

この講義について

配布日：9/14/2021 Version：1.1

担当教員：川平 友規 (Kawahira, Tomoki；経済学部，大学院経済学研究科)

本授業の目的およびねらい (シラバスより)：《微分積分 I》の続きとして，この講義では，多変数関数の微分積分を学び，実際に使えるようになることを目的とする。具体的な内容は，偏微分の定義と計算，全微分，2変数関数のグラフや接平面の求め方，多変数関数のテイラー展開，陰関数定理，極値問題，重積分の定義と計算，空間図形の表面積や体積，線積分，グリーンの公式などである。

講義日と授業内容 (おおまかな予定)：

第1回	9月14日	多変数関数のグラフ，ベクトルの内積
第2回	9月21日	関数の極限と連続性
第3回	9月28日	1次近似と全微分
第4回	10月5日	C^1 級関数と偏微分
第5回	10月12日	合成関数の微分 (1)
第6回	10月19日	合成関数の微分 (2)
第7回	10月26日	テイラー展開
第8回	11月2日	極大と極小
第9回	11月9日	重積分
第10回	11月16日	累次積分
	(11月23日)	(講義なし・金曜日の振替日)
第11回	11月30日	変数変換 (1)
第12回	12月7日	変数変換 (2)
第13回	12月14日	体積と曲面積 (オンデマンドでビデオ配信予定)
第14回	12月21日	期末試験 (オンラインを予定)

教科書および参考書：教科書にあたる講義プリントを manaba 上で pdf 形式で配布します。自習用の参考書として，以下を挙げておきます：

- 川平友規,『微分積分—1変数と2変数』, 日本評論社
- 三宅敏恒,『入門微分積分』, 培風館

クイズ：毎回，Google Forms を用いたクイズ (小テスト) を行います。URL は manaba 上で公開します。

成績評価の方法：クイズ (30~50%) と期末試験 (50~70%)

質問受付：次の3つの方法で質問や問い合わせを受け付けます。

- 授業中や授業後の休み時間に直接質問する。
- クイズのコメント欄に質問を書く。
- 質問を手書きして写真をとり，pdf や jpeg 画像の形でメールに添付する。

よく使う記号など：数の集合

- (1) \mathbb{C} : 複素数全体 (2) \mathbb{R} : 実数全体 (3) \mathbb{Q} : 有理数全体
(4) \mathbb{Z} : 整数全体 (5) \mathbb{N} : 自然数全体 (6) \emptyset : 空集合

ギリシャ文字

- (1) α : アルファ (2) β : ベータ (3) γ, Γ : ガンマ (4) δ, Δ : デルタ (5) ϵ : イプシロン
(6) ζ : ゼータ (7) η : エータ (8) θ, Θ : シータ (9) ι : イオタ (10) κ : カッパ
(11) λ, Λ : ラムダ (12) μ : ミュー (13) ν : ニュー (14) ξ, Ξ : クシー (15) \omicron : オミクロン
(16) π, Π : パイ (17) ρ : ロー (18) σ, Σ : シグマ (19) τ : タウ (20) υ, Υ : ウプシロン
(21) ϕ, Φ : ファイ (22) χ : カイ (23) ψ, Ψ : プサイ (24) ω, Ω : オメガ

その他

- (1) \leq, \geq は \leqq, \geqq と同じ意味.
(2) $x \in X$ と書いたら, 「 x は集合 X に属する」すなわち「 x は X の元」という意味.
(3) 「 \dots をみたす X の元全体の集合」を $\{x \in X \mid (x \text{ に関する条件})\}$ の形で表す. たとえば「 $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ 」
(4) $X \subset Y$ と書いたら, 「集合 X は集合 Y に含まれる」という意味. $X \subseteq Y$, $X \subseteqq Y$ も同じ意味.
(5) $A := B$ と書いたら A を B で定義する, という意味. たとえば $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
(6) (文章 1) $:\iff$ (文章 2) と書いたら, (文章 1) の意味は (文章 2) であることと定義する, という意味. たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 $:\iff$ ある実数 M が存在して, すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$.」

第 1 回 (9/14)：多変数関数のグラフ，ベクトルの内積

●● 9 月 14 日の講義ノート ●●

参考書の該当箇所：[川平] 15 章と 16 章，[三宅]4.1

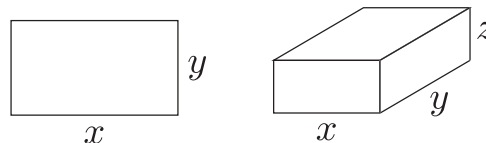
多変数関数の例

多変数関数とは複数の変数をもつ関数のことである。身近な例を挙げてみよう。

- 図 (左) のように，底辺 x ，高さ y の長方形の面積 S と周の長さ L は

$$S = S(x, y) = xy, \quad L = L(x, y) = 2(x + y)$$

と表される。これらは x と y を独立変数とする **2 変数関数**である。(すなわち， x と y の間に特別な関係はなく，それぞれを自由に変化させることができる。)



- 同じく図 (右) のような直方体の体積 V と表面積 A は

$$V = V(x, y, z) = xyz, \quad A = A(x, y, z) = 2(xy + yz + zx).$$

これらは x ， y ， z を独立変数とする **3 変数関数**である。

- 一般に n 個の独立変数 x_1, x_2, \dots, x_n をもつ $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の形の関数を **n 変数関数**という。

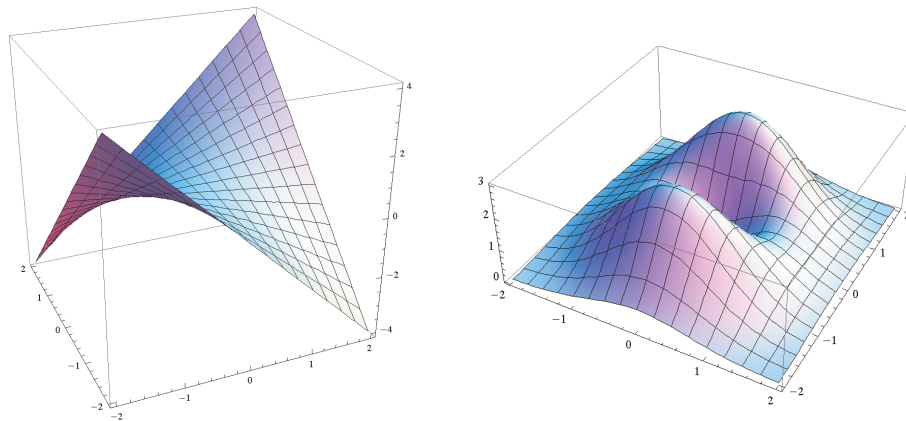
本講義では，おもに 2 変数関数の微分積分を学ぶ。3 変数以上の多変数関数の微分積分へは，2 変数の場合のアナロジー（類推）によって難なく移行できるだろう。

多変数関数のグラフ

n 個の実数の組 (x_1, x_2, \dots, x_n) 全体の集合を **n 次元ユークリッド空間**もしくは **n 次元数空間**とよび， \mathbb{R}^n で表す。本講義ではとくに断らない限り \mathbb{R}^2 を xy 平面とみなし， \mathbb{R}^3 を xyz 空間とみなす。

