この講義について

配布日：4/12/2021 Version：1.1

担当教員： 川平 友規（Kawahira, Tomoki；経済学研究科）

本授業の目的およびねらい（シラバスより）： 17 世紀のニュートンやライプニッツによる微分法の発見に始まり，多くの数学者達によって理論的に精密化された微分積分学は，今日では自然科学のみならず広く社会科学においても，その基礎と発展を支えている．

この講義では，主に 1 変数関数についての微分積分学を学び，実際に使えるようになることを目的とする．高等学校での「数学 III」の内容は予備知識として仮定しない．また，多変数関数の場合を扱う《微分積分 II》を続けて履修することを勧める．

具体的な内容は，関数の連続性や極限，微分の定義と計算，関数のグラフや接線の求め方，最大・最小問題，テイラー展開，積分の定義と計算，微分積分学の基本定理，図形の面積，曲線の長さ，広義積分などである．

講義日と授業内容（予定）：

4 月 12 日	数と極限
4 月 19 日	実数の連続性と e
4 月 26 日	関数の極限
5 月 10 日	連続関数と中間値の定理
5 月 17 日	逆関数
5 月 24 日	指数・対数関数と三角・逆三角関数
5 月 31 日	微分可能性
6 月 7 日	微分と 1 次近似
6 月 14 日	対数微分法，ロルの定理
6 月 21 日	テイラー展開
6 月 28 日	定積分と微積分の基本定理
7 月 5 日	置換積分と部分積分
7 月 12 日	広義積分
7 月 19 日	期末試験

教科書および参考書： 教科書にあたる講義プリントを毎回 manaba 上で配布する．テスト勉強用の参考書として以下を挙げておく．

- 川平友規,『微分積分—1 変数と 2 変数』，日本評論社
- 三宅敏恒,『入門微分積分』，培風館

クイズ： ほぼ毎回，Google Forms を用いたクイズ（小テスト）を行います．URL は manaba 上で公開します．

成績評価の方法： クイズ（30〜50 %）と期末試験（50〜70 %）

質問受付： 次の 3 つの方法で質問や問い合わせを受け付けます．

- 授業中や授業後の休み時間に直接質問する．
- クイズのコメント欄に質問を書く．
- 質問を手書きして写真をとり，pdf や jpeg 画像の形でメールに添付する．

担当教員：川平 友規

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体　(2) $\mathbb{R}$: 実数全体　(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体　(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体　(6) $\emptyset$: 空集合

ギリシャ文字

(1) α: アルファ (2) β: ベータ (3) γ, Γ: ガンマ (4) δ, Δ: デルタ (5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ (7) η: エータ (8) θ, Θ: シータ (9) ι: イオタ (10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ (12) μ: ミュー (13) ν: ニュー (14) ξ, Ξ: クシー (15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ (17) ρ: ロー (18) σ, Σ: シグマ (19) τ: タウ (20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ (22) χ: カイ (23) ψ, Ψ: プサイ (24) ω, Ω: オメガ

その他

(1) $\leq$，$\geq$ は $\leqq$，$\geqq$ と同じ意味.

(2) $x \in X$ と書いたら,「x は集合 X に属する」すなわち「x は X の元 」という意味.

(3) 「…をみたす X の元全体の集合」を $\{x \in X \mid (\ x$ に関する条件$)\}$ の形で表す．たとえば「$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ 」

(4) $X \subset Y$ と書いたら,「集合 X は集合 Y に含まれる」という意味．$X \subseteq Y$，$X \subseteqq Y$ も同じ意味.

(5) $A := B$ と書いたら A を B で定義する，という意味．たとえば $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

(6) （文章 1）$:\Longleftrightarrow$ (文章 2) と書いたら,（文章 1）の意味は（文章 2）であることと定義する，という意味．たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$.」

担当教員：川平 友規

数と極限

配布日：4/12/2021　Version：1.1

●● 4 月 12 日の講義ノートと補足 ●●

（1 変数）微分積分学は高校で学んだ微分積分学の復習もしくは延長だと考えてもよいが，ところどころ，大学数学ならではの新しい視点や新しい手法を学ぶことになる．

この講義では，ひとつの理想的な到達点として，次のように概念的な目標を掲げておきたいと思う：

（1 変数）微分積分学の目標． 与えられた関数 $f(x)$ に対し，

(1) 与えられた x における $f(x)$ の値（よって関数のグラフの形も）

(2) 方程式 $f(x)=0$ の解

(3) 積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値

の「真の値」もしくは「近似値」を，必要な精度で計算できるようになること．

実用の場で通用するのはすべて「近似値」であることに注意しよう．たとえば円周率 π も 3.14, 3.1416 といった「近似値」を知ってはじめて量的に意味のある数となる.「真の値」（「厳密値」ともよばれる）とは,「近似値」を生成する種（たね）にすぎないのである．

具体例を挙げてみよう.（無人島に漂着して，以下の問題に遭遇したとお考えください.）

(1) $f(x)=\sin x$ とするとき，$f(47^\circ)=\sin 47^\circ=?$

(2) 方程式 $f(x)=x^5-x^3+2=0$ に対し，$x=?$

(3) 円の面積を考えると，理論的には $\pi=4\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ と表される．π の近似値を求めるために，右辺の積分を（積分の定義にもとづき）数値的に計算できるか？[1]

このような計算も，5,60 年ほど前までは手計算で行うのが普通だったし，そのための手法が確立されている.（たとえば「微分積分の基本定理」を用いると，積分は「微分の逆演算」として厳密かつ効率的に計算できるのであった.）いまはコンピューター（パソコン）でなんでも簡単に計算できるようになったが，根底にある計算原理は今も昔も変らない．その変らない部分を学び，継承するのが私たちの任務だといえるだろう．

実数の構成

微分積分は実数に実数を対応させる関数の理論であるから，その土台となる実数とは何なのか，あらためて考えてみよう．

唐突だが，次の問題を考えてみる：

問題：方程式 $x^2-2=0$ を解け．

[1] π の計算にはもっとよい方法がある．

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

期待される解答は $x = \pm\sqrt{2}$ である．中学校以来このように解答してきただろうし，疑問を抱くこともないだろう．しかし，よく考えてみていただきたい．この $\sqrt{2}$ という記号の表すものはなんだろうか？それは「2 乗したら 2 になる正の数」，すなわち「方程式 $x^2 = 2$ をみたす正の数」である．この方程式は，まだ解けていない．$\sqrt{2}$ という数の値はなにか，そもそも存在するのか，という議論がなされていないのである．私たちが虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ に対して抱くような疑念を $\sqrt{2}$ という数にも感じるべきなのだ．

直感的には，$\sqrt{2}$ という数の存在は疑いようがないように思われる[2]．$\sqrt{2}$ という数が存在すると認めると，あらゆる計算がうまくいくし，説明がつく．それは私たちも経験的に認めるところである．しかし,「説明がつく」ということと,「存在する」というのは別問題である．神サマの存在を仮定すれば世の中の万事が説明がつくが，それは神サマの存在を保証するわけではない．

歴史を紐解くと，人類は新しい数というものに対してきわめて不寛容であった．たとえば紀元前 5 世紀ごろ，ピタゴラス学派は世の中に存在するのは有理数のみだと信じていた.（のちに「単位正方形の対角線の長さが有理数ではない」ことを証明し，考えを改めたが.）また，18 世紀ごろまで，西洋では負の数ですら市民権を得ていなかった．

数学者が $\sqrt{2}$ を初めとする無理数に完全な理解を示したのは，19 世紀も後半になってからである．この時代，もっとも重要なイノベーションは，人類が初めて「実数はすでにあたりまえに存在するものではなく，人工的に構成すべきもの」と認識したことであった．

実数は次のようなステップをへて，人工的に構成される：

- ステップ１：自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を構成（定義）する[3]．すなわち

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

- ステップ２：$\mathbb{N}$ を拡張し，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を構成する．すなわち

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots\}.$$

  この集合内では自然な和・差・積が定義できるが，商はこの集合内で自己完結しない．すなわち整数の和・差・積は整数だが，整数の商は整数とはかぎらない．[4]

- ステップ３：$\mathbb{Z}$ から有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を構成する．すなわち

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p,\, q \text{ は整数},\ q \neq 0 \right\}.$$

  この集合内では自然に四則が定義され，自己完結している．すなわち，有理数の和・差・積・商はすべて有理数である．[5]

- ステップ４：$\mathbb{Q}$ から実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を構成する．この部分が一番難しい．大雑把にいって,「有理数の数列が収束しうる理想的な点」として実数を定義する[6]．結果として得られる実数の集合は，自然な四則が定義され自己完結しており，しかも「極限」についても自己完結している．たとえば有理数の数列は有理数でない数（無理数）に収束することもあるが，実数の数列は実数以外には収束しない．

[2] 正方形の対角線として表現できるから，というのが分かりやすい説明だろう．しかし論理的には，平面とは何か，線分とは何か，対角線というものは存在するのか，といった問いに完全な解答を与えた上でないと意味をもたない．

[3] 1891 年，ペアノ（Peano, 1858 – 1932) が初めて自然数を厳密に構成した．

[4] $\mathbb{Z}$ は（代数学の用語で）「環」とよばれる構造をもつ集合の代表例．

[5] $\mathbb{Q}$ は（代数学の用語で）「体」とよばれる構造をもつ集合の代表例．次の $\mathbb{R}$ も体である．

[6] 1869 年，メレ (Méray，1835 – 1911，仏) が最初に発表したとされる．実数の構成としてはデデキント (Dedekind，1831 – 1916，独) の「切断」が有名だが，若干遅く 1872 年であった．

このようにして人工的かつ論理的に構成された実数の集合 $\mathbb{R}$ は微分積分学を初めとする解析学を支える堅牢な土台である．たとえば方程式 $x^2-2=0$ の解も，実数の範囲に存在することがわかる．

記号． 以下，よく使う記号をまとめておく．X, Y を集合とするとき，

- $x \in X \quad :\Longleftrightarrow \quad x$ は X に属する
- $X \subset Y \quad :\Longleftrightarrow \quad X$ は Y に含まれる．
- $X \subsetneq Y \quad :\Longleftrightarrow \quad X$ は Y に含まれるが $X \neq Y$．

たとえば，$2019 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$．$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ だが，より詳細に次が成立する：

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

数列の収束

数列とは「数が一列に並んだもの」であった．ただ並ぶことが大事なのではなくて，数に 1 番目，2 番目，$\cdots$ と順番（番号）がついていることがポイントである．すなわち，

定義． **数列**とは，自然数 $1, 2, 3, \ldots$ にそれぞれ実数をひとつずつ対応させたものである．

自然数 n に実数 a_n を対応させるような数列は

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

のように表したり，簡単に $\{a_n\}$ のようにも表すのであった．この a_n の n は**添字**と呼ばれる．添字が動く範囲を明確にするために，

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \{a_n\}_{n\geq 1} \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

のように書くこともある．[7]

例． 自然数 n に 2^n を対応させる数列 $2, 4, 8, 16, \ldots$ は通常 $\{2^n\}$ のように表される．

数列は次のような「グラフ」で表現することができる．（実際，数列は自然数の上で定義され実数に値をとる関数といえる．）

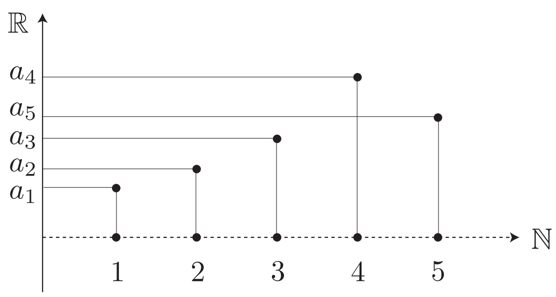


図 1: 数列の「グラフ」．

[7] 必要に応じて $n=0$ から始まる列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ や，負の添字をもつ列 $\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ を考えることもあるが，これらもやはり数列と呼び，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ のように表す．

数列の収束. 微積分で主に扱うのは，一定の値に近づいていくような数列である．たとえば何らかの値（円周率など）を計算する過程で数列 $\{a_n\}$ が近似値として得られたとき，その精度が n の増加にともなって確実に良くなる，という状況が望ましい．これを数学の言葉で定式化したものが,「数列の収束性」である：

> **定義.** 数列 $\{a_n\}$ が**収束する**とは，ある実数 A が存在して，n が増加すると $|a_n - A|$ が限りなく 0 に近づくことをいう．これを
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{もしくは} \quad a_n \to A\ (n \to \infty)$$
>
> と表し，この A を数列 $\{a_n\}$ の**極限** (limit) とよぶ.

「数列 $\{a_n\}$ は A に収束する」とか,「数列 $\{a_n\}$ は A を極限にもつ」ともいう.

補足. 高校数学では，上の限りなく 0 に近づくという部分をあいまいにしていたから，少しだけ掘り下げておこう．a_n を A の近似値だと考えたとき，$|a_n - A|$ はその誤差である[8]．$\{a_n\}$ が A に収束するとき，近似値の精度目標をどんなに厳しく定めても，すなわち誤差の許容範囲をどんなに小さくしても，いつかは $|a_n - A|$ がその範囲内に収まり，その後外れることはない．これを「（誤差）$|a_n - A|$ が限りなく 0 に近づく」と表現しているのである．

厳密さを追求する場合は，ϵ 論法とか ϵ-N 論法とかよばれる手法を用いて定式化する．詳しくは下記の講義ノート[9]などを参照せよ．

注意（用語と記号）.

- 収束しない数列は，すべて**発散する**という．
- n の増加とともに a_n が「限りなく大きくなる」[10]とき，習慣的にこれを

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{もしくは} \quad a_n \to \infty\ (n \to \infty)$$

  と表す．この場合数列は「無限大に収束する」とはいわず，**（正の）無限大に発散する**という．
- 数列 $\{-a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = \infty$ を満たすとき，

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{もしくは} \quad a_n \to -\infty\ (n \to \infty)$$

  と表す．こちらは**負の無限大に発散する**という．

例（収束）. $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n \to 0$．実際，$a_n$ と 0 の誤差 $|a_n - 0| = 1/2^n$ は限りなく 0 に近づく．

例（収束）. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots \dfrac{1}{2^{n-1}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n \to 2$．確認してみよう．$a_n$ は初項 1，公比 1/2 の等比数列の和であり，

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

よって 2 との誤差は $|a_n - 2| = 1/2^{n-1}$ は $n \to \infty$ のとき限りなく 0 に近づく．

例（発散）. $a_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ のとき，a_n はどの数にも収束できないので，発散する．

例（発散）. $a_n = n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ のとき，a_n はどの数にも収束できないので，発散する．

---

[8] 絶対誤差とよばれる.

[9] `http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/17S-kaiseki.pdf`

[10] すなわち,「目標の大きさとしてどれだけ大きな正の数 M を設定しても，a_n はいつかは $a_n > M$ を満たすようになり，その後それを下回ることはない」ということ．

担当教員：川平 友規

極限の性質（補足）

命題 1-1（極限の四則） 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束し $\lim_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim_{n\to\infty} b_n = B$（とくに，$A$，$B$ は実数，$\pm\infty$ ではない）のとき，

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$.

(3) $B \neq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$.

数列 a_n と b_n がそれぞれ $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ の近似値であるとき，$a_n b_n$ は $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ の近似値といえるだろう．(2) の性質は，n が増えて近似値としての a_n と b_n の精度が上がれば，$a_n b_n$ が $\sqrt{6}$ を近似する精度も確実に上がることを保証している．

証明のスケッチ（厳密な証明には「ϵ-N 論法」が必要.） 三角不等式[11] を用いる：(1)：複号 $\pm$ が $+$ の場合，$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| \to 0\ (n \to \infty)$．よって $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$．複号の $-$ の場合も同様である．(2)：$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| \leq |a_n - A||b_n| + |A||b_n - B|$．ここで $|b_n - B| \to 0$ より，n が十分大きいとき，$|b_n - B|$ はどんな正の定数よりも小さくできる．たとえば $|b_n - B| \leq 1$ が成り立つ．このとき $|b_n| \leq |B| + 1$（右辺は n に依存しない定数）であり，$|a_n b_n - AB| \leq |a_n - A|(|B|+1) + |A||b_n - B| \to 0\ \ (n \to \infty)$．(3)：(2) より $\lim_{n\to\infty}(1/b_n) \to 1/B$ を示せば十分．$|b_n - B| \to 0$ より，n が十分大きいとき $|b_n - B|$ はどんな正の定数よりも小さくできる．$|B|/2 > 0$ であるから，たとえば n が十分大きいとき $|b_n - B| \leq |B|/2$ が成り立つ．このとき $|b_n| \geq |B| - |B|/2 = |B|/2 (> 0)$ であるから，$\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{B}\right| = \dfrac{|b_n - B|}{|b_n B|} \leq \dfrac{|b_n - B|}{(|B|/2)|B|} \to 0\ \ (n \to \infty)$. ■

命題 1-2（はさみ打ちの原理，追い出しの原理） 3 つ数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が

$$a_n \leq c_n \leq b_n\ (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たすとき，次が成り立つ：

(1) A は実数であり $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$ のとき，$\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ のとき，$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

(3) $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ のとき，$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

[11] すべての実数 x, y について $|x + y| \leq |x| + |y|$ が成り立つ．これを三角不等式という．

担当教員：川平 友規

実数の連続性と e

配布日： 4/19/2021 Version： 1.1

●● 4 月 19 日の講義ノートと補足 ●●

$1 = 0.999999\cdots$ ？

数学教育の世界では，等式

$$1 = 0.999999\cdots$$

をいかに説明するか？ということがしばしば問題になる．

案 1. なかなか秀逸だと思われる説明として，

$$\frac{1}{3} = 0.33333\cdots$$

なんだから，両辺を 3 倍して $1 = 0.999999\cdots$，というのがある．しかし，右辺の $0.33333\cdots$ の意味はなんだろう．これは多分 $0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots$ と無限に足していくことを意味していて，「数列 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^n}$ の極限だ」と解釈するのが自然であろう．

案 2. 数学的にきっちりとした説明を与えてみよう．まずは，言葉の準備から始める．

単調性と有界性

単調な数列. 数列も関数のように増減に着目することが多い．そこで，関数にもよく使われる「単調増加（減少）」といった言葉を数列にも定義しておこう：[1]

> **定義（数列の単調性）.**
>
> - 数列 $\{a_n\}$ が**単調増加** $:\Longleftrightarrow$ すべての n に対し $a_n \le a_{n+1}$
> - 数列 $\{a_n\}$ が**単調減少** $:\Longleftrightarrow$ すべての n に対し $a_n \ge a_{n+1}$.

