. また、 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとき、すべての n に対し集合 $S_n := \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ は有界である.

この補題の証明は各自の練習問題としよう².

次の定理も重要である:

定理 2.5 (区間縮小法) 閉区間の列 $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が次の (I1), (I2) を満たすと仮定する:

(I1) すべての n に対し、 $I_{n+1} \subset I_n$

(I2) $[I_n \text{ の長さ}] = |b_n - a_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

このとき、すべての I_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) に含まれる実数 A がただひとつ存在し、

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ とは $a_n \leq b_n$ を満たす実数 a_n, b_n が定める実数の集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}$ のことをいう. $a_n = b_n$ のとき I_n は 1 点のみからなる集合だが、これも形式的に「閉区間」とみ

² S_n は無限集合とは限らない. たとえば、数列 $1, 1, 1, \dots$ が定める集合は一点からなる集合 $\{1\}$ である.

なす.

注意. 主張を集合の記号で表すと, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = I_1 \cap I_2 \cap \cdots = \{A\}$ (1 点) ということである. ここでは I_n が「閉区間」の列であることが重要で, 「开区間」の場合, 極限の存在はわからない. たとえば, $I_n = (0, 1/n)$ は (I1) を満たし長さも 0 に収束するが, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

証明 (定理 2.5). (I1) より

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

が成り立つ. したがって, 数列 $\{a_n\}$ は上に有界かつ単調増加, 数列 $\{b_n\}$ は下に有界かつ単調減少となることがわかる. 定理 2.2 より, $\{a_n\}$ は $A := \sup_n a_n$ に収束し, $\{b_n\}$ は $B := \inf_n b_n$ に収束する.

$A \neq B$ と仮定しよう. このとき, $\delta := |A - B| > 0$ である. $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ より, ある $N = N(\delta)$ が存在して, $n \geq N$ のとき

$$|a_n - A| < \delta/4 \quad \text{かつ} \quad |b_n - B| < \delta/4$$

が成り立つようにできる. これより $|a_n - b_n| \geq |A - B| - (|a_n - A| + |b_n - B|) > \delta/2$ となるが³, これは (I2) に反する. よって $A = B$ である. とくに $a_n \leq A = B \leq b_n$ が成り立つことから, すべての n について $A \in I_n$ がいえる.

最後にそのような A の一意性を示そう. もし A でない A' がすべての n について $A' \in I_n$ を満たせば, $0 < |A - A'| \leq |b_n - a_n|$ となる. これは (I2) に矛盾する. ■

証明 (定理 2.3) の後半

コーシー列ならば収束であること. 補題 2.4 より, 集合 $S_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) はすべて (上下に) 有界である. 実数の連続性の公理 (ワイエルシュトラスの定理) より, S_n には下限 x_n と上限 y_n が存在する. 一方, S_n の定義より $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$ が成り立つから,

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq y_2 \leq y_1$$

が成り立つ. よって, 区間 $I_n := [x_n, y_n]$ は区間縮小法 (定理 2.5) の仮定 (I1) を満たす. これが (I2) も満たすことを示そう.

$\epsilon > 0$ を任意に小さくとり, 固定しておく. $\{a_n\}$ はコーシー列であるから, ある自然数 N が存在し, $n \geq m \geq N$ のとき $|a_n - a_m| < \epsilon/2$ が成り立つ. このような N に対し, $S_N = \{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots\}$ を考えよう. $y_N = \sup S_N$ であつたから, ある $n' \geq N$ が (少なくともひとつ) 存在し,

$$y_N - \epsilon/4 \leq a_{n'} \leq y_N$$

が成り立つ (定理 2.1). 同様に, $x_N = \inf S_N$ であつたから, ある $m' \geq N$ が (少なくともひとつ) 存在し,

$$x_N \leq a_{m'} \leq x_N + \epsilon/4$$

が成り立つ (定理 2.1). よって

$$\begin{aligned} |y_N - x_N| &= |y_N - a_{n'} + a_{n'} - a_{m'} + a_{m'} - x_N| \\ &\leq |y_N - a_{n'}| + |a_{n'} - a_{m'}| + |x_N - a_{m'}| < \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4 = \epsilon. \end{aligned}$$

区間 I_n の長さ $|y_n - x_n|$ は単調減少だから, $n \geq N$ のとき, $|y_n - x_n| \leq |y_N - x_N| < \epsilon$. ϵ は任意だったので, $|y_n - x_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). よって閉区間 $I_n = [x_n, y_n]$ は区間縮小法 (定理 2.5) の仮定 (I2) を満たす.

定理 2.5 より, すべての n に対し $A \in [x_n, y_n]$ かつ $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を満たす A がただひとつ存在する. いま $a_n \in S_n \subset [x_n, y_n]$ であるから, $|a_n - A| \leq |y_n - x_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). よって $\{a_n\}$ は収束し, 極限 A を持つ. ■

³図を描けばあたりまえの不等式だが, まじめに証明したければ三角不等式 $|A - B| \leq |A - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - B|$ を変形すればよい.

講義第 3 回 (12/11)：一変数関数の極限，連続性，最大値

配布日：12/11/2020 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 3 章 [三宅] 1.1 と 1.4

追加の参考文献：高木貞治『解析概論』の第 1 章，小平邦彦『解析入門 I, II』(岩波書店) の第 1 章.

関数

区間. 変数が動く範囲を指定するときに便利な「区間」という言葉を確認しておこう.**定義 (区間)** $a < b$ を満たす実数 a, b に対し，以下の形の集合を**区間**という：

$$\begin{aligned}
 (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
 [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\
 (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} & (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\
 [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\
 & & (-\infty, \infty) &:= \mathbb{R} \text{ (実数全体)}
 \end{aligned}$$

とくに (a, b) の形の区間を**开区間**とよび， $[a, b]$ の形の区間を**閉区間**とよぶ. また， ∞ のかわりに $+\infty$ と書くこともある.

「関数」について，一連の用語を定義しておこう.

定義 (関数，定義域，値域，etc.) D を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする.

- D の各元 a にひとつの実数 b を対応させたものを D 上の**関数** (function) という.
- f をそのような関数とすると， b を a における関数 f の**値** (value) とよび， $b = f(a)$ と表す.
- D を関数 f の**定義域** (domain) とよぶ.
- 集合 $S \subset D$ に対し，集合

$$f(S) := \{f(a) \in \mathbb{R} \mid a \in S\} = \left\{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in S, b = f(a)\right\}$$

を関数 f による S の**像** (image) という. とくに， $f(D)$ を関数 f の**値域** (range) とよぶ.

- 関数 f の値域 $f(D)$ が集合 $X \subset \mathbb{R}$ に含まれることがわかっているとき，関数 f を $f: D \rightarrow X$ のように表す.

注意. 関数 f を表すのに，しばしば $y = f(x)$ という形が用いられる. この x と y は通常**変数** (variable) とよばれるが，意味としてはそれぞれ定義域と値域の実数を代入しうる「空箱」のようなものである¹. 一般に，関数 f の定義域 D 内のすべての値を自由にとりうる文字として記号 x

¹. 関数解析では関数 f を $f(\cdot)$ のように表現すること多い. この $(\cdot)$ はまさに，定義域内の実数を挿入する「空箱」であることを表現している.

担当教員: 川平 友規

を用いるとき, これを**独立変数** (independent variable) x とよび, その値 $f(x)$ として記号 y を用いるとき, これを**従属変数** (dependent variable) y とよぶ.

例 1. $f(x) = x^2$ を $x \in D := [-1, 2)$ 上に制限して考える. このとき, 値域は $f(D) = [0, 4)$ である. また, この関数の表現として

$$f: [-1, 2) \rightarrow [0, 4), \quad f: [-1, 2) \rightarrow [0, \infty), \quad f: [-1, 2) \rightarrow \mathbb{R},$$

はすべて正しい.

関数の極限

いわゆる ϵ - δ 論法 (ϵ 論法) を用いて関数の極限を厳密に定義しよう.

定義 (関数の極限) I を区間とし, a を区間 I 上の点とする. また, 関数 f を $I - \{a\}$ で定義された関数とする. 「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が実数 A に**収束する** (converge)」とは, 任意の (任意に小さな) $\epsilon > 0$ に対しある $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在し,

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon$$

が成り立つことをいう. これを

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow A$$

もしくは

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

と表し, A を関数 f の $x \rightarrow a$ のときの**極限** (limit) とよぶ.

注意.

- $\delta = \delta(\epsilon)$ というのは, δ が ϵ のとり方に依存することを示唆する記法である².
- $0 < |x - a|$ という条件 (すなわち $x = a$ は考えない) が効力を発揮するのは, たとえば関数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ のような場合である. $x = 0$ のとき $f(0)$ は $\frac{0}{0}$ となり定義できないが, 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は意味をもつ. 微分係数を計算するときに考える極限はいつもこの $\frac{0}{0}$ の形である.
- $0 < |x - a| < \delta$ という条件には 「 $x \in I$ 」 という条件も含まれているが, わざわざ書かないのがならわしである. (そもそも $f(x)$ が意味を持つには $x \in I$ が必要である.) 例えば $I = [a, b]$ ($a < b$) のように, a が区間の端点である場合もありうるが, この場合条件 $0 < |x - a| < \delta$ は 「 $a < x < a + \delta$ であり, しかも $a + \delta \leq b$ となるように δ は十分小さくとる」 のだと解釈する.
- 任意の (任意に大きな) $M > 0$ に対しある $\delta = \delta(M) > 0$ が存在し,

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M \quad [f(x) < -M]$$

が成り立つとき, 「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は ∞ [$-\infty$] に**発散する** (diverge)」という. これを

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \infty \quad [f(x) \rightarrow -\infty]$$

もしくは

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad [\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty]$$

と表す. (「 ∞ [$-\infty$] に収束する」とはいわない, また, ∞ [$-\infty$] のことを「極限」とはいわない.)

²実際には f や a にも依存するので, $\delta = \delta(f, a, \epsilon)$ とすべきかもしれないが, ここでは f や a を固定して考えているのである.

- 条件 $0 < |x - a| < \delta$ を

$$0 < x - a < \delta \quad \text{すなわち} \quad a < x < a + \delta$$

に変えたとき, これを

$$x \rightarrow a + 0 \text{ のとき } f(x) \rightarrow A$$

もしくは

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$$

と表し, A を関数 f の a における**右極限** (right-hand limit) とよぶ.

- 同様に, 条件 $0 < |x - a| < \delta$ を

$$-\delta < x - a < 0 \quad \text{すなわち} \quad a - \delta < x < a$$

に変えたとき, これを

$$x \rightarrow a - 0 \text{ のとき } f(x) \rightarrow A$$

もしくは

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$$

と表し, A を関数 f の a における**左極限** (left-hand limit) とよぶ.

- 右極限と左極限を合わせて**片側極限** (one-sided limit) とよぶ. また, $x \rightarrow a + 0$ と $x \rightarrow a - 0$ はそれぞれ $x \searrow a$ と $x \nearrow a$ もしくは $x \downarrow a$ と $x \uparrow a$ と表されることも多い.
- $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ といった記号も同様に定義される.

極限の性質. 数列と同様にして, つぎの公式が示される:

公式 3.1 (極限の四則・はさみうちの原理) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ (ただし A, B は実数, $\pm\infty$ ではない) のとき, 次が成り立つ:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = A + B.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB.$$

$$(3) B \neq 0 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

$$(4) f(x) < g(x) \text{ であれば, } A \leq B.$$

$$(5) A = B \text{ かつ } f(x) < h(x) < g(x) \text{ のとき,}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A. \quad (\text{はさみうちの原理})$$

(4) と (5) の不等号 $<$ はいずれも $\leq$ に変えてもよい. さらに, 同様の公式は片側極限についても正しい.

関数の連続性

ϵ - δ 論法を用いると, 関数の連続性は次のように表現される:

定義 (連続性) I を区間とし, a を区間 I 上の点とする. また, 関数 f を I 上で定義された関数とする. (これを $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ と表すのであった.)

関数 f が $x = a$ で**連続** (continuous) であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

であることをいう. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在し,

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

が成り立つことをいう. f が I 上のすべての点で連続であるとき, **関数 f は I 上で連続**である, もしくは **f は I 上の連続関数**であるという.

注意. 公式 3.1 より, 連続関数の和 (差), 積, 商, 合成はいずれも定義可能な範囲で連続となることがわかる.

数列による言い替え. 関数の連続性を数列の言葉に置き換えておくと便利である;

命題 3.2 (数列による連続性の定義) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で連続であることは, 次と同値: 「 a に収束する I 内の任意の数列 $\{a_n\}_n$ に対し, 数列 $\{f(a_n)\}_n$ は $f(a)$ に収束する。」すなわち,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(a) \quad : \text{「像の極限は極限の像」}$$

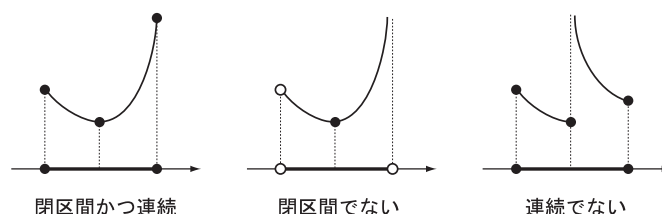
証明. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で連続であると仮定する. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある δ が存在し, $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. いま数列 $\{a_n\}_n$ が a に収束するとき, ある自然数 N が存在し, $n \geq N$ のとき $|a_n - a| < \delta$ が成り立つ. したがって, $|f(a_n) - f(a)| < \epsilon$. ゆえに $\{f(a_n)\}_n$ は $f(a)$ に収束する.

逆を示したいが, 対偶をもちいる. いま, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で連続で「ない」と仮定しよう. このとき, ある $\epsilon > 0$ が存在し, 任意の $\delta > 0$ に対してある $|x - a| < \delta$ を満たす $x \in I$ が存在し, $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$ を満たす³. したがって, 各自然数 n に対して $\delta_n = 1/n$ とおくと, $|a_n - a| < \delta_n = 1/n$ を満たす $a_n \in I$ が存在し, $|f(a_n) - f(a)| \geq \epsilon$ を満たす. これは「 a に収束する I 内の数列 $\{a_n\}_n$ で, 数列 $\{f(a_n)\}_n$ が $f(a)$ に収束しないもの」が存在することを示している. ■

最大値・最小値の存在定理

次の定理も応用上極めて重要である:

定理 3.3 (最大値・最小値の存在定理) 閉区間上の連続関数はその区間で最大値と最小値をもつ.



³なぜか?

注意.

- 定理は、「連続関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、ある α, β が $[a, b]$ に存在し、 $a \leq x \leq b$ のとき $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ 」ということ.
- 「閉区間」であること、「連続」であることは必須である (上の図).

証明 (定理 3.3). 連続関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、最大値の存在を示そう. (最小値の存在も同様に示される.) 区間 $[a, b]$ を 2^n 等分 ($n = 0, 1, 2, \dots$) して得られる区間の端点の集合を X_n で表す. たとえば $n = 2$ のとき, $X_2 = \{a, (3a+b)/4, (a+b)/2, (a+3b)/4, b\}$ である. $X_n \subset X_{n+1}$ であるから, $M_n = \max\{f(x) \mid x \in X_n\}$ は $M_n \leq M_{n+1}$ を満たす.

各 n に対し, $f(x_n) = M_n$ となる $x_n \in X_n$ を選んでいくと, 区間 $[a, b]$ に散らばる数列 $\{x_n\}$ が得られる. この $\{x_n\}$ は有界な数列であるから, 収束する部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k \geq 0}$ をとることができる. たとえば, 区間 $[a, b]$ を 2 等分し, 数列 x_n の元を無限個含む (n が違うと違う点とみなす) ほうを 1 つ選んで $I_1 = [a_1, b_1]$ とする. 次に, I_1 を 2 等分し, 数列 x_n の元を無限個含むほうを 1 つ選んで $I_2 = [a_2, b_2]$ とする. この操作を繰り返せば, 区間縮小法の原理により $\lim a_n = \lim b_n = \beta$ となる $\beta \in [a, b]$ が存在する. 添字の列 $n(1) < n(2) < \dots$ を $x_{n(k)} \in I_k$ となるようにとれば, (はさみうちの原理より) $x_{n(k)} \rightarrow \beta$ ($k \rightarrow \infty$) となるような部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k \geq 0}$ が構成できる. そこで, $M := f(\beta)$ とおき, この M が最大値であることを確認しよう.

関数 f は連続なので $k \rightarrow \infty$ のとき $M_{n(k)} = f(x_{n(k)}) \rightarrow f(\beta) = M$ でなくてはならないが, $M_{n(0)} \leq M_{n(1)} \leq M_{n(2)} \leq \dots$ より $M_{n(k)} \leq M$ がすべての k に対して成り立つ⁴. もし $f(y) > M$ となる $y \in [a, b]$ が存在すると, f の連続性より, 十分大きな $n(k)$ について, $f(y_{n(k)}) > M$ を満たす $y_{n(k)} \in X_{n(k)}$ が y の近くに存在する. これは $f(y_{n(k)}) \leq M_{n(k)} \leq M$ に矛盾する. よって $f(\beta) = M$ は関数 f の最大値である. ■

中間値の定理

連続関数のグラフが「つながっている」ことの根拠とされるのが, 次の「中間値の定理」である:

定理 3.4 (中間値の定理) 閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $y = f(x)$ が $f(a) \neq f(b)$ を満たすとき, $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の実数 ℓ に対し, $f(c) = \ell$ を満たす c が区間 (a, b) に少なくともひとつ存在する.

下線部に関する注意. この定理では, 「実数の連続性」と関数が「連続関数」であることが重要な役割を果たす. 以下の議論のどこでそれらの性質が効いているのか, 意識しておこう.

「中間値の定理」の証明を与えるまえに, 唐突だが「方程式の数値解法」について考える. («中間値の定理」は「方程式 $f(x) = \ell$ の解 $c \in (a, b)$ が存在する」と主張しているのだから, 決して無関係ではない.) 与えられた関数 $y = f(x)$ について方程式 $f(x) = 0$ の解を任意の精度で求める, そのような数値計算でもっとも初歩的な方法が, **二分法**とよばれる次のアルゴリズムである:

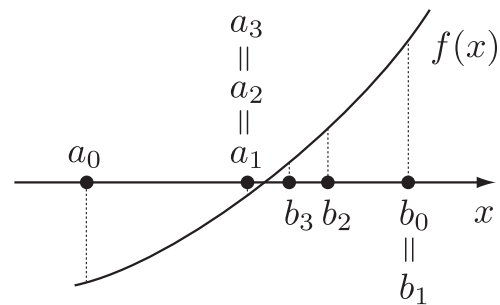
二分法. 連続関数 $y = f(x)$ に対し, 方程式 $f(x) = 0$ の解 α を数値的に求める次のアルゴリズム (手順) を, **二分法**とよぶ:

二分法のアルゴリズム. $y = f(x)$ を連続関数とする.

- (1) $f(a_0) < 0, f(b_0) > 0$ となるペア (a_0, b_0) を見つける. 必要であれば $f(x)$ のかわりに $-f(x)$ を考えることで, $a_0 < b_0$ と仮定してよい.
- (2) $n \geq 0$ に対し $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0, a_n < b_n$ となるペア (a_n, b_n) が与えられているとき, その中点を $m_n := \frac{a_n + b_n}{2}$ とおく.
- (3) $f(m_n)$ の値を計算し,

⁴ $M_{n(k)} > M$ となる k が存在すると矛盾である. なぜか?

- $f(m_n) < 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (m_n, b_n)$ とおいて (2) に戻る.
- $f(m_n) > 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (a_n, m_n)$ とおいて (2) に戻る.
- $f(m_n) = 0$ ならば $\alpha := m_n$, 計算終了.



二分法は解の存在まで保証するアルゴリズムである：

定理 3.5 (二分法の収束性) 二分法に関して、次のいずれかが成り立つ：

- (a) ある自然数 n に対し $f(m_n) = 0$ となる．よって $\alpha := m_n$ は解のひとつ．
- (b) すべての自然数 n で $f(m_n) \neq 0$ となるが、数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のときそれぞれ同じ極限 α に収束し、 $f(\alpha) = 0$ を満たす．

いずれの場合も、次のような誤差の評価式が成り立つ．

$$\max\{|a_n - \alpha|, |b_n - \alpha|\} \leq \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}.$$

したがって、十分大きな n に対し a_n もしくは b_n を α の近似値として用いることができる．

証明. (a) でなければ、すべての自然数 n で $f(m_n) \neq 0$ である．このときアルゴリズムの (2) と (3) を繰り返すと、 $I_n := [a_n, b_n]$ は $I_{n+1} \subsetneq I_n$ かつ I_n の長さは $|b_0 - a_0|/2^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) である．よって区間縮小法 (定理 2.5) より、すべての n に対し $\alpha \in I_n$ かつ $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を満たす α がただひとつ存在する．

関数 $f(x)$ は連続かつ $f(a_n) < 0$ より、 $f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$. (公式 3.1(4)). 同様に $f(b_n) > 0$ より、 $f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$. よって $f(\alpha) = 0$. また、(a), (b) によらず $a_n \leq \alpha \leq b_n$ であるから、

$$\max\{|a_n - \alpha|, |b_n - \alpha|\} \leq |b_n - a_n| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}.$$

■

例 2 ($\sqrt{2}$ の計算)．連続関数 $f(x) = x^2 - 2$ に対し、 $(a_0, b_0) = (1.0, 2.0)$ として二分法のアルゴリズムに従って計算したのが次の表である⁵．

n	a_n	b_n	n	a_n	b_n	n	a_n	b_n
0	1.00000	2.00000	7	1.41406	1.42188	14	1.41418	1.41425
1	1.00000	1.50000	8	1.41406	1.41797	15	1.41418	1.41422
2	1.25000	1.50000	9	1.41406	1.41602	16	1.41420	1.41422
3	1.37500	1.50000	10	1.41406	1.41504	17	1.41421	1.41422
4	1.37500	1.43750	11	1.41406	1.41455	18	1.41421	1.41422
5	1.40625	1.43750	12	1.41406	1.41431	19	1.41421	1.41422
6	1.40625	1.42188	13	1.41418	1.41431	20	1.41421	1.41421

定理 3.5 より、数列 a_n, b_n は $\alpha^2 - 2 = 0$ を満たす正の実数 α に収束する．すなわち、 $\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$ の近似値を与える．また、その誤差は $|b_0 - a_0|/2^n = 1/2^n$ 以下である⁶．

⁵ここに現れる (a_n, b_n) はすべて $k/2^n$ の形の有理数であるが、表の中では収束の様子が分かりやすいように小数で表現している．

⁶厳密にいうと、定理 3.4 や定理 3.5 からわかるのは「 $\alpha^2 = 2$ を満たす α が区間 $[1, 2]$ 内に少なくともひとつ存在する」ということだけである．この α が本当に、私たちが $\sqrt{2}$ とよぶ唯一の数であることを示すには、別の根拠（たとえば関数の単調性、 $0 \leq x_1 < x_2$ のとき $x_1^2 < x_2^2$ であること）が必要である．

方程式の数値解法としての二分法は収束も遅く有用ではないが、「中間値の定理」の実質的な証明を与えてくれる。

中間値の定理 (定理 3.4) の証明. $f(x)$ は連続なので, $F(x) = f(x) - \ell$ も連続関数である. これに $a = a_0$, $b = b_0$ として二分法のアルゴリズムを適用すると, 定理 3.5 より $F(c) = 0$ を満たす c が区間 (a, b) に見つかる. よって $f(c) = \ell$. ■

講義第 4 回 (12/14): ロルの定理, 平均値の定理, ロピタルの定理

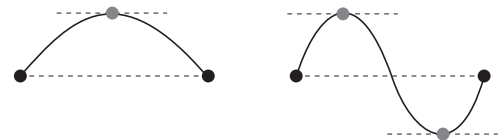
配布日: 12/14/2020 Version: 1.0

参考書の該当箇所: [川平] 7 章 [三宅] 2.2

ロルの定理と平均値の定理

定理 3.3 (閉区間における最大・最小値の存在) の主張によれば, 「閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $y = f(x)$ は, 最大値と最小値を持つ」のであった.