2 変数関数 $z = f(x, y)$ とは， xy 平面 \mathbb{R}^2 (の部分集合) 上を動く変数 (x, y) にある実数 z を対応付けるものである。したがって， xyz 空間 \mathbb{R}^3 に「3次元のグラフ」を描くことができる。厳密にいうと，関数 $z = f(x, y)$ の **3 次元グラフ**とは，点 (x, y) が関数 $z = f(x, y)$ の定義域 (第 16.1 節参照) をくまなく動いて得られる空間内の点 $(x, y, f(x, y))$ 全体からなる集合を指す。グラフは，何らかの曲面となるのが普通である。

例 1 (3 次元グラフ)。次の図は， $z = xy$ (左) と $z = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ (右) の 3 次元グラフである。



パソコンを用いれば、そのようなグラフを簡単に描かせることができるが、結局は平面（紙やモニターの上）に射影された2次元の絵になる。おのずと表現力には限界があり、実際のところあまり役に立たない¹。

等高線グラフ. 2変数関数 $z = f(x, y)$ であれば、**等高線グラフ**のほうが有用である²。地形図、気圧分布などで用いられるから、なじみがあるグラフだろう。こちらのほうが数学との親和性がよいので、本講義でも頻繁に利用する。

ここでいう「等高線」とは、次のような集合のことである：

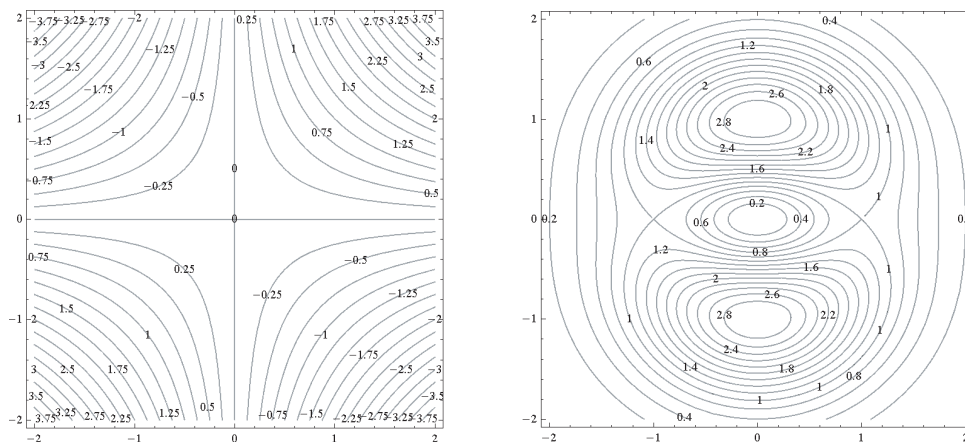
定義 (等高線) 2変数関数 $z = f(x, y)$ と実数 k に対し、集合

$$E_k = \{(x, y) \mid f(x, y) = k\}$$

を高さ k の等高線とよぶ。

注意. 等高線がいつも「線」とは限らない。たとえば定数関数の場合は全 xy 平面であるし、極大値をとる点（山の頂上）では1点である。

例 2 (等高線グラフ). 次の図は $z = xy$ (左) と $z = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ (右) の等高線グラフである。



等高線が密なところほど関数の値の変化が大きく、粗なところほど変化は緩やかだといえる。

¹もちろんグラフの形状を把握するにはよいのだが、何らかの量的な情報を得るのは難しい。

²「等位線グラフ」ともいう。

1 次関数とベクトルの内積

1 変数の関数がある点で「微分可能」であることは、関数がある点で「1 次関数で近似される」ことと同じ意味であった (参考書 [川平] 第 6 章)。

多変数関数の場合も、その点で「関数が 1 次関数で近似される」ことを「微分可能」であることの定義とする。そのため、多変数の 1 次関数を理解することが、多変数関数の微分の理解と直結しているのである。

もちろん、微分の話をする前に極限や連続性の話をしないといけないが、ウォーミングアップとして、ここでは多変数の 1 次関数がどんなものか探ってみよう。

1 次関数. 1 次関数とは次のような形の関数である (小文字が変数, 大文字が定数) :

$$\begin{aligned} 1 \text{ 変数: } & y = Ax + B \\ 2 \text{ 変数: } & z = Ax + By + C \\ 3 \text{ 変数: } & w = Ax + By + Cz + D \\ n \text{ 変数: } & y = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n + B \end{aligned}$$

($A_1 = \cdots = A_n = 0$ の場合は定数関数になるが、本講義ではこの場合も 1 次関数とよぶことにする。) 私たちはまず、**2 変数の 1 次関数 $z = Ax + By + C$** を完全に理解することを目標にしよう。そのために、高校で学んだ平面ベクトルについて復習しておく。

平面ベクトルの内積. ふたつの平面ベクトル³

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

の内積を

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 := a_1a_2 + b_1b_2$$

と定める。内積 $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ は成分を用いて $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ と表すこともある。また、ベクトル \vec{p}_1 の長さを

$$|\vec{p}_1| := \sqrt{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

によって定義する。

内積は次の性質を満たす：

命題 1.1 (内積の性質) $\vec{0}$ (ゼロベクトル) でないふたつのベクトル \vec{p}_1 と \vec{p}_2 のなす角度を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とするとき、

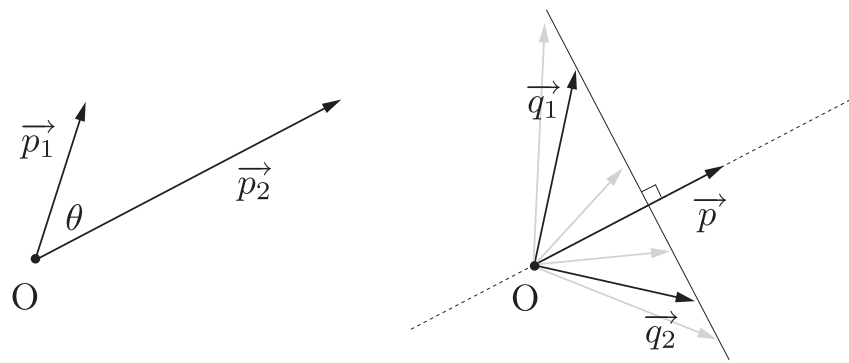
$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos \theta.$$

さらにベクトル \vec{p}_1 と \vec{p}_2 の長さを固定して θ だけを変化させるとき、

- $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ が最大 $\iff \theta = 0 \iff \vec{p}_1$ と \vec{p}_2 が同じ方向.
- $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ が 0 $\iff \theta = \pi/2 \iff \vec{p}_1$ と \vec{p}_2 が直交.
- $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ が最小 $\iff \theta = \pi \iff \vec{p}_1$ と \vec{p}_2 が逆の方向.

証明は不要であろう。(この命題は多変数関数の微小変化を定量的に把握する際に暗に用いられる.)

³本講義ではとくに断らない限り縦ベクトルと横ベクトルを区別しない。たとえば、 $\vec{p}_1 = (a_1, b_1)$ のようにも表す。



1 次関数の等高線を記述するのに必要な命題を述べておこう.