ちなみに等号成立がなくすべての n に対し $a_n < a_{n+1}$ （$a_n > a_{n+1}$）であるとき，**真に単調増加（減少）**という．

有界な数列. つぎに数列がある範囲に収まっている状況を述べるための言葉を定義する：

> **定義（有界性）.**
>
> - 数列 $\{a_n\}$ が**上に有界**
> $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在し，すべての n に対し $a_n \le M$.
> - 数列 $\{a_n\}$ が**下に有界**
> $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在し，すべての n に対し $a_n \ge M$.
>
> 数列 $\{a_n\}$ が上にも下にも有界であるとき，単に**有界** (bounded) であるという．

[1]書籍によって数列や関数の単調性の定義はまちまちである．たとえばこの講義での「単調増加」は，「広義単調増加」「単調非減少」とも呼ばれる．

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

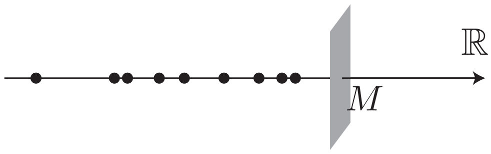


図 1: 上に有界な数列．実数 M の場所に壁があり，数列はそこより右側にはいかない．

実数の連続性（の公理） 実数の集合 $\mathbb{R}$ は，次の性質を満たすように構成されている：

> **実数の連続性**
> 『単調増加かつ上に有界な数列は，ある実数に収束する．』

数直線上の $x = M$ という場所に壁を作っておき，それを超えないが単調増加な数列 $\{a_n\}$ を考えると，ある値に収束するであろう（図 2）．

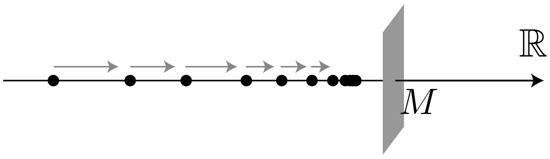


図 2: 実数の連続性．

この性質によって,「単調減少かつ下に有界な数列」も（$a'_n = -a_n$ を考えることで）ある実数に収束することになる．

注意．

- 「実数の連続性の公理」とも呼ばれる．
- この性質の重要なポイントは与えられた数列が極限を持つことを,「極限の値を知らない状態で」保証することができる，ということである[2]．

案 2 の続き． 「実数の連続性」を用いて，$1 = 0.9999\cdots$ を説明してみよう．まず，

$$a_1 = 0.9,\ a_2 = 0.99,\ a_3 = 0.999,\ \ldots$$

で与えられる数列を考える．この数列は明らかに単調増加であり，すべての n で $a_n = 1 - \dfrac{1}{10^n} < 1$ を満たすから上に有界．よって「実数の連続性」より，極限 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する．この極限を $0.999999\cdots$ と表すことにする（すなわち，あいまいだった記号の意味を明確にした）．

一方 $a_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$ であるから，

$$|a_n - 1| = \frac{1}{10^n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって $\alpha = 1$ でなくてはならない．すなわち，

$$1 = 0.9999\cdots$$

[2]数列が収束することを定義から直接確かめるには，極限の値を知らないといけないが，多くの場合それは不可能である．そのような不便を解消するために，実数にはこのような性質が求められるのである．

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

が成り立つ．

例． 数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が収束することを示そう．

$a_{n+1} - a_n = 1/2^n > 0$ より $\{a_n\}$ は単調増加．また，$a_n = \dfrac{1-1/2^n}{1-1/2} = 2(1-2^{-n}) < 2$ より，上に有界．よって「実数の連続性」により，$\{a_n\}$ は収束する．

前回 $a_n \to 2$ $(n \to \infty)$ であることを証明したが，今回は極限の値 2 を知らない状態で，極限が存在することだけを保証したのである．

> **例題 2-1．** 漸化式 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1}$ で与えられる数列は収束することを示せ．また，その極限を求めよ．

解答：単調性． $a_2 = \sqrt{3} > a_1$ である．$a_{k+1} > a_k$ と仮定すると，

$$a_{k+2} - a_{k+1} = \sqrt{2a_{k+1}+1} - \sqrt{2a_k+1} = \frac{2(a_{k+1}-a_k)}{\sqrt{2a_{k+1}+1} + \sqrt{2a_k+1}} > 0.$$

よって数学的帰納法により，すべての自然数 n について $a_{n+1} > a_n$．

有界性． 方程式 $x = \sqrt{2x+1}(>0)$ の解を $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ とする[3]．まず $\alpha > a_1 = 1$ は明らか．$\alpha > a_k$ と仮定すると，

$$\alpha - a_{k+1} = \sqrt{2\alpha+1} - \sqrt{2a_k+1} = \frac{2(\alpha - a_k)}{\sqrt{2\alpha+1} + \sqrt{2a_k+1}} > 0.$$

よって数学的帰納法により，すべての自然数 n について $\alpha > a_n$ が示された．

収束性． 数列 $\{a_n\}$ は単調増加，上に有界であるから，「実数の連続性」より極限 $\beta = \lim_{n\to\infty} a_n$ をもつ．漸化式より $\beta = \sqrt{2\beta+1}$ を満たすから，$\beta = \alpha = 1 + \sqrt{2}$ でなくてはならない． ■

自然対数の底（ネピアの数）

「実数の連続性」の応用として，次の定理を証明しよう：

> **定理 2-1（e の存在と定義）．** 一般項 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ で与えられる数列は収束する．その極限を**自然対数の底**もしくは**ネピアの数**とよび，e で表す．すなわち，
>
> $$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (= 2.718281828459\cdots)$$

証明（定理 2-1）． $\{a_n\}$ が単調増加かつ上に有界であることを示そう．

単調性． 二項定理より

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \underline{{}_n\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k}$$

[3] この α は漸化式から予想される極限．実際，もし $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すると仮定すれば，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n+1} = \sqrt{2\alpha+1}$．細かいことをいうと，最後の等式では関数 $y = \sqrt{2x+1}$ が連続関数であることを使っている．

ここで下線部について，

$$
\begin{aligned}
\underline{{}_n\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k} &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
&< \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdots \cdot \frac{n-k+2}{n+1} \\
&= \underline{\underline{{}_{n+1}\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^k}}
\end{aligned}
$$

よって最初の式の下線部を 2 重下線部で置き換えて

$$
\begin{aligned}
a_n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \underline{\underline{{}_{n+1}\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^k}} &< 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \underline{\underline{{}_{n+1}\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^k}} \quad \text{（項を増やした）} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_k \cdot 1^{(n+1)-k} \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \\
&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.
\end{aligned}
$$

よって数列 $\{a_n\}$ は単調増加である．

有界性. すべての自然数 n にたいし，$a_n < 3$ であることを示そう．上で行った下線部の式変形から

$$
\underline{{}_n\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k} = \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \le \frac{1}{k!}
$$

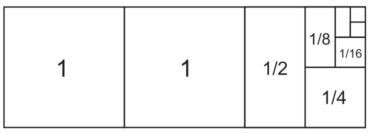
が成り立つ．さらに

$$
\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \le \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{1}{2^{k-1}}
$$

であるから，最初の式より

$$
a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \underline{{}_n\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k} \le 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 3
$$

を得る．



よって数列 $\{a_n\}$ は上に有界である．

収束性. 以上の議論と「実数の連続性」から，数列 $\{a_n\}$ は極限をもつ． ■

注意. $a_1 = 2 < a_n < 3$ より，$2 < e \le 3$ が成り立つ．

その他の極限

あとで（多分）役に立つ数列の極限をいくつか紹介しておこう．

命題 2-2. $a > 0$ を定数とするとき，

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

証明. (1) $\alpha = 1$ のときは明らかなので $\alpha \neq 1$ を仮定する．$\alpha > 1$ のとき $a_{n+1}/a_n = \alpha^{-\frac{1}{n(n+1)}} < 1$ より単調減少．$0 < a_n < 1$ と仮定すると $0 < a_n^n = \alpha < 1$ となり矛盾．よって $a_n \geq 1$ であり，下に有界．単調減少かつ下に有界なので，a_n は極限 $\beta \geq 1$ を持つ（実数の連続性）．このとき $a_n \geq \beta$ が成り立つが，$\beta > 1$ と仮定すると $\alpha = (a_n)^n \geq \beta^n \to \infty$ $(n \to \infty)$ となり，矛盾．よって $\beta = 1$ である．$\alpha < 1$ のときは逆数 $1/\alpha > 1$ を考えればよい．
(2) を示す．$n^{1/n} = 1 + h_n$ （ただし $h_n > 0$）とおこう[4]．このとき，

$$n = (1+h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot 1^{n-k} \cdot h_n^k = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2.$$

よって

$$0 < h_n^2 < \frac{2}{n-1}.$$

はさみうちの原理より，$n \to 0$ のとき $h_n \to 0$.
(3) $\dfrac{a}{N} < \dfrac{1}{2}$ すなわち $2a < N$ となる自然数 N をひとつ選んで固定する．$n > N$ のとき，

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{a}{N+1} \cdot \frac{a}{N+2} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{a^N}{N!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

[4] $x > 1$ のとき $x^{1/n} > 1$ であった．よって $h_n > 0$.

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

担当教員：川平 友規

関数の極限

配布日：5/2/2021　Version：1.2

●● 4 月 26 日の講義ノートと補足 ●●

微分積分は「関数」を解析するための道具である．そのために必要な基本的な言葉を準備しよう．

用語の定義（ア）． a と b を実数とするとき，以下の形の集合を**区間**という：

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad (\text{開区間})$$
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (\text{閉区間})$$
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$
$$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$
$$(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$
$$(-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$
$$(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$$

ここで ∞ の代わりに $+\infty$ と書くこともある．

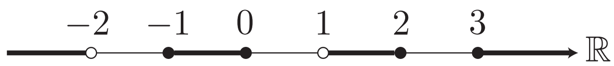


図 1: 左から $(-\infty,-2)$，$[-1,0]$，$(-1,2]$，$[3,\infty)$．

（イ）． **関数** $y = f(x)$ とは何か思い出しておこう．x と y は**変数**であり，数値（一般には，数値で表現された文字列や画像などのデータも含まれる）を入れる（入力する，input する）箱のようなものである[1]．「関数 $f(x)$ 」とは，x に入力された数値 a から新しく $f(a)$ という数値を生成する（出力する，output する）仕組み[2]を表現しており，「$y = f(x)$」 と書いたら，

「変数 x に入力された数値から関数 $f(x)$ で新しい数値を出力し，変数 y に入力せよ」

という意味だと解釈する[3]．

定義域と値域． ふつう，関数 $f(x)$ に対しては，x として入力してよい値の範囲が（暗に）指定される．そのような範囲（$\mathbb{R}$ の部分集合）を関数 $f(x)$ の**定義域**といい，それに応じて決まる $y = f(x)$ の取りうる値の範囲を**値域**という．

例 1. $f(x) = x^2$ $(-1 \leq x \leq 1)$ とする．x^2 という計算自体はどんな実数 x に対しても（複素数にだって）可能だが，ここでは x をあえて区間 $[-1,1]$ に属する実数のみに制限している．すなわち，関数 $f(x)$ の定義域は $[-1,1]$ である．一方，値域は $[0,1]$ である．

例 2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ とする．このとき，関数 $f(x)$ の定義域は $(0,\infty)$，値域も $(0,\infty)$ である．

注意． 関数 $f(x)$ の定義域が集合 $X\,(\subset \mathbb{R})$ であるとき，「X 上の関数 $f(x)$」という．また，関数 $f(x)$ の値域が集合 $Y\,(\subset \mathbb{R})$ に含まれているとき，「Y に値をとる関数 $f(x)$」という．

[1]コンピューターでいうと，特定の形の数値ように確保されたメモリ領域だと考えられる．
[2]関数は英語で「function」といい，もともとは「機能」とか「役割」とかいう意味である．
[3]このとき，変数 y は x に依存して変化する変数なので，x を**独立変数**，y を**従属変数**ともいう．

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

関数の極限

連続性や微分を考えるために，関数の極限とは何かを定義する．

関数 f が定数 a のまわりで定義されているとする．変数 x が $x \neq a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき $f(x)$ がある実数 A に限りなく近づくならば,「$x \to a$ のとき関数 $f(x)$ は**極限** A をもつ」もしくは「$x \to a$ のとき関数 $f(x)$ は A に**収束する**」といい，

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to A \ \ (x \to a)$$

と表す．

注意.

- 下線部「定数 a のまわりで定義されている」というのは，$x = a$ で $f(a)$ が定義されていない場合も含める．（そのため，$x \to a$ には $x \neq a$ という一見不自然な条件がついている．）たとえば，任意の正の数 a に対し $a^0 = 1$ であることに注意すると，関数 $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{x}$ は $x = 0$ で定義できない（0/0 は計算できない！）．しかし，あとで見るように，極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

  は存在する．
- 下線部「限りなく近づく」は数列のときと同様にあいまいな概念だが,「ϵ-δ 論法」と呼ばれる方法で厳密に定式化することができる．
- $a = \pm\infty$ のときも同様に表す．たとえば

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}.$$

- $x \to a$ のとき $f(x)$ が限りなく大きくなれば,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to \infty \ \ (x \to a)$$

  と表す．$-f(x)$ が限りなく大きくなれば，同様に

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to -\infty \ \ (x \to a)$$

  と表す．両者とも「$\pm\infty$ に収束する」とは言わず，$\pm\infty$ に**発散する**とよぶ．たとえば,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

右極限と左極限．変数 x が $x < a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき $f(x)$ がある実数 A に限りなく近づくならば，これを

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to A \ \ (x \to a - 0)$$

と表し,「$x \to a$ のとき関数 $f(x)$ は**左極限** A をもつ」という．同様に変数 x が $x > a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき $f(x)$ がある実数 A に限りなく近づくならば，これを

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to A \ \ (x \to a + 0)$$

と表し,「$x \to a$ のとき関数 $f(x)$ は**右極限** A をもつ」という．

例 3. $[y]$ は y を超えない最大の整数とする．(いわゆるガウス記号．$k \leq y < k+1$ を満たす唯一の整数 k といっても同じ.）$f(x) = [x]$ と定めるとき，

$$\begin{cases} f(x) \to 1 & (x \to 1+0) \\ f(x) \to 0 & (x \to 1-0) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \to 0 & (x \to +0) \\ f(x) \to -1 & (x \to -0) \end{cases}$$

極限の性質. 以下の公式は高校のころから「あたりまえ」のように用いていると思う：

命題 3-1（極限の四則）. $\lim_{x\to a} f(x) = A$，$\lim_{x\to a} g(x) = B$ のとき，次が成り立つ：

(1) $\lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = A + B$

(2) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$

(3) $B \neq 0$ のとき $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

証明は数列の極限の公式と同様なので省略する．

命題 3-2（はさみ打ちと追い出し） 関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

を満たすものとする．このとき，次が成り立つ：

(1) ある実数 A，B が存在し $\lim_{x\to a} f(x) = A$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = B$ であるとき，$A \leq B$.

(2) ある実数 A が存在し $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A$ であるとき，$\lim_{x\to a} h(x) = A$.

(3) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ のとき，$\lim_{x\to a} h(x) = \infty$.

(4) $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ のとき，$\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$.

練習問題

練習問題 3-1. 次の値（発散して $\pm\infty$ の可能性もある）を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{3}{x-1}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{3}{x-1}$

練習問題 3-2. すべての実数 x に対し $x-1<[x]\le x$ が成り立つことを用いて，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x+1}=1$$

を示せ．

解答

練習問題 3-1. (1) と (2)：$x\to\pm\infty$ のとき $1/x\to 0$ であるから，$\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{1+1/x}\to\dfrac{1}{1+0}=1\ (x\to\pm\infty)$.

(3) $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$
$=\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\to\dfrac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1\ (x\to 0)$.

(4) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\to\sqrt{0+1}=1\ (x\to\infty)$.

(5) と (6)： $t=x-1$ とおくと，$x\to 1\pm 0$ のとき $t\to\pm 0$. $\dfrac{3}{t}\to\pm\infty\ (t\to\pm 0)$ であるから，$\dfrac{3}{x-1}\to\pm\infty\ (x\to 1\pm 0)$

練習問題 3-2. $x-1<[x]\le x$ より，$x+1>0$ のとき $\dfrac{x-1}{x+1}\le\dfrac{[x]}{x+1}\le\dfrac{x}{x+1}$. $x\to\infty$ のとき，問題 3-1(1) より $\dfrac{x}{x+1}\to 1$ であり，同様にして $\dfrac{x-1}{x+1}\to 1$ が示されるから，命題 3-2（はさみうち）より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x+1}=1$.

担当教員：川平 友規

連続関数と中間値の定理

配布日：5/10/2021　Version：1.2

●● 5 月 10 日の講義ノートと補足 ●●

前回の補足：重要な極限

以下の２つの極限は，微分の計算において重要である：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

注意. $\dfrac{e^x-1}{x}$ も $\dfrac{\sin x}{x}$ も $x=0$ では $0/0$ となり定義されない．しかし，極限は意味をもつ．一般に，$\lim_{x\to a} f(x)$ という形の極限では，x は「$x\neq a$ を満たしながら a に限りなく近づく」のであって，$x=a$ で $f(x)$ が定義されている必要がなかったことを思い出しておこう．

連続関数

関数のグラフが「つながっている」「ジャンプしない」ことを表現するのが，つぎの「連続性」である：

定義（連続性）.

- 関数 $f(x)$ が $x=a$ で**連続**であるとは，$x\to a$ のとき $f(x)\to f(a)$，すなわち，
$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$
が成り立つことをいう．
- $f(x)$ が定義域上のすべての a で連続であるとき，**連続関数**という．また，$f(x)$ が集合 X 内のすべての a で連続であるとき，**X 上で連続**もしくは **X 上の連続関数**であるという．

関数の極限の性質（命題 3-1）から，次がわかる：

命題 4-1（連続関数の四則）. $f(x)$，$g(x)$ が $x=a$ で連続であるとき，その和（差）$f(x)\pm g(x)$ と積 $f(x)g(x)$ は $x=a$ で連続．さらに $g(a)\neq 0$ のとき，商 $f(x)/g(x)$ も連続．

例. $f(x)=A$（定数関数），$g(x)=x$ はすべての $x=a$ で連続である（定義通り確認せよ）．すなわち，$\mathbb{R}$ 上の連続関数である．

例. 上の例と命題 4-1 より，関数 $x+A$，Ax，$Ax+B$，$x\cdot x=x^2$，Ax^2+Bx+C などの多項式も連続関数である．また，$\dfrac{Ax}{1+x}$ のような関数も（定義可能な範囲で，この場合 $x\neq -1$ ならば）連続である．

例. 一般に多項式関数，三角関数，指数・対数関数などの初等的な関数（高校までに習うような関数）はすべて定義可能な点において連続である．

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

合成関数. 連続関数を四則で組み合わせることで，新しい連続関数を次々に生成することができる．次の命題も，新しい連続関数を作るときに役に立つ：

> **命題 4-2（連続関数の合成）．** $y = f(x)$，$z = g(y)$ が連続関数であるとき，$z = g(f(x))$ も定義可能な範囲で連続である．

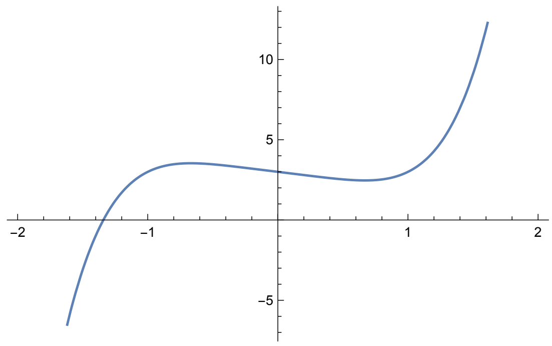
例. $y = x^2 - 1$，$z = 1/y\ (y \neq 0)$ のとき，$z = 1/(x^2 - 1)$ は $x \neq \pm 1$ のとき連続.