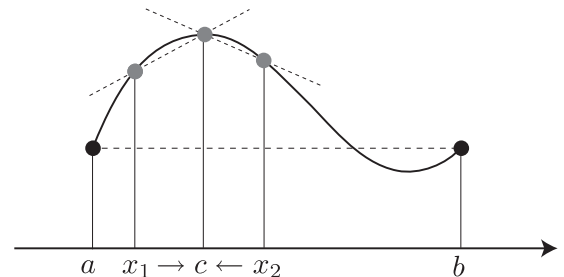
いま $f(a) = f(b)$ を仮定しよう. さらに开区間 (a, b) 上で微分可能であれば, 最大値もしくは最小値を実現する点では微分係数が 0 になるであろう (右図). すなわち, 次が成り立つ:



定理 4.1 (ロルの定理) 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $y = f(x)$ は, (a, b) 上で微分可能であり, $f(a) = f(b)$ を満たすとする. このとき, $f'(c) = 0$ となる c が区間 (a, b) に (少なくともひとつ) 存在する.

証明.

$f(x)$ が定数関数のとき定理は明らかなので, $f(x)$ は定数関数でないと仮定する. 関数 $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上で連続なので最大値 M と最小値 m を持つ (定理 3.3) が, 定数関数ではないので $m < M$ を満たしている. このとき, $m \leq f(a) = f(b) < M$ もしくは $m < f(a) = f(b) \leq M$ のうち, 少なくとも一方が成り立つ.



$m \leq f(a) = f(b) < M$ のとき, 最大値 $f(c) = M$ を実現する c が区間 (a, b) に存在する. いま $x_1 \rightarrow c - 0$ かつ $x_2 \rightarrow c + 0$ のとき, $f(x_1) \leq f(c)$ かつ $f(c) \geq f(x_2)$ より

$$f'(c) = \lim_{x_1 \rightarrow c} \frac{f(x_1) - f(c)}{x_1 - c} \geq 0 \quad \text{かつ} \quad f'(c) = \lim_{x_2 \rightarrow c} \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c} \leq 0$$

が成り立つ. よって $f'(c) = 0$. $m < f(a) = f(b) \leq M$ の場合は最小値 $f(c) = m$ を実現する c が区間 (a, b) に存在するので, 同様の議論で $f'(c) = 0$ がわかる. ■

平均値の定理. ロルの定理 (定理 4.1) から, 次の「平均値の定理」がただちに導かれる:

定理 4.2 (平均値の定理) 関数 $y = f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で連続, (a, b) 上で微分可能とする. このとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad (4.1)$$

すなわち

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (4.2)$$

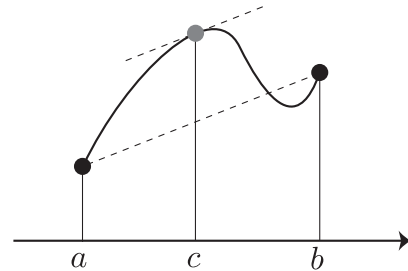
を満たす c が区間 (a, b) に (少なくともひとつ) 存在する.

式 (4.1) の図形的な意味は, 「点 $(a, f(a))$ と点 $(b, f(b))$ を結ぶ線分と平行な接線をもつ点 $(c, f(c))$ が $y = f(x)$ のグラフ上に存在する」ということである. (式 (4.1) の左辺は a から b までの平均変化率とよばれる量であった.) とくに, $f(a) = f(b)$ のときはロルの定理そのものである. また, 式 (4.2) は次章で学ぶテイラー展開の特別な場合になっていて, 応用上もこの形で用いられることが多い.

証明. 点 $(a, f(a))$ と点 $(b, f(b))$ を結ぶ線分 ℓ の傾きを $A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ とおき, 関数 $F(x)$ を

$$F(x) := f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}$$

と定める (中括弧内は線分 ℓ の方程式である.) このとき $F(x)$ はロルの定理 (定理 4.1) の仮定をすべて満たすから, $F'(c) = 0$ を満たす c が区間 (a, b) に存在する. $F'(x) = f'(x) - A$ より, $f'(c) = A$. ■



関数の増減への応用

高校で学んだように, 微分係数の正負を確認することで関数の増減や極大・極小が判定できるのであった. ロルの定理 (定理 4.1) と平均値の定理 (定理 4.2) の応用として, その根拠を厳密な形で与えよう.

極大と極小. まずは「極大値」と「極小値」について, その定義を確認する:

定義 (極大と極小) $x = c$ の十分近くで「 $x \neq c$ ならば $f(x) < f(c)$ [$f(x) > f(c)$]」が成り立つとき, $f(x)$ は $x = c$ で**極大** [極小] であるといい, $f(c)$ を**極大値** [極小値] とよぶ. 極大値と極小値をあわせて**極値**とよぶ.

極値をとる点では, グラフの接線の傾きが 0 となるのであった. ロルの定理 (定理 4.1) のアイディアで, それを証明してみよう.

命題 4.3 (極値なら微分が 0) 微分可能な関数 $f(x)$ が $x = c$ で極値をとるならば, $f'(c) = 0$.

注意. $f'(c) = 0$ であっても, 極値とならない場合がある. たとえば定数関数, $f(x) = x^3$ の $x = 0$ など.

証明. まず $x = c$ で極大, すなわち $x = c$ を含む十分小さな区間上で $x \neq c$ のとき $f(x) < f(c)$ と仮定する. ロルの定理の証明と同様に左右からの平均変化率の極限をとることで $f'(c) \geq 0$ かつ $f'(c) \leq 0$ を得る. よって $f'(c) = 0$. $x = c$ で極小の場合も同様. (もしくは, $-f(x)$ を考えれば極大の場合に帰着される.) ■

関数の増減. グラフを描くときに重宝する次の定理は, 平均値の定理 (定理 4.2) を用いて証明される:

定理 4.4 (微分係数と増減) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上で連続であり, 开区間 (a, b) 上で微分可能とする. このとき, 以下が成り立つ:

- (1) 区間 (a, b) 上で $f'(x) > 0$ ならば, $f(x)$ は $[a, b]$ 上で真に単調増加.
- (2) 区間 (a, b) 上で $f'(x) < 0$ ならば, $f(x)$ は $[a, b]$ 上で真に単調減少.
- (3) 区間 (a, b) 上で $f'(x) = 0$ (一定) ならば, $f(x)$ は $[a, b]$ 上で定数関数.

証明. まず $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ を満たす x_1 と x_2 を任意に選び, 関数 $y = f(x)$ を閉区間 $[x_1, x_2]$ に制限する. これに平均値の定理 (定理 4.2) を適用しよう. すなわちある c が区間 (x_1, x_2) に存在して, 式 (4.2)

より

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

を満たす. $x_2 - x_1 > 0$ より, 左辺の符号は $f'(c)$ の符号で決まる. たとえば $f'(c) > 0$ であれば $f(x_2) > f(x_1)$ となり, $f'(c) < 0$ であれば $f(x_2) < f(x_1)$, $f'(c) = 0$ であれば $f(x_1) = f(x_2)$ となる. x_1, x_2 は自由に選べるので定理を得る. ■

応用. 定理 4.4 の応用として, 不等式をひとつ証明してみよう.

例題 4.1 (不等式への応用) $x > 0$ のとき $x > \log(1+x)$ を示せ.

解答. $f(x) = x - \log(1+x)$ とおくと, $f(x)$ は $x > -1$ のとき連続. さらに $x > 0$ のとき $f'(x) = 1 - 1/(1+x) > 0$ であり, $f(x)$ は真に単調増加. すなわち $f(x) > f(0) = 0$. これは $x > \log(1+x)$ を意味する. ■

ロピタルの定理

不定形の極限. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ のとき, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ の値は存在するだろうか? このような極限は $\frac{0}{0}$ 型の**不定形の極限**とよばれ, さまざまなパターンがありうる. たとえば,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sin x}{x^2} = \pm \infty,$$

といった具合である. こうした不定形の極限を計算する「技術」として有名なのが, 次の「ロピタルの定理」である.

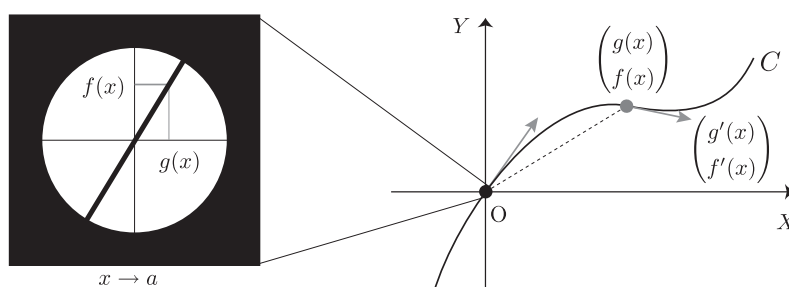
定理 4.5 (ロピタルの定理) $x = a$ の近くで定義された関数 $f(x)$ と $g(x)$ は微分可能であり, $g'(x) \neq 0$ を満たすとする. さらに,

(a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$; かつ

(b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する

ならば, 極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が存在して $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

説明. ロピタルの定理の意味を直観的に説明してみよう.



まず x をパラメーターとする平面ベクトル $(X, Y) = (g(x), f(x))$ が定める曲線 C を考える. 条件 (a) から, $x = a$ のとき曲線 C は原点まで連続に伸びる. また $\left(\frac{dX}{dx}, \frac{dY}{dx}\right) = (g'(x), f'(x))$ は速度ベクトルを与えるが, 条件 (b) はその速度ベクトルの「傾き」が $x = a$ で一定の値に近づくことを意味するから, 曲線 C は原点で接線を持つ. したがってベクトル $(g(x), f(x))$ とそこでの速度ベクトル $(g'(x), f'(x))$ は $x \rightarrow a$ のとき限りなく平行に近づき, X 座標と Y 座標の比は極限で一致する. これが定理の主張である.

厳密な証明はあとにして, 応用例を見ていこう.

例題 4.2 (ロピタルの定理の応用) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x} = 2$ を示せ.

解答. $f(x) = e^{2x} - \cos x$, $g(x) = x$ とおくと, $x \rightarrow 0$ のとき $f(x) \rightarrow 0$ かつ $g(x) \rightarrow 0$, $g'(x) = 1 \neq 0$. さらに

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2e^{2x} + \sin x}{1} \rightarrow 2 \quad (x \rightarrow 0)$$

であるから, ロピタルの定理 (定理 4.5) の条件 (a), (b) を満たす. よって $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2$. ■

バリエーション. ロピタルの定理 (定理 4.5) は条件 (a) のかわりに

$$(a)' \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

を用いても正しい. ただし, 複号は自由に選んで, いずれかが成り立てばよい. (これは $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形とよばれる.) さらに, 定理中の $\lim_{x \rightarrow a}$ を

$$\lim_{x \rightarrow \infty}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty}, \quad \lim_{x \rightarrow a+0}, \quad \lim_{x \rightarrow a-0}$$

のいずれかにひとつに, まとめて置き換えてもよい.

例題 4.3 (ロピタルの定理の応用 2) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$ を示せ.

解答. $y = x^x$ とおき対数をとると, $\log y = x \log x = \frac{\log x}{1/x}$. $f(x) = \log x$, $g(x) = 1/x$ とおくと, $x \rightarrow +0$ のとき $f(x) \rightarrow -\infty$ かつ $g(x) \rightarrow +\infty$. さらに $x \rightarrow +0$ のとき

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1/x}{-1/x^2} = -x \rightarrow 0$$

であるから, ロピタルの定理の「バリエーション」に関して条件 (a)', (b) を満たす. よって $\lim_{x \rightarrow +0} \log y =$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0. \quad \text{すなわち } y = x^x \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +0).$$

■

ロピタルの定理 (定理 4.5) の証明. まず, 次の定理を証明する:

定理 4.6 (コーシーの平均値定理) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続かつ区間 (a, b) で微分可能とする. さらに $g(a) \neq g(b)$ かつ (a, b) 上で $g'(x) \neq 0$ が成り立てば,

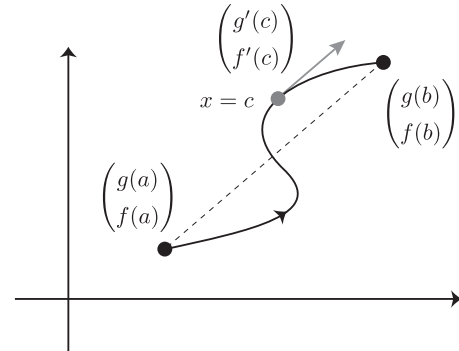
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (4.3)$$

を満たす c が区間 (a, b) 内に (少なくともひとつ) 存在する.

図形的な意味は、「曲線 $C: (g(x), f(x))$ ($a \leq x \leq b$) を考えたとき、点 $(g(a), f(a))$ と点 $(g(b), f(b))$ を結ぶ線分と平行な接線をもつ点 $(g(c), f(c))$ が曲線 C 上に存在する」ということである。

証明 (定理 4.6). $B = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ とおけば、関数 $F(x) := \{f(x) - f(a)\} - B\{g(x) - g(a)\}$ はロルの定理 (定理 4.1) の条件を満たす。よって $F'(c) = 0$ を満たす c が区間 (a, b) 内に存在する。 $F'(x) = f'(x) - Bg'(x)$ より、 $0 = f'(c) - Bg'(c)$. $g'(c) \neq 0$ より求める等式を得る。 ■

注意. $f(x)$ と $g(x)$ それぞれに平均値の定理 (定理 4.2) を適用して商をとっても、式 (4.3) にはならない。 c の値が分子と分母で違ってしまふからである。



証明 (ロピタルの定理, 定理 4.5). いま $f(a) = g(a) = 0$ とおけば、関数 $f(x)$ も $g(x)$ も $x = a$ において連続と仮定してよい。また、極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するという仮定から、 $x = a$ の十分近くでは $g'(x) \neq 0$ とならない。このことから、 a に十分近い x についてコーシーの平均値定理 (定理 4.6) が適用できて、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が x と a の間に存在する。 $x \rightarrow a$ のとき $c \rightarrow a$ であるから、上の式の極限をとれば定理の式を得る。 ■

ロピタルの定理に関する警告

$f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x$ に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ を計算したいとしよう。ロピタルの定理を適用すると、
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ となってしまう極限が存在しないが、すなわち

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

とやれば計算ができる。

別の例。 $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1 + x$ に対して $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ を計算したいとしよう。ロピタルの定理を適用すると、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$ だが、すなわち計算すると

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1 + x} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

このふたつの例について、どこがおかしいか気がつかないようであれば、ロピタルの定理は使わないほうがよい。変数変換やテイラー展開によって、多くの極限は問題なく求められるからである。

講義第5回 (12/18)：テイラー展開

配布日：12/18/2020 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 8-9 章 [三宅] 2.3-2.4.

 n 階導関数と C^n 級関数関数 $y = f(x)$ を繰り返し微分して得られる関数（高階導関数ともよばれる）を考えよう.**定義 (n 階導関数)** 関数 $y = f(x)$ に対し，漸化式

$$f^{(0)}(x) := f(x), \quad f^{(n+1)}(x) := (f^{(n)}(x))'$$

によって得られる関数 $f^{(n)}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は $f(x)$ の n 階導関数（もしくは n 回微分）とよばれ，

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad D^n f(x)$$

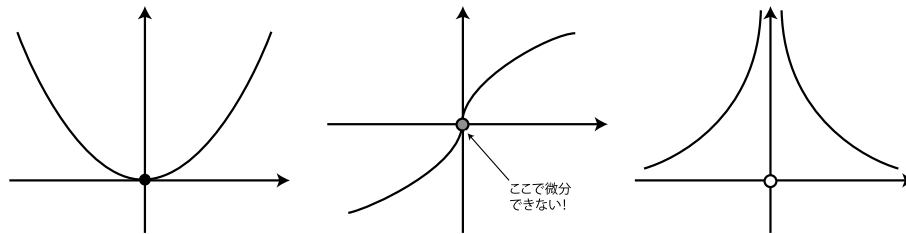
のようにも表される．また， $f^{(2)}(x), f^{(3)}(x)$ はそれぞれ $f''(x), f'''(x)$ のようにも表す．ただし，関数にいつでも $f^{(n)}(x)$ ($n \geq 1$) が存在するとは限らない（下の例 2 を参照）．**関数の等級.** 数学では，「滑らかさ」に応じて関数に等級をつけるのがならわしである．大雑把に言って，「滑らかさ」は微分できる回数によって決まる．ただの連続関数（それはガタガタしているかもしれない）を最低の「滑らかさ」と考えて，「 C^0 級関数」とよぶ．さらに微分ができる回数をともに

$$C^0 \text{級} < C^1 \text{級} < C^2 \text{級} < \dots < C^\infty \text{級}$$

となるように等級を定めるのである：

定義 (n 回微分可能性) 関数 $f(x)$ に $f^{(n)}(x)$ が存在するとき， $f(x)$ は n 回微分可能であるという．さらにその $f^{(n)}(x)$ が連続であるとき， $f(x)$ は C^n 級であるという．すべての自然数 n に対し $f(x)$ が n 回微分可能であるとき， $f(x)$ は滑らかもしくは C^∞ 級とよばれる．**注意.** C^n 級関数は n 回連続微分可能な関数ともよばれる¹．**注意 (閉区間上の C^1 関数).** あとで積分を考えると，「閉区間 $[a, b]$ 上の C^1 級関数 $f(x)$ 」を扱うことが多い．開区間 (a, b) 上の点 x_0 での導関数の値（微分係数）は $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ を用いて定義し，さらに区間の端点での導関数の値（片側微分係数とよばれる）を次で定義する：たとえば $f'(a)$ は， $A = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が成り立つような定数 A として定義する． $f'(b)$ も $x \rightarrow b-0$ を考えればよい．こうして閉区間 $[a, b]$ 上で定義された導関数 $f'(x)$ が端点まで含めて連続であるとき， $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で C^1 級というのである．**例 1.** $y = x^k$, $y = e^x$, $\sin x$, $\log x$ などは滑らか (C^∞ 級)．滑らかな関数の和・差・積・商および合成は，定義可能な範囲で滑らかである．¹ 「 n 回連続微分可能」は「 n 回連続で微分できる」という意味ではなく，「 n 回微分できて，結果が連続」ということなので注意しよう．

例 2. $y = |x|^{3/2}$ は 1 回連続微分可能 (C^1 級) だが, 2 回微分可能ではない. (ただし, $x = 0$ を除けば滑らか.) 下の図は $y = |x|^{3/2}$, y' , y'' ($x \neq 0$) の概形を描いたものである.



ライプニッツの公式. 関数の積の高階導関数について, 次の公式が知られている:

$$\text{公式 5.1 (ライプニッツの公式)} \quad \{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_nC_k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

証明は数学的帰納法による (略).

テイラー展開

実数の小数展開を思い出そう. たとえば $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ は, 級数

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots$$

にほかならない. これを有限項で打ち切ること, $\sqrt{2} \approx 1.41$ といった近似値が得られるのである. 同じことを関数でやってみよう. たとえば $f(x) = x^3$ を

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 \quad (5.1)$$

のように変形してから, さらに $x = 1.1 = 1 + 1/10$ を代入すると,

$$(1.1)^3 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} = 1.331$$

と楽に計算できる. 同様に $x = 1.02$ とおくと,

$$\begin{aligned} (1.02)^3 &= 1 + 3 \times 0.02 + 3 \times (0.02)^2 + (0.02)^3 \\ &= 1 + 0.06 + 0.0012 + 0.000008 \\ &= 1.061208 \end{aligned}$$

を得るが, 実用上は必要な精度にあわせて計算を打ち切って, 「1 次近似」1.06, 「2 次近似」1.0612, 「3 次近似」1.061208 のいずれかを選ぶのが効率的だろう.

一般の関数を計算するときにも, 同様の多項式展開ができれば単純な四則だけで満足のいく近似値が得られると期待される. その期待に応えてくれるのが, 次の「テイラー展開」である:

定理 5.2 (テイラー展開) 関数 $y = f(x)$ は開区間 I 上で n 回微分可能とする. $a \in I$ を固定するとき, すべての $x \in I$ に対して

$$\left. \begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \quad (ii)$$

を満たす c が a と x の間に存在する.

定義 (テイラー展開・マクローリン展開) 上の式を $f(x)$ の $x = a$ における (n) 次 **テイラー展開** とよぶ. とくに $a = 0$ のとき, (n) 次 **マクローリン展開** とよばれる. また, (i) の部分を $(n-1)$ 次**テイラー多項式**, (ii) の部分を**剰余項**とよぶ.

テイラー展開の剰余項を「誤差項」として無視することで, 関数の多項式近似が得られるわけである. この定理の証明は章末に与える.

注意. テイラー展開について, いくつか注意事項をまとめておこう.

- **c の表現:** c は x に依存して決まる「正体不明の数」である. $a \neq x$ の場合, 大小関係として $a < c < x$ の場合と $x < c < a$ の場合が考えられる. いずれの場合も c は a と x の内分点なので, ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$c = (1-\theta)a + \theta x \iff c = a + \theta(x-a)$$

と表される (θ はやはり正体不明). $a = x$ の場合, c は何でもよい.

- **最良の多項式近似:** $f(x)$ の $(n-1)$ 次テイラー多項式を $F(x)$ とおくと, これは

$$f(a) = F(a), f'(a) = F'(a), \dots, f^{(n-1)}(a) = F^{(n-1)}(a)$$

を満たす「唯一の」 $(n-1)$ 次多項式である. この意味で, テイラー多項式は $(n-1)$ 次以下の多項式の中で関数 $f(x)$ のもっとも良い近似だといえる. たとえば, 「1 次テイラー多項式」は接線の方程式にほかならない.

- **平均値の定理との関係:** $n = 1$ のときテイラー展開は平均値の定理になっている. 実際, $x = b$ とすればテイラー展開は

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \iff f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

例 3 (多項式のテイラー展開). $f(x) = x^3$ の例を再び見てみよう. $I = \mathbb{R}$, $a = 1$ として n 次のテイラー展開を計算する. 高階導関数を計算すると

$$f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6, f^{(k)}(x) = 0 \quad (k \geq 4)$$

となる. したがって, たとえば $n = 2$ のとき, ある c が x と 1 の間に存在して

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2 \\ &\iff x^3 = 1 + 3(x-1) + 3c(x-1)^2. \end{aligned}$$

担当教員: 川平 友規

この右辺は「接線の方程式」 $1 + 3(x-1)$ と「誤差」 $3c(x-1)^2$ を足し合わせた形になっている.
 $n=3$ のときも, ある c' (一般に c と異なる) が x と 1 の間に存在して

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(c')}{3!}(x-1)^3$$

$$\iff x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

$f'''(x) = 6$ (定数) なので, 剰余項に c' の値は残らず, 結果として式 (5.1) と同じ式が得られた.
 $n \geq 4$ のときのテイラー展開も同じ式である.

例 4 (指数関数の展開) もっとも重要なテイラー展開を紹介しよう. $f(x) = e^x$, $I = \mathbb{R}$, $a = 0$ として, n 次のテイラー展開をする. (この場合 $a = 0$ なので, 習慣的に「マクローリン展開」とよばれる.) 指数関数の場合, n によらず $f^{(n)}(x) = e^x$ であるから, ある c が x と 0 の間に存在して

$$e^x = e^0 + e^0(x-0) + \frac{e^0}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{e^0}{(n-1)!}(x-0)^{n-1} + \frac{e^c}{n!}(x-0)^n$$

となる. これを整理して, 次の公式を得る:

公式 5.3 (指数関数のマクローリン展開) すべての実数 x に対し,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n \quad (5.2)$$

を満たす c が 0 と x の間に存在する.