命題 1.2 (内積一定の集合は直線) $\vec{0}$ でない \vec{p} と直線 E が直交するとき, E 上にあるすべての位置ベクトル \vec{q} に対し内積 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ は一定値をとる. すなわち, \vec{q}_1, \vec{q}_2 が E 上にあるとき,

$$\vec{p} \cdot \vec{q}_1 = \vec{p} \cdot \vec{q}_2. \quad (1.1)$$

逆に, 式 (1.1) が成り立つようなベクトル \vec{q}_1 と \vec{q}_2 ($\vec{q}_1 \neq \vec{q}_2$) は \vec{p} と直交する同一直線上にある.

証明は各自の練習問題としよう.

1 次関数と内積. 内積を用いると, 1 次関数 $z = Ax + By + C$ とその等高線の幾何学的な意味が明確になる:

命題 1.3 (1 次関数と内積) 1 次関数 $z = Ax + By + C$ は内積を用いて

$$z = C + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

と表される. とくに $(A, B) \neq (0, 0)$ のとき, 高さ k の等高線は

$$E_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k - C \right\} \quad (1.3)$$

と表され, ベクトル (A, B) に直交する直線となる.

証明. 式 (1.2) はただの式変形である. これより, 式 (1.3) も明らか. 式 (1.3) より, 高さ k の等高線はベクトル (A, B) との内積が一定値 $k - C$ となるようなベクトル (x, y) の集合となる. よって 命題 1.2 より, そのような集合はベクトル (A, B) に直交する直線となる. ■

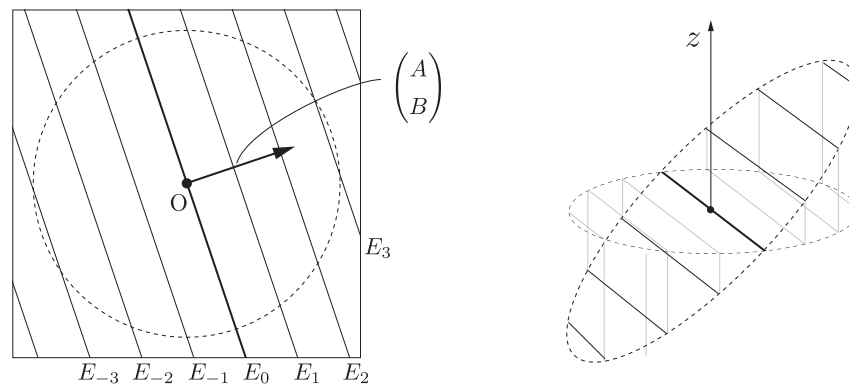
1 次関数の等高線グラフ

$(A, B) \neq (0, 0)$ をみたく 1 次関数 $z = Ax + By + C$ の等高線グラフを詳しく調べてみよう.

命題 1.3 より, 1 次関数 $z = Ax + By + C$ の等高線はすべてベクトル (A, B) に垂直な直線であった. さらに特徴的なのは, 1 次関数の等高線が次のような「一様性」(等間隔に並ぶこと)をもつことである:

命題 1.4 (1 次関数の等高線は等間隔) 1 次関数 $z = Ax + By + C$ (ただし $(A, B) \neq \vec{0}$) の高さ k の等高線を E_k とする. 真に単調増加な等差数列 k_1, k_2, \dots (すなわち公差は正) に対し, 対応する等高線 E_{k_1}, E_{k_2}, \dots はベクトル (A, B) の方向に等間隔に並ぶ.

下の図の左側は, 高さが整数となる等高線を描いた $z = Ax + By$ の等高線グラフである. 点線で囲まれた円板に対応する部分を 3 次元グラフにすると, 右側のようになる. (すなわち, 3 次元グラフは平面である.)



一般の 1 次関数 $z = Ax + By + C$ の等高線グラフは, このグラフに一斉に高さ C を加えただけである.

証明 (命題 1.4). $C = 0$ の場合を示せば十分であろう. 数列の公差を $d > 0$ とすると, $k_2 = k_1 + d$ と表される. いま $(x_0, y_0) := \left(\frac{Ad}{A^2 + B^2}, \frac{Bd}{A^2 + B^2} \right)$ とおくと, これは (A, B) を正の定数倍したベクトルであり, $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = d$ を満たす. このとき,

$$\begin{aligned} (x, y) \in E_{k_2} &\iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_2 (= k_1 + d) \\ &\iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_1 + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = k_1 \\ &\iff (x - x_0, y - y_0) \in E_{k_1}. \end{aligned}$$

よって E_{k_2} は E_{k_1} をベクトル (x_0, y_0) 分だけ平行移動させたものである. 同様に, E_{k_n} は E_{k_1} をベクトル $((n-1)x_0, (n-1)y_0)$ 分平行移動させたものである. とくに, ベクトル (x_0, y_0) は (A, B) の正の定数倍であったから, 等高線 E_{k_1}, E_{k_2}, \dots は (A, B) と同じ方向に等間隔で並んでいる. ■

1 次関数の平行移動. 1 変数関数の場合, 1 次関数 $y = Ax$ を原点が (a, b) に移るように平行移動したものは

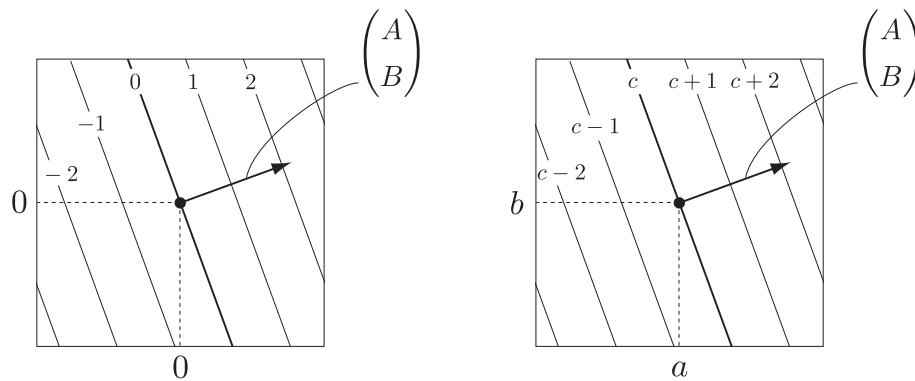
$$y - b = A(x - a) \iff y = b + A(x - a)$$

と表された. 同様に, 2 変数の 1 次関数 $z = Ax + By$ を原点が (a, b, c) に移るように平行移動させたものは

$$z - c = A(x - a) + B(y - b) \iff z = c + A(x - a) + B(y - b)$$

と表される. あとで考える接平面の方程式はこの形で表現される. また, $z = Ax + By + C$ は $(a, b, c) = (0, 0, C)$ の場合に相当する.

下の図の左側はもとの $z = Ax + By$ の等高線グラフであり, 右側はそれを原点が (a, b, c) に移るように平行移動したものの等高線グラフである.



参考：1 次関数の 3 次元グラフ

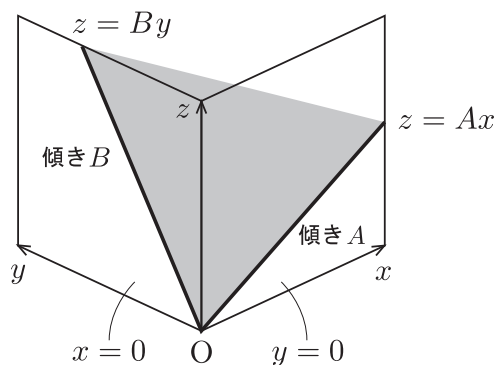
次に 3 次元グラフを考えよう. まずは $C = 0$ とする. 先の等高線グラフの考察から, $z = Ax + By$ の 3 次元グラフは原点を通る平面である.