中間値の定理と方程式の数値解法（二分法）

次は，連続関数のもっとも基本的な性質である：

> **定理 4-3（中間値の定理）．** **閉区間** $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ が $f(a) \neq f(b)$ を満たすとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 ℓ に対し，$f(c) = \ell$ を満たす c が区間 (a, b) に少なくとも 1 つ存在する．

応用（方程式の解の存在）． $f(a) < 0 < f(b)$ のとき，$f(c) = 0$ となる c が少なくとも 1 つ，区間 (a, b) に存在する．
たとえば $x^5 - x + 3 = 0$ という方程式に対し，$f(x) = x^5 - x + 3$ とおくとこれは連続関数である．また，$f(-2) = -32+2+3 < 0$，$f(0) = 3 > 0$ であるから，中間値の定理より $f(c) = 0$ となる c が $(-2, 0)$ に少なくとも 1 つ存在する．



$f(x) = x^5 - x + 3$ のグラフ．方程式 $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解 $c = -1.34129$ をもつ．

中間値の定理の証明（方程式の解の存在）．

$f(a) < \ell < f(b)$ の場合について証明する．($f(b) < \ell < f(a)$ の場合も同様である．)

まず，$f(a) - \ell < 0 < f(b) - \ell$ であることに注意する．$g(x) = f(x) - \ell$ とおくと，これは連続関数であり，$g(a) < 0 < g(b)$ となる．

したがって，最初から $f(a) < 0 < f(b)$，$\ell = 0$ の場合に証明すれば十分である．

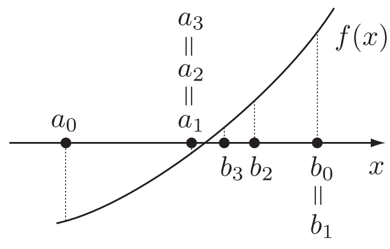
ここでは，定理のような c を見つける**二分法**と呼ばれる手順（アルゴリズム）を用いる．

二分法のアルゴリズム.

(1) $f(a_0) < 0$, $f(b_0) > 0$ となるペア $a_0, b_0\ (a_0 < b_0)$ を与える．ここでは，$a_0 = a$, $b_0 := b$ とする．

(2) ペア $a_n, b_n\ (a_n < b_n, n \geq 0)$ が与えられているとき，

- $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (\frac{a_n+b_n}{2}, b_n)$.
- $f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0$ ならば $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (a_n, \frac{a_n+b_n}{2})$.
- $f(\frac{a_n+b_n}{2}) = 0$ ならば $c := \frac{a_n+b_n}{2}$，計算終了.



この (2) を繰り返すと，$f(c) = 0$ となる c が見つかり計算終了となるか，あるいは無限につづいて数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が得られる．このとき，$\{a_n\}$ は単調増加かつ $a_n < b_0$ （上に有界），$\{b_n\}$ は単調減少かつ $a_0 < b_n$ （下に有界）より，それぞれある実数に収束する．$c = \lim a_n$ とすると，

$|b_n - a_n| = |b_0 - a_0|/2^n \to 0$ より $b_n = (b_n - a_n) + a_n \to 0 + c = c\ (n \to \infty)$．$f(x)$ は連続であったから，$f(c) = \lim f(a_n) \leq 0$ かつ $f(c) = \lim f(b_n) \geq 0$．よって $f(c) = 0$ となる．

以上で，中間値の定理が示された． ■

方程式の数値解法． 最初にこの講義の「概念的な」目標として，与えられた関数について方程式 $f(x) = 0$ の解を任意の精度で求める，ということを掲げた．二分法のアルゴリズムにおいては，十分大きな n にたいし a_n もしくは b_n を c の近似値として用いることができる．しかも，誤差（精度）の評価式は次で与えられる：

$$\max\{|a_n - c|,\ |b_n - c|\} \leq |b_n - a_n| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}$$

具体例（$\sqrt{2}$ の計算）． 実際に $f(x) = x^2 - 2$, $(a_0, b_0) = (1.0, 2.0)$ として計算したのが下の表である．a_n, b_n と真の値 $\sqrt{2}$ との誤差は $1/2^n$ 以下である．

n	a_n	b_n
0	1.0	2.0
1	1.0	1.5
2	1.25	1.5
3	1.375	1.5
4	1.375	1.4375
5	1.40625	1.4375
6	1.40625	1.42188
7	1.41406	1.42188

n	a_n	b_n
8	1.41406	1.41797
9	1.41406	1.41602
10	1.41406	1.41504
11	1.41406	1.41455
12	1.41406	1.41431
13	1.41418	1.41431
14	1.41418	1.41425
15	1.41418	1.41422

n	a_n	b_n
16	1.4142	1.41422
17	1.41421	1.41422
18	1.41421	1.41422
19	1.41421	1.41422
20	1.41421	1.41421
21	1.41421	1.41421
22	1.41421	1.41421
23	1.41421	1.41421

注意． この表は小数で表現しているが，二分法のアルゴリズムより，ここに現れる (a_n, b_n) はすべて有理数である．実数の連続性の公理を仮定しないと，最終的な無理数解 $\sqrt{2}$ の存在が保証されないことに注意しよう．

注意． 中間値の定理は連続関数のグラフが「つながっている」ことのひとつの説明になっている．

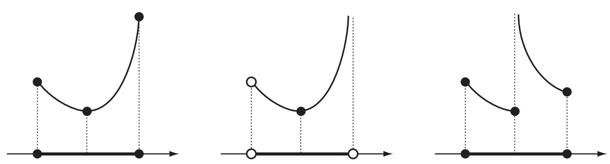
閉区間上の最大値・最小値の存在．

ここで連続関数の重要な性質として，次の定理を紹介しておこう．

> **定理 4-4** 閉区間上で定義された連続関数は，最大値と最小値を持つ．

ここで，関数 $f(x)$ が「最大値を持つ」とは，定義域上の任意の x に対し $f(x) \leq f(x_0)$ をみたすような x_0 が同じく定義域内に存在することをいう．

注意． 一見「あたりまえ」のことを言っているようだが,「閉区間でない」場合,「連続関数でない」場合には，最大値・最小値がその区間内で実現されない可能性があることに注意しておこう．

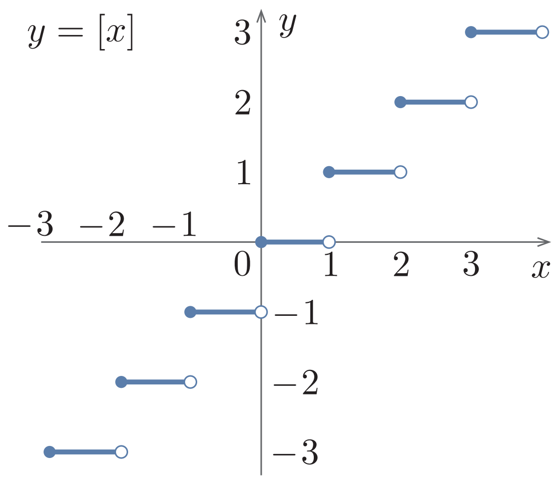


Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

担当教員：川平 友規

練習問題

練習問題 4-1. 関数 $f(x) = [x]$ （ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数）とするとき，整数 a に対し $f(x)$ は $x = a$ で連続ではないことを示せ．



練習問題 4-2. 中間値の定理を用いて，方程式 $x^2 - 2 = 0$ は正の実数解を少なくとも 1 つもつことを示せ．

解答

練習問題 4-1. a を整数とする．$x \to a - 0$ のとき，$f(x) = [x] \to a - 1$ だが，$f(a) = a$ より $x \to a$ のとき $f(x) \to f(a)$ とは言えない．

注意. $x \to a + 0$ のとき，$f(x) = [x] \to a = f(a)$ であるから，「$x = a$ において右半連続」と呼ばれることもある．

練習問題 4-2. $f(x) = x^2 - 2$ とおくと，これは $[0, 2]$ 上で連続であり，$f(0) = -2 < 0 < f(2) = 2$ が成り立つ．中間値の定理より，$f(c) = 0$ となる c が $(0, 2)$ に存在する．

担当教員：川平 友規

連続性と中間値の定理（つづき）

配布日：5/17/2019 Version：1.1

●● 5 月 17 日の講義内容は前回の講義プリントに含まれています ●●

「前回の補足」の補足：重要な極限の証明について

前回あげた 2 つの極限

$$（ア）\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad （イ）\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

の証明について述べておく．

（ア）の証明．

補題 1 一般に $a>0$ のとき $\lim_{x\to 0} a^x = 1$.

証明． $x\to 0$ のとき，$0<|x|<1$ と仮定してよい．このとき，（x の関数として）自然数 $n=n(x)$ を $n\le 1/|x|<n+1$ となるように選ぶと，$-1/n\le x\le 1/n$ が成り立つ．また，$|x|\to 0$ のとき $n\to\infty$ である．

まず $a>1$ のとき，指数に関する単調性[1] より，$a^{-1/n}\le a^x\le a^{1/n}$.

一般に $a>0$ のとき $a^{1/n}\to 1$ $(n\to\infty)$ であったから（命題 2-2 の (1)），$x\to 0$ のとき,「はさみうちの原理」(命題 3-2 の (2)) より $\lim_{x\to 0} a^x=1$．$0<a<1$ の場合は $a^{1/n}\le a^x\le a^{-1/n}$ であり，あとは同様．■

補題 2 $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

証明． まず $x\to\infty$ のときを示す．$x>1$ と仮定し,（x の関数として）自然数 $n=n(x)$ を $n\le x<n+1$ となるように選ぶと，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

$x\to\infty$ のとき $n\to\infty$ であるから，定理 2-1（e の存在）より，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\to e.$$

同様に $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\to e$ であるから,「はさみうちの原理」より求める極限を得る．

次に $x\to-\infty$ のときを示す．$t=-x>1$ とすれば

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right).$$

よって $t=-x\to\infty$ のとき e に収束する．

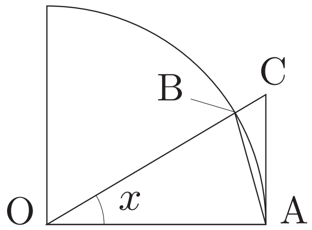
（ア）の証明のつづき． $t=e^x-1$ とおくと，(1) より $x\to 0$ のとき $t\to 0$．さらに $s=1/t$ とおくと，

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{t}{\log_e(1+t)}=\frac{1}{\log_e(1+t)^{1/t}}=\left(\log_e\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right)^{-1}.$$

$x\to\pm 0$ のとき $s\to\pm\infty$ であるから，上の式は $\log_e e=1$ に収束する．

[1] $a>1$，$x<y$ のとき $a^x<a^y$.

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp



（イ）の証明（面積の存在を仮定した「説明」）． $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(-x)}{-x}$（偶関数）より，$0 < x \to +0$ の場合を考えれば十分．まず図のような状況を考える．ただし，$\mathrm{O} = (0,0)$，$\mathrm{A} = (1,0)$，$\mathrm{B} = (\cos x, \sin x)$，$\mathrm{C} = (1, \tan x)$ である．このとき

$$\begin{aligned} &\text{三角形 OAB} \subset \text{扇形 OAB} \subset \text{三角形 OAC} \\ \Longrightarrow\ &[\text{三角形 OAB の面積}] < [\text{扇形 OAB の面積}] < [\text{三角形 OAC の面積}] \end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$x \to +0$ のとき $\cos x \to 1 - 0$ であるから,「はさみうちの原理」より $(\sin x)/x \to 1$. ■

注意． この証明では「三角形や扇形の面積の存在を暗に仮定している」という点で不十分とされることがある．

論理的に一番無難なのは，弧 AB の長さを積分によって定義し，その微分として逆三角関数（次回か次々回に学ぶ）が現れることを用いる方法であるが，ここでは割愛する．

逆関数と指数・対数関数

配布日：5/24/2021 Version：1.1

●● 5 月 24 日の講義ノートと補足 ●●

真に単調増加な関数. 以下，I を区間とする．たとえば，

$$(a,b),\ [a,b],\ (a,b],\ [a,b)$$

といった形の区間を想定しており，$I=[0,\infty)$ のような無限に伸びる区間も許す．

定義. 区間 I 上の関数 $f(x)$ が**真に単調増加**であるとは，I 上のすべての数 x_1, x_2 に対し，

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

が成り立つことをいう．また，**真に単調減少**であるとは，I 上のすべての数 x_1, x_2 に対し，

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

が成り立つことをいう．

注意. $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \le f(x_2)$ が成り立つときは単に「単調増加」であるという.「単調減少」も同様.

例 1. $f(x)=x^2$ で定まる関数は，

- $[0,\infty)$ 上の関数とみなした場合は「真に単調増加」.
- $(-\infty,0]$ 上の関数とみなした場合は「真に単調減少」.
- 実数全体 $\mathbb{R}$ 上の関数とみなした場合は，いずれでもない．

中間値の定理と逆関数. 区間 $[a,b]$（$a<b$ は仮定する）を定義域に持つ連続関数 $f(x)$ を考える．$f(x)$ が真に単調増加であれば，$a<x<b$ より $f(a)<f(x)<f(b)$ である．中間値の定理より，$f(a)<y_0<f(b)$ を満たす任意の y_0 に対し，

$$y_0 = f(x_0)$$

を満たす x_0 が区間 (a,b) に少なくとも 1 つ存在する.（とくに，この関数の値域は閉区間 $[f(a),\ f(b)]$ である.）じつは,「少なくとも 1 つ」ではなく,「ただ 1 つだけ」存在する．[1]

以上を踏まえて，次のような「新しい関数」を考えることができる：

[1]背理法でチェックしてみよう： $y_0=f(x_0)=f(x_1)$ を満たす互いに異なる x_0，x_1 が存在したとする．たとえば $a \le x_0 < x_1 \le b$ であるとき，真に単調増加であることから $f(x_0)<f(x_1)$ となり矛盾する．すなわち，$x_0=x_1$ でなくてはならない．

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

定義（逆関数）． 区間 I を定義域とする連続関数 $f(x)$ が真に単調増加（もしくは，真に単調減少）であるとき，その値域 J （これも区間となる）に含まれる任意の y_0 に対し，

$$y_0 = f(x_0)$$

を満たすただ 1 つの x_0 が存在する．$y_0 \in J$ にこのような x_0 を対応させる関数を

$$x = f^{-1}(y),$$

もしくは変数 x と y を入れ替えて

$$y = f^{-1}(x)$$

と表し，関数 $f(x)$ の**逆関数** (inverse function) という．

例 2（平方根 $\sqrt{\ }$ の定義）． $[0, \infty)$ 上で真に単調増加な関数 $y = f(x) = x^2$ の逆関数を

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{もしくは} \quad f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

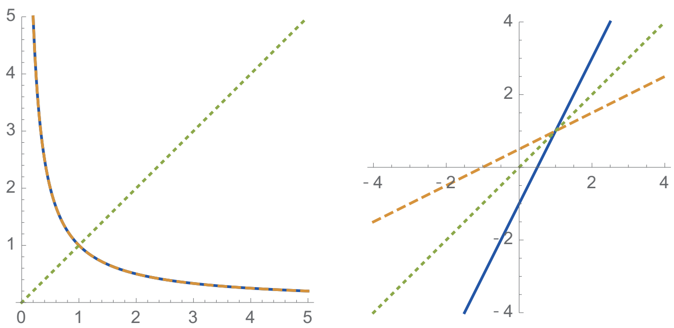
と表す．負でない実数 A に対し，$\pm\sqrt{A}$ を A の**平方根**とよぶのである．

これにより,「2 乗して 2 になる正の実数」 $\sqrt{2}$ の存在が正当化された．

例 3. $y = f(x) = 1/x$ $(x > 0)$ の逆関数を求めてみよう．$x > 0$ のとき，$1/x$ は真に単調減少であるから，確かに逆関数は存在する．$x > 0$ より $y = 1/x > 0$ であるから，$x = 1/y$．よって $x = f^{-1}(y) = 1/y$ である．これは $y = f^{-1}(x) = 1/x$ であるから，$f(x)$ の逆関数は $f(x)$ 自身である．

注意. 一般に，$y = f(x) = (x\ \text{の式})$ が与えられたとき，これを式変形して $x = (y\ \text{の式})$ の形にできればそれが逆関数を与える．

例 4. $y = f(x) = 2x - 1$ $(x \in \mathbb{R})$ の逆関数を求めてみよう．この関数は傾き 2 の直線の方程式であり，真に単調増加であるから，確かに逆関数は存在する．$y = 2x - 1 \iff x = (y + 1)/2$ であるから，$x = f^{-1}(y) = (y + 1)/2$．



左から，例 3 および例 4 に対応する $y = f(x)$（青の実線），
$y = f^{-1}(x)$（オレンジの破線），$y = x$（緑の点線）のグラフ．

逆関数の性質． 証明なしで逆関数の性質をまとめておこう：ある区間上の連続関数 $f(x)$ が逆関数をもつとき，

(1) $f(x)$ が真に単調増加（減少） $\iff$ $f^{-1}(x)$ が真に単調増加（減少）

(2) $y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $y = x$ に関して互いに対称（線対称）．

(3) $f(x)$ が連続であるという仮定のもと，$f^{-1}(x)$ も連続関数．

(4) $f(x)$ の定義域が集合 I，値域が集合 J であれば，$f^{-1}(x)$ の定義域は J，値域が I．

指数関数

定義（指数関数）． 実数 x に e の x 乗を対応させる関数を**指数関数**といい，$y = e^x$ もしくは $y = \exp x$ と表す．
　より一般に，$a > 0, a \neq 1$ を固定し実数 x に a の x 乗 a^x を対応させる関数を **a を底とする指数関数**とよぶ．

$a = 1$ のときは常に $a^x = 1$ となり定数関数であることに注意．また，次が成り立つ．

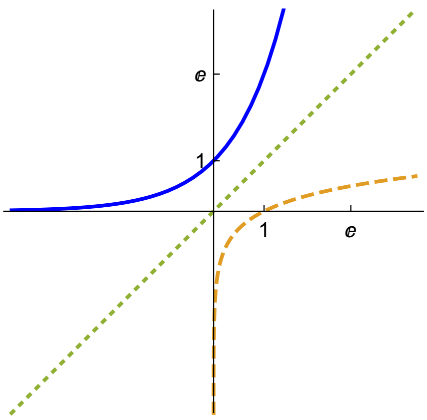
定理 6-1（指数関数の性質）． $a > 0$ とする．このとき，以下が成り立つ：

(1) （指数法則）任意の実数 x，y に対し，$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$．

(2) $a > 1$ のとき，関数 $y = a^x$ は真に単調増加かつ連続．

(3) $a < 1$ のとき，関数 $y = a^x$ は真に単調減少かつ連続．

証明． (1) ：$r_n \to r$，$s_n \to s$ となる真に単調増加な有理数列を取る．このとき $r_n + s_n$ も真に単調増加で，$r + s$ に収束する．よって有理数べきの指数法則（このプリント最後の補足部分を参照）から $\lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} a^{s_n}$ となり，求める等式をえる．
(2)$x < y$ のとき $a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1) > a^x(1^{y-x} - 1) = 0$．よって真に単調増加．つぎに連続性を示そう．次に実数 x を任意に固定し，$y \to x$ としたときの a^y の極限を考えよう．$|y - x| < 1/n$ となる自然数 n で最大のものをとると，$y \to x$ のとき $n \to \infty$．よって命題 2-2(1) より $1 < a^{|y-x|} < a^{1/n} \to 1$．これより $y \to x + 0$ のとき $0 < a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1) \to 0$．同様に $y \to x - 0$ のとき $0 < a^x - a^y \to 0$ が成り立つので，$y \to x$ のとき $a^y \to a^x$．すなわち関数 $x \mapsto a^x$ は連続．
(3) は (2) と同様．■



指数関数 $y = e^x$（青の実線），対数関数 $y = \log x$（オレンジの破線），
および $y = x$（緑の点線）のグラフ．

対数関数.