例 5 (三角関数の展開) 三角関数についても, 高階微分のもつ周期性

$$\sin x \xrightarrow{\text{微分}} \cos x \xrightarrow{\text{微分}} -\sin x \xrightarrow{\text{微分}} -\cos x \xrightarrow{\text{微分}} \sin x$$

を用いてマクローリン展開が計算できる:

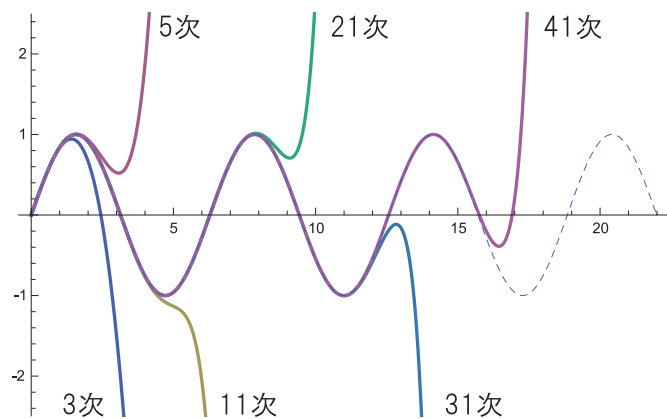
公式 5.4 (三角関数のマクローリン展開) すべての実数 x に対し,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \frac{(-1)^{m+1} \sin c_1}{(2m+2)!}x^{2m+2} \quad (5.3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \frac{(-1)^{m+1} \sin c_2}{(2m+1)!}x^{2m+1} \quad (5.4)$$

を満たす c_1, c_2 が x と 0 の間に存在する.

右の図は $x = 0$ における $\sin x$ のテイラー多項式をグラフにして比べたものである。 $\sin x$ は周期性や対称性をもつので、実用上は $0 \leq x \leq \pi/2$ の範囲で十分な精度があればよい。



例 6 (対数関数の展開) 対数関数 $\log x$ ($x > 0$) の展開はそのままの形ではなく、 $\log(1+x)$ ($x > -1$) をマクローリン展開したほうがよい。 $n \geq 1$ のとき帰納的に

$$\{\log(1+x)\}^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

であることがわかるので、次の公式を得る：

公式 5.5 (対数関数のマクローリン展開) $x > -1$ のとき、

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-2}x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+c)^n}x^n$$

を満たす c が 0 と x の間に存在する。

マクローリン級数

テイラー展開 (定理 5.2) において、各 x を固定した上で $n \rightarrow \infty$ としたとき、(ii) の剰余項が 0 に収束する場合がある²。このとき、級数展開

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

が成立することになる。これを**テイラー級数**とよび、 $a = 0$ のときは**マクローリン級数**とよぶ。この級数を用いれば、(原理的には) 関数の値を任意の精度で計算できる。すなわち、私たちが最初に掲げた「理想的な目標」が実現されるのである。

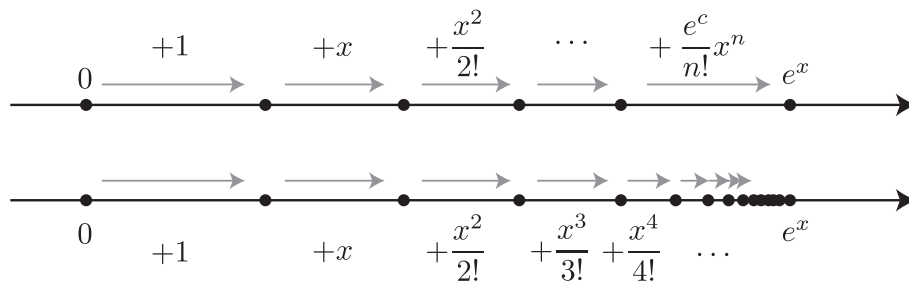
具体例を見てみよう。

指数関数のマクローリン級数。 任意の実数 x を固定し定数だと思い、指数関数のマクローリン展開 (公式 5.3) を適用する。このとき $-|x| < c < |x|$ であるから、式 (5.2) の剰余項について

$$\left| \frac{e^c}{n!} x^n \right| \leq e^{|x|} \cdot \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。

²もちろん、発散する場合もある。



よって次の等式が導かれる:

公式 5.6 (指数関数のマクローリン級数) すべての x に対し, 次が成り立つ:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

(すなわち右辺の級数は収束し, その値は左辺と一致する.) この式は指数関数のマクローリン級数ともよばれる. とくに $x = 1$ のとき,

公式 5.7 (e の級数公式)
$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

が成立する. 次章で確認するように, e の値を計算するときには定義式 ($e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$) を用いるより, 右辺の級数展開を用いたほうが圧倒的に速い.

三角関数のマクローリン級数. 実数 x を固定し定数だと思い, 公式 5.4 を適用しよう. たとえば $\sin x$ の展開式 (5.3) の剰余項について,

$$\left| \frac{(-1)^{m+1} \sin c_1}{(2m+2)!} x^{2m+2} \right| \leq |\sin c_1| \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!} \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. ($|\sin x| \leq 1$ と $A \geq 0$ に対し $A^n/n! \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であることを用いた.) $\cos x$ についても同様であり, 次のマクローリン級数を得る.

公式 5.8 (三角関数のマクローリン級数) すべての実数 x に対し, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + \cdots \end{aligned}$$

対数関数のマクローリン級数. 公式 5.5 において, $0 \leq x \leq 1$ のとき $0 \leq c \leq 1$ であるから, 剰余項は

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+c)^n} x^n \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たす. じつは $-1 < x < 0$ の場合もこの剰余項は 0 に収束することが知られているので, 次のマクローリン級数を得る:

公式 5.9 (対数関数のマクローリン級数) $-1 < x \leq 1$ のとき

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

が成り立つ. とくに $x=1$ のとき

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

テイラー展開の証明

テイラー展開 (定理 5.2) の証明では, ロルの定理が本質的な役割を果たす. 少し技巧的なので, 一度 $n=3$ ぐらいで計算を書き下してみるとよいだろう.

定理 5.2 の証明. 便宜的に定理中の x を b に置き換えて証明する. また, $b \neq a$ の場合を示せば十分である. いま定数 A を

$$A := \frac{f(b) - \left\{ f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \right\}}{(b-a)^n}$$

と定めると, 次が成り立つ:

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + A(b-a)^n \quad (5.5)$$

このとき, a と b の間にある c が存在して, $A = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ と表されることを示そう.

区間 I 上の関数 $F(x)$ を

$$F(x) := f(b) - \left\{ f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + A(b-x)^n \right\}$$

とおく. 明らかに $F(b) = 0$ であり, 式 (5.5) より $F(a) = 0$ がわかる. $F(x)$ の微分は

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \left\{ f'(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} \right) - nA(b-x)^{n-1} \right\} \\ &= - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + nA(b-x)^{n-1} \end{aligned}$$

と計算できるので, $F(x)$ は微分可能である. よってロルの定理より, a と b を端点にもつ开区間の中に $F'(c) = 0$ を満たす c が存在する. そのような $x=c$ を $F'(x)$ の式に代入すると, $b \neq c$ より求める等式 $A = f^{(n)}(c)/n!$ を得る. ■

e の計算

e の数値計算. パソコンの関数電卓機能を用いれば自然対数の底 e の値も簡単に求まるが, ここでは無人島に行ったつもりで近似値と誤差の評価式を手計算で求めてみよう.

指数関数 e^x の $x=0$ でのテイラー展開 (マクローリン展開) は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n$$

であった (公式 5.3). ただし c は 0 と x の間の数である. いま $x = 1, n = 6$ としてみよう. このとき

$$e = \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}}_{(ア)} + \underbrace{\frac{e^c}{6!}}_{(イ)} \quad (0 < c < 1)$$

である. まず (ア) の部分を計算すると,

$$(ア) = 1 + 1 + \frac{60 + 20 + 5 + 1}{120} = 2 + \frac{43}{60} = 2.7166\cdots$$

となる. これを e の近似値として採用した場合, 相対誤差はわずかに 0.06% 程度である. 絶対誤差は正確に (イ) の部分で与えられるから, この値を詳しく調べてみよう. $0 < c < 1$ より $1 < e^c < e \leq 3$ であるから,

$$\frac{1}{720} = \frac{1}{6!} < (イ) = \frac{e^c}{6!} \leq \frac{3}{6!} = \frac{1}{240}.$$

よって $(ア) + 1/720 < e \leq (ア) + 1/240$ を満たす. これより, 評価式

$$2.718055\cdots < e \leq 2.720833\cdots$$

が成り立つ.

収束速度の比較. 次の表は e に対する $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ と $b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ の絶対誤差 (有効数字 3 桁) を比較したものである. e の近似としては, b_n を用いたほうが圧倒的に速いことがわかる.

n	a_n	$ a_n - e $	b_n	$ b_n - e $
1	2.000000000	0.718	2.000000000	0.718
2	2.250000000	0.468	2.500000000	0.218
3	2.370370370	0.348	2.666666667	5.16×10^{-2}
4	2.441406250	0.277	2.708333333	9.95×10^{-3}
5	2.488320000	0.230	2.716666667	1.62×10^{-3}
6	2.521626372	0.197	2.718055556	2.26×10^{-4}
7	2.546499697	0.172	2.718253968	2.79×10^{-5}
8	2.565784514	0.152	2.718278770	3.06×10^{-6}
9	2.581174792	0.137	2.718281526	3.03×10^{-7}
10	2.593742460	0.125	2.718281801	2.73×10^{-8}

極限の計算

次は極限の計算への応用である.

例題 5.1 (極限の計算) すべての自然数 k に対し, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$ となることを示せ.

解答 たとえば $k = 2$ のときを示そう. $x > 0$ とする. 指数関数の 4 次のマクローリン展開より

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^c}{4!}x^4 \quad (0 < c < x)$$

であるから,

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} > \frac{x^3}{3!}.$$

よって

$$\frac{x^2}{e^x} < \frac{x^2}{x^3/3!} = \frac{6}{x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

k が 3 以上の場合もまったく同様である. ■

二項級数

いわゆる「二項展開」より, 自然数 n と任意の実数 x について

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} x^n$$

が成り立つ. この n を任意の実数 α に拡張したのが, 次の「二項級数」である (そのかわり x に制限がつく):

公式 5.10 (二項級数) 実数 α と $|x| < 1$ を満たす実数 x に対し, 次が成り立つ:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

ここで, $\frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}$ は $\binom{\alpha}{n}$ と書かれることが多い. α が自然数で $0 \leq n \leq \alpha$ のとき $\binom{\alpha}{n}$ は ${}_nC_n$ と一致する.

この展開式を得るには, まず $(1+x)^\alpha$ をまじめに $x=0$ でテイラー展開して, 剰余項 $\left(\binom{\alpha}{n} (1+x)^{\alpha-n} x^n\right)$ の形) が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束することを示す.

例題 5.2 $\alpha = 1/2$ のときの二項級数

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

を用いて $\sqrt{26}$ の近似値を計算せよ.

解答. 次は 3 次近似を求めてみよう.

$x = 1/25$ とすると,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{25}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{25^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{25^3} = 1 + \frac{2 \cdot 100^2 - 2 \cdot 100 + 4}{100^3}$$

より,

$$\sqrt{26} = 5\sqrt{1 + \frac{1}{25}} \approx 5 + \frac{10 \cdot 100^2 - 10 \cdot 100 + 20}{100^3} = 5 + \frac{9902}{10^5} = 5.09902.$$

真の値は $\sqrt{26} = 5.0990195 \cdots$ であるから, 単純な計算の割には驚異的な精度になっている. ■

漸近展開とその応用

テイラー展開を極限の計算に応用しよう.

ランダウの記号 (再). n を 0 以上の整数とする. $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow 0$ となる関数が

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow a)$$

を満たすとき, **ランダウの記号**を用いて

$$f(x) = o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a) \quad (5.6)$$

と表されるのであった。標語的には「 $f(x)$ のほうが $(x-a)^n$ よりも相対的に速く 0 に収束する」ことを意味する。この形のランダウ記号は多項式のように計算ができて、使い勝手がよい。少し練習してみよう。

例題 5.3 (ランダウの記号 1) $f(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$) のとき, $f(x) = o(1)$ と表されることを示せ。

解答. $f(x) \rightarrow 0$ のとき, $\frac{f(x)}{(x-a)^0} = \frac{f(x)}{1} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$). よって式 (5.6) の形にすると, $f(x) = o((x-a)^0) = o(1)$. ■

例題 5.4 (ランダウの記号 2) $x \rightarrow 0$ のとき次を示せ。

$$(1) 2015x^2 + x^3 = o(x), \quad (2) \sin x = o(1) \quad (3) x - \sin x = o(x^2)$$

解答. 定義どおり確かめていく. (1): $\frac{2015x^2 + x^3}{x} = 2015x + x^2 \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$).

(2): これは $n=0$ の場合に対応する. $\frac{\sin x}{1} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$).

(3): ロピタルの定理より $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} = 0$. ■

例題 5.5 (ランダウの記号 3) $f(x) = o(x^2)$, $g(x) = o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) のとき次を示せ。

$$(1) x^2 f(x) = o(x^4), \quad (2) f(x) + g(x) = o(x^2) \quad (3) f(x)g(x) = o(x^5)$$

解答. こちらも定義どおり確かめていく. (1): $\frac{x^2 f(x)}{x^4} = \frac{f(x)}{x^2} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$).

(2): $\frac{f(x) + g(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2} + x \cdot \frac{g(x)}{x^3} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$).

(3): $\frac{f(x)g(x)}{x^5} = \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{g(x)}{x^3} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$). ■

注意. $f(x) = o(x)$, $g(x) = o(x)$ のとき, $f(x) - g(x) = 0$ としてはいけない. 正しくは $f(x) - g(x) = o(x) - o(x) = o(x)$ である. (理由を考えて納得せよ.)

漸近展開. ランダウの記号を用いると、テイラー展開 (定理 5.2) において $x \rightarrow a$ としたときの関数の挙動がより鮮明に表現できるようになる:

定理 5.11 (漸近展開) $f(x)$ を $x = a$ のまわりで定義された C^n 級関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, 次が成り立つ:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (5.7)$$

定義 (漸近展開) 式 (5.7) を $f(x)$ の $x = a$ における (n 次) 漸近展開とよぶ。

証明. x が a に近いとき, n 次のテイラー展開ができて

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

ただし c は x と a の間の数である. これより

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

いま $f(x)$ は C^n 級関数であり, $x \rightarrow a$ のとき $c \rightarrow a$ であるから, $f^{(n)}(c) \rightarrow f^{(n)}(a)$. よって $\frac{[\text{上の式の右辺}]}{(x-a)^n} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$). ■

例 10. 指数関数は C^∞ 級なので, 任意の $n = 0, 1, 2, \dots$ について定理 5.11 を適用できる. すなわち $x \rightarrow 0$ のとき,

$$e^x = 1 + o(1), \quad e^x = 1 + x + o(x), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \dots$$

例 11. $e^x \sin x = x + x^2 + o(x^2)$ を示そう. $e^x = 1 + x + o(x)$, $\sin x = x - x^3/3! + o(x^3) = x + o(x^2)$ より,

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \{1 + x + o(x)\} \{x + o(x^2)\} \\ &= \{1 + x + o(x)\} x + \{1 + x + o(x)\} o(x^2) \\ &= x + x^2 + o(x^2) + o(x^2) + o(x^3) + o(x^3) \\ &= x + x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

例題 5.6 (漸近展開の応用) 漸近展開を用いて次の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{x^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$$

解答. (1): 例 3 の計算より $\frac{e^x \sin x - x}{x^2} = \frac{x + x^2 + o(x^2) - x}{x^2} = 1 + \frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow 1$ ($x \rightarrow 0$).

(2): 公式 5.5 より, $\frac{\log(1+x) - x}{x^2} = \frac{x - x^2/2 + o(x^2) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ ($x \rightarrow 0$). ■

例題 5.7 (漸近展開の応用 2) 漸近展開を用いて $\cos x = \sqrt{1-x^2} + o(x^2)$ ($x \rightarrow 0$) を示せ.

解答. 二項級数より $\sqrt{1+t} = 1 + t/2 + o(t)$ なので, $t = -x^2$ を代入して $\sqrt{1-x^2} = 1 - x^2/2 + o(x^2)$. 一方 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ より, $\cos x - \sqrt{1-x^2} = o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)$. ■

講義第 6 回 (12/21)：テイラー展開の応用

配布日：12/21/2020 Version：1.0

●● 12 月 21 日の講義内容は前回のプリントにまとめてあります ●●

参考書の該当箇所：[川平] 8-9 章 [三宅] 2.3-2.4.

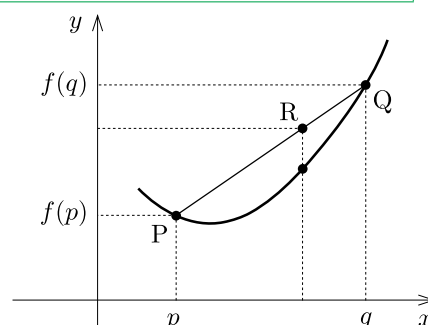
参考：関数の凸性と 2 階微分

関数が「下に凸」(上に凸)であることは 2 階導関数の正負によって定義されることが多いが、2 回微分可能性を仮定しない一般の関数に対しては、「下に凸」を次のように幾何学的に定義する(「上に凸」も同様)：

「下に凸」の幾何学的定義 区間 I 上の関数 $y = f(x)$ が下に凸であるとは、 I 内の任意の異なる 2 点 p, q と任意の $t \in (0, 1)$ に対し、次が成り立つことをいう：

$$f(tp + (1-t)q) < tf(p) + (1-t)f(q). \quad (6.1)$$

幾何学的には、グラフ上の 2 点を結ぶ線分がグラフの上にある状態が「下に凸」である。実際、式 (6.1) の右辺はグラフ上の点 $P(p, f(p))$ と点 $Q(q, f(q))$ を $(1-t):t$ に内分する点 R の y 座標にあたり、その x 座標 $x = tp + (1-t)q$ における関数 $y = f(x)$ の値が式 (6.1) の左辺である。



このとき、次が成り立つ：

2 階微分とグラフの凸性 $y = f(x)$ を区間 $[a, b]$ 上の C^2 級関数とする。 (a, b) 上 $f''(x) > 0$ ならば、 $y = f(x)$ は (幾何学的定義の意味で) 下に凸。

ただし、この逆は成り立たない。たとえば $f(x) = x^4$ は (幾何学的定義の意味で) 下に凸だが、 $f''(0) = 0$ 。

証明してみよう。 $a \leq p < q \leq b$ を満たす p, q と $t \in (0, 1)$ を任意に選び、 $\alpha = tp + (1-t)q$ とおく。定理 5.2 (テイラー展開) より

$$\begin{aligned} f(p) - f(\alpha) &= f'(\alpha)(p - \alpha) + \frac{1}{2}f''(c_p)(p - \alpha)^2, \\ f(q) - f(\alpha) &= f'(\alpha)(q - \alpha) + \frac{1}{2}f''(c_q)(q - \alpha)^2 \end{aligned}$$

を満たす p と α の内分点 c_p と q と α の内分点 c_q が存在する。上の式を t 倍、下の式を $(1-t)$ 倍して足し合わせると、

$$tf(p) + (1-t)f(q) - f(\alpha) = \frac{1}{2}\{tf''(c_p)(p - \alpha)^2 + (1-t)f''(c_q)(q - \alpha)^2\}$$

となるが、仮定より $f''(c_p) > 0$ かつ $f''(c_q) > 0$ なので、この式の値は正。左辺は $tf(p) + (1-t)f(q) - f(tp + (1-t)q)$ であるから、不等式 (6.1) が成り立つ。 ■

講義第7回 (12/25): 一様連続性と定積分

配布日: 10/25/2020 Version: 1.0

参考書の該当箇所: [川平] 10 章 [三宅] 3.4.

一様連続性

以下, I を区間とし, a を区間 I 上の点とする. また, $f(x)$ は区間 I 上の関数とする. 関数が「連続」であることの厳密な定義を復習しておこう.

定義 (関数の連続性, 再) 関数 f が $x = a$ で**連続** (continuous) であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

であることをいう. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し,

$$x \in I \text{ かつ } |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad (7.1)$$

が成り立つことをいう. f が I 上のすべての点で連続であるとき, **関数 f は I 上で連続**, もしくは **f は I 上の連続関数**であるという.

ところで, I 上の関数 $f(x)$ が連続であることは,

$$(\forall a \in I) (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in I \mid |x - a| < \delta) \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

のようにも表されることに注意しておく.

さて式 (7.1) が成り立つように私たちが δ として選ぶ値の範囲は最初に決めた ϵ の値によって制限される¹. その意味で $\delta = \delta_\epsilon$ と添字にしたり, $\delta = \delta(\epsilon)$ と関数のように表現することもある². しかし厳密には, 関数 f や点 a にも依存するのだから, 依存性を明確にするならば $\delta = \delta_{f,a,\epsilon}$ あるいは $\delta = \delta(f, a, \epsilon)$ と書くべきかもしれない.

例 1. δ が関数 f , 点 a , ϵ に依存する様子を数値的に実感してみよう. $f(x) = x^2$, $\epsilon = 1$, $a = 0$, 10 とするとき, 式 (7.1) が成り立つような δ の値の上限を求めてみよう.

$a = 0$ のとき,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \iff |x^2 - 0^2| < 1 \iff |x|^2 < 1 \iff |x| < 1.$$

最後の式は $|x - a| < 1$ と同値であるから, $\delta = 1$ とすればよい.

$a = 10$ のとき,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \iff |x^2 - 10^2| < 1 \iff 99 < x^2 < 101$$

$x > 0$ であると仮定してもよいので, 上の式が成り立つための十分条件として

$$\sqrt{99} < x < \sqrt{101} \iff 9.9498743 \dots < x < 10.0498756 \dots$$

が得られる. これより, $|x - a| = |x - 10| < 0.049$ であれば式 (7.1) が成り立つことがわかる.

一様連続性. 以上を念頭におきつつ, 関数の「一様連続性」を次のように定義する:

¹ δ をより小さい正の数に取り替えることはできるから, δ として取りうる値の上限が問題となる.

²実際, 任意の ϵ に対してそのような δ をひとつ選んで対応させることができるのだから, 関数 $\epsilon \mapsto \delta = \delta(\epsilon)$ を作ることもできる.

定義 (関数の一様連続性) 関数 f が I 上で**一様連続** (uniformly continuous) であると
は, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し,

$$x, a \in I \text{ かつ } |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad (7.2)$$

が成り立つことをいう.

I 上の関数 f が一様連続であることは,

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall a \in I) (\forall x \in I \mid |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

のようにも表される. 単に「 $x = a$ で連続」な場合と比べると, δ は a には依存していないことがわかる. すなわち, $\delta = \delta(f, a, \epsilon)$ ではなく, $\delta = \delta(f, \epsilon)$ ということである. 関数の連続性は各点における性質だが, 一様連続性は区間全体にわたる性質である. とくに, 一様連続であれば連続である.

一様連続性の定義においては x と a が対等に扱われているので,

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, x' \in I \mid |x - x'| < \delta) \quad |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

とも表される. また, f が一様連続で「ない」ことは,

$$(\exists \epsilon > 0) (\forall \delta > 0) (\exists x, x' \in I \mid |x - x'| < \delta) \quad |f(x) - f(x')| \geq \epsilon$$

と表される.

定義の意味. 意味を理解するために

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

という部分を解釈してみよう. x を時間パラメーター (時刻, 秒単位) とし, $f(x)$ を動点 P の時刻 x における位置 (メートル単位) だとしよう. このとき, 上の式は動点 P の移動量について「 δ 秒未満の時間で進めるのは ϵ メートルまで」という「移動量の制限」(ある種の「速度制限」)だと解釈できる.

「一様連続性」というのは, 先に ϵ メートルという移動量の制限を決めたとき, それ相応の移動時間の制限 (δ 秒未満) を設けることで, 時刻 $x = a$ に**依存せずに**, 「 δ 秒未満の時間で進めるのは ϵ メートルまで」という「一様な制限」が実現できる, ということである.

一方, ふつうの「連続性」は「 δ 秒未満の時間で進めるのは ϵ メートルまで」という制限を実現するために必要な移動時間の上限 δ の取り方が $x = a$ の値に依存してもかまわないのである.

例題 7.1 (一様連続でない例) 関数 $[0, \infty)$ 上の関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2$ で定める.