もし $A = B = 0$ であればこれは定数関数 $z = 0$ であるから, グラフは xy 平面に平行である. そこから A もしくは B が変化し 0 でなくなると, グラフはじわじわと傾いていくだろう. その「傾き具合」を理解するために, まずは x, y の係数 A, B の意味を命題の形で述べておく (証明は不要であろう).

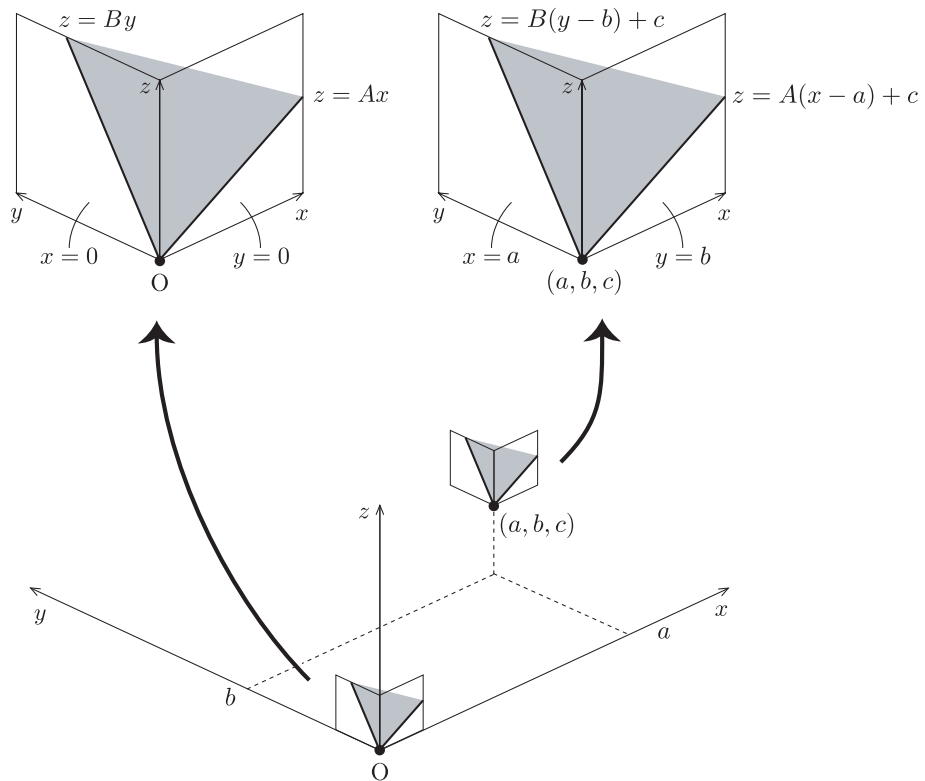
命題 1.5 (1 次関数の係数の意味) 1 次関数 $z = Ax + By$ の 3 次元グラフについて,

- xz 平面 ($y = 0$) による切り口 ($z = Ax$) は傾き A の直線である.
- yz 平面 ($x = 0$) による切り口 ($z = By$) は傾き B の直線である.

$z = Ax + By$ の 3 次元グラフはこれら 2 直線 (「 $y = 0$ かつ $z = Ax$ 」と「 $x = 0$ かつ $z = By$ 」) を含むことになる. したがって, 原点付近での様子 (断片) は次の図のようになる:



$z = Ax + By$ の平行移動. 等高線グラフのときと同様に, $z = Ax + By$ をベクトル (a, b, c) 分だけ平行移動させたグラフ $z = c + A(x - a) + B(y - b)$ の 3 次元グラフの断片は次の図のように表現できる.



第 2 回 (9/21) : 多変数関数の極限と連続性

配布日：9/21/2021 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 16 章, [三宅]4.1

定義域と値域

1 変数関数 $y = \sqrt{1-x^2}$ が意味をもつためには、 $-1 \leq x \leq 1$ でなくてはならない。このように、関数とその値が定義される変数の範囲はペアで考えなくてはならない¹。

同様に 2 変数関数の場合も、関数 $z = f(x, y)$ の値が定まるような (x, y) の集合を関数 $f(x, y)$ の**定義域**とよぶ。また、実際に関数 $z = f(x, y)$ がとりうる値の集合

$$\{k \in \mathbb{R} \mid f(x, y) = k \text{ となる } (x, y) \text{ が定義域内に存在}\}$$

を $f(x, y)$ の**値域**とよぶ。

例 1. たとえば、

- $z = xy$ の定義域は \mathbb{R}^2 全体、値域は \mathbb{R} (実数全体)。
- $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ の定義域は xy 平面から原点を除いた集合

$$\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

であり、値域は $(0, \infty)$ 。

- $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ の定義域は単位閉円板 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ であり、値域は閉区間 $[0, 1]$ 。

関数を表す記号. 関数 $z = f(x, y)$ は定義域に含まれる変数の組 (本講義では**ベクトル変数**とよぶ) (x, y) から $f(x, y)$ という実数を生成し、その値を変数 z に割り当てる「しくみ」であった。現代の数学では、これをプロジェクターのように「関数 f は (x, y) を z に写す」と解釈し、

$$f : (x, y) \mapsto z, \quad (x, y) \xrightarrow{f} z = f(x, y)$$

のように表すことが多い。

2 変数関数の極限

私たちの目的は 2 変数関数の微分積分学を展開することである。まず「微分」を定義するためには、1 変数のときと同様に「極限」の概念が必要である。

まず「ベクトル変数 (x, y) がベクトル定数 (a, b) に限りなく近づく」という言葉を定式化しよう。

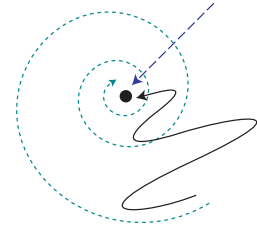
定義 (限りなく近づく) (x, y) が (a, b) に限りなく近づくとは、 (x, y) が $(x, y) \neq (a, b)$ を満たし、かつ

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow 0$$

となるように変化することをいう。これを $(x, y) \rightarrow (a, b)$ と表す。

¹ 普段はそれほど神経質にならなくてもよいが、数値実験用にプログラムを書くとき、うっかり定義域外の値を関数に代入してしまいエラーが出る、といったミスはよくある。

注意 (近づき方はいろいろ). 1変数の場合と違って、「近づく」といってもその経路はさまざまである。あらゆる近づき方を考慮しなくてはならない。



定義 (極限) $f(x, y)$ を点 (a, b) のまわりで定義された関数とし, A を実数とする. 関数 $f(x, y)$ が $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき A に収束するとは, ベクトル変数 (x, y) が (a, b) に限りなく近づくとき, (その近づき方に依存せずに) $f(x, y)$ が A に限りなく近づくことをいう. この実数 A を関数 $f(x, y)$ の $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のときの**極限**とよび,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = A \quad \text{もしくは} \quad f(x, y) \rightarrow A \quad ((x, y) \rightarrow (a, b))$$

と表す.