定義（対数関数）. 定理 6-1(2) より，指数関数 $y = e^x$ には逆関数が存在する．それを**対数関数**（もしくは**自然対数**）といい，$y = \log x$ と表す．

より一般に，$a > 0, a \neq 1$ を固定するとき，定理 6-1 の (2) と (3) により関数 $y = a^x$ には逆関数が存在する．それを **a を底とする対数関数**とよび，$y = \log_a x$ のと表す．とくに，$\log_e x = \log x$ である．

$\log x$ は $\ln x$ と表すこともある．[2] また，定理 6-1 から，次の定理が導かれる．

定理 6-2（対数関数の性質）. $a > 0, a \neq 1$ とする．このとき，以下が成り立つ：

(1) 任意の正の実数 x, y に対し，$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$.

(2) $a > 1$ のとき，関数 $y = \log_a x$ は真に単調増加かつ連続.

(3) $a < 1$ のとき，関数 $y = \log_a x$ は真に単調減少かつ連続.

命題 6-3（指数・対数関数の底の変換公式）. $a > 0, a \neq 1$ とする．このとき，以下が成り立つ：

$$a^x = e^{x \log a} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad (x > 0).$$

補足：有理数べきと無理数べきの厳密な定義

より一般に， n を自然数とするとき関数 $f(x) = x^n$ は区間 $[0, \infty)$ 上で単調増加である．この事実を用いて,「実数 x の有理数べき」を定義できる．

定義（有理数べき）. n を自然数とするとき，関数 $y = f(x) = x^n$ の区間 $[0, \infty)$ における逆関数を $\sqrt[n]{x}$ もしくは $x^{\frac{1}{n}}$ で表し，x の **n 乗根**と呼ぶ.

さらに，実数 $x > 0$ と整数 p，自然数 q に対し，

$$x^{\frac{p}{q}} := \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

で定める．これを **x の p/q 乗**とよぶ.

注意.

- （復習）: p が負の整数の場合は $a^p := 1/a^{-p}$ と定義するのであった．
- $x^{1/2}$ と $x^{3/6}$ は同じ値でないと都合が悪いが，定義はそれぞれ異なるので同じ値であることを保証しなくてはならない．一般に，p と q のペアと P と Q のペアが $P/Q = p/q$ を満たすとき，$x^{P/Q} = x^{p/q}$ であることを確認しなくてはいけない．[3]

[2] ちなみに指数関数は英語で exponential function，対数関数は logarithmic function. ln はラテン語の logarithmus naturalis （英語に直すと natural logarithm，日本語だと「自然な対数」）.

[3] 証明：まず $A := \left(x^{P/Q}\right)^{qQ} = \left(x^{1/Q}\right)^{PqQ} = x^{Pq}$ であり，同様に $B := \left(x^{p/q}\right)^{qQ} = \left(x^{1/q}\right)^{pqQ} = x^{pQ}$ であることに注意する．$Pq = pQ$ より，$A = B > 0$ であるから，$x^{P/Q}$ と $x^{p/q}$ はともに $A > 0$ の qQ 乗根である．そのよう

- 正の数 x と有理数 r と s に対し，指数法則

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s}, \quad (x^r)^s = x^{rs}$$

が成り立つのであった（証明を考えてみよ）．これは後で用いる．

正の数の有理数べき（有理数乗）が定まると，極限を用いて無理数べき（無理数乗）を定義することができる．

命題 6-4（無理数べき）． x を正の実数，α を無理数とするとき，数列 $\{r_n\}$ を

(a) すべての自然数 n で $r_n \in \mathbb{Q}$.

(b) すべての自然数 n で $r_n < r_{n+1}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$

が成り立つように取る．このとき，極限 $\lim_{n\to\infty} x^{r_n}$ が存在し，その値は（上の 3 条件さえ満たせば）数列 $\{r_n\}$ の取り方に依存しない．これを x^α と表し，x **の** α **乗**とよぶ.

注意. 任意の実数 α に対し，(a)(b)(c) を満たす $\{r_n\}$ を見つけることは難しくない．例えば $\alpha > 0$ のときは，これを小数展開して，小数点以下第 n 位までで打ち切ったものを用いればよい．

例. $\alpha = \sqrt{2} = 1.41421356...$ のとき，

$$\{r_n\} = \{1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \cdots\}$$

とする．このとき，例えば

$$e^{\sqrt{2}} := \lim_{n\to\infty} e^{r_n}$$

とすることで「e の $\sqrt{2}$ 乗」が定まる．

証明（命題 6-4）． $x > 1$ のときを示す.（$0 < x < 1$ のときも同様，$x = 1$ のときは明らか.）

一般に，有理数 r と s に対し，$r < s$ ならば $x^r < x^s$ を示そう．関数 $y = x^{s-r}$ が単調増加であることに注意すると，有理数の指数法則より，$x^s - x^r = x^r(x^{s-r} - 1) > x^r(1^{s-r} - 1) = 0$．これより，$\{x^{r_n}\}$ は単調増加だとわかった．つぎに $\alpha < m$ を満たす任意の整数をとると，すべての n で $r_n < m$ が成り立つので $x^{r_n} < x^m$．よって $\{x^{r_n}\}$ は上に有界である．

以上から，極限 $\lim_{n\to\infty} x^{r_n}$ が存在することがわかった．

最後に，この極限が r_n の取り方に依存しないことを示そう．$\{s_n\}$ が (a)(b)(c) を満たすとしよう．このとき $r_n - s_n = (\alpha - s_n) - (\alpha - r_n) \to 0\ (n \to \infty)$ でなくてはならない．$x^{r_n} - x^{s_n} = x^{s_n}\{x^{r_n - s_n} - 1\}$ であるから，有理数の列 $\{q_n = r_n - s_n\}$ が $q_n \to 0\ (n \to \infty)$ を満たすとき $x^{q_n} \to 0$ を示せばよい．$|q_n| < 1/m$ となる最大の m を m_n とおくと，$m_n \to \infty\ (n \to \infty)$ である．よって命題 2-2(1) より $x^{|q_n|} < x^{1/m_n} \to 1$．$q_n < 0$ のときは $x^{|q_n|} = 1/x^{q_n}$ であるから，$\lim_{n\to\infty} x^{q_n} = 1$ が示された． ■

な値は 1 つだけに定まる．

練習問題

練習問題 6-1． 次の関数の逆関数を求め，グラフを描け．

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $(x>0)$ (2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ $(x<-1$ および $x>-1)$ (3) $f(x)=\sqrt{x+1}$ $(x\geq -1)$

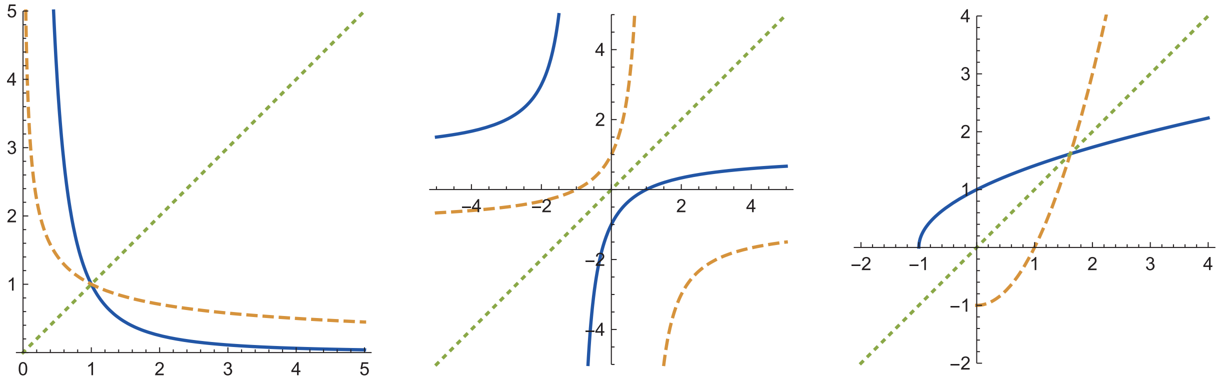
解答

練習問題 6-1．

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$ $(x>0)$ より $y>0$ であり，$(0,\infty)$ 上で真に単調減少である．よって逆関数が存在する．また，$x=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$ と変形できるから，$y=f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$．

(2) $y=f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=1+\dfrac{-2}{x+1}$ と変形できるから，$f(x)$ のグラフは $y=\dfrac{-2}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 平行移動したものである．とくに，区間 $(-\infty,-1)$, $(-1,\infty)$ それぞれにおいて真に単調増加であり，それぞれの区間で逆関数が存在する．また，$x=-1+\dfrac{-2}{y-1}=\dfrac{-y-1}{y-1}$ と変形できるから，$y=f^{-1}(x)=\dfrac{-y-1}{y-1}$．

(3) $y=\sqrt{x+1}$ $(x\geq -1)$ のグラフは $y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -1 平行移動させたものである．とくに，区間 $[-1,\infty)$ において真に単調増加であり，逆関数が存在する．$x=y^2-1$ と書けるから，$y=f^{-1}(x)=x^2-1$．



左から (1), (2), (3) に対応する $y=f(x)$（青の実線），
$y=f^{-1}(x)$（オレンジの破線），$y=x$（緑の点線）のグラフ．

担当教員：川平 友規

逆三角関数・微分可能性

配布日：5/31/2021 Version：1.1

●● 5 月 31 日の講義ノートと補足 ●●

三角関数

高校以来おなじみの三角関数の定義をおさらいしておこう．

定義（ラジアン：角度の単位）．

- xy 平面上で $x^2+y^2=1$ で定まる単位円を考える．$\theta \geq 0$ に対し，点 $\mathrm{A}=(1,0)$ から円周上を左回りに長さ θ 進んだ点を $\mathrm{P}(\theta)$ とする．このとき，角 $\angle\mathrm{AOP}(\theta)$ のことを θ **ラジアン**という．
- 同様に，$\theta<0$ に対し，点 $\mathrm{A}=(1,0)$ から円周上を右回りに長さ $|\theta|$ 進んだ点を $\mathrm{P}(\theta)$ とする．このとき，角 $\angle\mathrm{AOP}(\theta)$ のことを θ **ラジアン**という．

ただし,「ラジアン」という単位は省略するのがふつうである．

例． $360^\circ=2\pi$（ラジアン），$180^\circ=\pi$，$90^\circ=\pi/2$，$60^\circ=\pi/3$，$45^\circ=\pi/4$，$30^\circ=\pi/6$ など．ちなみに，$1^\circ=\pi/180$．

定義（三角関数）．

- 実数 θ に対し，xy 平面上の点 $\mathrm{A}=(1,0)$ から単位円周上を角度にして θ ラジアン進んだ点 $\mathrm{P}(\theta)$ の座標を $(\cos\theta,\sin\theta)$ と表す．
- また，$\cos\theta\neq 0$ のとき，すなわち $\theta\neq(m+1/2)\pi$ (m は整数) のとき，線分 $\mathrm{OP}(\theta)$ の傾きを $\tan\theta$ で表す．すなわち．$\tan\theta:=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

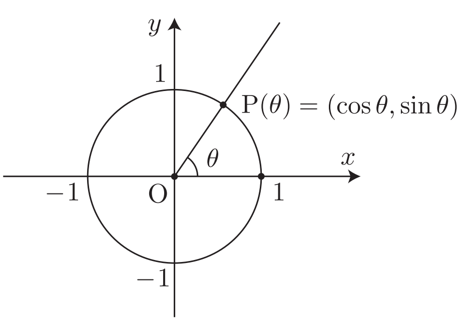
変数 x に対し，$\sin x$ は**正弦関数**もしくは**サイン** x，$\cos x$ は**余弦関数**もしくは**コサイン** x，$\tan x$ は**正接関数**もしくは**タンジェント** x とよばれ，これらをあわせて**三角関数**とよぶ．

三角関数の定義より，

(S) $\sin x$ を区間 $[-\pi/2,\pi/2]$ に制限した関数を $\mathrm{Sin}\, x$ と表すと，これは真に単調増加

(C) $\cos x$ を区間 $[0,\pi]$ に制限した関数を $\mathrm{Cos}\, x$ と表すと，これは真に単調減少

(T) $\tan x$ を区間 $(-\pi/2,\pi/2)$ に制限した関数を $\mathrm{Tan}\, x$ と表すと，これは真に単調増加



である．よってそれぞれの関数には以下の逆関数が定まる．

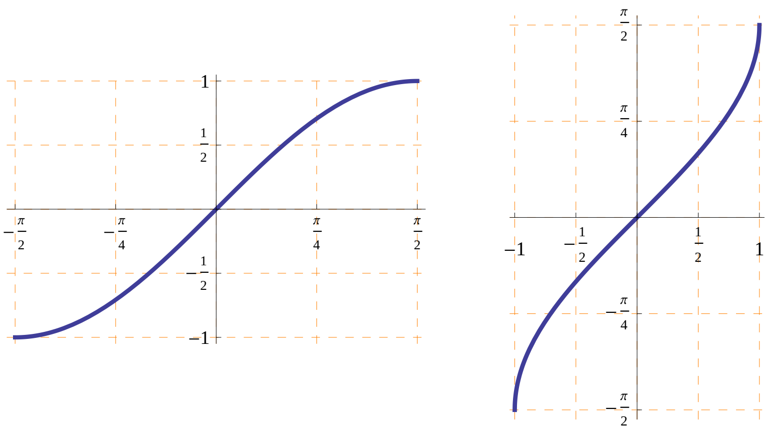


図 1: $\mathrm{Sin}\,x$ と $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$

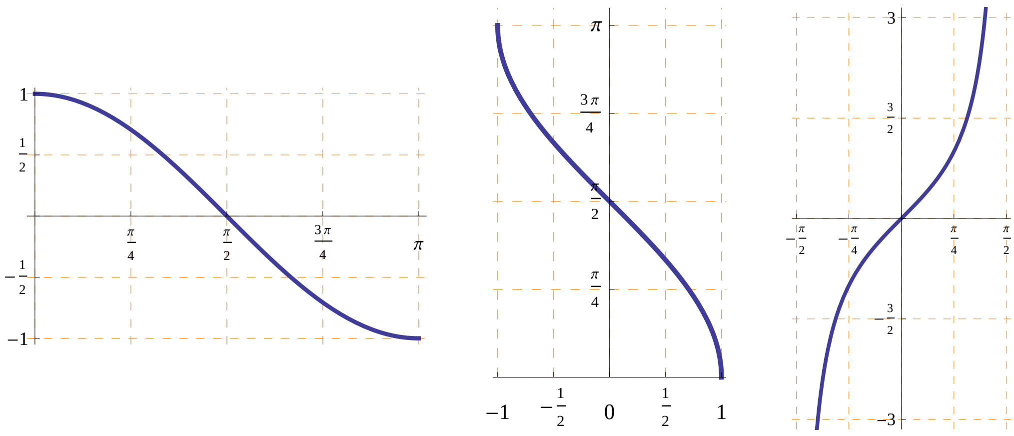


図 2: $\mathrm{Cos}\,x$ と $\mathrm{Cos}^{-1}\,x$，$\mathrm{Tan}\,x$

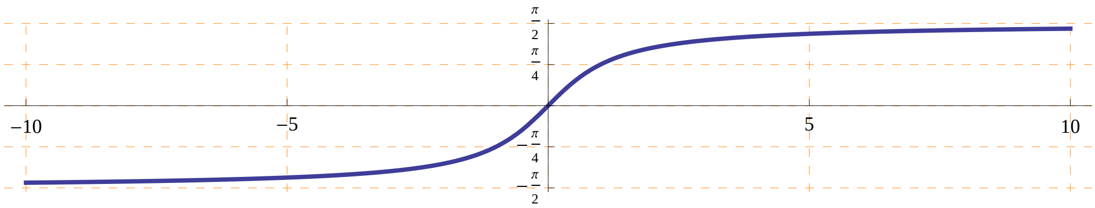


図 3: $\mathrm{Tan}^{-1}\,x$

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

定義（逆三角関数）． 上の $\mathrm{Sin}\,x$，$\mathrm{Cos}\,x$，$\mathrm{Tan}\,x$ の逆関数をそれぞれ

(S') $y = \mathrm{Sin}^{-1}\,x \quad (-1 \le x \le 1)$

(C') $y = \mathrm{Cos}^{-1}\,x \quad (-1 \le x \le 1)$

(T') $y = \mathrm{Tan}^{-1}\,x \quad (-\infty < x < \infty)$

と表す．$\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ は**逆正弦関数**もしくは**サインインバース** x，$\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ は**逆余弦関数**もしくは**コサインインバース** x，$\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ は**逆正接関数**もしくは**タンジェントインバース** x とよばれ，これらをあわせて**逆三角関数**とよぶ．

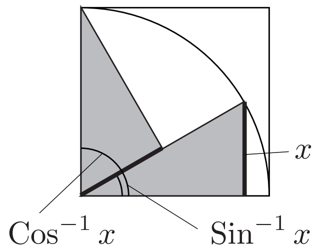
注意． $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$，$\mathrm{Cos}^{-1}\,x$，$\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ はそれぞれ $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$ とも書かれ，それぞれ**アークサイン** x，**アークコサイン** x，**アークタンジェント** x と呼ばれることもある（本講義では用いない）．

例． $\mathrm{Sin}^{-1}\,0 = 0$，$\mathrm{Sin}^{-1}\,1 = \dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$，など．

例． $x \in [0,1]$ のとき，

$$\mathrm{Sin}^{-1}\,x + \mathrm{Cos}^{-1}\,x = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．理由は次の図をぢっと眺めればわかるだろう．(グラフを見ると $x \in [-1,1]$ で正しいこともわかる．証明を考えてみよ．)