- (1) 任意の $M > 0$ に対し, 区間 $[0, M]$ 上では一様連続であることを示せ.
- (2) 区間 $[0, \infty)$ 上で一様連続ではないことを示せ.

解答. まず $y = x + \Delta x$ とおくと,

$$|f(y) - f(x)| = |(x + \Delta x)^2 - x^2| = |\Delta x| |2x + \Delta x|$$

であることに注意しておく.

(1) $x \in [0, M]$ とする. $y = x + \Delta x$, $|\Delta x| \leq 1$ と仮定すれば, 上の式と三角不等式より $|f(y) - f(x)| = |\Delta x||2x + \Delta x| \leq |\Delta x|(2|x| + 1) \leq |\Delta x|(2M + 1)$. よって任意に小さい $\epsilon > 0$ が与えられたとき, $\delta = \min\{1, \epsilon/(2M + 1)\}$ とおけば, 任意の $x, y \in [0, M]$ に対し

$$|x - y| = |\Delta x| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \delta(2M + 1) < \epsilon$$

とできる. ゆえに, $f(x)$ は $[0, M]$ 上で一様連続である.

(2) $\epsilon = 1$ として, 任意の $\delta > 0$ に対しある $x, y \in [0, \infty)$ が存在して $|x - y| < \delta$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq 1$ とできることを示そう.

$y = x + \Delta x$ とおき $|\Delta x| \leq 1$ と仮定すれば, 三角不等式より $|f(y) - f(x)| = |\Delta x||2x + \Delta x| \geq |\Delta x|(2|x| - 1)$ が成り立つ. よって $(2|x| - 1) \geq 1/|\Delta x|$ となるように x と Δx を選べば, $|f(y) - f(x)| \geq 1$ となる.

以上の計算から, 任意に小さく与えられた $\delta > 0$ に対して,

$$0 < |\Delta x| < \min\{\delta, 1\}; \quad |x| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|\Delta x|} + 1 \right); \quad y = x + \Delta x$$

となるように $\Delta x, x, y$ の順に定めれば, $|x - y| < \delta$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq 1$ を満たす. ■

一様連続性の十分条件その 1：有界な微分係数を持つ場合. 一様連続性を保証する十分条件について考えよう. まずは, 区間のタイプ (開か閉か, 有界か非有界か, など) を問わず, 「一様な速度制限」があればよい, というものを紹介する:

定理 7.1 (微分が有界ならば一様連続) 区間 I 上の関数 $f(x)$ は端点以外の点で微分可能でありある定数 $K > 0$ が存在し, $|f'(x)| \leq K$ を満たすものとする. このとき, $f(x)$ は I 上で一様連続.

証明. 平均値の定理より, 閉区間 $[x', x]$ が I に含まれるとき, $f(x) - f(x') = f(c')(x - x')$ を満たすような c が (x', x) に存在する. よって $|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$ が成り立つから, 任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta = \epsilon/K$ とすることで, $|x - x'| < \delta$ のとき $|f(x) - f(x')| < K \cdot \delta = \epsilon$. ■

例 2. $y = \sin x$ は $|\cos x| \leq 1$ より $\mathbb{R}$ 上で一様連続.

一様連続性の十分条件その 2：閉区間上の連続関数. 実用上重要なのが次の定理で, 微分可能性とは無関係に一様連続性を保証する:

定理 7.2 (閉区間での一様連続性) 閉区間上の連続関数は一様連続である.

証明. 背理法により証明する. ある閉区間 I 上の関数 $f(x)$ が一様連続でなかったとしよう. すなわち, ある $\epsilon > 0$ が存在し, 任意の (任意に小さい) $\delta > 0$ に対し, ある $x = x(\delta), y = y(\delta) \in I$ が存在して, $|x - y| < \delta$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$ が成り立つ.

とくに自然数 $n = 1, 2, \dots$ それぞれに対して $\delta = 1/n$ を考えると, $|x_n - y_n| < 1/n$ かつ $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ が成り立つような $x_n, y_n \in I$ が存在する.

いま数列 $\{x_n\}$ は有界な閉区間 I 内の数列であるから, 区間縮小法の考え方を適用して収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ を見つけることができる³. I は閉区間なので, その極限 $A = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ は I に含まれる. したがって関数の値 $f(A)$ を考えることができる.

このとき,

$$|y_{n_k} - A| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - A| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - A| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

であるから, 部分列 $\{y_{n_k}\}_k$ も A に収束する. よって関数 f の連続性より,

$$f(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}).$$

³ I を 2 分割して $\{x_n\}$ を (添字の個数という意味で) 無限個含むほうを選び, それをさらに 2 分割して, $\{x_n\}$ を無限個含むほうを選び... という操作を繰り返す. 「有界閉区間内の点列が収束する部分列をもつ」という主張は, 「ボルツァーノ・ワイエルシュトラス」の定理ともよばれる.

これは k によらず $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon$ が成り立つことに反する. ■

注意. 関数の一様連続性は積分可能性を考えるときに重要である. たとえば閉区間上の連続関数が積分可能であることを証明するときに, 一様連続性に関する議論が必要である.

積分可能性と定積分

以下, 区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ は有界な関数であると仮定する. すなわち, ある実数 $m < M$ が存在して, すべての $x \in [a, b]$ に対し $m \leq f(x) \leq M$ が成り立つものと仮定する.

積分区間の分割. 区間 $[a, b]$ から

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

を満たす $n+1$ 個の点を集めた集合

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

を区間 $[a, b]$ の**分割** (partition) という.

区間 $[a, b]$ とその分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ に対し, 分割された区間の最大幅を

$$|\Delta| := \max \{\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$$

と表すことにする.

区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ が与えられているとき, 各 $k = 0, 1, \dots, n-1$ に対し

$$M_k := \sup \{f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

$$m_k := \inf \{f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

とおくことにする. 仮定より $m \leq m_k \leq M_k \leq M$ が成り立つことに注意しよう. さらに,

$$S(f, \Delta) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

$$s(f, \Delta) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

(ただし $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$) とおけば,

$$m(b-a) \leq s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta) \leq M(b-a)$$

が成り立つ. とくに $s(f, \Delta), S(f, \Delta)$ の取りうる値の範囲は有界であるから, 実数の連続性の公理 (あるいはワイエルシュトラスの定理) より

$$S(f) := \inf \{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } [a, b] \text{ の分割}\}$$

$$s(f) := \sup \{s(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } [a, b] \text{ の分割}\}$$

が存在する. このとき, 積分可能性を次のように定義する:

定義 (積分可能性と定積分) $f(x)$ を区間 $[a, b]$ 上の有界な関数とする. 関数 $f(x)$ が $[a, b]$ 上積分可能であるとは,

$$S(f) = s(f)$$

が成り立つことをいう. また, その値を関数 $f(x)$ が $[a, b]$ 上の**定積分**とよび,

$$\int_a^b f(x) dx$$

と表す.

例 3. $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ を x が有理数のとき $f(x) = 0$, 無理数のとき $f(x) = 1$ として定める. 区間 $[a, b]$ の任意の分割 Δ に対し, 分割点の間には必ず有理数と無理数が含まれることから, $S(f, \Delta) = 1$ かつ $s(f, \Delta) = 0$ となる. したがって $S(f) = 1 > 0 = s(f)$ であり, f は積分可能ではない⁴.

積分可能性を判定するにあたって重要なのが, 次のダルブーの定理⁵である.

定理 7.3 (ダルブー (Darboux) の定理) 区間 $[a, b]$ 上の関数 f がある有界な区間 $[m, M]$ に値をとるとき,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(f, \Delta) = S(f), \quad \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} s(f, \Delta) = s(f)$$

が成り立つ. すなわち, 任意の正の数 $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し $|\Delta| < \delta$ であれば $|S(f, \Delta) - S(f)| < \epsilon$ かつ $|s(f, \Delta) - s(f)| < \epsilon$ とできる.

証明. $S(f)$ に関して証明しよう. $s(f)$ についても同様である.

任意の $\epsilon > 0$ を固定する. このとき, $S(f)$ の定義からある分割 Δ_0 が存在して

$$S(f) \leq S(f, \Delta_0) < S(f) + \epsilon \quad (7.3)$$

を満たす. この Δ_0 は $N + 1$ 個の点からなり, 区間 $[a, b]$ を N 個の区間に分割するものとする. また, 分割された区間の長さの最小値を δ とする. (このとき $0 < \delta \leq |\Delta_0|$ である.)

さて区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ で, $|\Delta| < \delta$ を満たすものを任意に選んで,

$$S(f, \Delta) - S(f, \Delta \cup \Delta_0)$$

という量を評価してみよう. $|\Delta| < \delta$ より, 分割 Δ が定める各区間 $[x_k, x_{k+1}]$ は分割 Δ_0 の点を高々ひとつしか含まない. 例えば, ある $[x_k, x_{k+1}]$ 内に $x_k < \xi < x_{k+1}$ を満たす $\xi \in \Delta_0$ が存在したと仮定する. (Δ_0 は (a, b) 内にちょうど $N - 1$ 個の点をもつから, そのような k は高々 $N - 1$ 個しかない.) 区間 $[x_k, \xi]$ と $[\xi, x_{k+1}]$ における関数 f の上限をそれぞれ $M_1, M_2 \in [m_k, M_k]$ とおくと,

$$M_k (x_{k+1} - x_k) \geq M_1 (\xi - x_k) + M_2 (x_{k+1} - \xi) > m_k (x_{k+1} - x_k)$$

であるから

$$\begin{aligned} 0 &\leq M_k (x_{k+1} - x_k) - \{M_1 (\xi - x_k) + M_2 (x_{k+1} - \xi)\} \\ &\leq (M_k - m_k) (x_{k+1} - x_k) \\ &\leq (M - m) |\Delta| \end{aligned} \quad (7.4)$$

⁴ リーマン可積分ではないが, ルベーグ可積分ではある.

⁵ Jean-Gaston Darboux (1842 - 1917), フランスの数学者.

担当教員：川平 友規

が成り立つ。一方、もし開区間 (x_k, x_{k+1}) 内に Δ_0 の点がなければ区間 $[x_k, x_{k+1}]$ 上に対応する $S(f, \Delta)$ と $S(f, \Delta \cup \Delta_0)$ への寄与は相殺されるので、結局 $S(f, \Delta) - S(f, \Delta \cup \Delta_0)$ という量は高々 $N - 1$ 個の式 (7.4) 右辺の形の量の和であり、

$$0 \leq S(f, \Delta) - S(f, \Delta \cup \Delta_0) \leq (M - m)|\Delta| \times (N - 1)$$

を満たす。とくに $|\Delta| < \delta' := \epsilon / \{(M - m)(N - 1)\}$ とすれば

$$0 \leq S(f, \Delta) - S(f, \Delta \cup \Delta_0) < \epsilon$$

が成り立つ。これより、 $S(f, \Delta \cup \Delta_0) \leq S(f, \Delta)$ であるから、 $S(f) \leq S(f, \Delta \cup \Delta_0)$ と式 (7.3) より、

$$0 \leq S(f, \Delta \cup \Delta_0) - S(f) \leq S(f, \Delta_0) - S(f) < \epsilon.$$

ゆえに

$$0 \leq S(f, \Delta) - S(f) = S(f, \Delta) - S(f, \Delta \cup \Delta_0) + S(f, \Delta \cup \Delta_0) - S(f) < 2\epsilon.$$

すなわち、任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $|\Delta| < \min\{\delta, \delta'\}$ であれば $|S(f, \Delta) - S(f)| < 2\epsilon$ を満たす。 ■

例 4 (連続関数) . 積分可能となる十分条件の一つを与えよう：

定理 7.4 (連続関数は積分可能) 閉区間上の連続関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は積分可能である。

証明には連続関数の閉区間における一様連続性 (定理 7.2) が使われる。

証明. 閉区間上の連続関数は最大値と最小値をもつから、 f は有界な関数である。また、定理 7.2 より、 f は一様連続でもある。とくに、任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し、 $x, y \in [a, b]$ が $|x - y| < \delta$ を満たすとき $|f(x) - f(y)| < \epsilon/(b - a)$ を満たす。

いま $|\Delta| < \delta$ を満たす区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ をとる。このとき、 f は各 $[x_k, x_{k+1}]$ 上連続であり、最大値と最小値をもつ。より具体的に、ある $\alpha_k, \beta_k \in [x_k, x_{k+1}]$ が存在して、

$$\begin{aligned} f(\beta_k) &= \max \{f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}\} = \sup \{f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}\} = M_k \\ f(\alpha_k) &= \min \{f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}\} = \inf \{f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}\} = m_k \end{aligned}$$

が成り立つ。とくに $|\alpha_k - \beta_k| \leq x_{k+1} - x_k < \delta$ であることに注意すると、一様連続性より

$$\begin{aligned} |S(f, \Delta) - s(f, \Delta)| &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \{f(\beta_k) - f(\alpha_k)\} \Delta x_k \\ &< \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \epsilon. \end{aligned}$$

一方、ダルブーの定理 (定理 7.3) より (必要な δ をさらに小さく取り直して)

$$|S(f, \Delta) - S(f)| < \epsilon \quad \text{かつ} \quad |s(f, \Delta) - s(f)| < \epsilon$$

が成り立つことから、

$$|S(f) - s(f)| \leq |S(f) - S(f, \Delta)| + |S(f, \Delta) - s(f, \Delta)| + |s(f, \Delta) - s(f)| < 3\epsilon.$$

ϵ は任意なので $S(f) = s(f)$ が成り立つ。定理 7.5 より f は積分可能である。 ■

リーマン和と定積分

区間 $[a, b]$ 上の (連続とは限らない) 関数 $f(x)$ を考える。区間 $[a, b]$ から

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

を満たす $n+1$ 個 (n の大きさに制限はない) の点を集めた集合

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

を区間 $[a, b]$ の**分割** (partition) という.

分割 Δ が与えられたとき, 各 $k = 0, 1, \dots, n-1$ に対し $x_k \leq x_k^* \leq x_{k+1}$ を満たす x_k^* を選んで得られる n 点からなる集合

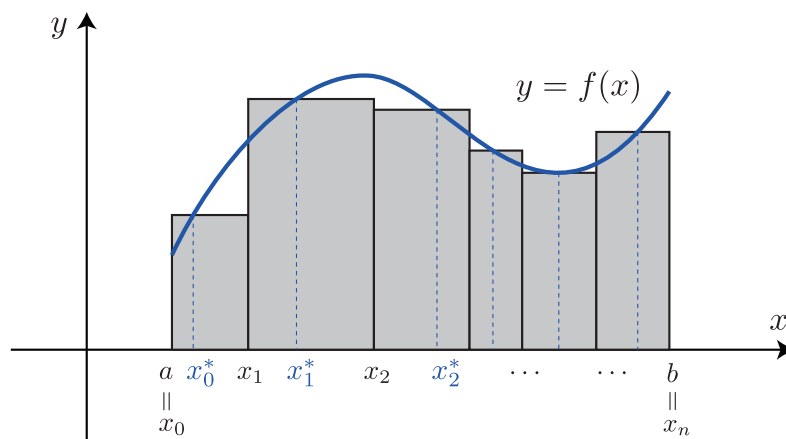
$$\Delta^* = \{x_0^*, x_1^*, \dots, x_{n-1}^*\}$$

を分割 Δ の**代表点集合** (set of representatives) という.

関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 区間 $[a, b]$ の分割 Δ とその代表点集合 Δ^* が定める量

$$\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) := \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k$$

(ただし $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k > 0$) を関数 f の**リーマン和** (Riemann sum) とよぶ.



直感的には, 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる領域の面積を長方形 (「短冊」) で近似しているのだと考えられる⁶.

定理 7.5 (積分可能性の判定) 区間 $[a, b]$ 上で有界な関数 $f(x)$ が積分可能であることの必要十分条件は, 分割 Δ の幅 $|\Delta|$ を 0 に近づけると, それから生成されるリーマン和が代表点集合 Δ^* の取り方によらずある実数に収束することである. より正確にいうと, 次が成り立つようなある実数 A が存在することである: 「任意の正の数 ϵ に対し, ある正の数 δ が存在し, すべての $|\Delta| < \delta$ を満たす分割 Δ とその代表点集合 Δ^* に対し,

$$|\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) - A| < \epsilon$$

が成り立つ。」

この定理より, 積分可能であることは

$$(\exists A \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \Delta : [a, b] \text{ の分割})(\forall \Delta^* : \Delta \text{ の代表点集合}) \\ |\Delta| < \delta \implies |\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) - A| < \epsilon.$$

⁶ただし, 「面積」の概念はむしろ積分 (重積分) を経由して定義されるものであるから, 堂々巡りにならないように「面積」という言葉は表にださずに議論しなくてはならない.

と書ける. これを

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \Sigma(f, \Delta, \Delta^*) = A$$

とも表す.

分割 Δ の最大幅 $|\Delta|$ が十分に小さければ, 代表点集合 Δ^* の取り方に依存せずに, リーマン和は ϵ 未満の誤差で A の値を近似するのである. 直観的には, 定積分は「関数のグラフと軸が囲む部分の符号つき面積」であり, リーマン和はそれを「短冊」(細長い長方形) の面積和で近似したものである. その近似の精度を上げるためには, 短冊の幅を細かくする必要があるだろう. これを数学的に定式化したのが上の積分可能性なのである.

証明. f が積分可能であると仮定し, $A := \int_a^b f(x) dx$ とおく. このとき, $S(f) \leq A$ を示そう. $\epsilon > 0$ を任意に選び固定する. 区間 $[a, b]$ の任意の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ に対し, $M_k - \epsilon < f(x_k^*) \leq M_k$ を満たす $x_k^* \in [x_k, x_{k+1}]$ を選べば, 代表点集合 $\Delta^* = \{x_k^*\}_{k=0}^{n-1}$ が定めるリーマン和 $\Sigma(f, \Delta, \Delta^*)$ は

$$S(f) \leq S(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \{f(x_k^*) + \epsilon\} \Delta x_k \leq \Sigma(f, \Delta, \Delta^*) + \epsilon(b-a)$$

を満たす. f は積分可能であったから, ある $\delta > 0$ が存在し $|\Delta| < \delta$ のとき $|\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) - A| < \epsilon$ を満たす. よって

$$S(f) \leq \Sigma(f, \Delta, \Delta^*) + \epsilon(b-a) \leq (A + \epsilon) + \epsilon(b-a)$$

となる. ϵ の取り方は任意であったから, $S(f) \leq A$ が成り立つ. 同様の議論により $A \leq s(f)$ が示されるから, $A \leq s(f) \leq S(f) \leq A$. よって $s(f) = S(f)$ が成り立つ.

次に $S(f) = s(f)$ と仮定する. ダルブーの定理より, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し, $|\Delta| < \delta$ を満たす分割 Δ に対し $|S(f, \Delta) - S(f)| < \epsilon$ かつ $|s(f, \Delta) - s(f)| < \epsilon$ となる. Δ の代表点集合 Δ^* を任意に選ぶと,

$$s(f) - \epsilon < S(f, \Delta) \leq \Sigma(f, \Delta, \Delta^*) \leq S(f, \Delta) < S(f) + \epsilon$$

が成り立つ. よって $A := S(f) = s(f)$ に対し, $|\Sigma(f, \Delta, \Delta^*) - A| < \epsilon$ が成り立つ. すなわち, f は積分可能である. ■

リーマン和と定積分の誤差. 次の定理は積分の数値計算において重要である:

定理 7.6 (リーマン和の誤差) 区間 $[a, b]$ の関数 $f(x)$ は (a, b) 上で $|f'(x)| \leq K$ を満たすものとする. このとき, 積分値 A とリーマン和 $\Sigma = \Sigma(f, \Delta, \Delta^*)$ の絶対誤差は次を満たす:

$$|A - \Sigma| \leq (b-a)K\Delta.$$

とくに, 分割点 $\{x_k\}$ として N 等分点をとったときのリーマン和を Σ_N とおくと,

$$|A - \Sigma_N| \leq \frac{K(b-a)^2}{N}.$$

ここで「 N 等分点」とは, $\Delta x := \frac{b-a}{N}$ に対して $x_k := a + k\Delta x$ ($0 \leq k \leq N-1$) とおいたものである.

すなわち, N 等分するリーマン和の場合, 積分との誤差が少なくとも N に反比例して小さくなる.

証明. $f(x_k^*)(x_{k+1} - x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k^*) dx$ であることに注意すると、三角不等式より

$$\begin{aligned} |A - \Sigma| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k^*) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \{f(x) - f(x_k^*)\} dx \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \{f(x) - f(x_k^*)\} dx \right|. \end{aligned}$$

$x_k \leq x \leq x_{k+1}$ のとき、平均値の定理より、 $f(x) - f(x_k^*) = f'(c)(x - x_k^*)$ を満たす c が x ごとに存在するから、

$$|f(x) - f(x_k^*)| = |f'(c)(x - x_k^*)| \leq K(x_{k+1} - x_k) \leq K\Delta.$$

よって後述の定理 7.8(2) より

$$|A - \Sigma| \leq \sum_{k=0}^{N-1} K\Delta(x_{k+1} - x_k) = K_1\Delta(b - a).$$

後半の主張は $\Delta = (b - a)/N$ を代入しただけである。 ■

定積分の基本性質

定積分は $a < b$ を満たす積分区間 $[a, b]$ に対して定義されたが、それ以外の場合にも次のように拡張しておくとう便利である： $a < b$ のとき、

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^a f(x) dx := 0.$$

定積分は以下の性質を満たす（証明は略）：

定理 7.7 (定積分の基本性質) 区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ と $g(x)$ が積分可能であるとき、 $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ は積分可能である。さらに、以下が成り立つ：

- (1) $\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- (2) 任意の実数 C に対し、 $\int_a^b Cf(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$
- (3) 任意の実数 $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ に対し、 $\int_\alpha^\gamma f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^\gamma f(x) dx$
- (4) $[a, b]$ 上で関数 $f(x) \leq g(x)$ が成り立つとき、 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

定理 7.8 (定積分の基本性質 2) 区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ が積分可能であるとき、以下が成り立つ：

- (1) 区間 $[a, b]$ 上 $m \leq f(x) \leq M$ であり、関数 $g : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続関数であるとき、 $g(f(x))$ は積分可能である。
- (2) とくに $|f(x)|$ は積分可能であり、 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$. さらに $[a, b]$ 上で $|f(x)| \leq K$ が成り立つとき、

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq K(b-a).$$

- (3) **積分の平均値の定理**：区間 $[a, b]$ 上 $m \leq f(x) \leq M$ であるとき、

$$m \leq \mu \leq M \quad \text{かつ} \quad \int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

を満たす実数 μ が存在する。とくに、 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ 上で連続ならば、 $\mu = f(c)$ を満たす c が区間 (a, b) に存在する。

講義第 8 回 (1/8): 点集合・多変数関数の極限

配布日: 1/8/2021 Version: 1.0

参考書の該当箇所: [川平] 16 章 [三宅] 4.1.

参考文献: • 小平邦彦『解析入門 I, II』の第 6 章 • スピヴァック『多変数の解析学』の第 1 章

 n 次元ユークリッド空間

高次元の空間としてもっとも基本的なのが, 次の「ユークリッド空間」とよばれる集合である:

定義 (ユークリッド空間) n を自然数とし, n 個の実数に順番をつけて並べたもの $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ を n 次元数ベクトルもしくは単にベクトル (vector) とよぶ. また, その全体からなる集合

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

を n 次元ユークリッド空間 (n dimensional Euclidean space, もしくは n 次元数空間, n 次元数ベクトル空間, n dimensional coordinate space) とよび, $\mathbb{R}^n$ で表す. ベクトル $\vec{0} := (0, 0, \dots, 0)$ をゼロベクトル (zero vector) もしくは原点 (origin) とよぶ.

- ベクトルは「ユークリッド空間内の点 (point)」とよばれることも多い.
- $\mathbb{R}^1$ は通常, 実数の集合 $\mathbb{R}$ (数直線) と同一視される. また, しばしば $\mathbb{R}^2$ は xy 平面と, $\mathbb{R}^3$ は xyz 空間と解釈される.
- ベクトル $(a_1, \dots, a_n)$ は上つき添字で $(a^1, \dots, a^n)$ と書かれることもある. この場合, a^1 の 2 乗は $(a^1)^2$ のように表す.