下線部に関する注意. 「点 (a, b) のまわりで定義された関数」 $f(x, y)$ といったとき, 点 (a, b) そのものが $f(x, y)$ の定義域に入っていないケースも許す. しかし, 少なくとも「 (a, b) を中心としたある円板から 1 点 (a, b) を除いた集合」は定義域に含まれていると仮定する. 下の例 3 も参照せよ.

例 2. $f(x, y) = e^{x+y}$ とおくと, $(x, y) \rightarrow (1, 1)$ のとき $e^{x+y} \rightarrow e^2$ である.

例 3. $f(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$ とおくと, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $f(x, y) \rightarrow 1$ である. (原点 $(0, 0)$ はこの関数の定義域には含まれないことに注意.) なぜなら, $t = x^2 + y^2$ とおくと $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $t \rightarrow 0$ であり, $f(x, y) = \frac{e^t - 1}{t} \rightarrow 1$ がいえるからである.

極限が存在しない例. ベクトル変数 (x, y) が (a, b) に「限りなく近づく」といっても, さまざまな近づき方が考えられる. 一見簡単そうな関数でも, 「その近づき方」によって値がまったく変わってしまうこともある.

次の例題を考えてみよう.

例題 2.1 (極限の非存在) 極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ は存在するか?

解答. 存在しない. $y = 0$ のまま $x \rightarrow 0$ とするとき, すなわち (x, y) が水平方向から $(0, 0)$ に近づくとき,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

同様に $x = 0$ のまま $y \rightarrow 0$ とするとき, すなわち (x, y) が垂直方向から $(0, 0)$ に近づくとき,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

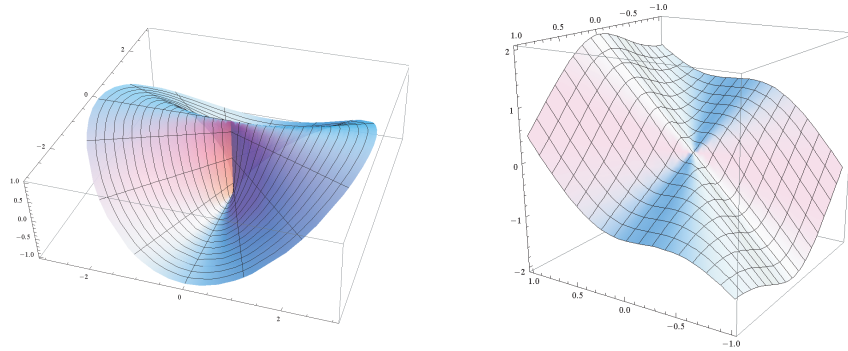
「収束する」というためには「近づき方によらず」一定値に近づかないといけないので, この場合はその条件を満たさない. よって極限は存在しない. ■

説明. 極限が存在できない理由をもう少し詳しく解説しておこう. まず変数 x, y をそれぞれ $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (ただし $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) と表してみよう. θ は一定値に固定し $r \rightarrow 0$ とした極限をとると

(すなわち, x 軸との角度 θ ラジアンを一定に保ちながら原点に近づくと)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \cos 2\theta.$$

すなわち, θ に依存して結果が変わってしまうのである. 次の図の左側は原点中心半径 3 の円板上で関数 $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ の 3 次元グラフを描いたものである.



参考：極限が存在する例. 次の例題は先ほどの問題によく似ているが, 極限が存在する：

例題 2.2 (極限の存在) 極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ は存在するか？

先の図の右側は区画 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 上で関数 $\frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ の 3 次元グラフを描いたものである.
解答. 存在する. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと $|x| \leq r, |y| \leq r$ が成り立つ. よって三角不等式²より

$$0 \leq \left| \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|2x^3| + |-y^3|}{|x^2 + y^2|} \leq \frac{2r^3 + r^3}{r^2} = 3r.$$

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $r \rightarrow 0$ であるから, 「はさみうちの原理」より

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| = \lim_{r \rightarrow 0} 3r = 0.$$

すなわち $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$. ■

極限の性質. 2 変数の極限についても, 次が成り立つ：

公式 2.1 (極限と四則) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = A, \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = B$ であるとき,

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \{f(x, y) + g(x, y)\} = A + B.$

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = AB.$

(3) $B \neq 0$ のとき, $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{A}{B}.$

²任意の実数 x, y に対し, $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ が成り立つ. これを三角不等式という.

関数の連続性

2変数関数の連続性も1変数の場合と同様に定義する.

定義 (連続性) 少なくとも点 (a, b) を含む円板上で定義された関数 $f(x, y)$ に対し,

$$(x, y) \rightarrow (a, b) \text{ のとき } f(x, y) \rightarrow f(a, b)$$

すなわち

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

であるとき, 関数 $f(x, y)$ は (a, b) で**連続**であるという.

関数 $f(x, y)$ が**集合 D 上で連続**であるとは, D 内のすべての点 (a, b) において $f(x, y)$ が連続であることをいう.

例 4 (1次関数). すべての1次関数 $z = f(x, y) = Ax + By + C$ は xy 平面 \mathbb{R}^2 上で連続である. 実際, 任意の (a, b) に対し, 三角不等式より

$$|f(x, y) - f(a, b)| = |A(x - a) + B(y - b)| \leq |A||x - a| + |B||y - b|.$$

$(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき $x \rightarrow a$ かつ $y \rightarrow b$ であるから, 上の式は 0 に収束する. よって $f(x, y) \rightarrow f(a, b)$.

関数の四則と連続性. 次が成り立つのも, 1変数の場合と同様である.

定理 2.2 (四則と連続性) 関数 $f(x, y)$ と関数 $g(x, y)$ が (a, b) で連続であるとき, 和 $f(x, y) + g(x, y)$, 積 $f(x, y)g(x, y)$ も (a, b) で連続. さらに $g(a, b) \neq 0$ であるとき, 商 $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ も (a, b) で連続.

例 5 (多項式). 定数関数, 1次関数は連続であるから, 定理 2.2 より $1 + xy, 1 - x^2 - 3xy^2 + y^3$ といった多項式関数も連続となる. また, $\frac{x - y}{x^2 + y^2}$ などの有理関数も分母が 0 にならない範囲で連続である.

例 6 (例 3 の関数). $f(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$ は原点で分母が 0 になるので関数の値が定義できないように見えるが, $f(0, 0) := 1$ と追加で定義すると \mathbb{R}^2 全体で連続な関数となる.

例 7 (例題 2.2 の関数). 同様に $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ と定義すると \mathbb{R}^2 全体で連続な関数となる.

例 8 (例題 2.1 の関数). 今度は $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ と定義してみる. この関数は原点以外の点で連続だが, 原点では連続でない. そもそも例題 2.1 より, $f(0, 0)$ としてどのような実数を割り当てても平面全体で連続な関数にはできないのである³.

³このような関数は例外的なので, 神経質になる必要はない.