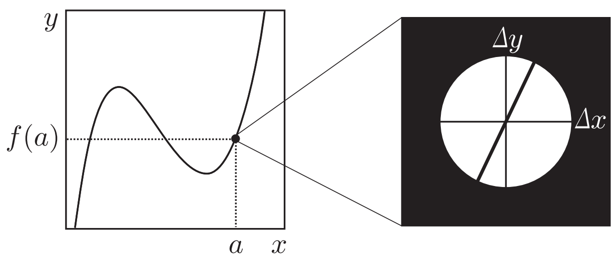
微分とは何か（復習，あるいは再解釈）

定義（微分可能性） 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で**微分可能**であるとは，極限

$$A = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1}$$

が存在することをいう．この A を a における**微分係数**と呼び，$f'(a)$ と表す．

まず，$y = f(x)$ のグラフ上の点を，顕微鏡で拡大する．拡大率が十分であれば，顕微鏡の中に現れたグラフの断片は，あたかも線分のように見えるであろう．これは，関数のグラフが局所的に，「ほぼ比例関数」になっていることを意味する．



この「ほぼ比例関数」の比例定数にあたるものがこの線分の「傾き」と呼ばれる量であり，私たちが高校で「微分係数」として学んだものになっているのである．

微分可能性の意味. 式 $(*)$ で定義される微分可能性と微分係数の意味をもう少し詳しく見ておこう．先の図で「顕微鏡内の座標系」にあたるものとして，

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a)$$

と定義する．$(*)$ は

$$A = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

を意味するから，$\Delta x \approx 0$ のとき $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx A$，すなわち $\Delta y \approx A\,\Delta x$．これは「顕微鏡内ではほとんど比例関数」であることを数学的に表現したものである[1]．もとの変数 x で表現すると，次のようになる：

$$(**) \qquad f(x) - f(a) \approx A(x-a) \iff f(x) \approx f(a) + A(x-a) : \text{接線の方程式}$$

と同値であることに注意しよう．すなわち，

「$f(x)$ のグラフが（接線とよばれる）直線で近似される」

という幾何学的な意味が導かれた．

定義の言い換え. 「近似される」の部分をもう少し定量的に理解するために，(1) を読み替えておこう．いま，

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A &\iff \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \right) = 0 \\ &\iff \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \{f(a) + A(x-a)\}}{x - a} = 0\end{aligned}$$

であるから，微分可能性は次のようにいい換えることができる：

微分可能性の定義のいい換え：関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で**微分可能**であるとは，ある定数 A が存在し，$x \to a$ のとき

$$\boldsymbol{\frac{f(x) - \{f(a) + A(x-a)\}}{x - a} \to 0} \tag{2}$$

が成り立つことをいう．この A を $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**といい，$f'(a)$ と表す．

(2) の分子は $y = f(x)$ を，$(a, f(a))$ を通る直線を表す 1 次関数 $y = f(a) + A(x-a)$ で近似したときの誤差である．傾き A の値を適切に選べば，その誤差が $x - a$ が 0 に近づくスピードよりも相対的に速く 0 に近づく，ということである．

参考（ランダウの記号）. (2) が成り立つとき，

$$f(x) - \{f(a) + A(x-a)\} = o(x-a) \quad (x \to a) \tag{3}$$

あるいは

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a) \quad (x \to a) \tag{4}$$

とも表す．

[1] $X \approx Y$ は「X と Y はほぼ等しい」ことを表す記号である.「ほぼ等しい」の意味はきっちりと定義されることもあるし，あいまいに読み手の解釈（誤差の許容度）に任せることもある．ここでは後者の立場で使っている．$X \simeq Y$ や $X \sim Y$ のように書かれることもある.（日本では≒を用いられることも多い.）

より一般に，関数 $E(x)$ がある負でない整数 n に対し

$$\frac{E(x)}{(x-a)^n} \to 0 \quad (x \to a)$$

を満たすとき，

$$E(x) = o((x-p)^n) \quad (x \to a)$$

と表す．これを**ランダウの記号**という．直観的には，$x \to a$ のとき $E(x)$ が $(x-a)^n \to 0$ よりも相対的に速く 0 に近づくことを意味している．

連続性との関係． 「微分可能性」の定義には,「連続性」が仮定されていない．仮定しなくても，次の命題から自動的に導かれるからである：

> **命題 7-2** 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ において微分可能であれば， $x = a$ において連続.

証明． $x \to a$ のとき，

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) \to A \cdot 0 = 0.$$

■.

導関数．

> **定義．** 関数 $y = f(x)$ が**微分可能**であるとは，定義域上のすべての点で微分可能となることをいう．このとき，定義域上の点 a にそこでの微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数を $f(x)$ の**導関数**といい，$y = f'(x)$ と表す.

注意． $y = f(x)$ の導関数の記号にはいろいろあり，$f'(x)$ 以外にも

$$\{f(x)\}', \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{df}{dx}(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad Df(x)$$

などと表される．

練習問題

練習問題 6-1. 次の値を求めよ.

(1) $\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1}{2}$ (2) $\mathrm{Tan}^{-1}1$ (3) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(4) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{100\pi}{3}\right)$ (5) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\sin\dfrac{77\pi}{4}\right)$

練習問題 6-2 の解答.

(1) $\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\mathrm{Tan}^{-1}1=\dfrac{\pi}{4}$ (3) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$

(4) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{100\pi}{3}\right)=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$

(5) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\sin\dfrac{77\pi}{4}\right)=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)=\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$

担当教員：川平 友規

微分の諸公式と１次近似

配布日：6/7/2021 Version：1.1

●● 6 月 7 日の講義ノートと補足 ●●

微分可能性の定義を思い出しておく：

定義（微分可能性，再） 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で**微分可能**であるとは，極限

$$(*) \qquad A = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在することをいう．この A を a における**微分係数**と呼び，$f'(a)$ と表す．

ここで，$(*)$ は $x \approx a$ のとき（x が a に十分に近づいたとき）

$$A \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

を意味するから，これを変形して

$$(**) \qquad f(x) - f(a) \approx A(x - a) \iff f(x) \approx f(a) + A(x - a).$$

一番右の直線の方程式 $y = f(a) + A(x - a)$ を $f(x)$ の **1 次近似式**もしくは**接線の方程式**という．

例（指数関数）． 指数関数 $y = e^x$ の導関数を求めてみよう．$x \in \mathbb{R}$ を固定するとき，

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to e^x \cdot 1 = e^x \quad (h \to 0).$$

よって $\{e^x\}' = e^x$．

例（三角関数）． 三角関数 $y = \sin x$ の導関数を求めてみよう．$x \in \mathbb{R}$ を固定するとき，

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}.$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ であり，

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin^2 h}{h^2} \cdot \frac{h}{\cos h + 1} \to -1^2 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0$$

が成り立つから，

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = 0 \cdot \sin x + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

よって $\{\sin x\}' = \cos x$．

有名な関数の微分公式

上記の例以外にも，指数・対数・三角関数などの有名な関数の導関数は以下で与えられる（証明は次回までに与える）．

公式 8-1.　α は実数，a は正の実数とする．

$$\{x^\alpha\}' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \{e^x\}' = e^x \qquad \{\log|x|\}' = \frac{1}{x}$$

$$\{\sin x\}' = \cos x \qquad \{\cos x\}' = -\sin x \qquad \{\tan x\}' = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$$

$$\left\{\mathrm{Sin}^{-1} x\right\}' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left\{\mathrm{Cos}^{-1} x\right\}' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left\{\mathrm{Tan}^{-1} x\right\}' = \frac{1}{1+x^2}$$

ただし $\mathrm{Sin}^{-1} x$ と $\mathrm{Cos}^{-1} x$ の微分は $|x| < 1$ のときのみ．

応用

これらの公式と関数の 1 次近似の考え方を利用して，関数の具体的な値（近似値）を計算してみよう．

例題 1．　$\sin 47°$ の近似値を求めよ．

解答．　$47° = 45° + 2° = \pi/4 + \pi/90$ より，$(**)$ で $f(x) = \sin x$，$a = \pi/4$ と代入すれば，

$$f(x) \approx f(\pi/4) + f'(\pi/4)(x - \pi/4) = \sin(\pi/4) + \cos(\pi/4)(x - \pi/4).$$

これに $x = 47° = \pi/4 + \pi/90$ を代入すれば，

$$\sin 47° = f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \approx 0.73179\cdots.$$

（$\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$，$\pi = 3.1415926\cdots$ は既知として計算した．）これは真の値（$0.7313537\cdots$）と比べて約 0.06% ほど誤差がある．すなわち，10m にたいして 6mm，1 万円にたいして 6 円程度の誤差である．このぐらいの精度で十分，という場面も多いだろう．

例題 2.　$\sqrt{26}$ の近似値を求めよ．

解答．　まず $\sqrt{26} = \sqrt{25+1} = 5\sqrt{1 + \frac{1}{25}}$ と変形する．$(**)$ で $f(x) = \sqrt{x}$，$a = 1$ を代入すれば，

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + \frac{1}{2}(x-1).$$

ただし $\{\sqrt{x}\}' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ を用いた [1]．よって $x = 1 + 1/25$ を代入すると，

$$\sqrt{1 + \frac{1}{25}} = f\left(1 + \frac{1}{25}\right) \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} = 1 + \frac{1}{50}$$

．これより $\sqrt{26} \approx 5 + 1/10 = 5.1$ を得る．$(5.1)^2 = 26.01$ なので意外とよい近似になっている．実際，真の値（$5.0990195\cdots$）との相対誤差は 約 0.02%.

導関数の四則．　公式 8-1 だけでは $x \sin x$ や $\dfrac{x^2}{e^x}$ のような関数の微分は計算できない．このような関数には，以下の公式を適用する：

[1] 講義では $y = x^2$ の $x = 1$ での接線の傾き 2 をもとめて，f がその逆関数であることを用いて $f'(1) = 1/2$ を幾何学的に導いた．

公式 8-2. 関数 $f(x), g(x)$ が微分可能であるとき，次が（左辺の関数が定義できる範囲で）成り立つ：

(1) $\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$.

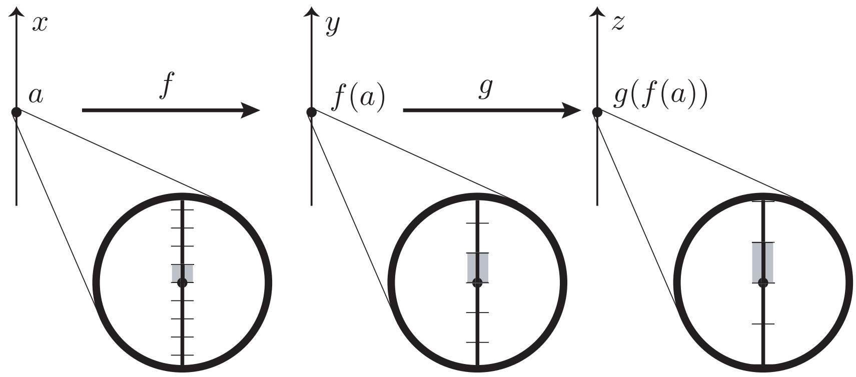
(2) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.　　（ライプニッツ則）

(3) $g(x) \neq 0$ であれば $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$.

(4) $\{g(f(x))\}' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. もし $y=f(x)$，$z=g(y)$ と表すならば，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

注意. 微分係数は，関数の局所的な拡大率を表すのであった．すなわち上の公式は $a \overset{f}{\longmapsto} f(a) \overset{g}{\longmapsto} g(f(a))$ という変化において，f によって局所的にほぼ $f'(a)$ 倍され，そのあと g によって局所的にほぼ $g'(f(a))$ 倍されるという事実を式で表現したものになっている．



例. $x \sin x$ の導関数を求めてみよう．公式 8-2 の (2) において $f(x)=x$，$g(x)=\sin x$ とすれば，

$$\{x \sin x\}' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot (-\cos x) = \sin x - x\cos x.$$

例. $\dfrac{x^2}{e^x}$ の導関数を求めてみよう．公式 8-2 の (3) において $f(x)=x^2$，$g(x)=e^x$ とすれば，

$$\left\{\frac{x^2}{e^x}\right\}' = \frac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}.$$

ちなみに，$\dfrac{x^2}{e^x} = x^2 e^{-x}$ より，公式 8-2 の (2) において $f(x)=x^2$，$g(x)=e^{-x}$ としても同じ結果が得られる．

説明. 公式 8-2 が成り立つ理由を，関数の 1 次近似を用いて説明しよう [2]．
(1)–(3): $x=a$ で $f(x)$，$g(x)$ が微分可能であると仮定し，$A := f'(a)$，$B := g'(a)$ とおく．すなわち，$x \approx a$ のとき 1 次近似式

$$f(x) \approx f(a) + A(x-a), \quad g(x) \approx g(a) + B(x-a)$$

[2] 誤差の部分を明示して計算すれば，厳密な証明に書き直すことができる．このあとの補足を参照．

が成り立つとしよう．ふたつの式を足し合わせると

$$f(x)+g(x)\approx f(a)+g(a)+(A+B)(x-a)$$

であるから，関数 $f(x)+g(x)$ は微分係数 $A+B=f'(a)+g'(a)$ をもつ．これは (1) を意味する．
　つぎにふたつの式を掛け合わせて整理すれば，

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\approx \{f(a)+A(x-a)\}\{g(a)+B(x-a)\} \\ &= f(a)g(a)+\{Ag(a)+f(a)B\}(x-a)+\underline{AB(x-\alpha)^2} \\ &\approx f(a)g(a)+\{Ag(a)+f(a)B\}(x-a). \end{aligned}$$

最後の式変形では，下線を引いた $AB(x-\alpha)^2$ の部分を誤差として無視した．よって関数 $f(x)g(x)$ の $x=a$ における微分係数は $Ag(a)+f(a)B=f'(\alpha)g(\alpha)+f(\alpha)g'(\alpha)$．これは (2) を意味する．
　(3) を説明するために，$h(x)=f(x)/g(x)$ とおき，$h'(a)=C$ とおいてみよう．すなわち，$x\approx a$ のとき $h(x)\approx h(a)+C(x-a)$ が成り立つと仮定する．いま $f(x)=g(x)h(x)$ であるから，

$$\begin{aligned} & f(a)+A(x-a)\approx \{g(a)+B(x-a)\}\{h(a)+C(x-a)\} \\ \iff\quad & f(a)+A(x-a)\approx g(a)h(a)+\{Bh(a)+g(a)C\}(x-a)+\underline{BC(x-a)^2}. \end{aligned}$$

やはり下線の $(x-a)^2$ の部分は無視した上で $(x-a)$ の係数を比較すれば，$A=Bh(a)+g(a)C$ より

$$C=h'(a)=\frac{A-Bh(a)}{g(a)}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{\{g(a)\}^2}.$$

$x=a$ で $y=f(x)$ が微分可能であり，$y=b=f(a)$ において $z=g(y)$ が微分可能であると仮定する．$A:=f'(a)$，$B:=g'(b)=g'(f(a))$ とおくと

$$y=f(x)\approx f(a)+A(x-a),\quad z=g(y)\approx g(b)+B(y-b)$$

と表されるから，左の近似式を右の近似式に代入すると

$$z=g(f(x))\approx g(f(a))+B\{f(a)+A(x-a)-b\}\approx g(f(a))+BA(x-a).$$

よって関数 $g(f(x))$ の $x=a$ における微分係数は $BA=g'(f(a))f'(a)$ となる．

補足：厳密な証明． 上記のアイディアを厳密な証明に書き換えてみよう．ここでは (3) の証明を試みる．$x=a$ において

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A,\qquad \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=B$$

であると仮定する．いま，$x\neq a$ に対し

$$F(x):=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-A,\qquad G(x):=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-B,$$

とおくと，$F(x),G(x)\to 0\ (x\to a)$ である．そこで，$F(a)=G(a)=0$ と定義しておけば，$F(x)$ と $G(x)$ は $x=a$ のまわりで定義された連続関数である．このとき，

$$f(x)=f(a)+A(x-a)+F(x)(x-a),\quad g(x)=g(a)+B(x-a)+G(x)(x-a)$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \{f(a)+A(x-a)+F(x)(x-a)\}\{g(a)+B(x-a)+G(x)(x-a)\} \\ &= f(a)g(a)+\{Ag(a)+f(a)B\}(x-a)+\underline{\{AB+F(x)+G(x)\}(x-\alpha)^2} \end{aligned}$$

よって，$x\to 0$ のとき

$$\frac{f(x)g(x)-\{f(a)g(a)+\{Ag(a)+f(a)B\}(x-a)\}}{x-a}=\underline{\{AB+F(x)+G(x)\}(x-\alpha)}\to 0.$$

微分可能性の定義より，$f(x)g(x)$ の $x=a$ における微分係数は $Ag(a)+f(a)B=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$．■

練習問題

問題 8-1. 関数の 1 次近似をもちいて，次の値の近似値を与えよ．

(1) $\sin 1^\circ$ (2) $\cos 63^\circ$ (3) $\sqrt[3]{28}$ (4) $\sqrt[6]{63}$

練習問題 8-1 の解答.