和とスカラー倍, 内積. $\mathbb{R}^n$ はいわゆるベクトル空間 (線形空間) の構造をもっている. ベクトルの基本的な演算である, 和, 実数倍, 内積の定義を確認しよう.

定義 (和・実数倍・内積・長さ) $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ を $\mathbb{R}^n$ 内のベクトル, t を実数とすると, 次のように定義する:

- $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和 (sum): $\vec{a} + \vec{b} := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$.
- $\vec{a}$ の実数倍 (multiple of a real number): $t\vec{a} := (ta_1, \dots, ta_n)$.
- $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 (inner product): $\vec{a} \cdot \vec{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$
- $\vec{a}$ の長さ (modulus): $\|\vec{a}\| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$.

ベクトルの「長さ」は線形代数ではノルム (norm) と呼ばれる. これらの演算の基本的な性質については線形代数の教科書などを参照せよ.

内積は次の「シュワルツの不等式」 (the Schwarz inequality) を満たす:

命題 8.1 (シュワルツの不等式) $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n), \vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \quad \text{すなわち} \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right). \quad (8.1)$$

証明. $\vec{a} \neq \vec{0}$ の場合を示せば十分であろう。このとき, t に関する方程式

$$(a_1 t + b_1)^2 + \dots + (a_n t + b_n)^2 = 0$$

は 2 次方程式である。 t が実数のとき左辺は 0 以上であるから, 実数解が存在すれば高々 1 つである。これは判別式

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 - (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

が 0 以下であることと同値である。 ■

シュワルツの不等式より,

$$-\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

が成り立つ。とくに, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ でないとき,

$$-1 \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \leq 1$$

が成り立つ。このことから, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす「角度」を定義できる:

定義 (ベクトルのなす角, 垂直, 平行) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに $\vec{0}$ でないとき,

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

を満たす実数 $\theta \in [0, \pi]$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす**角** (angle) という。さらに, $\theta = \pi/2$ のとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**垂直** (perpendicular) であるといい, $\vec{a} \perp \vec{b}$ と表す。また, $\theta = 0$ あるいは π のとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行** (parallel) であるといい, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ と表す。

ちなみに, 平行を表す記号の世界標準は傾けない $\vec{a} \parallel \vec{b}$ なのだという。

三角不等式. シュワルツの不等式から, 次の「三角不等式」がわかる:

命題 8.2 (三角不等式) 任意の $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し, 次の不等式が成り立つ:

$$\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \leq \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \quad (8.2)$$

証明のスケッチ. 右側の不等式: シュワルツの不等式を用いると, $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$. 左側の不等式も同様である。 ■

ユークリッド距離.

定義 (ユークリッド距離) $\mathbb{R}^n$ 内の 2 点 $\vec{a}, \vec{b}$ の距離 (distance) (もしくはユークリッド距離 (Euclidean distance)) を

$$d(\vec{a}, \vec{b}) := \|\vec{a} - \vec{b}\|$$

と定義する.

このとき, 次が成り立つ:

命題 8.3 (距離空間としての $\mathbb{R}^n$) 距離 $d(\cdot, \cdot)$ は次の (D1)~(D3) を満たす:

$$(D1) \quad d(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \iff \vec{a} = \vec{b}.$$

$$(D2) \quad d(\vec{a}, \vec{b}) = d(\vec{b}, \vec{a}).$$

$$(D3) \quad d(\vec{a}, \vec{b}) \leq d(\vec{a}, \vec{c}) + d(\vec{c}, \vec{b}). \quad (\text{三角不等式})$$

証明は練習問題としよう.

注意. 一般に, (D1)~(D3) を満たすような関数 $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ が定義されているような集合 X を **距離空間** (metric space) という.

ある不等式. ベクトルの列と極限を考えるとときに必要となる不等式を述べておこう:

命題 8.4 (ノルムの max 評価) 任意の $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \leq \|\vec{a}\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|.$$

証明. 明らかに

$$\max\{a_1^2, \dots, a_n^2\} \leq a_1^2 + \dots + a_n^2 \leq n \max\{a_1^2, \dots, a_n^2\}$$

が成り立つので, それぞれの平方根をとればよい. ■

開集合・閉集合・コンパクト集合

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の集合に関する定義をまとめておこう.

(ア) 球. $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対し, 集合

$$\mathbb{B}(\vec{a}, r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$$

を中心 $\vec{a}$, 半径 r の球 (ball) もしくは開球 (open ball) とよぶ.

(イ) 開集合と閉集合.

- 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が**開集合** (open set) であるとは, 任意の $\vec{a} \in S$ に対しある $r > 0$ が存在し, $\mathbb{B}(\vec{a}, r) \subset S$ となることをいう.
- 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が**閉集合** (closed set) であるとは, 補集合 $S^c = \mathbb{R}^n - S := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \notin S\}$ が開集合となることをいう.

- 集合 S に対し, $\vec{a}$ が S の境界点であるとは, 任意の $r > 0$ に対し, $\mathbb{B}(\vec{a}, r) \cap S$ と $\mathbb{B}(\vec{a}, r) \cap S^c$ のいずれもが空集合でないことをいう. S の境界点全体の集合を S の境界といい, ∂S と表す.
- 定義より $\partial S = \partial(\mathbb{R}^n - S)$ となることに注意しよう. $\mathbb{R}^n - S$ が開集合ということは, $\mathbb{R}^n - S$ が境界点を含まないことを意味する. よって, S が閉集合であるとは, 「 S が境界点をすべて含む」ことと同値である. すなわち, $\partial S \subset S$.

注意. $\mathbb{R}^n$ は開集合であるから, その補集合である空集合 $\emptyset$ は閉集合である. また, $\mathbb{R}^n$ は境界点を持たないので, $\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$. これは $\partial \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ を意味するので, $\mathbb{R}^n$ も閉集合でもある. ゆえに, その補集合である空集合 $\emptyset$ は開集合でもある.

じつは, $\mathbb{R}^n$ の部分集合で開集合かつ閉集合であるものは $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ そのものしか存在しない¹.

例 1. 球は開集合である.

(エ) 有界集合とコンパクト集合. $S \subset \mathbb{R}^n$ が**有界** (bounded) であるとは, ある定数 $M > 0$ が存在して, 任意の $\vec{a} \in S$ に対し $\|\vec{a}\| \leq M$ が成り立つことをいう.

S が有界な閉集合であるとき, **コンパクト (集合)** (compact (set)) であるという.

(オ) 領域・閉領域. 開集合 S が**連結** (connected) であるとは, S 内の任意の 2 点を S の中だけを通る折れ線で結ぶことができることをいう.

連結な開集合は**領域** (domain) とよばれる. 領域 S にその境界 ∂S を加えた閉集合 $S \cup \partial S$ を**閉領域** (closed domain) という.

例 2. $\mathbb{R}^n$ や球は領域である. 領域でない開集合としては, たとえば $\mathbb{R}^2$ における $\{(x, y) \mid xy > 0\}$ がある.

点列の収束

ベクトルの列の収束性を定義しよう.

¹ 「開かつ閉」の部分集合は英語で “clopen set” とよばれることもある.

定義 (点列の収束, コーシー列)

- $\mathbb{R}^n$ のベクトルからなる列 $\{\vec{a}_k\}_{k=1}^\infty$ は**点列** (sequence (of points)) とよばれる.
- 点列 $\{\vec{a}_k\}$ が**収束する** (converge) とは, ある $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ が存在し,

$$\|\vec{a}_k - \vec{A}\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

となることをいう. すなわち,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall k \geq N) \quad \|\vec{a}_k - \vec{A}\| < \epsilon.$$

このとき, $\vec{A} = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k$ と表す.

- 点列 $\{\vec{a}_k\}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall k \geq \forall l \geq N) \quad \|\vec{a}_k - \vec{a}_l\| < \epsilon$$

が成り立つことをいう.

点列の収束性を次のようにいい換えておくと便利である.

命題 8.5 (収束性のいい換え) $\{\vec{a}_k\}_{k=1}^\infty$ を $\mathbb{R}^n$ 内の点列とし, $\vec{a}_k = (a_k^1, a_k^2, \dots, a_k^n)$ と表すことにする. このとき, 以下はすべて同値:

- (1) $\{\vec{a}_k\}_{k=1}^\infty$ は収束する.
- (2) すべての $i = 1, 2, \dots, n$ に対し, 実数列 $\{a_k^i\}_{k=1}^\infty$ は収束する.
- (3) $\{\vec{a}_k\}_{k=1}^\infty$ はコーシー列.

証明. (1) を仮定すると, ある $\vec{A} = (A^1, \dots, A^n) \in \mathbb{R}^n$ が存在し, $\|\vec{a}_k - \vec{A}\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$. このとき命題 8.4 より, すべての $i = 1, 2, \dots, n$ について $|a_k^i - A^i| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$. よって (2) が成り立つ. (2) が成り立つとき, 収束する実数列 $\{a_k^i\}_{k=1}^\infty$ はコーシー列であるから,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_i \in \mathbb{N}) \quad k > l \geq N_i \implies |a_k^i - a_l^i| < \epsilon / \sqrt{n}.$$

ここで $N = \max\{N_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ とすれば, 命題 8.4 より, $k > l \geq N$ のとき,

$$\|\vec{a}_k - \vec{a}_l\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq n} |a_k^i - a_l^i| < \sqrt{n} \cdot \epsilon / \sqrt{n} = \epsilon.$$

よって (2) ならば (3) が成り立つ.

同様の議論により, (2) ならば (1), (3) ならば (2) が証明される. ■

多変数関数

定義 (関数, 定義域, 値域, etc.) X を $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合とする.

- X の各元 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ にひとつの実数 y を対応させたものを X 上の**関数** (function) という. $n \geq 2$ のときは**多変数関数** (multivariable function) とよばれる.

- f をそのような関数とすると, y を $\vec{x}$ における関数 f の**値** (value) とよび,

$$y = f(\vec{x}), \quad f: \vec{x} \mapsto y, \quad \vec{x} \xrightarrow{f} y$$

$$y = f(x_1, \dots, x_n), \quad f: (x_1, \dots, x_n) \mapsto y, \quad (x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{f} y$$

などと表す.

- X を関数 f の**定義域** (domain) とよぶ.

- 集合 $S \subset X$ に対し, 集合

$$f(S) := \{f(\vec{x}) \in \mathbb{R} \mid \vec{x} \in S\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists \vec{x} \in S, y = f(\vec{x})\}$$

を関数 f による S の**像** (image) という. とくに, 定義域 X の像 $f(X)$ を関数 f の**値域** (range) とよぶ.

- 関数 f の値域 $f(X)$ が集合 $Y \subset \mathbb{R}$ に入っていることがわかっているとき, 関数 f を $f: X \rightarrow Y$ のように表す.

注意 (関数の呼び方). 「関数 f 」のことを, 「関数 $y = f(\vec{x})$ 」, あるいは「関数 $y = f(x_1, \dots, x_n)$ 」などとよぶことも多い. このとき, 記号 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ は**ベクトル変数** (または変数ベクトル, variable vector) とよばれ, X 内のベクトルを自由に代入できる「箱」のようなものと解釈される. 記号 y もまた, 関数 f が生成する実数が代入される「箱」のようなものである. (特定の $\vec{x} \in X$ における特定の値 $y = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ を表すわけではない. この場合は, 記号をより定数らしい記号に変えて, $b = f(\vec{a})$ のように表現することが多い.)

例 3. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し, $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$ と定める. このとき, $f(\vec{x}) \geq 0$ なので, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ と表される.

極限と連続性

以下, X は空でない $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする.

定義 (関数の極限) $\vec{a} \in X \cup \partial X$ とする. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ のとき実数 A に収束する (converge) とは,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \vec{x} \in X) \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \implies |f(\vec{x}) - A| < \epsilon$$

が成り立つことをいう. このとき,

$$f(\vec{x}) \rightarrow A \quad (\vec{x} \rightarrow \vec{a}) \quad \text{もしくは} \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = A$$

と表し, A を関数 f の $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ のときの**極限** (limit) という.

例 4. $X = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ において定義された関数 $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ は, 極限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 1$ をもつ. このとき $(0, 0) \notin X$ だが $(0, 0) \in \partial X$ である.

定義 (関数の連続性) $\vec{a} \in X$ とする. 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が $\vec{a}$ において**連続** (continuous) であるとは, $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ のとき $f(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{a})$ が成り立つことをいう. すなわち,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \vec{x} \in X) \quad \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \implies |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \epsilon$$

が成り立つことをいう. f が X 上のすべての点で連続であるとき, 「 f は X 上で連続」あるいは「 f は X 上の連続関数」であるという.

次は連続関数のもっとも重要な性質だといってよい:

定理 8.6 (最大値・最小値の存在) 空でないコンパクト集合上の連続関数は最大値と最小値をもつ. すなわち, X が空でないコンパクト集合であり, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が連続であるとき, ある $\vec{a}, \vec{b} \in X$ が存在して, 任意の $\vec{x} \in X$ に対し

$$f(\vec{a}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{b})$$

が成り立つ.

証明は 1 変数のときと同様である.

講義第9回 (1/14): 多変数関数の微分

配布日: 1/14/2021 Version: 1.0

参考書の該当箇所: [川平] 17-18 章 [三宅] 4.2.

微分可能性

1 変数関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が $a \in I$ で「微分可能」であるとは、ある定数 A が存在し、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$

が成り立つことをいうのであった。この条件は

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \right) = 0 &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}}{x - a} = 0 \\ &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}|}{|x - a|} = 0 \end{aligned}$$

と変形でき、最後の式を

$$f(x) = \underbrace{f(a) + A(x - a)}_{1 \text{ 次関数}} + \underbrace{o(|x - a|)}_{\text{誤差}} \quad (x \rightarrow a)$$

のように表す (ランダウの記号)。すなわち、関数 $f(x)$ のグラフが $x \approx a$ のとき $(a, f(a))$ を通る傾き A の直線の方程式 (1 次関数) で近似されるときに、この傾き A を $f'(a)$ と表すのであった。多変数関数の場合も、まったく同様の方法で「微分可能性」を定義する:

定義 (多変数関数の微分可能性) 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が $\vec{a} \in X$ において**全微分可能** (totally differentiable) であるとは、あるベクトル $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ が存在し、 $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ のとき

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{|f(\vec{x}) - \{f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a})\}|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0 \quad (9.1)$$

が成り立つことをいう。このことを

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|) \quad (\vec{x} \rightarrow \vec{a}) \quad (9.2)$$

とも表す (ランダウの記号)。 $\vec{A}$ を関数 f の $\vec{a}$ における**勾配ベクトル** (gradient vector) とよび、

$$\nabla f(\vec{a}), \quad Df(\vec{a}), \quad \text{grad } f(\vec{a})$$

などと表す。

注意.

- 式 (9.1) は、関数 $y = f(\vec{x})$ を 1 次関数 $y = f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a})$ で近似した誤差が、 $\|\vec{x} - \vec{a}\|$ と比較して相対的に小さくなることを意味している。「グラフを拡大すればするほど、1 次関数との区別がつかなくなる」ということである¹。
- 「全微分可能」とは本来「微分可能」とよばれるべきものだが、後で出てくる「偏微分可能」 (partially differentiable) との区別を強調するためにこのようによばれる。 $n = 1$ のときはふつうの「微分可能性」のことである。また、「勾配ベクトル」は「微分係数」に相当する²。

¹次のように表現してもよい: 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し、 $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$ のとき $|E(\vec{x})| \leq \epsilon \|\vec{x} - \vec{a}\|$ 。

²実際に、この $\vec{A}$ を**微分係数** (derivative) とよぶこともある。

- 記号 ∇ は**ナブラ** (nabla) と読む.
- 念のために $n = 3$ のとき式 (9.1) を成分で表してみよう. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ とするとき,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(a_1, a_2, a_3) + \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix} + o(\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_3 - a_3)^2}) \\ &= f(a_1, a_2, a_3) + \sum_{i=1}^3 A_i(x_i - a_i) + o\left(\left(\sum_{i=1}^3 (x_i - a_i)^2\right)^{1/2}\right). \end{aligned}$$

例 1 (1 次関数). 1 次関数 $y = f(\vec{x}) = \vec{A} \cdot \vec{x} + B$ はすべての点 $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ で微分可能であり, 一定の勾配ベクトル $\nabla f(\vec{a}) = \vec{A}$ をもつ. 実際,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{a}) &= (\vec{A} \cdot \vec{x} + B) - (\vec{A} \cdot \vec{a} + B) \\ &= \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) \end{aligned}$$

であるから, 誤差なしで微分可能性の式 (9.1) を満たす.

偏微分

勾配ベクトルをみれば関数の局所的なふるまい (等高線がどのように並んでいるか) がわかる. その, 勾配ベクトルの計算において重要な役割を果たす「偏微分」を定義しよう. まず線形代数で学ぶ「標準基底」の定義を思い出しておく:

定義 (標準基底) • $\mathbb{R}^n$ の元で, 第 i 成分のみが 1 であとは 0 であるものを $\vec{e}_i$ で表す. すなわち,

$$\vec{e}_1 := (1, 0, \dots, 0), \quad \vec{e}_2 := (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad \vec{e}_n := (0, 0, \dots, 1).$$

これらを組にしたものを, $\mathbb{R}^n$ の**標準基底** (canonical basis) とよぶ.

定義 (偏微分) $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ を変数とする関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ と $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in X$ を考える.

- 関数 f が $\vec{a}$ において**偏微分可能** (partially differentiable) であるとは、すべての $i = 1, 2, \dots, n$ に対し、ある実数 A_i が存在し、

$$\begin{aligned} A_i &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t} \end{aligned}$$

が成り立つことをいう。これは、

$$f(\vec{a} + t\vec{e}_i) = f(\vec{a}) + A_i t + o(t) \quad (t \rightarrow 0)$$

と同じことである。 A_i を関数 f の $\vec{a}$ における**第 i 偏微分係数** (i th partial derivative) もしくは x_i **偏微分係数** (partial derivative with respect to x_i) とよび、

$$\partial_i f(\vec{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{a}), \quad f_{x_i}(\vec{a})$$

などと表す。

- すべての $\vec{a} \in X$ において f が偏微分可能であるとき、 f は **(1 階) 偏微分可能** であるという。

定理 9.2 より、次の定理を得る：

定理 9.1 (全微分可能なら偏微分可能) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が $\vec{a} \in X$ で全微分可能であれば、その点で偏微分可能である。また、勾配ベクトルを $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$ と表すとき、 $i = 1, 2, \dots, n$ に対し

$$\partial_i f(\vec{a}) = A_i.$$

したがって、勾配ベクトルは偏微分係数を用いて次のように書ける：

$$\nabla f(\vec{a}) = (\partial_1 f(\vec{a}), \partial_2 f(\vec{a}), \dots, \partial_n f(\vec{a})).$$

証明. $\vec{a}$ において全微分可能であり、そこでの勾配ベクトルが $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$ であったと仮定する。すなわち、

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|) \quad (\vec{x} \rightarrow \vec{a})$$

が成り立つものとする。このとき、各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して第 i 偏微分係数を計算すると、上の式で $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{e}_i$ と置くことで

$$f(\vec{a} + t\vec{e}_i) = f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (t\vec{e}_i) + o(\|t\vec{e}_i\|) = f(\vec{a}) + A_i t + o(t)$$

を得る。これは $\partial_i f(\vec{a}) = A_i$ であることを意味している。すなわち、 f は $\vec{a}$ において偏微分可能であり、 $\nabla f(\vec{a}) = (\partial_1 f(\vec{a}), \partial_2 f(\vec{a}), \dots, \partial_n f(\vec{a}))$ であることが示された。 ■

定義 (偏導関数) 関数 f が X 上で偏微分可能であるとき, $\vec{a} \in X$ に第 i 偏微分係数 $\partial_i f(\vec{a})$ を対応させる関数を関数 f の **第 i 偏導関数** (ith partial derivative) (もしくは x_i **偏導関数** (partial derivative for x_i) とよぶ. 関数を $y = f(\vec{x})$ と表すとき,

$$\partial_i y = \partial_i f(\vec{x}), \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}), \quad y_{x_i} = f_{x_i}(\vec{x})$$

などと表す.

参考: 方向微分

多変数 (2 変数) の微分積分では, 「偏微分」が重要な役割を果たしていた. たとえば $z = f(x, y)$ の偏微分とは, x 軸と y 軸方向という特定の 2 方向に関する関数の変化率を表現するものである. しかし自然界には x 軸や y 軸といった軸が引かれているわけではなく, これらの方向は私たち人間が設定する便宜的な座標系にすぎない. したがって, 自然現象を記述する際には, 特定の座標系に依存しない形で表現することが求められる. 関数の微分に関していえば, あらゆる方向に対して関数の変化率を調べることが必要となるであろう.

そのために必要なのが, 次の「方向微分」である.

以下, $X \subset \mathbb{R}^n$ を領域 (連結な開集合) であり, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を関数とする.

定義 (方向微分). $\vec{a} \in X$ と $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ を固定して, 時刻 $t = 0$ に $\vec{a}$ を速度 $\vec{v}$ で通る直線 $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$ を考える. このとき, 極限

$$K = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t}$$

が存在するとき, これを関数 f の点 $\vec{a}$ における**速度ベクトル $\vec{v}$ に沿った方向微分 (係数)** (directional derivative) とよび, 次のように表す.

$$K = D_{\vec{v}} f(\vec{a}).$$

この極限 K は 0 に十分近い実数 t に対して

$$t \mapsto \vec{a} + t\vec{v} \xrightarrow{f} f(\vec{a} + t\vec{v}) \in \mathbb{R}$$

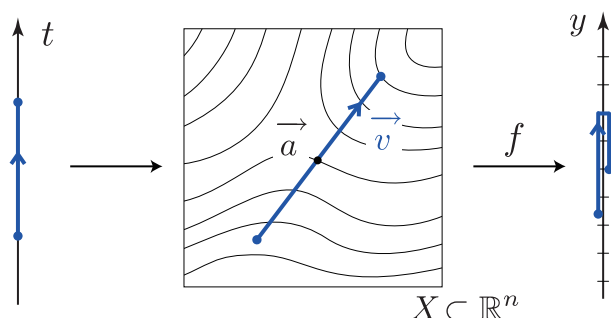
と合成して得られる 1 変数関数 $F(t) := f(\vec{a} + t\vec{v})$ の, $t = 0$ における微分係数である. また, 私たちの微分係数の定義に即して書けば, $t \rightarrow 0$ のときある定数 K が存在して

$$F(0+t) = F(0) + Kt + o(t)$$

と書けるとき, すなわち

$$f(\vec{a} + t\vec{v}) = f(\vec{a}) + Kt + o(t) \quad (9.3)$$

と書けるとき, この定数 K を関数 f の点 $\vec{a}$ における速度ベクトル $\vec{v}$ に沿った方向微分とよぶのである.



例 2. $f(x, y) = x^2 + y^2$ の $\vec{a} = (1, 2)$ におけるベクトル $\vec{v} = (1, -1)$ に沿った方向微分を求めてみよう.

$$(x, y) = \vec{a} + t\vec{v} = (1, 2) + t(1, -1) = (1+t, 2-t)$$

で表される直線上での f の値を考えればよい:

$$\begin{aligned} f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a}) &= f(1+t, 2-t) - f(1, 2) = (1+t)^2 + (2-t)^2 - (1^2 + 2^2) \\ &= -2t + 2t^2 \end{aligned}$$

より, $f(\vec{a} + t\vec{v}) = f(\vec{a}) - 2t + o(t)$ であり,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t} = -2 + 2t \rightarrow -2 \quad (t \rightarrow 0).$$

よって求める方向微分は -2 である.

定理 9.2 (全微分可能性と方向微分) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が $\vec{a} \in X$ で全微分可能であるとき, 任意の「速度ベクトル」 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ に沿った方向微分 $D_{\vec{v}}f(\vec{a})$ が存在する. さらに, 次が成り立つ:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}. \quad (9.4)$$

ここで, 右辺は「勾配ベクトル」と「速度ベクトル」の内積である.