参考：有界閉集合上での最大・最小値の存在

1 変数のときは，閉区間上の連続関数には最大・最小値が存在する，という定理があった（[川平] 定理 4.3, [三宅] 定理 1-2-5）．この 2 変数版を証明抜きで紹介しておこう．

定理 2.3 (有界閉集合上での最大・最小値の存在) 有界な閉集合 D 上で連続な関数 $z = f(x, y)$ は最大値と最小値をもつ．

注意. 有界な閉集合は**コンパクト集合**ともよばれる．この定理は「コンパクト集合上の連続関数は最大値・最小値をもつ」という形で述べられることが多い．

また，有界でも閉集合でなければ最大値・最小値が存在しないかもしれない．たとえば原点中心半径 $\pi/2$ の開円板上で定義された関数 $z = \tan \sqrt{x^2 + y^2}$ は最大値を持たない．

前回のクイズの答え

問題 1-1 関数 $z = f(x, y) = 4x - y + 3$ の 3次元グラフを考える. そのグラフの上にボールを静かに置いたとき, ボールは (xy 平面で見ると) 次のどのベクトルの向きに転がり始めるか?

- (1) $(4, -1)$ (2) $(4, 1)$ (3) $(-4, 1)$ (4) $(-4, -1)$

解答 1-1 (3).

解説 (正答率:81%):前回の講義のポイントは、「1次関数 $z = Ax + By + C$ (ただし, $(A, B) \neq (0, 0)$) の等高線はすべてベクトル (A, B) に垂直であり, 関数の値はベクトル (A, B) の方向に向かうとき, もっとも増加する」ということだった. ボールは「もっとも減少する方向」に転がるので, $(-A, -B)$ の方向に転がる. よって, この問題の場合は $(-4, 1)$.

問題 1-2 関数 $f(x, y) = 4x + 3y + 5$ に対し, 高さ 1 の等高線と高さ 5 の等高線の間の距離を求めよ.

解答 1-2 $4/5$.

解説 (正答率:78.6%):高さ 1 の等高線は $f(x, y) = 4x + 3y + 5 = 1 \iff 4x + 3y + 4 = 0$ を満たす直線. 一方, 高さ 5 の等高線は $f(x, y) = 4x + 3y + 5 = 5 \iff 4x + 3y = 0$ を満たす直線. よって, 求める距離は直線 $4x + 3y + 4 = 0$ 上の任意の点 (たとえば $(1, 0)$) と直線 $4x + 3y = 0$ の距離で与えられる. すなわち, [求める距離] $= \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 0|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}$.

第3回 (9/28) : 1次近似と全微分

配布日：9/28/2021 Version : 1.0

参考書の該当箇所：[川平] 17章, [三宅]4.2

1 変数関数の微分可能性 (復習+アップデート)

1 変数関数の1次近似. 高校 (あるいは, 微分積分 I) で学んだ1変数関数の微分可能性の定義を思い出そう. $y = f(x)$ が $x = a$ で「微分可能」であるとは, ある定数 A が存在し,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A \quad (3.1)$$

が成り立つことをいうのであった. これは, $x \approx a$ ならば (この記号は, 「 x が a に近ければ」というあいまいな意味で使っている)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx A \iff f(x) - f(a) \approx A(x - a) \iff f(x) \approx f(a) + A(x - a)$$

が成り立つ. A は $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ に他ならないから, 最後の1次関数はいわゆる「接線の方程式」である. すなわち,

「 $f(x)$ のグラフが (接線とよばれる) 直線で近似される」

という幾何学的な意味が導かれた.

定義のアップデート 「近似される」の部分をもう少し定量的に理解するために, 式 (3.1) を読み替えておこう. いま,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A &\iff \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \right) = 0 \\ &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}}{x - a} = 0 \end{aligned}$$

であるから, 微分可能性は次のようにいい換えることができる:

定義 (1 変数関数の微分可能性) 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは, ある定数 A が存在し, $x \rightarrow a$ のとき

$$\frac{f(x) - \{f(a) + A(x - a)\}}{x - a} \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

が成り立つことをいう. この A を $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**といい, $f'(a)$ と表す.

式 (3.2) の分子は $y = f(x)$ を, $(a, f(a))$ を通る直線を表す1次関数 $y = f(a) + A(x - a)$ で近似したときの誤差である. 傾き A の値を適切に選べば, その誤差が $x - a$ が 0 に近づくスピードよりも相対的に速く 0 に近づく, ということである.

2 変数関数の全微分可能性と接平面

式 (3.2) をもとにして, 2変数関数の微分可能性を定式化しよう. 類似性が見えるだろうか:

定義 (全微分可能性) 関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で全微分可能であるとは、ある定数 A, B が存在し、 $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき

$$\frac{f(x, y) - \{f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)\}}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

が成り立つことをいう。関数 $z = f(x, y)$ がある集合 D 上のすべての点で全微分可能であるとき、 $f(x, y)$ は D 上で全微分可能であるという。

1変数関数のときと比べてみよう。まず「微分可能性」が「全微分可能性」に変化している。これは、次回学ぶ「偏微分可能性」と区別するためである。次に、式(3.3)が式(3.2)の2変数バージョンになっていることを確認しよう。

まず、式(3.3)の分子は関数 $z = f(x, y)$ を $(a, b, f(a, b))$ を通る平面を表す1次関数 $z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$ で近似したときの誤差であり、 $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ は (x, y) と (a, b) の距離である。したがって、式(3.3)は、「 A と B の値を適切に選べば、その誤差が $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ が0に近づくスピードよりも相対的に早く0に近づく」ことを意味している。そのような「良い近似」を与える1次関数が存在することをもって、微分可能性の定義としているのである。

例 1. 1次関数 $z = f(x, y) = Ax + By + C$ はすべての点 (a, b) で全微分可能である。実際、 $f(x, y)$ の係数の A, B を式(3.3)の A, B だとみなして計算すると、

$$\begin{aligned} & \frac{f(x, y) - \{f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)\}}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \\ &= \frac{(Ax + By + C) - \{Aa + Bb + C + A(x - a) + B(y - b)\}}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、明らかに全微分可能性の式(3.3)を満たす。

例題 3.1 (全微分可能性) 2次関数 $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ は点 $(1, 2)$ で全微分可能であることを示せ。

解答. $X = x - 1, Y = y - 2$ とおく。このとき

$$f(x, y) = (1 + X)^2 + (2 + Y)^2 = 5 + 2X + 4Y + X^2 + Y^2$$

であるから、

$$f(x, y) = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2) + (x - 1)^2 + (y - 2)^2.$$

$f(1, 2) = 5$ に注意すると、 $(x, y) \rightarrow (1, 2)$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{f(x, y) - \{f(1, 2) + 2(x - 1) + 4(y - 2)\}}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} \\ &= \frac{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} \\ &= \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

よって点 $(1, 2)$ において全微分可能性の式(3.3)を満たす。 ■

接平面.

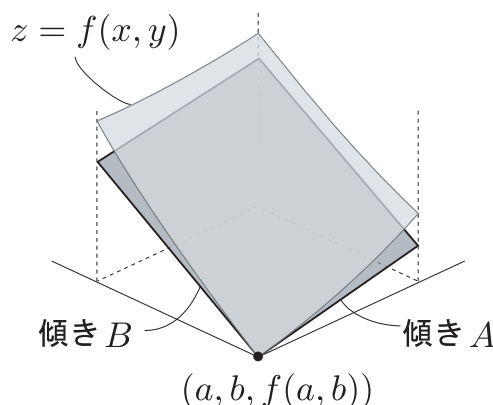
式 (3.3) 1 次関数 $z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$ は, $z = f(x, y)$ の 3 次元グラフに対する接平面の方程式を与えていると解釈すべきであろう.