(1) $y = \sin x$ の $x = 0$ における接線の方程式 $y = \sin 0 + \cos 0(x - 0) = x$ による 1 次近似を用いる．$\sin 1^\circ = \sin\left(0 + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin 0 + \cos 0 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} = 0.01745329252\cdots$．真の値 $0.01745240644\cdots$ からみると，約 0.005% の誤差である．

(2) $y = \cos x$ の $x = \pi/3$ における接線の方程式 $y = \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}(x - \frac{\pi}{3})$ による 1 次近似を用いる．$\cos 63^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{180}\right) \approx \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} \cdot \frac{3\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{60} = 0.45465501589\cdots$．真の値 $0.4539904997\cdots$ からみると，約 0.15% の誤差である．

(3) $y = x^{1/3}$ の $x = 1$ における接線の方程式 $y = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)$ による 1 次近似を用いる．$\sqrt[3]{28} = 3\sqrt[3]{1 + \frac{1}{27}} \approx 3(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27}) = 3 + \frac{1}{27} = 3.037037037\cdots$．真の値 $3.0365889718\cdots$ からみると，約 0.015% の誤差である．

(4) $y = x^{1/6}$ の $x = 1$ における接線の方程式 $y = 1 + \frac{1}{6}(x - 1)$ による 1 次近似を用いる．$\sqrt[6]{63} = 2\sqrt[6]{1 - \frac{1}{64}} \approx 2(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64}) = 2 - \frac{1}{192} = 1.994791667\cdots$．真の値 $1.994757431\cdots$ からみると，約 0.0017% の誤差である．

逆関数の微分・対数微分法・ロルの定理

配布日：6/14/2021　Version：1.1

●● 6 月 14 日の講義ノートと補足 ●●

合成関数の微分公式

関数 $y = f(x)$ と $z = g(y)$ が微分可能であるとき，

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \text{ もしくは } \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

が成り立つのであった（前回の公式 8-2 の (4)）．応用例を見ておこう．

例． 関数 $\sin(x^3 + x)$ を微分してみよう．$y = x^3 + x$，$z = \sin y$ とおくと，

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1, \quad \frac{dz}{dy} = \cos y$$

より，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (\cos y)(3x^2 + 1) = (3x^2 + 1)\cos(x^3 + x).$$

例． 関数 $(4x + 7)^{100}$ を微分してみよう．$y = 4x + 7$，$z = y^{100}$ とおくと，

$$\frac{dy}{dx} = 4, \quad \frac{dz}{dy} = 100y^{99}$$

より，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 100y^{99} \cdot 4 = 400(4x + 7)^{99}.$$

例． 関数 $\sqrt{x-2} = (x-2)^{1/2}$ を微分してみよう．$y = x - 2$，$z = y^{1/2} = \sqrt{y}$ とおくと，

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2}y^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

より，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}.$$

注意． 一般に，実数 α と A に対し

$$\{(x - A)^\alpha\}' = \alpha(x - A)^{\alpha - 1}$$

が成り立つ．

逆関数の微分

いま，関数 $y = f(x)$ は真に単調増加かつ微分可能であるとしよう．真に単調増加であるから，とくに逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在する．そこで，

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}f(x)$ を用いて，逆関数の微分 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{d}{dy}f^{-1}(y)$ を表せるか

という問題を考えてみよう．

一般に，$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称であるから，接線も同様に対称である．たとえば，$y=f(x)$ のグラフ上の点 (a,b) における接線の傾きが A であれば，対応する $y=f^{-1}(x)$ のグラフ上の点 (b,a) における接線の傾きは $1/A$ であろう（図を描いて考えてみよ）．ただし，$A=0$ のとき逆数 $1/A$ は存在しないから，**$f'(a)=0$ となる場合は上記の議論（推論）は使えない．**

例． $x \geq 0$ のとき，$y=x^2$ とその逆関数 $y=\sqrt{x}$ を比べてみよう．$y=x^2$ のグラフ上の点 $(3,9)$ における接線の傾きは

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = \left.2x\right|_{x=3} = 6$$

であるのに対し，$y=\sqrt{x}$ のグラフ上の点 $(9,3)$ における接線の傾きは

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=9} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=9} = \frac{1}{6}$$

となり，確かに 6 の逆数になっている．

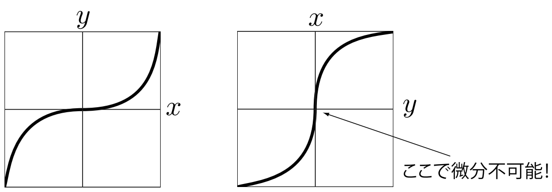
一般に，次が成り立つ：

定理 9-1（逆関数の微分）． 関数 $y=f(x)$ は真に単調増加 [減少] かつ微分可能であり，つねに $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)>0$ $[<0]$ であると仮定する．このとき，

(1) $x=f^{-1}(y)$ は真に単調増加であり，微分可能．

(2)
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} \quad \text{すなわち，} \quad \frac{d}{dy}f^{-1}(y)=\frac{1}{\dfrac{d}{dx}f(x)}.$$

注意． $f'(a)=0$ となる a が存在してはいけない．たとえば $y=f(x)=x^3$，$x=g(y)=y^{1/3}$ は互いに逆関数であるが，$g'(0)$ は存在しない．



例． $x>0$ のとき，$\{\log x\}'=1/x$ を示そう．$y=\log x$ とおくと，$x=e^y$ より

$$\frac{dx}{dy}=e^y=x>0.$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

例． $x<0$ のとき，$\{\log|x|\}'=1/x$ を示そう．$y=\log|x|$ とおくと，$|x|=e^y$ だが，$x<0$ より $|x|=-x$ なので $x=-e^y$．ゆえに

$$\frac{dx}{dy}=-e^y=x<0.$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

例題． 次を示せ：

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}\,x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1)$$

解答． $y=\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ $(|x|<1)$ より $x=\sin y$ $(|y|<\pi/2)$．よって

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{dy} = \cos y \quad (>0) \\ \overset{\text{定理 9-1}}{\Longrightarrow} \quad & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

■

対数微分法． 複雑な合成関数を微分するときは,「対数微分法」を用いるとよい．まずは次の公式を示す：

定理 9-2(対数微分) $y=f(x)\neq 0$ が微分可能であるとき，

$$\frac{d}{dx}\{\log|f(x)|\} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{y'}{y}. \tag{1}$$

証明． $z=\log|y|$ とおくと，$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{1}{y}$．よって公式 8-1 (3) より

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\cdot y'.$$

合成関数の微分に応用してみよう．

例題（対数微分法）

(1) 関数 $y=x^x$ $(x>0)$ の導関数を求めよ．

(2) 実数 α に対し，公式 $\{x^\alpha\}'=\alpha x^{\alpha-1}$ を示せ．

解答． (1) 関数の両辺の対数をとると，$\log y = x\log x$．公式 8-1 と定理 9-2 を用いて x で微分すると，

$$\frac{y'}{y} = 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1.$$

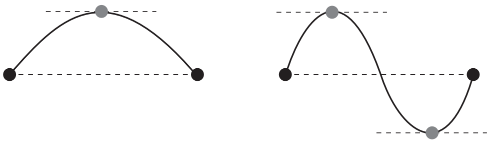
ゆえに $y'=y(\log x+1)=x^x(\log x+1)$． ■

(2) $y=x^\alpha$ の両辺の対数をとると $\log y=\alpha\log x$．定理 9-2 を用いて x で微分すると，$y'/y=\alpha/x \iff y'=\alpha y/x=\alpha x^{\alpha-1}$.

ロルの定理

定理 5-2 （閉区間における最大・最小値の存在）の主張によれば，「閉区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数 $y=f(x)$ は，最大値と最小値を持つ」のであった．

いま $f(a)=f(b)$ を仮定しよう．さらに開区間 (a,b) 上で微分可能であれば，最大値もしくは最小値を実現する点では微分係数が 0 になるであろう（右図）．すなわち，次が成り立つ：

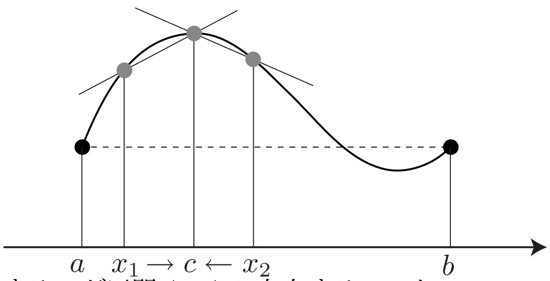


定理 9-3（ロルの定理）区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数 $y=f(x)$ は，(a,b) 上で微分可能であり，$f(a)=f(b)$ を満たすとする．このとき，$f'(c)=0$ となる c が区間 (a,b) に（少なくともひとつ）存在する．

「あたりまえ」な感じがする内容だが，つぎに学ぶ「テイラー展開」はこの定理からすぐに導かれる．

証明．

$f(x)$ が定数関数のとき定理は明らかなので，$f(x)$ は定数関数でないと仮定する．関数 $y=f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上で連続なので最大値 M と最小値 m を持つ（定理 5.2 が，定数関数ではないので $m<M$ を満たしている．このとき，$m\le f(a)=f(b)<M$ もしくは $m<f(a)=f(b)\le M$ のうち，少なくとも一方が成り立つ．



$m\le f(a)=f(b)<M$ のとき，最大値 $f(c)=M$ を実現する c が区間 (a,b) に存在する．いま $x_1\to c-0$ かつ $x_2\to c+0$ のとき，$f(x_1)\le f(c)$ かつ $f(c)\ge f(x_2)$ より

$$f'(c)=\lim_{x_1\to c}\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c}\ge 0 \quad \text{かつ} \quad f'(c)=\lim_{x_2\to c}\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}\le 0$$

が成り立つ．よって $f'(c)=0$．$m<f(a)=f(b)\le M$ の場合は最小値 $f(c)=m$ を実現する c が区間 (a,b) に存在するので，同様の議論で $f'(c)=0$ がわかる． ■

練習問題

練習問題 9-1（逆関数の微分）． 次を示せ．

(1) $\{\mathrm{Cos}^{-1}x\}' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $\{\mathrm{Tan}^{-1}x\}' = \dfrac{1}{1+x^2}$

練習問題 9-2（対数微分法）． 対数微分法を用いて，次の関数を微分せよ．

(1) $(\sin x)^{\cos x}$　　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}}$　　(3) $f(x)g(x)h(x)$

練習問題 9-1 の解答． (1) $y=\mathrm{Cos}^{-1}x$ より $x=\cos y$ $(0\le y\le\pi)$．y で微分して $\dfrac{dx}{dy}=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$．よって $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$．

(2) $y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ より $x=\tan y$ $(-\pi/2\le y\le\pi/2)$．y で微分して $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$．よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$．

練習問題 9-2 の解答． (1)$y=(\sin x)^{\cos x}$ より $\log y=\cos x\log(\sin x)$．両辺を x で微分して，$y'/y=\cos x\dfrac{\cos x}{\sin x}-\sin x\log(\sin x)$．ゆえに $y'=(\sin x)^{\cos x-1}\big(\cos^2 x-\sin^2 x\log(\sin x)\big)$．

(2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}}$ より $\log y=\dfrac{1}{3}\big(\log\left(x^2+1\right)-2\log|x-1|\big)$．両辺を x で微分して，$y'/y=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{2}{x-1}\right)$．ゆえに $y'=\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}}\left(\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$．

(3) $y=f(x)g(x)h(x)$ より $\log y=\log f(x)+\log g(x)+\log h(x)$ 両辺を x で微分して，$y'/y=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{g'(x)}{g(x)}+\dfrac{h'(x)}{h(x)}$．ゆえに $y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$．

担当教員：川平 友規

テイラー展開

配布日：6/28/2021 Version：1.2

●● 6 月 21 日の講義ノートと補足 ●●

関数の近似． 実数の小数展開，たとえば $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ は，級数

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots$$

にほかならない．和を有限項で打ち切ると，$\sqrt{2} \approx 1.41$ といった近似が得られるわけである．

これと同じことを関数 でやってみよう．たとえば $f(x) = x^3$ を

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

のように変形してみる．さらに $x = 1.1 = 1 + 1/10$ とおけば，

$$(1.1)^3 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3} = 1.331$$

と計算できる．同様に $x = 1.02$ とおくと，

$$\begin{aligned}(1.02)^3 &= 1 + 3 \times 0.02 + 3 \times (0.02)^2 + (0.02)^3 \\ &= 1 + 0.06 + 0.0012 + 0.000008 \\ &= 1.061208\end{aligned}$$

を得るが，必要な精度にあわせて計算する項を打ち切って「1 次近似」1.06,「2 次近似」1.0612,「3 次近似」1.061208 のいずれかを選ぶのが実用的だろう．

一般の関数を計算するときにも，同様の多項式展開ができれば単純な四則だけで満足のいく近似値が得られれると期待される．すなわち，与えられた $y = f(x)$ と定義域上の $x = a$ に対し，$x \approx a$ に対し「最適な」近似式

$$f(x) \approx A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + A_n(x-a)^n$$

を見つけたい．そのような期待に応えてくれるのが，今回のテーマである「テイラー展開」である．

考察． $f(x)$ を近似する「最適な」3 次多項式として

$$F(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3$$

があったとしよう．このとき，両辺を次々に微分すると

$$\begin{aligned}\{F(x)\}' &= A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 && \Longrightarrow\ x = a \text{ のとき値は } A_1 \\ \{F(x)\}'' &= 2A_2 + 6A_3(x-a) && \Longrightarrow\ x = a \text{ のとき値は } 2A_2 \\ \{F(x)\}''' &= 6A_3 && \Longrightarrow\ x = a \text{ のとき値は } 6A_3\end{aligned}$$

であるから，微分を繰り返すことで $F(x)$ の係数が求められることに注意しよう．

n 階導関数

$y=f(x)$ を繰り返し微分して得られる関数（「高階導関数」とも呼ばれる）を考えよう．具体的には，漸化式

$$f^{(0)}(x):=f(x),\quad f^{(n+1)}(x):=\left\{f^{(n)}(x)\right\}'$$

によって得られる関数 $f^{(n)}(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ は $f(x)$ の n **階導関数**もしくは n **回微分**と呼ばれ，

$$y^{(n)},\quad \frac{d^ny}{dx^n},\quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x),\quad \frac{d^n}{dx^n}f(x),\quad D^nf(x)$$

のように表される．また，$f^{(2)}(x)=f''(x)$，$f^{(3)}(x)=f'''(x)$ のような記号もよく用いられる．

ただし，関数にいつでも $f^{(n)}(x)$ が存在するとは限らない．$f(x)$ の定義域上のすべての点で $f^{(n)}(x)$ が存在するとき，$f(x)$ は n **回微分可能**（な関数）であるという．

注意． $f(x)$ は n **回微分可能**（な関数）であり，しかも $f^{(n)}(x)$ が連続であるとき，$f(x)$ は C^n **級**であるという[1]．また，すべての自然数 n に対し $f(x)$ が n 回微分可能であるとき，関数 $f(x)$ は**滑らか**（な関数）もしくは C^∞ **級**（関数）という．

例． $y=x^k$，$y=e^x$，$\sin x$，$\log x$ などは滑らか（C^∞ 級）．

例． $\mathbb{R}$ 上の関数 $y=f(x)$ を $x\le 0$ のとき $f(x)=-x^2$，$x\ge 0$ のとき $f(x)=x^2$ と定義する．このとき，$y=f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり $f'(x)=2|x|$ となる．しかし，$f'(x)$ は $x=0$ において微分可能ではない．すなわち，$x=0$ において $f''(0)$ は存在しない．$f(x)$ は 1 回微分可能であるが，2 回微分可能ではないということである．

テイラー展開

次の定理はそのような期待に応えるものである：

定理 10-1（テイラー展開）．

- I は開区間，$a\in I$ とする．
- 関数 $y=f(x)$ は I 上の関数で n 回微分可能であるとき，

すべての $x\in I$ に対して

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \tag{1}$$

$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{2}$$

を満たす（正体不明の） c が a と x の間に存在する．

上の式を $f(x)$ の $x=a$ における（n 次）**テイラー展開**とよぶ．とくに $a=0$ のとき，（n 次）**マクローリン展開**とも呼ばれる．また，(1) の部分を $(n-1)$ **次テイラー多項式**，(2) の部分を**剰余項**とよぶ．(2) を「誤差項」として無視することで，関数の多項式近似が得られるわけである．

注意（c の表現）． $a=x$ の場合はたとえば $c=a$ とすればよい．$a\neq x$ の場合，大小関係として $a<c<x$ の場合と $x<c<a$ の場合が考えられる．いずれの場合も c は a と x の内分点なので，

[1] n 回微分可能であるが，C^n 級ではない関数が存在する．たとえば $x\neq 0$ のとき $f(x)=x^2\sin(1/x)$，$f(0)=0$ として定まる関数は $\mathbb{R}$ 上の 1 回微分可能な関数だが，$f'(x)$ は $x=0$ で連続ではない．

ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$c = (1-\theta)a + \theta x \iff c = a + \theta(x-a)$$

と表される（θ はやはり正体不明だが）．

例． $f(x) = x^3$ の例をふたたび見てみよう．$I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$，$a = 1$ として（4 次）テイラー展開すると，

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(4)}(x) = 0$$

より（この場合ほとんど無意味だが）ある c が x と 1 の間に存在して

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4 \\ &= 1 + 3(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \frac{0}{4!}(x-1)^3 \\ &= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3. \end{aligned}$$

これは先ほどと同じ多項式表示である [2]．

例（指数関数と三角関数） もう少し有用な例を挙げよう．$f(x) = e^x$，$I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$，$a = 0$ として（n 次）テイラー展開してみよう．$f^{(n)}(x) = e^x$ であるから，ある c が x と 0 の間に存在して

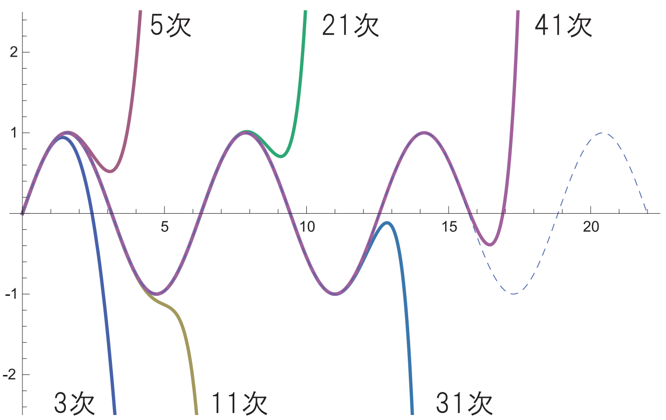
$$\begin{aligned} & e^x = e^0 + e^0(x-0) + \frac{e^0}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{e^0}{(n-1)!}(x-0)^{n-1} + \frac{e^c}{n!}(x-0)^n \\ \iff \ & e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n \end{aligned}$$

を満たす．これはちょうど $a = 0$ の場合なので，指数関数の「マクローリン展開」と呼ばれる．

同様に三角関数についても，ある c_1, c_2 が x と 0 の間に存在して，次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + \frac{(-1)^m \sin c_1}{(2m)!}x^{2m} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \frac{(-1)^{m+1} \sin c_2}{(2m+1)!}x^{2m+1} \end{aligned}$$

これが三角関数の「マクローリン展開」である．$y = \sin x$ のテイラー多項式のグラフを描画すると，次のようになる．



[2] 一般に多項式関数が $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ の形に変形できたら，$a_k = f^{(k)}(a)/k!$ を満たす．すなわち，この変形は $x = a$ でのテイラー多項式になっている．

定理 10-1（テイラー展開）の証明

証明にはロルの定理（定理 9-1）を用いる．すこし技巧的かつ複雑な式を用いるので，例えば $n=3$ の場合に実際に式を書き下しながら計算を追っていくとよいだろう．さて $x=a$ のとき定理は明らかなので，$x \neq a$ の場合を示す．また，便宜的に定理の中の x を b に置き換えた上で，$b \neq a$ のとき

$$\frac{f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}{(b-a)^n} = \frac{f^{(k)}(c)}{n!}$$

を満たす c が a と b の間に存在することを示せば十分である．この左辺を A とおき，I 上の関数 $F(x)$ を

$$F(x) := f(b) - \left\{ f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + A(b-x)^n \right\}$$

とおく．$f(x)$ は n 回微分可能なので，$F(x)$ は 1 回微分可能である．また，$F(a)=F(b)=0$ が成り立っている．そこで， a と b の大小に応じて区間 $[a,b]$ もしくは 区間 $[b,a]$ 上の関数としての $F(x)$ にロルの定理を適用しよう．すなわち，ある c が開区間 (a,b) もしくは (b,a) に存在し，$F'(c)=0$ を満たしている．F の微分をまじめに計算すると，

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\left\{ f'(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} \right) + nA(b-x)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - nA(b-x)^{n-1} \end{aligned}$$

であるから，$x=c$ を代入して求める等式 $A = f^{(n)}(c)/n!$ を得る． ■

練習問題

練習問題 10-1（高階導関数）． 以下で与えられる x の関数に対し，n 回導関数を求めよ．ただし，n は自然数，a は実数．

(1) $\dfrac{1}{x-a}$　(2) $\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

(3) $\sin x$　(4) xe^x

（Hint. (2) は部分分数展開を用いて (1) を活用する.）

練習問題 10-2（テイラー展開）． 次の関数の $x=0$ における n 次テイラー展開を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$　(2) $\sin x$　(3) $\cos x$　(4) xe^x

練習問題 10-1 の解答．

(1) $\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)}{(x-a)^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$

(2) $\dfrac{2x^2}{x^2-1} = 2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$ より，$\left(\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\left\{\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\}$

(3) $\sin x$ を何回も微分していくと $\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x$ を繰り返すのだが，$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ のように書くこともできる．

(4) たとえば数学的帰納法を用いることで，$(xe^x)^{(n)} = (x+n)e^x$ がわかる．

練習問題 10-2 の解答． (1) $f(x) = 1/(1-x)$ とおくと，問題 10-1(1) より $f^{(n)}(0) = n!$．よってある c が 0 と x の間に存在し，$\dfrac{1}{1-x} = 1+x+\cdots+x^{n-1}+\dfrac{1}{(1-c)^{n+1}}x^n$.