例 3. 前回計算したように例 2 の関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ は点 $(1, 2)$ において全微分可能であり, そこでの勾配ベクトルは $(2, 4)$ であった, 一方定理 9.2 より, 勾配ベクトル $(2, 4)$ と速度ベクトル $(1, -1)$ の内積の値は -2 である. すなわち, 例 2 の結果とつじつまが合っている.

証明. $\vec{a}$ で全微分可能なので, 勾配ベクトルを $\vec{A} := \nabla f(\vec{a})$ とおくと, $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|) \quad (9.5)$$

がなりたつ. いま任意に速度ベクトル $\vec{v}$ を固定し, $\vec{x}(t) := \vec{a} + t\vec{v}$ で表される $\mathbb{R}^n$ 内の直線を考える. t が十分 0 に近いとき, $\vec{x}(t)$ は $\vec{a}$ の十分近くにあり, $\vec{x}(t) \in X$ となる. とくに, $t \rightarrow 0$ のとき $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{a}$ となるから, 式 (9.5) より

$$\begin{aligned} f(\vec{a} + t\vec{v}) &= f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (t\vec{v}) + o(\|t\vec{v}\|) \\ \iff f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a}) &= (\vec{A} \cdot \vec{v})t + o(|t|) \end{aligned}$$

となるから, $\vec{v}$ に沿った方向微分 $D_{\vec{v}}f(\vec{a})$ は存在し, その値は $\vec{A} \cdot \vec{v} = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$ である. ■

講義第 10 回 (1/18)：多変数のテイラーの定理

配布日：1/18/2021 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 21-22 章 [三宅] 4.2 - 4.3.

合成関数の微分

微分可能な曲線. まず $\mathbb{R}^n$ における「曲線」を定義する.

定義 (曲線, 速度ベクトル) • 閉区間 $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ を動く変数 t に対し, $\mathbb{R}^n$ 内のベクトル

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

をひとつ対応させる. この $\vec{x}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) が $\mathbb{R}^n$ 内の**曲線** (curve) であるとは, 各 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ がすべて t の連続関数であることをいう. また, 変数 t を曲線 $\vec{x}(t)$ の**パラメーター** (parameter) もしくは**時刻** (time) とよぶ.

- 曲線 $\vec{x}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) が**微分可能** (differentiable) であるとは, 各 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ がすべて t について微分可能な関数であることをいう
- 微分可能な曲線 $\vec{x}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) に対し,

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) := \left(\frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t) \right)$$

を $\vec{x}(t)$ のパラメーター (時刻) t における**速度ベクトル** (velocity) とよぶ.

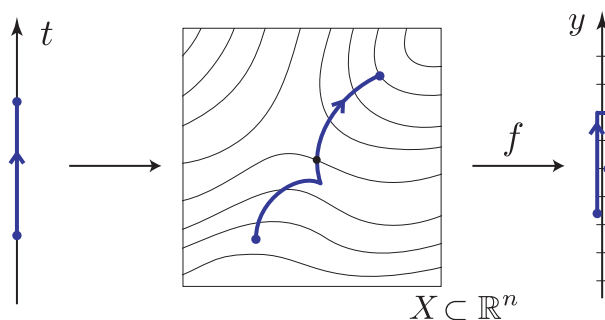
注意. 集合 $\{\vec{x}(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$ のことも「曲線」とよばれる.

注意. 「微分可能」を「 C^1 級」に変えることで, 「 C^1 級曲線」が定義される. C^1 級曲線の速度ベクトルがどの時刻でもゼロベクトルにならないとき, 「滑らかな曲線」とよばれる¹.

曲線と関数の合成とその微分. 以下, X は $\mathbb{R}^n$ 内の領域とし, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を関数とする. f が全微分可能であるとき, その勾配ベクトルは

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\partial_1 f(\vec{x}), \dots, \partial_n f(\vec{x}) \right)$$

と偏微分係数を用いて表現できるのであった.



このとき, 次が成り立つ:

¹滑らかでない C^1 曲線は速度がゼロベクトルになる点において角 (かど) をもつことができる. たとえば, (t^2, t^3) や $(t^3, |t^3|)$ を $-1 \leq t \leq 1$ で図示してみよ.

命題 10.1 (合成関数の微分) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(\vec{x})$ は全微分可能な関数とする. また, 微分可能な曲線 $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) はすべての t で $\vec{x}(t) \in X$ を満たしているものとする. このとき, 合成関数 $F(t) := f(\vec{x}(t))$ の t に関する微分は

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(t) &= \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{x}(t) \quad : \text{勾配ベクトルと速度ベクトルの内積} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t)) \frac{dx_i}{dt}(t). \end{aligned}$$

注意. $\frac{d(f \circ \vec{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$ などと表現されることも多い.

注意. 曲線の速度ベクトル $\frac{d\vec{x}}{dt}(t)$ を $\vec{v}$ とおくと, この微分の値は関数 f の $\vec{v}$ に沿った方向微分 $D_{\vec{v}} f(\vec{x}(t))$ と一致する.

証明. $t \in [\alpha, \beta]$ を固定し, $\vec{v} := \frac{d\vec{x}}{dt}(t)$ とおく. いま, $t + \Delta t \in [\alpha, \beta]$ を満たしながら $\Delta t \rightarrow 0$ とすると, 曲線 $\vec{x}(t)$ の微分可能性より

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \vec{x}(t) + \vec{v} \Delta t + \vec{o}(\Delta t)$$

(ただし, $\vec{o}(\Delta t)$ は各成分が $o(\Delta t)$ と表されるようなベクトル) と表される. そこで $\vec{A} := \nabla f(\vec{x}(t))$ とおけば, 関数 f の全微分可能性より

$$\begin{aligned} f(\vec{x}(t + \Delta t)) - f(\vec{x}(t)) &= \vec{A} \cdot (\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)) + o(\|\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)\|) \\ &= \vec{A} \cdot (\vec{v} \Delta t + \vec{o}(\Delta t)) + o(\|\vec{v} \Delta t + \vec{o}(\Delta t)\|) \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{v}) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

微分係数の定義より, 時刻 t における $F(t)$ の微分係数は $\vec{A} \cdot \vec{v} = \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}(t)$ である. ■

例 1. $f(x, y, z)$ が C^1 級であるとき, t の関数 $F(t) := f(t, t^2, e^t)$ の導関数を求めよう. まず曲線 $t \mapsto (t, t^2, e^t)$ で定まる関数の速度ベクトルは $(1, 2t, e^t)$ なので,

$$\frac{dF}{dt}(t) = \begin{pmatrix} f_x(t, t^2, e^t) \\ f_y(t, t^2, e^t) \\ f_z(t, t^2, e^t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{pmatrix} = f_x(t, t^2, e^t) + 2t f_y(t, t^2, e^t) + e^t f_z(t, t^2, e^t).$$

高階導関数と C^n 級関数

以下, X を $\mathbb{R}^n$ 内の領域もしくは閉領域 ($\rightarrow$ 講義第 8 回) とし, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を関数とする.

定義 (高階導関数) • $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は偏微分可能であるとする. $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し, 第 j 偏導関数の第 i 偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right) = \partial_i (\partial_j f) = (f_{x_j})_{x_i}$$

を

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i}$$

などと表す. とくに, $i = j$ のときは $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \partial_i^2 f$ とも表す. これらを関数 f の **2 階偏導関数** (second partial derivative) とよぶ. すべての 2 階導関数 $f_{x_j x_i}$ が存在するとき, f は **2 回偏微分可能** という. 同様に, 自然数 N に対して関数 f の **N 階偏導関数** と **N 回偏微分可能性** が定まる.

- 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が連続であることを **C^0 級** であるという. また, 自然数 N に対し, 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ の N 階までの導関数が存在し, しかもそれらがすべて連続であるとき, 関数 f は **C^N 級 (関数)** (function of class C^N) であるという.
- 関数 f がすべての自然数 N に対して C^N 級であるとき, **C^∞ 級 (関数)** (function of class C^∞) もしくは **滑らか** (smooth) であるという.

C^1 級関数と全微分可能性. 「 C^1 級関数」を考える最大の理由は, 次の定理が成り立つことにある:

定理 10.2 (C^1 級なら全微分可能) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 級関数であれば, すなわち, 偏導関数 $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ が存在しすべて連続であれば, 関数 f は全微分可能である. とくに, 勾配ベクトルは偏微分係数を用いて次のように書ける: 任意の $\vec{a} \in X$ に対し,

$$\nabla f(\vec{a}) = (\partial_1 f(\vec{a}), \partial_2 f(\vec{a}), \dots, \partial_n f(\vec{a})).$$

証明. 2 変数の場合と同様 ([川平] 公式 19.1, [三宅] 定理 4.2.4). ■

注意. 一般に, 与えられた関数が与えられた点で微分可能であることを定義通りに確認するには, 巧みな (もしくは, 単に面倒な) 式変形が必要となり, あまり実用的とはいえない. 一方, 与えられた関数が C^1 級関数であることを確認するのは比較的やさしい. 実際, 偏微分の計算自体は本質的に 1 変数の微分計算であり, 得られた偏導関数が連続であるかどうかは式の形から一目で判定できることが多い.

例 2. xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = xy^2 \sin e^{x^2+y^2}$ はすべての点で全微分可能である. なぜなら, f_x と f_y は x と y の連続関数の和, 積, 合成で書けることが (計算するまでもなく) わかるので連続, したがって f は C^1 級関数である. 定理 10.2 より, これは全微分可能である.

C^2 級関数と偏微分の順序交換. 「 C^2 級以上の関数」を考える利点は, 次の定理が成り立つことにある:

定理 10.3 (偏微分の順序交換) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が C^2 級関数であれば, 任意の $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ と任意の $\vec{a} \in X$ に対し,

$$\partial_i \partial_j f(\vec{a}) = \partial_j \partial_i f(\vec{a}).$$

とくに, C^N 級であれば, N 階までの偏微分の順序は自由に交換してよい.

証明. 2 変数の場合と同様 ([川平] の定理 22.1 参照). ■

平均値の定理

内分点. $\mathbb{R}^n$ 内の $\vec{x}$ がベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の**内分点** (internally dividing point) であるとは, ある $\theta \in [0, 1]$ が存在して, $\vec{x} = (1 - \theta)\vec{p} + \theta\vec{q}$ と表されることをいう². また, 内分点全体の集合を $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を結ぶ線分とよぶ.

平均値の定理. 次の定理は, 1 変数関数の「平均値の定理」にあたるものである:

定理 10.4 (多変数関数の平均値の定理) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を領域 X 上の C^1 級関数とし, X に含まれる開球 $\mathbb{B}(\vec{a}, r)$ を任意に選ぶ. このときすべての $\vec{x} \in \mathbb{B}(\vec{a}, r)$ に対し, $\vec{x}$ と $\vec{a}$ の内分点 $\vec{c}$ が存在し,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}). \quad (10.1)$$

注意. 下記の証明からもわかるが, $\vec{x}$ と $\vec{a}$ を結ぶ線分がすべて X に含まれていれば, 式 (10.1) を満たす $\vec{c}$ が線分上に存在する. すなわち, 開球全体が X に含まれている必要はない. また, 関数 f は全微分可能であればよく, C^1 級でなくてもよい.

証明. $\vec{v} := \vec{x} - \vec{a}$, $\vec{p}(t) := \vec{a} + t\vec{v}$ ($0 \leq t \leq 1$) とおく. このとき, $\vec{p}(t)$ は $\vec{x}$ と $\vec{a}$ の内分点である. いま, 1 変数関数 $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を $F(t) := f(\vec{p}(t))$ と定義しよう. $\vec{p}(t)$ は微分可能な曲線であり, f は全微分可能であるから, 命題 10.1 より

$$\frac{dF}{dt}(t) = \nabla f(\vec{p}(t)) \cdot \vec{v}$$

が成り立つ. よって F は t に関して微分可能であり, C^1 級関数でもある. そこで, (1 変数関数の) 平均値の定理を適用すると,

$$F(1) - F(0) = \frac{dF}{dt}(\theta)(1 - 0) = \frac{dF}{dt}(\theta)$$

を満たす $\theta \in (0, 1)$ が存在することがわかる. すなわち,

$$\begin{aligned} f(\vec{p}(1)) - f(\vec{p}(0)) &= \nabla f(\vec{p}(\theta)) \cdot \vec{v} \\ \iff f(\vec{x}) - f(\vec{a}) &= \nabla f(\vec{p}(\theta)) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) \end{aligned}$$

が成り立つ. よってこの $\vec{p}(\theta)$ を $\vec{c}$ とおけばよい. ■

テイラー展開.

1 変数関数のテイラー展開を思い出そう. たとえば $y = f(x)$ が C^2 級であれば, 2 次の「テイラー展開」

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c)}{2!}(x - a)^2$$

² $\vec{p} = \vec{q}$ の場合も認める.

(ただし c は x と a の間にある正体不明の数) が成り立つのであった. これは $\Delta x := x - a$ とおくと,

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(c)}{2!}\Delta x^2$$

と書いても同じことである. a から $+\Delta x$ 変化したとき, 関数の値が $f(a)$ から Δx に依存してどのくらい変化するかがわかる書き方である.

2 変数関数の場合でも, 同様の「テイラー展開」を考えよう. ここでは応用上重要な 2 次の展開を主に扱うことにする.

定理 10.5 (2 変数 2 次のテイラー展開) $z = f(x, y)$ は点 (a, b) を含む円板上の C^2 級関数とする. その円板内の任意の点 $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ に対し, この点と (a, b) の内分点 (a', b') が存在して, 次の等式が成り立つ:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + P\Delta x + Q\Delta y \quad : 1 \text{ 次近似}$$

$$+ \frac{1}{2}(A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2). \quad : \text{剰余項}$$

ただし, $P := f_x(a, b)$, $Q := f_y(a, b)$, $A' := f_{xx}(a', b')$, $B' := f_{xy}(a', b')$, $C' := f_{yy}(a', b')$.

下線部に関する注意. 「円板」であることは本質的ではなく, たとえば楕円や長方形でもよい. 証明を見ればわかるが, 点 (a, b) と $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ を結ぶ線分上で関数が定義されていることが本質的な条件である.

また, (a', b') は存在だけが保証された「正体不明の点」である. これは (a, b) と $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ を内分する点であるから, $0 < c < 1$ を満たす (正体不明の) 定数 c が存在して $(a', b') = (a + c\Delta x, b + c\Delta y)$ と表される.

例 3. $z = x^3 + y^3$, $(a, b) = (1, 2)$ とする. 2 階までの偏導関数は $z_x = 3x^2$, $z_y = 3y^2$, $z_{xx} = 6x$, $z_{xy} = 0$, $z_{yx} = 0$, $z_{yy} = 6y$ であるから, 定理 10.5 より, 2 次のテイラー展開は次のようになる:

$$\begin{aligned} & (1 + \Delta x)^3 + (2 + \Delta y)^3 \\ &= 9 + 3\Delta x + 12\Delta y + \frac{1}{2}(6a'\Delta x^2 + 2 \cdot 0 \cdot \Delta x\Delta y + 6b'\Delta y^2) \\ &= 9 + 3\Delta x + 12\Delta y + 3a'\Delta x^2 + 3b'\Delta y^2. \end{aligned}$$

ただし (a', b') は $(1, 2)$ と $(1 + \Delta x, 2 + \Delta y)$ を結ぶ線分上にある「正体不明の点」である. (素直に展開すれば $(1 + \Delta x)^3 + (2 + \Delta y)^3 = 9 + 3\Delta x + 12\Delta y + 3\Delta x^2 + 6\Delta y^2 + \Delta x^3 + \Delta y^3$ であるから, 剰余項の実体は $3\Delta x^2 + 6\Delta y^2 + \Delta x^3 + \Delta y^3$. これより $(a', b') = (1 + \Delta x/3, 2 + \Delta y/3)$ だとわかる.)

例 4. $z = e^{x+y}$ に対し, 原点 $(0, 0)$ を中心とする 2 次のテイラー展開を計算してみよう. $z_x = z_y = e^{x+y}$ より, $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = e^{x+y}$. とくに, $(0, 0)$ における 2 階までの導関数の値はすべて 1 である.

$(\Delta x, \Delta y)$ にあたるものとして任意に (x, y) を選ぶと, 定理 10.5 より, ある (a', b') が (x, y) と原点を結ぶ線分上に存在し,

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= 1 + x + y + \frac{1}{2}(e^{a'+b'}x^2 + 2e^{a'+b'}xy + e^{a'+b'}y^2) \\ &= 1 + (x + y) + e^{a'+b'}\frac{(x + y)^2}{2!} \end{aligned}$$

となる.

定理 10.5 (2 次のテイラー展開) の証明. 十分に小さい Δx と Δy を固定する. このとき点 (a, b) と点 $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ を結ぶ線分は関数 $f(x, y)$ の定義域に入っている. その線分を時間パラメーター t を用いて

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}}_{\text{速度ベクトル}} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

と表現しておく.

さて $F(t) := f(x(t), y(t))$ ($0 \leq t \leq 1$) とする. このとき, 合成関数の微分 (命題 10.1) より

$$F'(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \begin{pmatrix} f_x(x(t), y(t)) \\ f_y(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

であるから,

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y. \quad (10.2)$$

同様に 2 階導関数について

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt}\{F'(t)\} \\ &= \frac{d}{dt}\{f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y\} \\ &= \frac{d}{dt}\{f_x(x(t), y(t))\}\Delta x + \frac{d}{dt}\{f_y(x(t), y(t))\}\Delta y \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} f_{xx}(x(t), y(t)) \\ f_{xy}(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right\} \Delta x + \left\{ \begin{pmatrix} f_{yx}(x(t), y(t)) \\ f_{yy}(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right\} \Delta y \end{aligned}$$

であるから,

$$F''(t) = f_{xx}(x(t), y(t))\Delta x^2 + 2f_{xy}(x(t), y(t))\Delta x\Delta y + f_{yy}(x(t), y(t))\Delta y^2 \quad (10.3)$$

が成り立つ. $f(x, y)$ は C^2 級なので, 式 (10.3) より $F''(t)$ は連続である. すなわち関数 $t \mapsto F(t)$ は C^2 級であるから, 1 変数のテイラー展開より, ある 0 と t の間の数 c が存在して

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(c)}{2!}t^2$$

が成り立つ. とくに $t = 1$ とすれば, ある $c \in (0, 1)$ が存在して $F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(c)}{2!}$ となる. $(x(0), y(0)) = (a, b)$, $(x(1), y(1)) = (a + \Delta x, b + \Delta y)$, および式 (10.2) より,

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \frac{F''(c)}{2!}. \quad (10.4)$$

右辺の $F''(c)$ の部分は, 式 (10.3) に $t = c$ を代入することで詳しく書き下すことができる. とくに, $(x(c), y(c)) = (a + c\Delta x, b + c\Delta y)$ を (a', b') とおけば, 式 (10.4) は求めるテイラー展開の式となる. ■

一般次数のテイラー展開 かなり複雑になるが, 3 次以上のテイラー展開・漸近展開も 2 次の場合と同様に求めることができる. 結果だけ紹介しておこう.

定理 10.6 (2 変数 n 次のテイラー展開) 関数 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) を含む円板上で C^n 級とする。その円板内の任意の点 $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ に対し、この点と (a, b) の内分点 (a', b') が存在して、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = & f(a, b) + \frac{1}{1!}(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)f(a, b) \\ & + \frac{1}{2!}(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^2 f(a, b) \\ & + \cdots \\ & + \frac{1}{(n-1)!}(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^{n-1} f(a, b) \\ & + \frac{1}{n!}(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^n f(a', b'). \end{aligned}$$

ただし $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$ であり、 $(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^j$ の部分は

$$\begin{aligned} (\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^2 f(a, b) &= (\Delta x^2 \partial_x^2 + 2\Delta x \Delta y \partial_x \partial_y + \Delta y^2 \partial_y^2) f(a, b) \\ &= \Delta x^2 f_{xx}(a, b) + 2\Delta x \Delta y f_{xy}(a, b) + \Delta y^2 f_{yy}(a, b) \end{aligned}$$

のように計算する。

参考：一般次元のテイラーの定理

2 変数のときと同様にして、次の「多変数関数のテイラー展開」を証明できる。

定理 10.7 (多変数関数のテイラー展開) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を領域 X 上の C^N 級関数とし、 X に含まれる開球 $\mathbb{B}(\vec{a}, r)$ を任意に選ぶ。このときすべての $\vec{x} \in \mathbb{B}(\vec{a}, r)$ に対し、 $\vec{x}$ と $\vec{a}$ の内分点 $\vec{c}$ が存在し、 $\vec{x} - \vec{a} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = & \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} (\Delta x_1 \partial_1 + \cdots + \Delta x_n \partial_n)^k f(\vec{a}) \\ & + \frac{1}{N!} (\Delta x_1 \partial_1 + \cdots + \Delta x_n \partial_n)^N f(\vec{c}). \end{aligned}$$

この式を関数 $y = f(\vec{x})$ の $\vec{a}$ における N 次テイラー展開とよぶ。ただし、たとえば $(\Delta x_1 \partial_1 + \Delta x_2 \partial_2)^2 f(\vec{a})$ はまず形式的に $(\Delta x_1^2 \partial_1^2 + 2\Delta x_1 \Delta x_2 \partial_1 \partial_2 + \Delta x_2^2 \partial_2^2) f(\vec{a})$ と展開した上で、 $\Delta x_1^2 f_{x_1 x_1}(\vec{a}) + 2\Delta x_1 \Delta x_2 f_{x_1 x_2}(\vec{a}) + \Delta x_2^2 f_{x_2 x_2}(\vec{a})$ と計算する。

注意. $\Delta \vec{x} := \vec{x} - \vec{a} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ とおき、さらに形式的に $\nabla := (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\Delta \vec{x} \cdot \nabla := \Delta x_1 \partial_1 + \cdots + \Delta x_n \partial_n$ と表現すれば、テイラー展開は

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} (\Delta \vec{x} \cdot \nabla)^k f(\vec{a}) + \frac{1}{N!} (\Delta \vec{x} \cdot \nabla)^N f(\vec{c})$$

とも表される。(実用的に欠けるが、形がきれいなので紹介しておく。)

ヘッセ行列と 2 次形式. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を C^2 級関数とする。 $\vec{a} \in X$ に対し、 n 次正方行列 (すなわち、 $n \times n$ 行列) で (i, j) 成分を $h_{ij} := \partial_i \partial_j f(\vec{a})$ にもつものを $Hf(\vec{a})$ で表し、**ヘッセ行列** (Hesse matrix) という。定理 10.3 より、ヘッセ行列は $h_{ij} = h_{ji}$ を満たす。すなわち、対称行列である。

いま $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ を取るとき、これらを縦ベクトル (すなわち $n \times 1$ 行列)

とみなせば、 $\vec{p}$ の転置 ${}^t\vec{p}$ は横ベクトル ($1 \times n$ 行列) であり、行列としての積

$${}^t\vec{p} Hf(\vec{a}) \vec{q} = (p_1 \ \dots \ p_n) \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

は実数 (1×1 行列) である³. ヘッセ行列を用いて、 C^2 級関数の 2 次のテイラー展開を表現することができる.

定理 10.8 (n 変数関数の 2 次テイラー展開) 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は C^2 級であり、定義域 X は $\vec{a}$ 中心の球 $\mathbb{B}(\vec{a}, r)$ を含んでいるとする. このとき、すべての $\vec{x} \in \mathbb{B}(\vec{a}, r)$ に対し、 $\vec{x}$ と $\vec{a}$ の内分点 $\vec{c}$ が存在し、

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2} {}^t(\vec{x} - \vec{a}) Hf(\vec{c}) (\vec{x} - \vec{a})$$

が成り立つ.

この式は関数 $y = f(\vec{x})$ の 2 次の**テイラー展開**とよばれる.

例題 10.1 (多項式のテイラー展開) $w = f(x, y, z) = xyz$ の点 $(1, -1, 2)$ における 2 次のテイラー展開と漸近展開を計算せよ.