定義 (接平面) 関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) において全微分可能であり式 (3.3) を満たすとき, 1 次関数

$$z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) \tag{3.4}$$

を関数 $f(x, y)$ の (a, b) における接平面の方程式もしくは 1 次近似とよぶ. また, その 3 次元グラフにあたる xyz 空間内の平面を関数 $f(x, y)$ の (a, b) における接平面という.

右の図は $z = f(x, y)$ の (a, b) における 3 次元グラフが, 接平面によって近似される様子を表現したのものである.



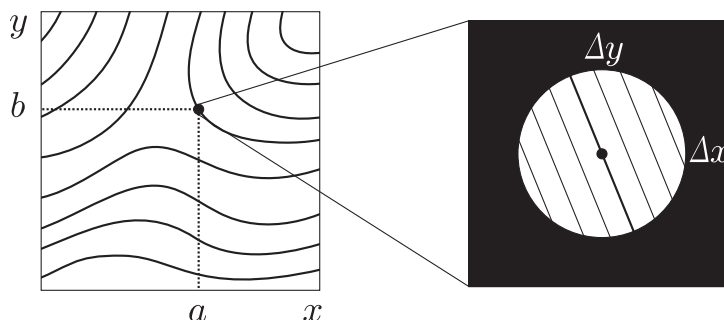
例 2 (1 次関数) . 1 次関数 $z = f(x, y) = Ax + By + C$ の点 (a, b) における接平面は自分自身である. 実際, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} z &= Ax + By + C \\ &= f(a, b) + A(x - a) + B(y - b). \end{aligned}$$

例 3 (2 次関数) . 例題 3.1 より, 2 次関数 $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ の点 $(1, 2)$ における接平面は $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$ だとわかる.

勾配ベクトル

式 (3.3) の幾何学的な説明をしておこう.



$(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき式 (3.3) が成り立つならば, $z = f(x, y)$ は 1 次関数 $z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$ によって近似されるのであった. すなわち, $(x, y) \approx (a, b)$ のとき,

$$f(x, y) \approx f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$$

だといえる. ベクトルの内積を用いると,

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

担当教員：川平 友規

と変形できるから、

$$f(x, y) - f(a, b) \approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

という近似式を得る。この式は「 (x, y) の (a, b) からの移動量」

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

と、「海拔高度 $f(x, y)$ の $f(a, b)$ からの変化量」

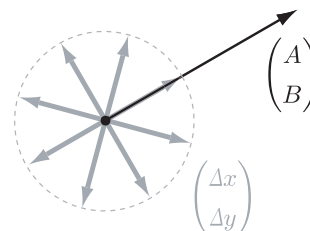
$$\Delta z := f(x, y) - f(a, b)$$

の間に、

$$\Delta z \approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

という関係があることを示している。

ベクトル (A, B) は「関数をもっとも増加させる移動方向」を示唆している。山の斜面でいえば、一歩で等高線をもっともたくさんまたぐことができる方向である。それは、もっとも急勾配の方向であり、等高線と垂直な方向である。もし点 (a, b) にボールを置くと、 $(-A, -B)$ の方向に転がり始めるだろう。



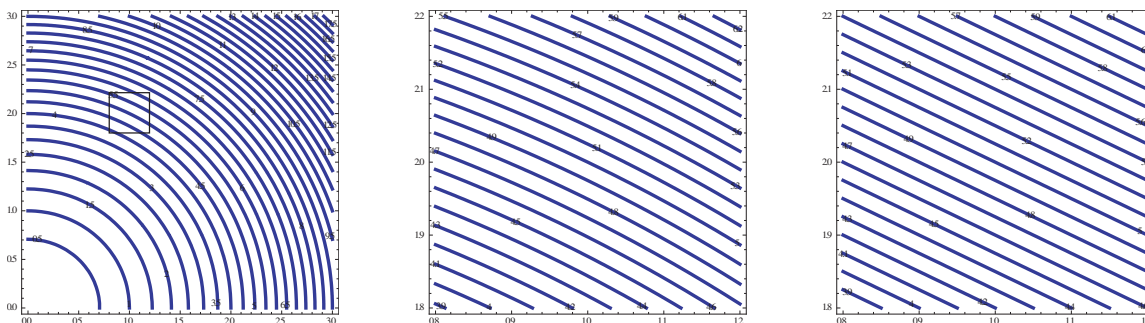
このように、ベクトル (A, B) には重要な意味があるので、ちゃんと名前が付いている：

定義 (勾配ベクトル) 全微分可能性の式 (3.3) から得られる定数の組 (A, B) を関数 $f(x, y)$ の点 (a, b) における**勾配ベクトル** (もしくは単に**勾配**) とよび、 $\nabla f(a, b)$ と表す。

∇ は大文字のデルタ (Δ) を逆にした記号で、**ナブラ** (nabla) と読む¹。勾配ベクトルは2変数関数の「微分係数」に相当する量 (ベクトル量) である。

例 4. 例 1 より 1 次関数 $z = f(x, y) = Ax + By + C$ はすべての点 (a, b) で勾配ベクトル (A, B) をもつ。

次の図は左から、関数 $z = x^2 + y^2$ の区画 $[0, 3] \times [0, 3]$ における等高線グラフ、同じ関数の区画 $[0.8, 1.2] \times [1.8, 2.2]$ での等高線グラフ、1 次関数 $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$ の区画 $[0.8, 1.2] \times [1.8, 2.2]$ におけるグラフである。



¹勾配ベクトルは $\text{grad } f(a, b)$ と表される。記号 grad は勾配を表す単語 gradient に由来する。

連続性との関係. 「全微分可能性」の定義には、関数の「連続性」が仮定されていない. 1 変数のときと同様に、次の命題から「連続性」が自動的に導かれるからである.

命題 3.1 (全微分可能なら連続) 関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で全微分可能であれば、 $(x, y) = (a, b)$ で連続である.

証明. 式 (3.3) より、 $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき明らかに $f(x, y) \rightarrow f(a, b)$ が成り立つ. ■

前回のクイズの答え

問題 2-1 3変数の1次関数 $w = Ax + By + Cz + D$ の高さ k の等高線 E_k について、正しいものを答えよ。ただし、 $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ とする。

- (1) E_k は k の値によらず、 (A, B, C) を通る球になる。
- (2) E_k は k の値によらず、 (A, B, C) を中心とする球になる。
- (3) E_k は k の値によらず、 (A, B, C) と平行な平面となる。
- (4) E_k は k の値によらず、 (A, B, C) と垂直な平面となる。

解答 2-1 (4).

解説 (正答率：85.7%)：まず、高さ k の等高線とは、 xyz 空間内の集合

$$E_k = \{(x, y, z) \mid Ax + By + Cz + D = k\}$$

のことである。あとは2変数の1次関数とまったく同じ考え方をし、すなわち、 $Ax + By + Cz + D = k \iff \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k - D$ と見れば、ベクトル (A, B, C) との内積が一定の値 $k - D$ となる集合が E_k だとわかる。そのような集合は、空間ベクトルの内積の性質から「 (A, B, C) と垂直な平面」である。

問題 2-2 極限

$$A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{と} \quad B = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{|x|+|y|} - 1}{|x| + |y|}$$

について、正しいものを選べ。

- (1) 極限 A と B はともに存在する。
- (2) 極限 A は存在するが、 B は存在しない。
- (3) 極限 A は存在しないが、 B は存在する。
- (4) 極限 A と B はともに存在しない。

解答 2-2 (1).