(2)(3) プリント 10-3 参照．

(4) $f(x) = xe^x$ とおくと，問題 9-1(4) より $f^{(n)}(0) = n$．よってある c が 0 と x の間に存在し，
$$xe^x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{k!}x^k + \frac{(c+n)e^c}{n!}x^n = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-2)!} + \frac{(c+n)e^c}{n!}x^n$$

担当教員：川平 友規

テイラー展開の応用

配布日： 6/28/2021 Version : 1.2

●● 6 月 28 日の講義ノートと補足 ●●

テイラー展開

まず，テイラー展開を思い出しておく：

定理 11-1（テイラー展開，再）.

- I は開区間，$a \in I$ とする．
- 関数 $y = f(x)$ は I 上の関数で n 回微分可能であるとき，

すべての $x \in I$ に対して

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \tag{1}$$

$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{2}$$

を満たす（正体不明の） c が a と x の間に存在する．

上の式を $f(x)$ の $x = a$ における（n 次）**テイラー展開**という．とくに，$a = 0$ のときを（n 次）**マクローリン展開**ともいう．また，(1) の部分を $(n-1)$ **次テイラー多項式**，(2) の部分を**剰余項**という．

e の計算

パソコンの関数電卓機能を用いれば自然対数の底 e の値も簡単に求まるが，ここでは無人島に行ったつもりで近似値と誤差の評価式を手計算で求めてみよう．

指数関数 e^x の $x = 0$ でのテイラー展開（マクローリン展開）は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n$$

であった．ただし c は 0 と x の間の数である．いま $x = 1, n = 6$ としてみよう[1]．このとき

$$e = \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}}_{(ア)} + \underbrace{\frac{e^c}{6!}}_{(イ)} \quad (0 < c < 1)$$

である．まず (ア) の部分を計算すると，

$$(ア) = 1 + 1 + \frac{60+20+5+1}{120} = 2 + \frac{43}{60} = 2.7166\cdots$$

となる．これを e の近似値として採用した場合，相対誤差はわずかに 0.06% 程度である．絶対誤差は正確に (イ) の部分で与えられるから，この値を詳しく調べてみよう．$0 < c < 1$ より $1 < e^c < e \leq 3$ であるから，

$$\frac{1}{720} = \frac{1}{6!} < (イ) = \frac{e^c}{6!} \leq \frac{3}{6!} = \frac{1}{240}.$$

[1] 講義では $n = 5$ の場合を扱った

よって (ア) + 1/720 < $e \leq$ (ア) + 1/240 を満たす．これより，評価式

$$2.718055\cdots < e \leq 2.720833\cdots$$

が成り立つ．

テイラー級数）

指数関数のテイラー（マクローリン）展開において，x を定数として固定しておく．c は $-|x| < c < |x|$ を満たすから，剰余項について

$$\left|\frac{e^c}{n!}x^n\right| \leq e^{|x|} \cdot \frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad (n \to 0)$$

が成り立つ（命題 2-2 参照）．よって

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left\{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$$

と表される．これを次のように表す：

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.}$$

（すなわち右辺の級数は収束し，左辺と一致する.）この式は指数関数の**テイラー級数**もしくは**マクローリン級数**という．とくに $x = 1$ のとき，等式

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots}$$

が成立する．e の値を計算するときには，右辺の級数展開を用いたほうが圧倒的に早い．次の表は有効数字 10 桁で $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ と $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ との誤差を比較したものである．

n	a_n	$\lvert a_n - e\rvert$	b_n	$\lvert b_n - e\rvert$
1	2.000000000	0.7182818285	2.000000000	0.7182818285
2	2.250000000	0.4682818285	2.500000000	0.2182818285
3	2.370370370	0.3479114581	2.666666667	0.05161516179
4	2.441406250	0.2768755785	2.708333333	$9.948495126 \times 10^{-3}$
5	2.488320000	0.2299618285	2.716666667	$1.615161792 \times 10^{-3}$
6	2.521626372	0.1966554567	2.718055556	$2.262729035 \times 10^{-4}$
7	2.546499697	0.1717821314	2.718253968	$2.786020508 \times 10^{-5}$
8	2.565784514	0.1524973145	2.718278770	$3.058617775 \times 10^{-6}$
9	2.581174792	0.1371070367	2.718281526	$3.028858530 \times 10^{-7}$
10	2.593742460	0.1245393684	2.718281801	$2.731266076 \times 10^{-8}$

三角関数についても，$|\sin c| \leq 1$ であるから剰余項が $m \to 0$ のとき 0 に収束することがわかる．よって次のマクローリン級数を得る．

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{m}}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

参考：平均値の定理

平均値の定理と関数の増減． $n=1$ のときのテイラー展開を**平均値の定理**という（x は b で置き換えた）：

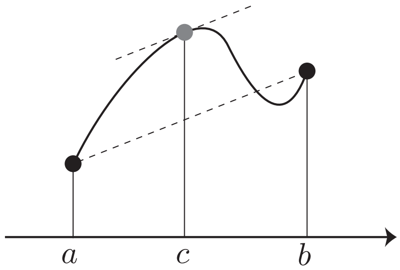
定理 11-2（平均値の定理） 関数 $f(x)$ が区間 I 上で微分可能であるとき，I 上の異なる 2 点 a, b に対し

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \iff f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

を満たすような c が b と a の間に存在する．

ここで得られた式は

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



と変形できる．左辺は $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を結ぶ線分の傾きである．これと同じ傾きの接線をもつ点 $(c, f(c))$ が存在する，ということである（右の図）．

平均値の定理の応用 1（増減の判定）． 関数 $f(x)$ が区間 I 上で $f'(x) > 0$ を満たすと仮定する．もし $a < b$ であれば，平均値の定理より ある c が存在して

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) > 0.$$

すなわち，$f(x)$ は区間 I 上で「真に単調増加」である．$f'(x) < 0$ の場合も同様に，区間 I 上で「真に単調減少」だとわかる．

平均値の定理の応用 2（微分が 0 なら定数）． 関数 $f(x)$ が区間 I 上で $f'(x) = 0$ を満たすと仮定する．$a < b$ のとき，平均値の定理より ある c が存在して

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = 0 \cdot (b-a) = 0.$$

すなわち，$f(b) = f(a)$．a と b はなんでもよいから，$f(x)$ は区間 I 上で「定数関数」である．

参考：関数の凸性

上に凸，下に凸． $n \geq 3$ のとき，テイラー展開より $x \approx a$ のとき

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

と近似される．右辺は $A + B(x-a) + C(x-a)^2$ の形の 2 次関数（正確には,「2 次以下の」関数）である．そのグラフは，$C > 0$ のときは下に凸な放物線であり，$C < 0$ のときは上に凸な放物線である．よって，$C = f''(a)/2$ より，

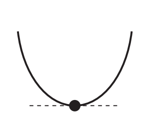
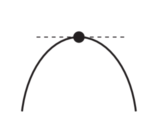
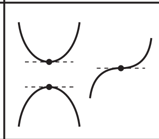
- $f''(a) > 0$ ならば，$f(x)$ は局所的に下に凸な放物線で近似される．
- $f''(a) < 0$ ならば，$f(x)$ は局所的に上に凸な放物線で近似される．

ことがわかる．これは，関数の形状を調べる上で重要な性質である．とくに，次がわかる：

定理 10-3（極大極小の判定） 関数 $f(x)$ が区間 I 上でなめらかな関数であるとき，

- $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ ならば，$f(x)$ は $x = a$ で極小値をもつ．
- $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ ならば，$f(x)$ は $x = a$ で極大値をもつ．

例． $f(x) = x^3 - 3x$ とおくと，$f'(x) = 3x^2 - 3$ より $x = \pm 1$ で $f'(\pm 1) = 0$ となる．$f''(x) = 6x$ より，$f''(-1) = -6 < 0$．よって $f(x)$ は $x = -1$ で極大値をとる．また，$f''(1) = 6 > 0$ より，$f(x)$ は $x = 1$ で極小値をとる．

$f'(a) = 0$		
$f''(a) > 0$	$f''(a) < 0$	$f''(a) = 0$
		
極小	極大	？

注意． $f'(a) = 0$ でも，$f''(a) = 0$ のときは極大，極小の判定はできない．たとえば $f(x) = x^4$ は $f'(0) = f''(0) = 0$ を満たすが $x = 0$ で極小値をもつ．

担当教員：川平 友規

定積分と微分積分の基本定理 / 積分の計算

配布日：7/05/2021 Version：1.2

●● 7 月 5 日の講義ノートと補足 ●●

定積分

区間 $[a,b](a<b)$ 上の連続関数 $y=f(x)$ のグラフと，x 軸で囲まれた部分の「面積」にあたる量を「定積分」という形で定義しよう[1].

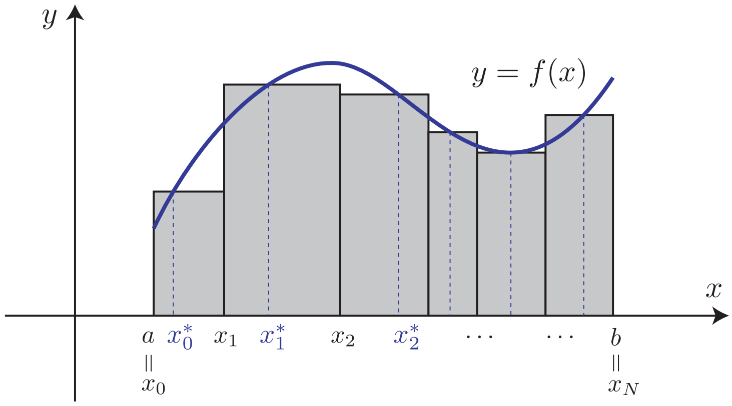


図 1: 短冊（たんざく）による近似

Step 1. まず図 1 のように，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分を細長い長方形（ここでは短冊（たんざく）とよぶことにする）で近似することを考える．短冊の底辺を決めるために，区間 $[a,b]$ から「分割点」 $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ を

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{N-1}<x_N=b$$

となるように選ぶ[2].

Step 2. 次に各短冊の高さを決めるために,「代表点」 $\{x_k^*\}_{k=0}^{N-1}$ を

$$x_k\le x_k^*\le x_{k+1}\quad(0\le k<N)$$

となるように選んで，区間 $[x_k,x_{k+1}]$ の上に高さ $f(x_k^*)$ の短冊（長方形）を置く．(図 1)．

Step 3. このとき，k 番目の短冊の「(符号つき）面積」は $f(x_k^*)(x_{k+1}-x_k)$ とするのが妥当であろう．したがって，N 個の短冊すべての「(符号つき）面積」の和

$$\sum_{k=0}^{N-1}f(x_k^*)(x_{k+1}-x_k)$$

が，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の「面積」に相当する量を近似していると考えられる[3].

[1] 関数のグラフのようにくねくねと曲がっていたり，凹凸がある平面図形の「面積」を定義することは一般には難しい．ここでは，それとは独立に「定積分」という概念を定義しているのだ，と考えてほしい．

[2] N は十分に大きな数（100 や 1000）をイメージするほうがよい．

[3] 分割 $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ に関する**リーマン和**とよぶ．

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

Step 3. 近似精度を上げるために，分割点 $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ の個数 N を増やしていく．このとき，分割の幅を一様に細かくなるように，

$$\max_{0 \leq k < N} |x_{k+1} - x_k| \to 0$$

となるように変化させるとき，代表点 $\{x_k^*\}_{k=0}^{N-1}$ の取り方に依存せず，リーマン和はある一定の値 I に収束することが知られている[4]．この I を $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における**定積分**といい，

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

と表す．

注意． $f(x)$ が連続でないときには，Step 1〜3 の方法では一定の積分値 I が定まらない可能性がある．

数値計算との関係． Step 1 と Step 2 によってリーマン和を計算すれば，そのまま積分の近似値が得られる．たとえば N 個の分割点を区間を等分割するようにとるとき，近似値（リーマン和）と積分値との誤差は少なくとも $1/N$ に比例する．

定積分の性質． 以下，$f(x)$，$g(x)$ は連続関数とし，α, β を実数とする．また，$a > b$ のとき

$$\int_a^b f(x)\, dx := -\int_b^a f(x)\, dx$$

と定義する．このとき，次が成り立つ．

公式 12-1（定積分の性質）．

(1) $\displaystyle \int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$

(2) $\displaystyle \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$

(3) $a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq g(x)$ のとき，$\displaystyle \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$

原始関数と微分積分の基本定理

定積分を具体的に計算するための手法を紹介していこう．まずは，積分計算の基本原理を与える「微分積分の基本定理」について解説する．

与えられた連続関数 $f(x)$ に対し，$F'(x) = f(x)$ を満たす関数を $f(x)$ の**原始関数**もしくは**不定積分**といい，

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

と表す．この記号は $F'(x) = f(x)$ という事実の単なる言い換えであり，右辺の記号にあまり惑わされてはいけない．

[4] この事実の証明には ϵ-δ 論法が必要なので省略する（例えば，参考書 [三宅]3.4 章（p 73）をみよ）．

例. $f(x) = x^2$ の原始関数として，たとえば

$$\frac{x^3}{3}, \quad \frac{x^3}{3}+1, \quad \frac{x^3}{3}+\sqrt{2}$$

などがある．すなわち，

$$\frac{x^3}{3} = \int x^2\,dx, \quad \frac{x^3}{3}+1 = \int x^2\,dx, \quad \frac{x^3}{3}+\sqrt{2} = \int x^2\,dx$$

などと表されるが，だからといって $\dfrac{x^3}{3} = \dfrac{x^3}{3}+1$ などと考えてはいけない．上の 3 つの式は,「左辺の関数が x^2 の原始関数である」ということを述べているだけである．

一般に，$f(x) = x^2$ の原始関数は $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ (C：定数) の形をしていることから，

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \ (C：定数)$$

のように書くことも多い[5]．C はとくに,「積分定数」とも呼ばれる．

> **例題.** 次の関数の原始関数をひとつ求めよ．
>
> (1) e^x　　(2) $\sin x$　　(3) $\cos x$　　(4) $\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

解答 (1) $(e^x)' = e^x$ より，e^x の原始関数のひとつは e^x．
(2) $(\cos x)' = -\sin x$ より，$(-\cos x)' = \sin x$．よって，$\sin x$ の原始関数のひとつは $-\cos x$．
(3) $(\sin x)' = \cos x$ より，$\cos x$ の原始関数のひとつは $\sin x$．
(4) $(\log|x|)' = 1/x$ より，$1/x$ の原始関数のひとつは $\log|x|$． ■

微分積分（学）の基本定理，その 1 いわゆる,「微分は積分の逆」と言われることの根拠となるのが次の定理である：

> **定理 12-2（微分積分（学）の基本定理，その 1）.** $f(x)$ は区間 I 上で連続であり，$a \in I$ とする．このとき，I 上の関数関数 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ は $f(x)$ の原始関数である．すなわち，
>
> $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad ：「積分の微分はもとの関数」$$

証明. $\Delta x > 0$ のとき，区間 $[x, x+\Delta x]$ における $f(x)$ の最小値と最大値をそれぞれ $m_x(\Delta x)$，$M_x(\Delta x)$ と表すと，$m_x(\Delta x) \leq f(t) \leq M_x(\Delta x)$ $(x \leq t \leq x+\Delta x)$．よって公式 12-1(3) より

$$\begin{aligned}
&\int_x^{x+\Delta x} m_x(\Delta x)\,dt \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \leq \int_x^{x+\Delta x} M_x(\Delta x)\,dt \\
\Longrightarrow\ & m_x(\Delta x)\Delta x \leq F(x+\Delta x) - F(x) \leq M_x(\Delta x)\Delta x \\
\Longrightarrow\ & m_x(\Delta x) \leq \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leq M_x(\Delta x)
\end{aligned}$$

$f(x)$ の連続性より，$\Delta x \to +0$ のとき $m_x(\Delta x), M_x(\Delta x) \to f(x)$．よって $\displaystyle\lim_{\Delta x \to +0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$．
$\Delta x < 0$ のときも同様の議論で $\displaystyle\lim_{\Delta x \to -0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$ が示される． ■

[5]高校ではこの形の式のことを「不定積分」と呼ぶことがある．

注意. もともとは $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ の形の関数を $f(x)$ の「不定積分」と呼んだ.「定積分」と比べて，積分する区間に変数 x があり「不定」だからである

定理 12-2 から，次の定理が得られる（これも「微分積分（学）の基本定理」と呼ばれる）：

定理 12-3（微分積分（学）の基本定理，その２）. 区間 $[a, b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ の原始関数のひとつを $F(x)$ とするとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

注意. 右辺の $F(b) - F(a)$ は $\big[\, F(x) \,\big]_a^b$ とも表す.

証明. いま，$[a, b]$ 内の x に対し

$$G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

とおく．定理 12-2 より，

$$\{F(x) - G(x)\}' = f(x) - f(x) = 0$$

となるから，

$$F(x) = G(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

となる定数 C が存在する．したがって，

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t)\,dt + C\right) - \left(\int_a^a f(t)\,dt + C\right) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

■

注意. この証明から，次のことがわかる：

定理 12-4. 連続関数 $f(x)$ の原始関数はすべて次の形で表される.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C \quad (a,\ C：\text{定数})$$

例題. 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_a^b e^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

解答 先の例題の結果を用いる．(1) $\displaystyle\int_a^b e^x\,dx = \Big[\, e^x \,\Big]_a^b = e^b - e^a.$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = \Big[\, -\cos x \,\Big]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos x\,dx = \Big[\, \sin x \,\Big]_0^{\pi/4} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\, \log|x| \,\Big]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2 - 0 = \log 2.$ ■

例題. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ.