解答. 勾配ベクトルは $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (yz, zx, xy)$, ヘッセ行列は $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$ である. $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x - 1, y + 1, z - 2)$ とおくとき、ある $c \in (0, 1)$ が存在して⁴

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(1, -1, 2) + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\Delta x \ \Delta y \ \Delta z) \begin{pmatrix} 0 & 2 + c\Delta z & -1 + c\Delta y \\ 2 + c\Delta z & 0 & 1 + c\Delta x \\ -1 + c\Delta y & 1 + c\Delta x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\ &= -2 - 2\Delta x + 2\Delta y - \Delta z + 2\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta z - \Delta z\Delta x + 3c\Delta x\Delta y\Delta z. \end{aligned}$$

³任意の $\vec{p} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ に対して ${}^t\vec{p} M \vec{p} > 0$ が成り立つような n 次対称行列は**正定値対称行列** (positive-definite symmetric matrix) とよばれる.

⁴この場合、 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ に依存せず $c = 1/3$ だとわかる.

講義第 11 回 (1/22)：極大と極小

配布日：1/22/2020 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 9.4 節, 23 章 [三宅] 4.3.

グラフの凹凸と極大・極小の判定

関数のグラフがある点で極大か極小か判定する方法を考えよう. 普通は増減表を用いるが, 極値をとる点でのグラフの凹凸がわかれば, 極大か極小かの判定はある程度可能なのである (その証明にテイラー展開を用いる.).

まず関数の凹凸を定義しよう:

定義 (グラフの凹凸) C^2 級の関数 $y = f(x)$ が区間 I で上に凸 [下に凸] であるとは, I 上で $f''(x) < 0$ [$f''(x) > 0$] であることをいう. また, $x = a$ を境にして $f''(x)$ の符号が変化するとき, 点 $(a, f(a))$ をグラフ上の変曲点という.

このとき, 次が成り立つ:

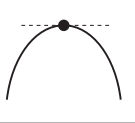
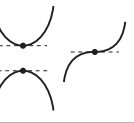
定理 11.1 (極大・極小の判定) C^2 級の関数 $y = f(x)$ は $x = a$ において $f'(a) = 0$ を満たすとする. このとき,

- (1) $f''(a) > 0$ (すなわち下に凸) であれば, $x = a$ で極小値.
- (2) $f''(a) < 0$ (すなわち上に凸) であれば, $x = a$ で極大値.
- (3) $f''(a) = 0$ のときは, さらに調べないとわからない.

例 1. $y = f(x) = x^3 - 3x$ のとき, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. $f'(x) = 0$ となるのは $x = \pm 1$ であるから, これが極値を与える x の候補である ([川平] 命題 7.3 参照). $f''(-1) = -6 < 0$, $f''(1) = 6 > 0$ であるから, 定理 11.1 より, $x = -1$ で極大値 2, $x = 1$ で極小値 -2 となる.

例 2. $y = f(x) = x^4$ のとき, $x = 0$ で明らかに極小だが $f'(0) = f''(0) = 0$. これは定理 11.1 の (3) にあたる.

例 3. $y = f(x) = x^3$ のときも同様に, $f'(0) = f''(0) = 0$ だが $x = 0$ では極値をとらない. このとき $(0, 0)$ は $y = f(x)$ のグラフの変曲点である.

$f'(a) = 0$		
$f''(a) > 0$	$f''(a) < 0$	$f''(a) = 0$
		
極小	極大	?

定理 11.1 の証明. $f'(a) = 0$ と仮定する. このとき, $f(x)$ の $x = a$ における 2 次のテイラー展開は

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

と表される. ただし c は x と a の間の実数である. いま $f(x)$ は C^2 級なので, $f''(x)$ は連続である. よって $x \rightarrow a$ のとき $c \rightarrow a$ かつ $f''(c) \rightarrow f''(a)$ となる. とくに $f''(a) > 0$ のとき, x が a に十分近ければ $f''(c) > 0$ であり, $x \neq a$ のとき

$$f(x) - f(a) = \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2 > 0.$$

よって $x = a$ で $f(x)$ は極小となる. $f''(a) < 0$ のときも同様である. ■

2 変数関数の極大と極小

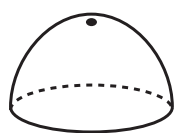
2 変数関数についても, 1 変数と同様の判定基準をテイラー展開から導くことができるのである.

2 変数関数の極大・極小. まずは極値とは何かを定義しておこう.

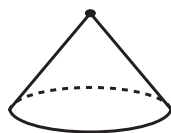
定義 (極大値と極小値) 連続な関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) で**極大** [極小] であるとは, (a, b) を含む十分小さな円板の上で, $(x, y) \neq (a, b)$ のとき $f(x, y) < f(a, b)$ [$f(x, y) > f(a, b)$] が成り立つことをいう.

このとき $f(a, b)$ の値を**極大値** [極小値] とよぶ. 極大値と極小値をあわせて**極値**ともよばれる.

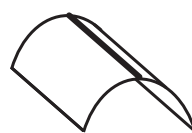
たとえば次の図の場合, 左のふたつは極大値を与えているが右のふたつは極大値ではない. 極大値を与える点は, 局所的に最大値をとる「唯一の」点でなくてはならないからである.



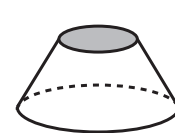
極大



極大

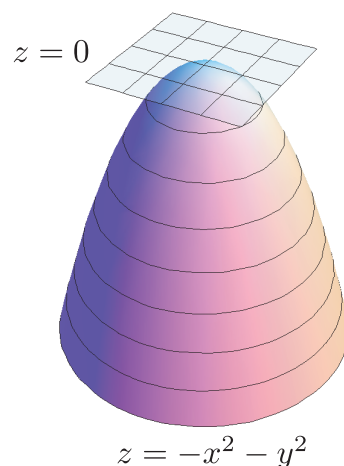
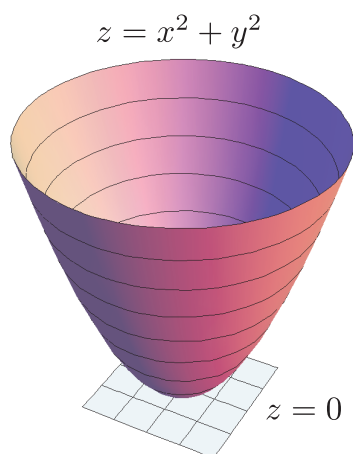


極大でない



極大でない

例 1 (極大と極小). 2 次関数 $z = x^2 + y^2$ は原点 $(0, 0)$ において極小値をとる. (原点では $z = 0$ だが, それ以外では $z > 0$ なので.) 同様に, $z = -x^2 - y^2$ は原点において極大である.



例 2 (全微分できないが極大). 上の図の左から 2 番目のような円錐状のグラフを実現する関数として, $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ (の原点近く) が考えられる. 簡単な関数に見えるが, 原点のまわりで C^1 級でない (接平面をもたない, すなわち原点で全微分可能ではない) ため, このあと紹介する極値の判定法 (定理 11.4) の適用範囲外である.

極値なら偏微分が 0. 次の命題は 1 変数のときの「 $x = a$ で極値なら $f'(a) = 0$ 」にあたる条件である.

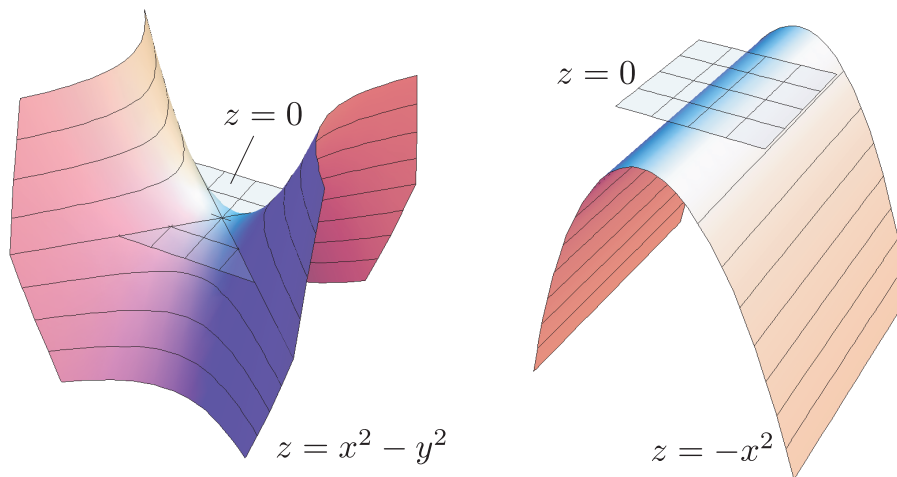
命題 11.2 (極値の必要条件) C^1 級関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) で極値をもつならば,

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

証明. 3次元グラフもしくは等高線グラフの $x = a$ および $y = b$ における切り口を考えれば明らか. (ちゃんと示すにはロルの定理の証明のような議論を関数 $x \mapsto f(x, b)$ や $y \mapsto f(a, y)$ に適用すればよい. ロルの定理については, [川平] 定理 7.1, [三宅] 定理 2.2.2) ■

命題 11.2 の逆は成り立たない. すなわち, 次の例のように, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ であっても極値をとるとはかぎらない.

例 3 (極値でない例：鞍点). $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ のとき, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. しかし, $y = 0$ のとき $f(x, y) = x^2 \geq 0$, $x = 0$ のとき $f(x, y) = -y^2 \leq 0$ となるので, 原点において極大でも極小でもない (次の図, 左). いわゆる, **鞍点**の例である¹.



例 4 (極値でない例). $z = f(x, y) = -x^2$ のとき, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. しかし関数の値は $y = 0$ のとき (すなわち x 軸上で) 恒等的に 0 なので, 原点において極大でも極小でもない (上の図, 右).

判別式による極値の判定法

テイラー展開を用いた考察. 1変数のとき (定理 11.1) は, 関数を 2 次のテイラー多項式で近似することで, 極大と極小を判定した.

2変数関数で同様の考察をしてみよう. まずはテイラー展開を思い出しておく:

¹ $f(x, y)$ の 3次元グラフを考えたとき, 平面 $y = 0$ での断面では極小だが, 平面 $x = 0$ での断面では極大である. このように, 断面をとる方向に応じて極大と極小が混在するような点を「鞍点」という.

定理 11.3 (2 変数 2 次のテイラー展開) $z = f(x, y)$ は点 (a, b) を含む円板上の C^2 級関数とする. その円板内の任意の点 $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ に対し, この点と (a, b) の内分点 (a', b') が存在して, 次の等式が成り立つ:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + P\Delta x + Q\Delta y \quad : 1 \text{ 次近似}$$

$$+ \frac{1}{2}(A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2) \quad : \text{剰余項}$$

ただし, $P := f_x(a, b)$, $Q := f_y(a, b)$, $A' := f_{xx}(a', b')$, $B' := f_{xy}(a', b')$, $C' := f_{yy}(a', b')$.

関数 $f(x, y)$ が (a, b) で極値を取るならば, 命題 11.2 より $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ でなくてはならない. よって 2 変数テイラー展開 (定理 11.3) より, $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ が $(0, 0)$ に十分に近いつき

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) \approx f(a, b) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) \quad (11.1)$$

と近似される. ただし $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$ である. したがって, (a, b) から $(\Delta x, \Delta y)$ 移動したときの関数の増減はほぼ下線部の正負だけで決まる. そこで, $A \neq 0$ と仮定した上で

$$\underline{A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2} = A\left(\Delta x + \frac{B\Delta y}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}\Delta y^2$$

と式変形してみよう. たとえば $A > 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ であるとき, この式の値は正である. これは, $f(x, y)$ が (a, b) において極小値をとることを示唆している. (近似式による議論なのでこの時点では断定はできない.)

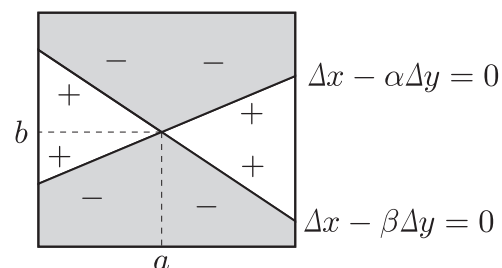
同様に, $A < 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ であるとき, 下線部の値は負となるので, $f(x, y)$ は (a, b) で極大値をとるであろう.

$AC - B^2 < 0$ のときは, 方程式 $At^2 + 2Bt + C = 0$ が異なるふたつの実数解をもつから, それを α, β とおく, このとき

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = A(\Delta x - \alpha\Delta y)(\Delta x - \beta\Delta y)$$

と書ける. よって右図 (これは $A > 0$ のときの図) のように考えると, $(\Delta x, \Delta y)$ のとり方次第で下線部は正の値も負の値も取りうることをわかる. これは $f(x, y)$ が (a, b) で極値でない (鞍点である) ことを示唆している.

以上のような議論を精密に行うことで, 次のような極値判定法が得られるのである.



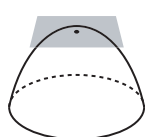
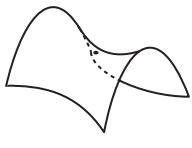
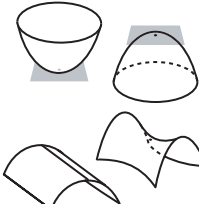
定理 11.4 (極値の判定) C^2 級関数 $z = f(x, y)$ は (a, b) で $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ を満たすとする. このとき,

$$D = D(a, b) := f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \{f_{xy}(a, b)\}^2$$

を $f(x, y)$ の (a, b) における**判別式**とよび, 以下が成り立つ.

- (i) $D > 0$, $f_{xx}(a, b) > 0$ のとき, (a, b) で**極小**.
- (ii) $D > 0$, $f_{xx}(a, b) < 0$ のとき, (a, b) で**極大**.
- (iii) $D < 0$ のとき, (a, b) は**極値とならない (鞍点)**.
- (iv) $D = 0$ のときは, さらに調べないと分からない.

結果を表にしてまとめておこう. 証明は例題のあとで与える.

$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$			
$D > 0$		$D < 0$	$D = 0$
$f_{xx}(a, b) > 0$	$f_{xx}(a, b) < 0$		
			
(i) 極小	(ii) 極大	(iii) 極値でない	(iv) ?

例 5. 例 1 の関数 $z = x^2 + y^2$ の原点は (i) の例, $z = -x^2 - y^2$ の原点は (ii) の例である. また, 例 3 の関数 $z = x^2 - y^2$ の原点は (iii) の例, 例 4 の関数 $z = -x^2$ の原点は (iv) の例である. (これらはすべて 2 次関数なので, 先ほどの式 (11.1) を用いた議論が「近似による推論」ではなく, 「証明」になっている.)

例題 11.1 (極大・極小 1) $f(x, y) = 1 + 2x - 3y - 2x^2 - xy - y^2$ の極値が存在すれば, すべて求めよ.

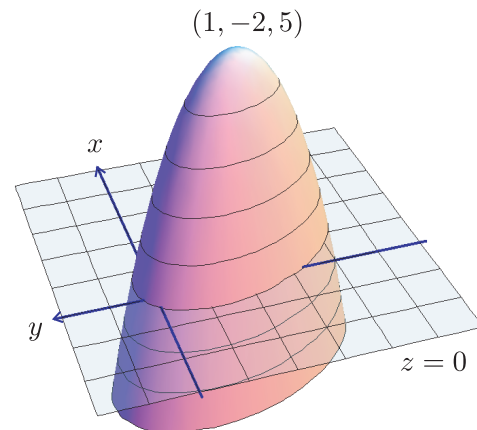
解答. 連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2 - 4x - y = 0 \\ f_y(x, y) = -3 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

をとくと, $(x, y) = (1, -2)$. よってこれが極値を与える点の唯一の候補である (命題 11.2). また, $f_{xx}(x, y) = -4$, $f_{xy}(x, y) = -1$, $f_{yy}(x, y) = -2$ より, 判別式は

$$D(1, -2) = -4 \cdot (-2) - (-1)^2 = 7 > 0.$$

よって定理 11.4 の (ii) より, $(1, -2)$ で極大値 $f(1, -2) = 5$ をとる. ■



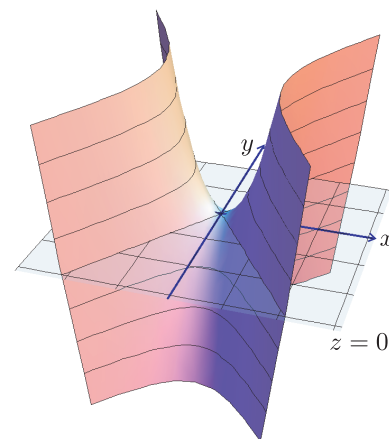
例題 11.2 (極大・極小 2) $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ の極値が存在すれば, すべて求めよ.

解答. 連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x = 0 \\ f_y(x, y) = -2y = 0 \end{cases}$$

をとくと, $(x, y) = (0, 0)$. よってこれが極値を与える点の唯一の候補である. また, $f_{xx}(x, y) = 4$, $f_{xy}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = -2$ より, 判別式は

$$D(0, 0) = 4 \cdot (-2) - 0^2 = -8 < 0.$$



よって定理 11.4 の (iii) より, $(0, 0)$ は極値ではない. すなわち, 関数 $f(x, y)$ は極値をとらない. ■

例題 11.3 (極大・極小 3) $f(x, y) = x^2 + y^4$ の極値が存在すれば, すべて求めよ.

考察. 連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x = 0 \\ f_y(x, y) = 4y^3 = 0 \end{cases}$$

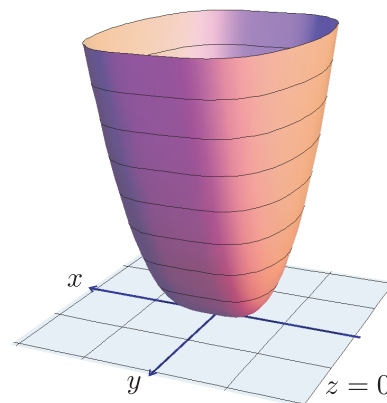
をとくと, $(x, y) = (0, 0)$. よってこれが極値を与える点の唯一の候補である. また, $f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = 12y^2$ より, 判別式は

$$D(x, y) = 2 \cdot 12y^2 - 0^2 = 24y^2.$$

したがって $D(0, 0) = 0$ である. 定理 11.4 の (iv) より, $(0, 0)$ が極値かどうかはさらに詳しく調べないと判定できない.

実際には, 極小値をとることがごく簡単にわかる:

解答. $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき, 明らかに $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$. よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で極小値 0 をとる. ■



最後に定理 11.4 の厳密な証明を与えておこう.

定理 11.4 の証明. 以下記号を簡単にするために

$$A = f_{xx}(a, b), \quad B = f_{xy}(a, b), \quad C = f_{yy}(a, b), \quad D = AC - B^2$$

とおく. また, 以下, $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ と仮定する.

定理 11.3 より, $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ が (a, b) を中心とする十分小さな円板内にあるとき, これら 2 点を結ぶ線分の上にある (a', b') が存在し, 次が成り立つ:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \frac{1}{2}(A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2).$$

ただし $A' = f_{xx}(a', b')$, $B' = f_{xy}(a', b')$, $C' = f_{yy}(a', b')$ である. 仮定より関数 $f(x, y)$ は C^2 級なので, 2 階偏導関数は連続である. いま $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ のとき, $(a', b') \rightarrow (a, b)$ であるから,

$$A' \rightarrow A, \quad B' \rightarrow B, \quad C' \rightarrow C$$

となる. よって, (i) の条件「 $D > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) = A > 0$ 」を仮定すると, $(\Delta x, \Delta y)$ が十分 $(0, 0)$ に近ければ $A'C' - (B')^2 > 0$ かつ $A' > 0$ が成り立つ. このとき下線部は

$$\underline{A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2} = A'\left(\Delta x + \frac{B'\Delta y}{A'}\right)^2 + \frac{A'C' - (B')^2}{A'}\Delta y^2 > 0$$

であるから, (a, b) において f は極小値をとる. (ii) の場合も同様である.

次に (iii) の条件を仮定してみよう. このとき, 2 次以下の関数 $F(t) = At^2 + 2Bt + C$ は正負いずれの値をとることもできる².

そこで, まず $F(t_0) > 0$ となる t_0 を選んで固定する. $(\Delta x, \Delta y)$ を $\Delta x = t_0\Delta y \neq 0$ を満たすようにとるとき, 定理 11.3 より上と同様に (a', b') と A', B', C' がとれて,

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = \frac{1}{2}(A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2) = \frac{\Delta y^2}{2}(A't_0^2 + 2B't_0 + C').$$

ここで, $(\Delta x, \Delta y)$ が $\Delta x = t_0\Delta y \neq 0$ かつ $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ となるとき, やはり $(a', b') \rightarrow (a, b)$ であるから,

$$A' \rightarrow A, \quad B' \rightarrow B, \quad C' \rightarrow C$$

が成り立つ. このとき,

$$F(t_0) - (A't_0^2 + 2B't_0 + C') = (A - A')t_0^2 + 2(B - B')t_0 + (C - C') \rightarrow 0$$

であるから, $F(t_0) > 0$ より, $(\Delta x, \Delta y)$ が十分に $(0, 0)$ に近いとき $A't_0^2 + 2B't_0 + C' > 0$ である. よって, そのような $(\Delta x, \Delta y)$ に対し, $f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) > 0$ である. すなわち, $f(x, y)$ は (a, b) の近くで $f(a, b)$ よりも大きな値を取ることがわかる.

同様の議論を行えば, $f(x, y)$ は (a, b) の近くで $f(a, b)$ よりも小さな値を取ることがわかる. 以上のことから, $f(a, b)$ は極値ではない. ■

²高校数学. $A^2 - BC < 0$ より, $A = 0$ ならば $B \neq 0$ なので, グラフは傾きが 0 でない直線となる. $A \neq 0$ ならば 2 次関数であり, $A^2 - BC < 0$ よりグラフの頂点は t 軸を突き抜ける.

講義第 12 回 (1/25)：級数の収束・絶対収束

配布日：1/25/2021 Version：1.0

参考書の該当箇所：[三宅] 6.1.

以下，[高木] は高木貞治著の「解析概論」を意味する。

数列と級数の極限

以下，複素数からなる列を単に数列もしくは点列といい，実数のみからなる列をとくに**実数列**という。

数列の極限とコーシー列. 数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数 A に**収束**するとは，任意の正の数 ϵ に対し，ある自然数 N が存在し，

$$n \geq N \implies |z_n - A| < \epsilon$$

が成り立つことをいう。このとき，

$$z_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty)$$

と表す。また，複素数 A を数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限**といい，

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

と表す。

数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**コーシー列**であるとは，任意の正の数 ϵ に対し，ある自然数 N が存在し，

$$n \geq m \geq N \implies |z_n - z_m| < \epsilon$$

が成り立つことをいう。

つぎの事実は，実数論の根幹をなす定理であった：

定理 12.1 (定理 2.3, 再)

実数列が収束することの必要十分条件は，コーシー列であることである。

これより，つぎが成り立つ。

定理 12.2

複素数列が収束することの必要十分条件は，コーシー列であることである。

注意. 数列の収束性を定義通り確認するには，極限の値をあらかじめ知っておく必要がある。一方，極限の値を知らなくても，コーシー列かどうかの確認はできる。

証明. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数 A に収束するとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在し， $n \geq N$ のとき $|z_n - A| < \epsilon$ が成り立つ。よって $n \geq m \geq N$ とすれば，三角不等式より

$$|z_n - z_m| = |(z_n - A) - (z_m - A)| \stackrel{\text{三角不等式}}{\leq} |z_n - A| + |z_m - A| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

ϵ は任意なので， $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である。逆に $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n + y_n i\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であるとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在し， $n \geq m \geq N$ のとき $|z_n - z_m| < \epsilon$ が成り立つ。

$$|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m| < \epsilon$$

であるから， $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ もコーシー列であり，定理 12.1 よりある実数 a に収束する。とくに $n \rightarrow \infty$ とすれば $|a - x_m| \leq \epsilon$ を得るから， $m \geq N$ のとき $|x_m - a| < 2\epsilon$ 。同様に $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ もコーシー列であり，ある

担当教員: 川平 友規

実数 b に収束し, $m \geq N$ のとき $|y_m - b| < 2\epsilon$. したがって, $|z_m - (a + bi)| \leq |x_m - a| + |y_m - b| < 4\epsilon$. $\epsilon > 0$ は任意に選べるから, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき $a + bi$ に収束する. ■

命題 12.3 (極限の四則)

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = B$ のとき, つぎが成り立つ.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = A + B$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = AB$
 (3) $B \neq 0$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{A}{B}$.

証明. 実数列の場合と全く同じである. ■

級数の収束. 数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, n 項目までの和

$$S_n = \sum_{k=0}^n z_k = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$$

が定める数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n, \quad \sum_{n \geq 0} z_n, \quad z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$$

などと表し, 数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ の定める**級数**という. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が存在するとき, 級数 $z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$ は**収束**するといひ, 存在しないとき**発散**するといひ.

注意. 逆に数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ が先に与えられたとき, $z_0 := S_0, z_n := S_n - S_{n-1} (n = 1, 2, \dots)$ と定義すれば, 数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ の収束・発散は級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ の収束・発散へといひ換えられる. すなわち,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{S_0 + (S_1 - S_0) + \cdots + (S_n - S_{n-1})\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{z_0 + z_1 + \cdots + z_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n. \end{aligned}$$

数列と級数は表裏一体なのである.

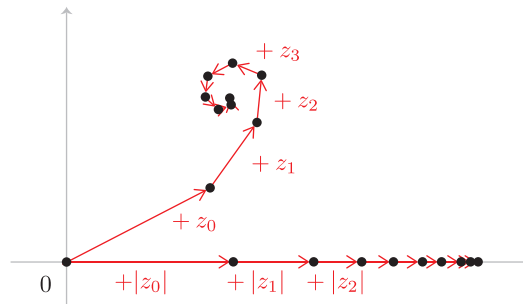
級数の絶対収束性. 数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ が定める級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + \cdots$ が**絶対収束**するとは, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = |z_0| + |z_1| + \cdots$ が収束することをいう.

定理 12.4 (絶対収束なら収束)

絶対収束する級数は収束する.

注意. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ はつぎの図のように, 原点 0 から $+z_0$ 移動, さらに $+z_1$ 移動, と繰り返したときの道のりにあたる. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ が収束し有限の正の値であるとき, もとの級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ の表現する (無限に

折れ曲がった) 折れ線は有界な範囲に収まり, しかも無限に振動し続けることができない. むしろ, 「発散できない」状態が絶対収束なのである.



証明. $S_n := z_0 + \cdots + z_n$, $T_n := |z_0| + \cdots + |z_n| \geq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくと, 絶対収束性より $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束列であり, したがってコーシー列である (定理 12.2). よって, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある自然数 N が存在し, $n \geq m \geq N$ のとき, $|T_n - T_m| = T_n - T_m < \epsilon$ とできる. 一方, 三角不等式より

$$\begin{aligned} |S_n - S_m| &= |z_n + z_{n-1} + \cdots + z_{m+1}| \\ &\leq |z_n| + |z_{n-1}| + \cdots + |z_{m+1}| \quad \leftarrow \text{三角不等式} \\ &= T_n - T_m < \epsilon \end{aligned}$$

であるから, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ もコーシー列である. すなわち, 級数 $z_0 + z_1 + \cdots$ は収束する. ■

例. $n = 0, 1, \dots$ に対し $x_n := \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $z_n := \left(\frac{i}{2}\right)^n$ と定義する. このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ はともに絶対収束するから, 定理 12.4 より収束する.

例. $n = 0, 1, \dots$ に対し $x_n := \frac{(-1)^n}{n+1}$, $z_n := \frac{i^n}{n+1}$ と定義する. このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ はともに収束するが, とともに絶対収束はしない.

定理 12.5 (絶対収束する級数の並べ替え)

絶対収束する級数を並べ替えた級数も絶対収束する. すなわち, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が絶対収束するならば, 自然数全体の集合のすべての元を重複なく並べ替えて得られる任意の数列 $n_1, n_2, \dots$ に対し, 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} z_{n_k}$ も絶対収束する.

証明. $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ は正項級数 (0 の項があってもよい) であり, その任意の並べ替えは収束する ([高木], 第 4 章 43 節). とくに $\sum_{k=1}^{\infty} |z_{n_k}|$ は収束するから, $\sum_{k=1}^{\infty} z_{n_k}$ は絶対収束する. ■

級数の和と積. 絶対収束するという仮定のもと, つぎが成り立つ.

命題 12.6 (和と積の級数)

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ が絶対収束するとき, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$ と $\sum_{n=0}^{\infty} (z_0 w_n + z_1 w_{n-1} + \cdots + z_n w_0)$ も絶対収束し, つぎの等式が成り立つ.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (z_0 w_n + z_1 w_{n-1} + \cdots + z_n w_0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \right).$$

証明. まず絶対収束性を確認する. 自然数 N を固定すると, 三角不等式より,

$$\sum_{n=0}^N |z_n + w_n| \stackrel{\text{三角不等式}}{\leq} \sum_{n=0}^N (|z_n| + |w_n|) = \sum_{n=0}^N |z_n| + \sum_{n=0}^N |w_n|.$$

仮定より, $N \rightarrow \infty$ のとき最右辺は収束するから, $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$ は絶対収束する.
つぎに, 任意の $n = 0, 1, \dots$ に対し, 三角不等式より

$$|z_0 w_n + z_1 w_{n-1} + \cdots + z_n w_0| \stackrel{\text{三角不等式}}{\leq} \sum_{\substack{j+k=n \\ 0 \leq j, k \leq n}} |z_j| |w_k|$$

が成り立つことに注意する. ここで, 自然数 N に対し,

$$I(N) := \{(j, k) \in \mathbb{R}^2 \mid j, k = 0, 1, \dots, N\}$$

$$J(N) := \{(j, k) \in I(N) \mid 0 \leq j + k \leq N\}$$

とおくと, $J(N) \subset I(N) \subset J(2N) \subset I(2N)$ が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |z_0 w_n + z_1 w_{n-1} + \cdots + z_n w_0| &\stackrel{\text{三角不等式}}{\leq} \sum_{n=0}^N \left(\sum_{\substack{j+k=n \\ 0 \leq j, k \leq n}} |z_j| |w_k| \right) \\ &= \sum_{(j,k) \in J(N)} |z_j| |w_k| \leq \sum_{(j,k) \in I(N)} |z_j| |w_k| = \left(\sum_{n=0}^N |z_n| \right) \left(\sum_{n=0}^N |w_n| \right). \end{aligned}$$

仮定より, $N \rightarrow \infty$ のとき最後の式は収束するから, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (z_0 w_n + z_1 w_{n-1} + \cdots + z_n w_0)$ は絶対収束する.

(1) の等式は, 有限和 $\sum_{n=0}^N (z_n + w_n) = \sum_{n=0}^N z_n + \sum_{n=1}^N w_n$ に対し $N \rightarrow \infty$ とした極限をとれば得られる.

(2) の等式を示そう.

$$\begin{aligned} & \left| \left(\sum_{n=0}^{2N} z_n \right) \left(\sum_{n=0}^{2N} w_n \right) - \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{\substack{j+k=n \\ 0 \leq j, k \leq n}} z_j w_k \right) \right| = \left| \sum_{(i,j) \in I(2N) - J(2N)} z_j w_k \right| \\ & \leq \sum_{(i,j) \in I(2N) - J(2N)} |z_j| |w_k| \leq \sum_{(i,j) \in I(2N) - I(N)} |z_j| |w_k| \quad \leftarrow \text{三角不等式} \\ & = \left(\sum_{n=0}^{2N} |z_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{2N} |w_n| \right) - \left(\sum_{n=0}^N |z_n| \right) \left(\sum_{n=0}^N |w_n| \right). \end{aligned}$$

最後の式は $N \rightarrow 0$ のとき 0 に収束するから, (2) の等式を得る. ■

条件収束

級数 $z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$ が収束するが絶対収束はしないとき, この級数は**条件収束する**という.

例. 数列 $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$ は収束する (あとで示す) が, $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots = \infty$ より絶対収束はしない.

条件収束の典型的な例として, 次の交代級数がある.

命題 12.7 (交代級数は収束)

正の実数からなる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$$

かつ $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすものとする. このとき, 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots \quad (12.1)$$

は収束する.

このような正の実数列が定める式 (12.1) の形の級数を**交代級数**という. $a_0 + a_1 + \cdots = \infty$ となるように $\{a_n\}$ を選べば, 条件収束するような例が得られるのである.

証明. $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ とおくと, $S_1 < S_3 < S_5 < \cdots < S_4 < S_2 < S_0$ であることは簡単にわかる. $S_n - S_{n-1} = a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) より, 区間の列 $I_m = [S_{2m+1}, S_{2m}]$ ($m \geq 0$) に対して区間縮小法が適用でき, ある実数 A で $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = A$ を満たすものが存在する. ■

講義第 13 回 (1/29): べき級数

配布日: 1/29/2021 Version: 1.0

参考書の該当箇所: [三宅] 6.2.

以下, [高木] は高木貞治著の「解析概論」を意味する.

べき級数へのイントロ.

実数 x を固定し (定数と思い,) 指数関数のマクローリン展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^c \frac{x^n}{n!}$$

(ただし, c は 0 と実数 x のあいだにある正体不明の数) を考えよう. いま $x_n = x^n/n!$ ($n = 0, 1, \dots$) とおき $S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$ とおくと,

$$|S_n - e^x| = \left| e^c \frac{x^n}{n!} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから, 数列 $\{x_n\}$ が定める級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は収束し, その値は e^x である. すなわち, 各実数 x に対し,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

が成り立つ. これを, e^x のマクローリン級数あるいは $x = 0$ を中心とするテイラー級数という.

大胆な計算. このとき, 次のような計算はやってよいのだろうか:

$$\left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \right\}' = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \quad (13.1)$$

すなわち, 固定していた x を変数と考えマクローリン級数を項ごとに微分しているのである. これは, $(e^x)' = e^x$ という関係式に合致している.

もし, $f(x)$ という関数が $f'(x) = f(x)$ かつ $f(0) = 1$ という条件を満たしたとしよう. いま, $f(x)$ が $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ のような級数で書けると仮定し, さらに

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \right\}' = \sum_{n=0}^{\infty} n A_n x^{n-1}$$

という関係式が成立するならば, 係数を比較することで係数 $A_0, A_1, A_2, \dots$ たちが満たす漸化式

$$A_0 = 1; \quad A_{n-1} = n A_n \quad (n \geq 1)$$

を得る. これより, $A_n = \frac{1}{n!}$ が定まるから, $f(x)$ は指数関数 e^x 以外にはありえない, と結論される.

歴史的には, 微分積分学の始祖ニュートンがこのような計算を発明し, 「この方法があればどんな微分方程式だって解ける」と豪語したと言われている. しかし, この方法は複数の「仮定」(仮説)のもとに成立する結果であって, 厳密に正当化されたのは 19 世紀初頭, ニュートンの死後さらに 100 年ほどたってからである. しかも, 無条件には適用できないこともわかった.

べき級数

ニュートンの議論を正当化するために、次のべき級数とよばれる特殊な形の関数を考えよう。

定義. $A_0, A_1, A_2, \dots$ を実数の定数とする。このとき、複素数 z に対して定まる級数

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots$$

を ($z = 0$ を中心とする) **べき級数**という。

ここで、以下の問題を考えよう：

問題 1： 上のように与えられたべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ が収束するような z の範囲 D を特定せよ。

問題 2： $x \in I = D \cap \mathbb{R}$ のとき、 x の関数として $\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \right\}' = \sum_{n=0}^{\infty} n A_n x^{n-1}$ は正
当化されるか？

収束半径：問題 1 への解答

問題 1 の D は、つねに原点中心の「円板」(ただし、半径 0 や ∞ も許す) となることが知られている。その事実を確認していこう。

命題 13.1 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が収束するならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ 。

証明. $S_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n$ とおくと、 $S_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$) となる複素数 A が存在する。このとき、 $z_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow A - A = 0$ ($n \rightarrow \infty$)。 ■

このことから、次がわかる：

命題 13.2 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が収束するならば、 $\{|z_n|\}$ は有界数列である。すなわち、ある M が存在し、すべての $n \geq 0$ に対し $|z_n| \leq M$ 。

証明. 上の命題よりある N が存在し、 $n \geq N$ のとき $|z_n| \leq 1$ 。よって $M := \max\{|z_0|, |z_1|, \dots, |z_{N-1}|, 1\}$ とすればよい。 ■

次の定理はアーベルの定理と呼ばれている：

定理 13.3 べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ がある $z = \alpha \neq 0$ で収束するならば、 $|z| < |\alpha|$ を満たすすべての z に対しべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ は絶対収束 (よって収束) する。

証明. $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha^n$ が収束することから、ある $M > 0$ が存在し、すべての $n \geq 0$ に対して $|A_n \alpha^n| \leq M$ 。

よって複素数 z に対し

$$\sum_{k=0}^n |A_n z^n| \leq \sum_{k=0}^n |A_n \alpha^n| \cdot \left| \frac{z}{\alpha} \right|^k \leq \sum_{k=0}^n M \left| \frac{z}{\alpha} \right|^k.$$

ゆえに $|z| < |\alpha|$ のとき, $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ は絶対収束する. ■

定義. べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ がある ρ ($0 \leq \rho \leq \infty$) に対し, 「 $|z| < \rho$ ならば収束し, $|z| > \rho$ ならば発散」という性質をもつとき, ρ をこのべき級数の**収束半径** (radius of convergence) という.

例 1. べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ を考えよう. $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_0 + z_1 + \cdots + z^{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^n}{1 - z}$ であるから, この級数の収束・発散は z^n の収束・発散で決まる. とくに $|z| < 1$ で収束し, $|z| > 1$ で発散するから, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の収束半径は 1 だとわかる.

例 2. べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ の収束半径は ∞ である¹. 証明してみよう. $r > 0$ を任意にさだめるとき, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ は収束する (その値は e^r). よってアーベルの定理より, $|z| < r$ のときべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は収束する. r は任意だったから, 収束半径は ∞ である. ($|z| > \infty$ となる z 全体は空集合とみなす.)

定理 13.4 べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ に対し,

$$\rho := \sup \left\{ |z| \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \text{ は収束} \right\}$$

はその収束半径を与える.

注意. $|z| = \rho$ のときの収束・発散はさらに調べないと分からない.

証明. $|z| < \rho$ のとき, $|z| < |\alpha| < \rho$ を満たし, $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha^n$ が収束するようなものが α が存在する. このとき, アーベルの定理より $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ は絶対収束する. 同じくアーベルの定理より, $\rho < |z|$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ が収束する, ということはいえない (ρ の定義に反する). ■

¹一般に, 複素数 z に対しその指数関数 e^z をべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ の値として定義する.

定理 13.5 (コーシー・ダランベールの判定法) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ に対し, その収束半径を ρ とする.

(1) **コーシーの判定法**: 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|A_n|}}$ が存在するならば, $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|A_n|}}$.

(2) **ダランベールの判定法**: 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right|$ が存在するならば, $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right|$.

例 3. 定数 $K \neq 0$ を固定し, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} K^n z^n$ を考えよう. コーシーの判定法より, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|K^n|}} = \frac{1}{|K|}$ が存在することから, $\rho = \frac{1}{|K|}$ を得る.

例 4. べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ を考えよう. ダランベールの判定法より, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$ が存在することから, $\rho = 1$ を得る.

定理 13.5 の証明. (1) $r := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|A_n|}} \geq 0$ とおく². まず $r > 0$ の場合を考える. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} = 1/r$ であることに注意する. ある $0 < k < 1$ に対し, $|z| \leq kr (< r)$, すなわち, $|z|/r \leq k$ を満たす複素数 z を固定しよう. $k < \sqrt{k} < 1$ に注意すると, ある自然数 N が存在し $n \geq N$ のとき

$$|z||A_n|^{1/n} < \sqrt{k} < 1$$

とできる. これより, 級数 $A_N z^N + A_{N+1} z^{N+1} + A_{N+2} z^{N+2} + \dots$ は絶対収束するから, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ は収束する. k は任意であるから, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ は $|z| < r$ のとき収束することがわかった.

次に, $r \geq 0$ の場合を考える. ある $r < |\alpha|$ を満たす α において級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha^n$ が収束したと仮定して矛盾を導こう. このとき, $r < |z| < |\alpha|$ を満たす任意の z に対し, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ は絶対収束する. とくに, $\{|A_n||z|^n\}_{n \geq 0}$ は有界であり, ある $K > 0$ が存在しすべての $n \geq 0$ に対し $|A_n||z|^n \leq K$ が成り立つ. このとき $|A_n|^{1/n}|z| \leq K^{1/n}$ であるが, $n \rightarrow \infty$ とした極限をとると $r < |z|$ より 左辺は 1 より真に大きくなり (∞ に発散する場合も含む), 右辺は 1 となる. これは矛盾である.

以上の議論により, $r > 0$, $r = 0$ 両方の場合にべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ の収束半径 ρ は r と一致することが示された.

(2) $r := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right| \geq 0$ とおく. まず $r > 0$ の場合を考える. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = 1/r$ であることに注意する. ある $0 < k < 1$ に対し, $|z| \leq kr (< r)$, すなわち, $|z|/r \leq k$ を満たす複素数 z を固定しよう. $k < \sqrt{k} < 1$ に注意すると, ある自然数 N が存在し $n \geq N$ のとき

$$\left| \frac{A_{n+1} z^{n+1}}{A_n z^n} \right| = |z| \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| < \sqrt{k} < 1$$

² この定理は $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|A_n|}} = \infty$ のときも正しい. 証明も同様である.

とできる. これより, 任意の $m \geq 0$ に対し $|A_{N+m}z^{N+m}| \leq |A_N||z|^N \cdot (\sqrt{k})^m$ であるから, 級数 $A_N z^N + A_{N+1} z^{N+1} + A_{N+2} z^{N+2} + \dots$ は絶対収束する. よって級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ は収束する. k は任意であるから, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ は $|z| < r$ のとき収束することがわかった.

次に, $r \geq 0$ の場合を考える. ある $r < |\alpha|$ を満たす α において級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha^n$ が収束したと仮定して矛盾を導こう. このとき $|A_n \alpha^n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となることに注意する (命題 13.1). $\left| \frac{A_{n+1} \alpha^{n+1}}{A_n \alpha^n} \right| = |\alpha| \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right|$ は $n \rightarrow \infty$ のとき $|\alpha| > r$ より 1 より真に大きくなる (∞ に発散する場合も含む). すなわち, ある $K > 1$ とある自然数 N が存在し, $n \geq N$ のとき

$$\left| \frac{A_{n+1} \alpha^{n+1}}{A_n \alpha^n} \right| = |\alpha| \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| \geq K > 1$$

が成り立つ. これは $|A_n \alpha^n| \rightarrow 0$ に矛盾する³.

以上の議論により, $r > 0$, $r = 0$ 両方の場合にべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ の収束半径 ρ は r と一致することが示された. ■

注意. べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ の収束半径 ρ は一般に

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |A_n|^{1/n}}$$

によって与えられる. 証明は (1) の証明と同様である. ここで, $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$ と約束しておく.

べき級数の微分積分

収束半径 ρ をもつべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ は, $|z| < \rho$ を満たす z において絶対収束する. このことから, 次の重要な定理が得られる:

定理 13.6 べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ の収束半径を $\rho > 0$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} n A_n z^{n-1}$ および $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n+1} z^{n+1}$ の収束半径も ρ である.

(2) $x \in (-\rho, \rho)$ に対し $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ と置くとき,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n A_n x^{n-1} \quad \text{かつ} \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n+1} x^{n+1}.$$

例 5. 定理 13.6 により, 式 (13.1) の大胆な微分計算が正当化される.

³そもそも (2) では $A_n \neq 0$ が想定されている.

例 6. $x \in (-1, 1)$ のとき,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

すなわち, 右辺の級数は収束し, 値は左辺の関数の値と一致する. これを確認しよう. いま, 例 1 と同様にして級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$ の収束半径は 1 であり, $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$ が成り立つ. よって $x \in (-1, 1)$ のとき, $f(x) = 1/(1+x)$ とおくと, 定理 13.6 より

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+1} \iff \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n.$$

■

証明. (1) いま, $z = \alpha$ において $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha^n$ が収束したと仮定する. $|z| < \alpha$ と仮定すると, 定理 13.3 の証明のように, ある M が存在しすべての $n \geq 0$ で $|A_n| |\alpha|^n \leq M$ が成り立つ. よって $|z| < |\alpha|$ のとき

$$\sum_{n=0}^N |n A_n z^{n-1}| \leq \frac{M}{|\alpha|} \sum_{n=0}^N n \left| \frac{z}{\alpha} \right|^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^N \left| \frac{A_n}{n+1} z^{n+1} \right| \leq M |\alpha| \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1} \left| \frac{z}{\alpha} \right|^{n+1}$$

より, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} n A_n z^{n-1}$ および $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n+1} z^{n+1}$ が絶対収束することがわかる. これらのべき級数が収束半径が ρ より大きいと仮定すると, 同様の議論によりもとのべき級数の収束半径が ρ より大きいことが導かれるので矛盾である.

(2) 積分: $x \in (-\rho, \rho)$ を固定し, 自然数 N に対し $S_N(x) := A_0 + A_1 x + \cdots + A_N x^N$, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x)$ とおく. $f(x)$ は級数として絶対収束するから, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある自然数 N_0 が存在し, $N \geq N_0$ のとき $|A_{N+1} x^{N+1}| + |A_{N+2} x^{N+2}| + \cdots < \epsilon$ が成り立つ. よって $|t| \leq |x|$ のとき,

$$|f(t) - S_N(t)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n t^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n| |x|^n < \epsilon.$$

積分して

$$\left| \int_0^x f(t) dt - \int_0^x S_N(t) dt \right| \leq \left| \int_0^x |f(t) - S_N(t)| dt \right| \leq \epsilon |x|.$$

x は定数であり ϵ は任意であるから, $N \rightarrow \infty$ のとき $\sum_{n=0}^N \frac{A_n}{n+1} x^n = \int_0^x S_N(t) dt \rightarrow \int_0^x f(t) dt$.

微分: まず, 次の補題を仮定する:

補題 13.7 区間 $(-\rho, \rho)$ 上で収束するべき級数が定める関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ は連続である.

証明はあとで行う. (1) とこの補題により $x \in (-\rho, \rho)$ に対して連続関数 $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n A_n x^{n-1}$ が定まる. これに上の積分の結果を適用すると,

$$\int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n = f(x) - A_0.$$

左辺の不定積分は連続関数の積分なので微分可能である. よって $f(x)$ も微分可能であり, $g(x) = f'(x)$ が得られる. ■

注意. この定理より、べき級数は収束半径が定める区間において無限回微分可能 (C^∞ 級) となることがわかる. また, $f^{(k)}(0) = A_k k!$, すなわち $A_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ となる. べき級数は, 自分自身が定める関数のテイラー (マクローリン) 級数になっているのである.

補題の証明. $a \in (-\rho, \rho)$ を固定する. $|a| < r < \rho$ をみたす r を固定するとき, アーベルの定理より $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n| r^n$ は収束することがわかる. とくに, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある N が存在し, $\sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n| r^n < \epsilon/3$ が成り立つ. 関数 $S_N(x) := A_0 + A_1 x + \cdots + A_N x^N$ は連続関数であるから, ある $\delta > 0$ が存在し $|x - a| < \delta$ のとき $|S_N(x) - S_N(a)| < \epsilon/3$ が成り立つ. 必要ならば δ をより小さいものに取り替えて, $|a| + \delta < r$ と仮定してよい. とくに, $|x - a| < \delta$ のとき $|x| \leq |x - a| + |a| < \delta + |a| < r$ が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(a)| + |S_N(a) - f(a)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n x^n| + |S_N(x) - S_N(a)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n a|^n \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n| r^n + |S_N(x) - S_N(a)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n| r^n \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$