解答. 微分の知識が役に立つ：$(\mathrm{Sin}^{-1}\,x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より,

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,\Big]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

■

有名関数の原始関数（不定積分，積分定数は省略）

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\quad(\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$$

$$\int e^x\,dx = e^x \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}\quad(a>0, a\neq 1)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{a}\quad(a>0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{x}{a}\quad(a>0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2+A}|\quad(A\neq 0)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{x}{a}\right)\quad(a>0)$$

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log|x+\sqrt{x^2+A}|\right)\quad(A\neq 0)$$

置換積分と部分積分

配布日：7/12/2021 Version：1.2

●● 7 月 12 日の講義ノートと補足 ●●

計算テクニックその１：置換積分

公式 13-1（置換積分）. $x = x(t)$ を $\alpha \le t \le \beta$ で真に単調増加または減少な滑らかな関数とする．$a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$ とするとき，次が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,\frac{dx}{dt}\ dt.$$

証明. 微分積分学の基本定理（その 1）より，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が存在する（例えば，$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とすればよい）．このとき，合成関数の微分公式より，t の関数として

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = f(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t)$$

という等式が成り立つ．これは $F(x(t))$ が関数 $f(x(t)) \cdot \dfrac{dx}{dt}(t)$ の原始関数（のひとつ）だとわかるので，基本定理その 2 より

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,\frac{dx}{dt}\ dt.$$

■

直観的な説明. $x = x(t)$ が変数 t に関して真に単調増加な場合を説明する（真に単調減少な場合も同様）．左辺の積分区間 $[a, b]$ を $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ と分割すると，$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \beta$ かつ $x_k = x(t_k)$ を満たす t_k $(1, 2, \cdots, N)$ が存在する．また，各 $k = 0, \cdots, N-1$ に対し，平均値の定理より

$$x_{k+1} - x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k) = \frac{d}{dt}x(c_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)$$

を満たす c_k が t_k と t_{k+1} の間に存在する．$x(t)$ は滑らかな関数であることから，$\dfrac{d}{dt}x(t)$ が連続であることが従うので，もし $\displaystyle\max_{0\le k<N} |t_{k+1} - t_k|$ が 0 に近づけば $\dfrac{d}{dt}x(c_k)$ は $\dfrac{d}{dt}x(t_k)$ に近く．よって

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x(t_k))\frac{d}{dt}x(c_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(x(t_k))\frac{d}{dt}x(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)$$

であり，$N \to \infty$ かつ $\displaystyle\max_{0\le k<N} |t_{k+1} - t_k| \to 0$ であるとき両辺は置換積分の公式に収束する（定積分の定義）．

例 $\int_0^1 x^2\,dx$ を $x = x(t) := \sin t$ で置換（変数変換）してみよう．これは $0 \le t \le \pi/2$ のとき真に単調増加であり，$\dfrac{dx}{dt} = \cos t$ を満たすから（習慣的に，これを $dx = \cos t\,dt$ と表すこともある），

$$\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 \cdot \cos t\ dt.$$

微分積分の基本定理より，左辺は $\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$ と計算できるから，結果として

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t\ dt = \frac{1}{3}$$

という積分が計算できたことになる．同じ考え方で，たとえば

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\ dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^4 \,(\sin t)'\ dt = \int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

といった計算ができる．

参考.

例題（置換積分の不定積分版）. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\,x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$ (C : 定数) を示せ．

解答. $x = \sin t$ ($|t| \ge \pi/2$) とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = \cos t$ より

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\ dt = \int \cos^2 t\,dt \\
&= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\,x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.
\end{aligned}$$

■

応用. 単位円の面積を求めよう．$y = \sqrt{1-x^2}$ と x 軸で囲まれる部分の面積を 2 倍したものだから，

$$\begin{aligned}
[\text{円の面積}] = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= 2\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\,x + x\sqrt{1-x^2}\right)\right]_{-1}^1 \\
&= \mathrm{Sin}^{-1}\,1 - \mathrm{Sin}^{-1}\,(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

計算テクニックその２：部分積分

公式 13-2（部分積分）. $f(x)$，$g(x)$ がともに滑らかな関数であるとき，

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[\,f(x)g(x)\,\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

説明 これは ライプニッツ則を変形した式 $f'(x)g(x) = \{f(x)g(x)\}' - f(x)g'(x)$ を定積分しただけである．

例. $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,dx$ を計算しよう．$f(x) = e^x$，$g(x) = x$ として部分積分の公式を用いると，

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx = \int_0^1 x\,(e^x)'\,dx = \Big[\,x\,e^x\,\Big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx = (1\cdot e^1 - 0\cdot e^0) - \Big[\,e^x\,\Big]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 1.$$

例. $\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$ を計算しよう．$f(x) = x$，$g(x) = \log x$ として部分積分の公式を用いると，

$$\int_1^e \log x\,dx = \int_1^e (x)'\,\log x\,dx = \Big[\,x\log x\,\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx = (e\cdot\log e - 1\cdot\log 1) - \int_1^e 1\,dx = e - (e-1) = 1.$$

例題（積分の漸化式：不定積分版）. $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\,dx\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ と表すとき，

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\cdot\sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\quad (n \ge 2).$$

解答.

$$\begin{aligned} I_n = \int \cos^{n-1} x\cdot\cos x\,dx &= \cos^{n-1} x\cdot\sin x - \int (\cos^{n-1} x)'\cdot\sin x\ dx \\ &= \cos^{n-1} x\cdot\sin x - \int (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)\cdot\sin x\ dx \\ &= \cos^{n-1} x\cdot\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)\,dx \\ &= \cos^{n-1} x\cdot\sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

あとは式変形すれば題意の式を得る． ■

適用例. $I_0 = \displaystyle\int 1\,dx = x + C$，$I_1 = \displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$ より

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\cos x\ \sin x + \frac{1}{2}x + C \\ I_3 &= \frac{1}{3}\cos^2 x\ \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C \end{aligned}$$

などが得られる．

適用例 2. $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ とおくと，$J_0 = \pi/2$，$J_1 = 1$．$n \ge 2$ のとき，$J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}$ が成り立つことから次がわかる：

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n\cdot(n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n：偶数) \\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 1} & (n：奇数) \end{cases}$$

練習問題

練習問題 11-1. 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x\, dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\, dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{2} x^2 e^{2x}\, dx$ (6) $\displaystyle\int_1^{e} x\log x\, dx$

(HINT. (2) $\sin^2 x\cdot\sin x = (1-\cos^2 x)\sin x$．(3) $x=\cos t$ もしくは $x=\sin t$ とおく．(4), (5), (6) は部分積分．(5) は部分積分を 2 回用いる．)

練習問題 11-2. 次の不定積分を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$ (2) $\displaystyle\int \mathrm{Sin}^{-1} x\, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx$ (4) $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$

(HINT. (2) は $1\cdot\mathrm{Sin}^{-1} x$ と思う．(3) は $t=x+\sqrt{a^2+x^2}$ とおく．(4) は $1\cdot\sqrt{a^2+x^2}$ と思って部分積分．)

解答 11-1. (1) $y=\cos x$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ より，$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\sin x\, dx = \int_{\pi/2}^{0}(\cos x)^3(-\sin x)'\, dx = \int_0^1 y^3\, dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$.

(2) $y=\sin x$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx}=\cos x$ より $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\, dx = \int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 x)(-\cos x)'\, dx = \int_1^0(1-y^2)(-dy) = \left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

(3) $x=\sin t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ より $\displaystyle\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/6}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\, dt = \int_0^{\pi/6}\cos^2 t\, dt = \int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/6} = \left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right)-(0+0) = \frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$.

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\, dx = \int_0^{\pi} x(-\cos x)'\, dx = \Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(x)'(-\cos x)\, dx = (\pi-0) + \int_0^{\pi}\cos x\, dx = \pi - \Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = \pi+0=\pi$.

(5) $\displaystyle\int_0^2 x^2e^{2x}\, dx = \left[x^2\cdot\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2 - \int_0^2 2x\cdot\frac{e^{2x}}{2}\, dx = \left(4\cdot\frac{e^4}{2}-0\right) - \int_0^2 xe^{2x}\, dx$
$\displaystyle = 2e^4 - \left(\left[x\cdot\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2 - \int_0^2 1\cdot\frac{e^{2x}}{2}\, dx\right) = 2e^4 - \left(2\cdot\frac{e^4}{2} - 0 - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^2\right) = 2e^4-e^4+\frac{e^4}{4}-\frac{e^0}{4} = \frac{5e^4-1}{4}$.

(6) $\displaystyle\int_1^e x\log x\, dx = \int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\log x\right]_1^e - \int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \left(\frac{e^2}{2}\cdot\log e - 0\cdot\log 0\right) -$

$\displaystyle\int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}$.

(6) 別解：$t = \log x$ とおくと，$x = e^t$ より $dx = e^t\,dt$．よって $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx = \int_0^1 e^t \cdot t \cdot e^t\,dt = \int_0^1 t\,e^{2t}\,dt = \left[t\cdot\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{e^{2t}}{2}\,dt = \left[t\cdot\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{e^{2t}}{4}\right]_0^1 = \left[t\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4}\right]_0^1 = \frac{e^2+1}{4}$.

解答 11-2. 以下，積分定数は省略する．

(1) $x = a\sin t$ とおく．プリント 13-2 の例題を参照．答は $\displaystyle\frac{1}{2}\left(a^2\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right)$.

(2) $\displaystyle\int \mathrm{Sin}^{-1}x\,dx = \int 1\cdot\mathrm{Sin}^{-1}x\,dx = x\mathrm{Sin}^{-1}x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\mathrm{Sin}^{-1}x + \int\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$.

(3) $t = x + \sqrt{x^2+a^2}$ とおくと，$(t-x)^2 = x^2+a^2$ より $x = \displaystyle\frac{1}{2}\left(t - \frac{a^2}{t}\right)$．よって $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{t-x} = \frac{2t}{t^2+a^2}$ かつ $dx = \displaystyle\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt$ を得る．求めたい不定積分に代入して，$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int\frac{2t}{t^2+a^2}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt = \int\frac{1}{t}\,dt = \log|t| = \log(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

(4) 求める積分を I とおくと，$I = \displaystyle\int 1\cdot\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - I + \int\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$．よって

$I = \displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2})\right)$.

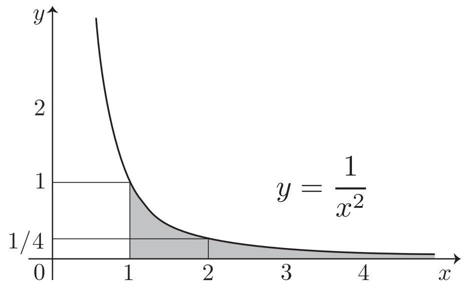
担当教員：川平 友規

広義積分

配布日：7/19/2021 Version：1.1

広義積分

これまで考えてきた定積分は閉区間上の連続関数に限定してきた．しかし，たとえば次の図のように，$y = 1/x^2$ の区間 $[1, +\infty)$ の部分と x 軸で囲まれる部分の面積を考えることはできないだろうか？
この場合，$\beta > 1$ として閉区間 $[1, \beta]$ における定積分を考えると



$$\int_1^\beta \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\beta = -\frac{1}{\beta} + 1$$

となる．よって $\beta \to \infty$ のとき，

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \left(-\frac{1}{\beta} + 1 \right) = 1.$$

よって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ だと言いたくなる．

定義（半開半閉区間での積分）． $[a, b)$ 上の関数 $f(x)$ が連続関数であり（$b = +\infty$ も許す），極限

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

がある実数値に収束するとき,「$f(x)$ は $[a, b)$ 上で**積分可能**」もしくは「**広義積分** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は**収束する**」という．そうでないとき積分は**発散する**という．

注意． 同様に区間 $(a, b]$ 上の関数 $f(x)$ の，$(a, b]$ 上の積分可能性も定義される．一般に，閉区間以外の区間での積分を**広義積分**とよぶ．

例． 上の計算より，$f(x) = 1/x^2$ は $[1, +\infty)$ 上で積分可能であり，計算はしばしば

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = 0 + 1 = 1$$

のように lim を使わずに書かれる．

例． $f(x) = 1/x^2$ は $(0, 1]$ 上で積分可能ではない．なぜなら，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{\alpha\to+0} \int_\alpha^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\alpha\to+0} \left(-1 + \frac{1}{\alpha} \right) = +\infty.$$

となり，積分は発散するからである．

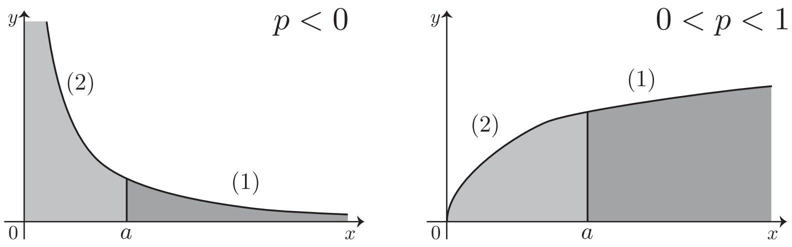
基本公式と応用． 広義積分の収束・発散の判定に便利なのが，次の定理である（証明は簡単なので省略）：

定理 14-1. $a > 0$ のとき，

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty x^p\,dx$ が収束 $\iff$ $p < -1$.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^a x^p\,dx$ が収束 $\iff$ $p > -1$.

(1) と (2) の積分の表す面積を $p < 0$ と $0 < p < 1$ の場合に図示すると次のようになる．$p = 0$, $p \geq 1$ の場合も同様に考えてみよ．



応用. 広義積分の考え方を用いると級数の収束性を判定することができる．

例題. 級数 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$ は発散するが，級数 $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots$ は収束することを示せ．

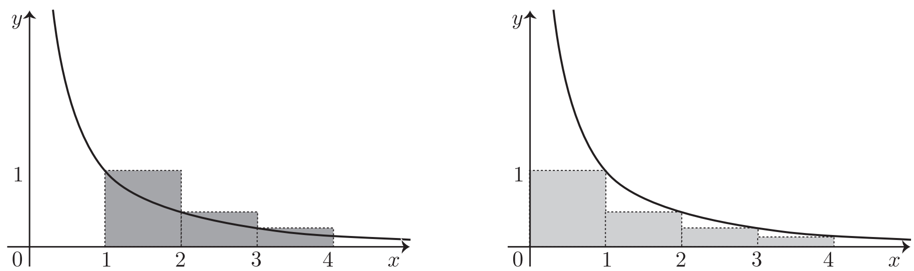
解答. 図のように級数を長方形の面積和と思うと，

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \to \infty \quad (n \to \infty).$$

よって級数 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$ は発散する．同様にして

$$a_n := 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

だが，定理 14-1 より最右辺の広義積分は収束する．数列 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ は単調増加かつ有界であるから，収束する． ■



開区間での広義積分

開区間 (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ での広義積分は，任意に $c \in (a, b)$ を選び

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\beta \to b-0} \int_c^\beta f(x)\,dx$$

とふたつの広義積分の和で定義する．

例題. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\pi$ を示せ．

解答. $\displaystyle\int_{-1}^{1}=\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}$ と分割すると，

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\Big[\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,\Big]_{-1}^{1}=0-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)=\frac{\pi}{2}$$

および

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\Big[\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,\Big]_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

より題意の等式をえる． ■

広義積分の収束・発散の判定

このあと紹介するガンマ関数のように，広義積分で定義される重要な関数もたくさんある．そのとき，広義積分の値は確定できなくても，収束性だけでも確認しておけば関数が安全に定義される．

そこで，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が収束するための十分条件を与えよう．0 以上の値をとる関数 $g(x)$ が $f(x)$ の**優関数**であるとは，2 条件

- 積分区間上で $|f(x)|\le g(x)$; かつ
- $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ は収束

を満たすときをいう．じつは，次が成り立つ（証明略）：

定理 14-2（優関数と収束） $f(x)$ に対し優関数 $g(x)$ が存在すれば，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．

注意. 広義積分 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ が収束すれば $|f(x)|$ は明らかに $f(x)$ の優関数であり，定理 12-2 より広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は**絶対収束する**というのがならわしである．

例題. 次の広義積分は収束することを示せ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{3/2}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

ちなみに，(2) の積分は「ガウス積分」とよばれる重要関数であり，値は $\sqrt{\pi}$ となることが知られている．

解答. (1)：$\displaystyle\int_0^\infty=\int_0^1+\int_1^\infty$ と分割する．$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^{3/2}}\,dx$ は閉区間上の連続関数の積分なので普通の定積分．よって値が確定する．$x>0$ のとき $\dfrac{1}{1+x^{3/2}}\le\dfrac{1}{x^{3/2}}$ であり，定理 14-1 より $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ は収束す

るから，$\dfrac{1}{x^{3/2}}$ は優関数である．よって定理 14-2 より，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^{3/2}}\,dx$ も収束する．

(2) 偶関数（$e^{-x^2}=e^{-(-x)^2}$）なので，積分が存在するならばその値は $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ の 2 倍である．$\displaystyle\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ と分割する．$\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ は閉区間上の連続関数の積分なので普通の定積分．よって値が確定する．$x \geq 1$ のとき $x \leq x^2$ より $e^{-x^2} \leq e^{-x}$．$\displaystyle\int_1^\beta e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_1^\beta = -e^{-\beta}-(-e^{-1}) \to \frac{1}{e}$ $(\beta\to\infty)$ より，e^{-x} は e^{-x^2} の優関数である．よって定理 14-2 より，$\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ も収束する． ■

ガンマ関数

正の実数 s に対し，広義積分

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

で定まる変数 s の関数を**ガンマ関数**という（Γ は γ の大文字）．あとで確認するように，ガンマ関数は階乗（$n!$）を拡張したものになっていて，定義は大変だが使い勝手のよい関数である．

> **命題 14-3.** $s>0$ のとき広義積分 $\displaystyle\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は収束する．

証明. $f(x)=e^{-x}x^{s-1}$ とおく．$s>0$ に対しある十分大きな c が存在し，

(i) $[c,\infty)$ 上で $g(x)=x^{-2}$ は $f(x)$ の優関数；かつ

(ii) $(0,c]$ 上で $h(x)=x^{s-1}$ は $f(x)$ の優関数

であることを示そう．

(i): $\dfrac{|f(x)|}{g(x)} = \dfrac{e^{-x}x^{s-1}}{x^{-2}} = \dfrac{x^{s+1}}{e^x}$．$s+1<N$ となる自然数 N を取ると $x\geq 1$ のとき $\dfrac{x^{s+1}}{e^x} \leq \dfrac{x^N}{e^x}$．プリント 10-2 の例題と同様の議論により $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^N}{e^x}=0$．よって適当な $c\geq 1$ が存在し，$x\geq c$ のとき $\dfrac{|f(x)|}{g(x)} \leq 1$，すなわち $|f(x)|\leq g(x)$．定理 14-1 より $\displaystyle\int_c^\infty x^{-2}\,dx$ は収束するから，$g(x)=x^{-2}$ は $f(x)$ の優関数．したがって $\displaystyle\int_c^\infty f(x)\,dx$ も収束する．

(ii): $x>0$ のとき $e^{-x}<1$ より，$f(x)=e^{-x}x^{s-1}<x^{s-1}$．$s-1>-1$ と定理 14-1 より $\displaystyle\int_0^c x^{s-1}\,dx$ は収束するから，より，$h(x)=x^{s-1}$ は $f(x)$ の優関数．$\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ も収束する．

(iii) 以上の議論から，広義積分 $\displaystyle\Gamma(s)=\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$ は収束する． ■

> **命題 14-4（ガンマ関数の性質）.** $s>0$ のとき $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$．とくに，$s=n=0,1,2,\dots$ のとき，$n!=\Gamma(n+1)$．

証明. 部分積分より，

$$\Gamma(s+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^s\,dx = \Big[-e^{-x}x^s\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}sx^{s-1}\,dx = 0+s\Gamma(s).$$

$\displaystyle\Gamma(1)=\int_0^s e^{-x}\,dx=1$ は簡単に計算できるので，$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ より帰納的に $n!=\Gamma(n+1)$ を得る． ■