解説 (正答率：73.5%)：極限 A が存在することを示す。 $t = x^2 + y^2$ とおくと、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき、その近づき方によらず $t = x^2 + y^2 \rightarrow 0$ 。よって $\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$ 。

次に極限 B が存在することを示す。 $t = |x| + |y|$ とおくと、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき、その近づき方によらず $t = |x| + |y| \rightarrow 0$ 。したがって、 $\frac{e^{|x|+|y|} - 1}{|x| + |y|} = \frac{e^t - 1}{t} \rightarrow 1$ 。

注意. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ と $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ は1変数の微分積分でもっとも重要な極限です。

第 4 回 (10/5) : 偏微分と C^1 級関数

配布日：10/5/2021 Version：1.0

●● 10月6日の講義ノートと補足 ●●

参考書の該当箇所：[川平] 18 章, [三宅]4.1~4.2

全微分の係数の意味

関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で「全微分可能」であるとは、次の式 (4.1) を満たす定数 A, B が存在することであった：

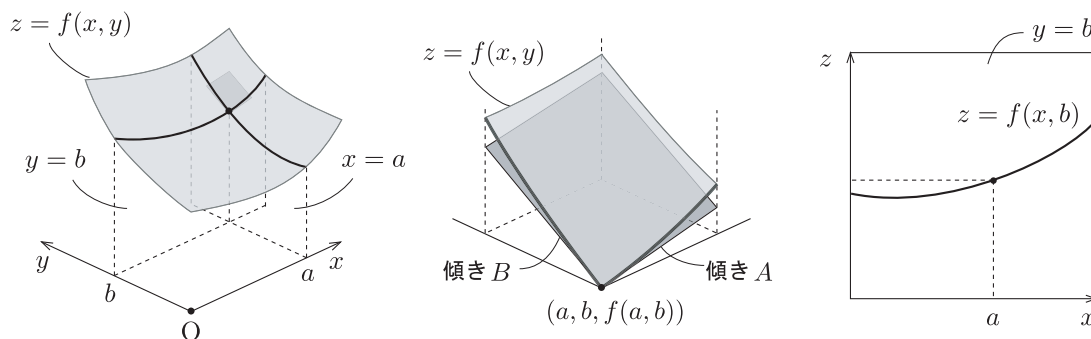
1 次関数 $L(x, y) := f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$ は $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき

$$\frac{f(x, y) - L(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

を満たす。このとき、 $z = L(x, y)$ を (a, b) における「1 次近似」もしくは「接平面の方程式」という。

まずはこの係数 A と B の幾何学的な意味を調べておこう。

$z = f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能であり、式 (4.1) が成り立ったと仮定する。このとき、 $z = f(x, y)$ の 3 次元グラフを $(a, b, f(a, b))$ のあたりで拡大していくと、接平面 $z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$ のように見えてくるはずである。



そこで、前回の 1 次関数に対する考察を参考にして、 $z = f(x, y)$ の 3 次元グラフの平面 $y = b$ と平面 $x = a$ による断面に着目してみよう。

まず平面 $y = b$ による断面は $z = f(x, b)$ (x のみの関数) で与えられ、 $(x, b) \rightarrow (a, b)$ のとき式 (4.1) より

$$z = f(x, y) \approx L(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$$

であるから、 $y = b$ を代入して

$$z = f(x, b) \approx f(a, b) + A(x - a) \iff \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \approx A$$

と表現される。よって A は $z = f(x, b)$ の $x = a$ における微分係数であり、 $x \rightarrow a$ のとき、

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \rightarrow A.$$

だと予想される。厳密に証明してみよう。式 (4.1) において、 $y = b$ かつ $x \rightarrow a$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{f(x, b) - L(x, b)}{\sqrt{(x-a)^2}} \rightarrow 0 &\iff \left| \frac{f(x, b) - \{f(a, b) - A(x-a)\}}{x-a} \right| \rightarrow 0 \\ &\iff \left| \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x-a} - A \right| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

よって $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x-a} = A$ が示された。同様に、平面 $x = a$ による断面は $z = f(a, y)$ (y のみの関数) で与えられ、 $(a, y) \rightarrow (a, b)$ のとき式 (4.1) より

$$z = f(a, y) \approx f(a, b) + B(y-b) \iff \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y-b} \approx B$$

と表現される。厳密な議論もできて、 $\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y-b} = B$ 。以上のことから、係数 A と B について次の命題を得る：

命題 4.1 (全微分の係数の意味) 関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能であり、式 (4.1) が成り立つとき、

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x-a} \quad \text{かつ} \quad B = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y-b}. \quad (4.2)$$

また、 $z = f(x, y)$ の 3 次元グラフは次を満たす：

- 平面 $y = b$ による断面 $z = f(x, b)$ は、 $(a, b, f(a, b))$ において傾き A の接線をもつ。
- 平面 $x = a$ による断面 $z = f(a, y)$ は、 $(a, b, f(a, b))$ において傾き B の接線をもつ。

この式 (4.2) を用いれば、係数 A と B だけをピンポイントで計算できる、ということである。

偏微分

式 (4.2) より、(一般には全微分可能とは限らない) 関数 $z = f(x, y)$ について、次のように「偏微分係数」を定義する。

定義 (偏微分) 関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で偏微分可能であるとは、ふたつの極限

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x-a} \quad \text{と} \quad B = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y-b} \quad (4.3)$$

が存在することをいう。このとき、 A と B を $f(x, y)$ の (a, b) における偏微分係数とよび、

$$A = f_x(a, b), \quad B = f_y(a, b)$$

と表す。関数 $z = f(x, y)$ が集合 D 上のすべての点で偏微分可能であるとき、 $f(x, y)$ は D 上で偏微分可能であるという。

注意. $A = f_x(a, b)$ は「 x 偏微分係数」、 $B = f_y(a, b)$ は「 y 偏微分係数」とよび区別することもある。

定義 (偏導関数) 関数 $z = f(x, y)$ が定義域上で偏微分可能であるとき、関数

$$(a, b) \mapsto f_x(a, b), \quad (a, b) \mapsto f_y(a, b),$$

とともに $f(x, y)$ の偏導関数とよび、それぞれ次のように表す：

$$\begin{aligned} z_x &= f_x(x, y) & z_y &= f_y(x, y) \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \partial_x z &= \partial_x f(x, y) & \partial_y z &= \partial_y f(x, y) \end{aligned}$$

注意. $z_x = f_x(x, y)$ は「 x 偏導関数」、 $z_y = f_y(x, y)$ は「 y 偏導関数」とよび区別することもある。また、偏微分係数 $f_x(a, b)$ も

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \partial_x f(a, b), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)=(a,b)}$$

といった多様な表現が可能である。

例 1 (偏微分の計算). 偏微分係数の求め方はいたって単純である。

たとえば $z = f(x, y) = x^2 y^3$ としよう。 z_x は「 y を定数だと思って固定し」関数 $x \mapsto z = x^2 y^3$ を x に関して微分すればよい。よって $z_x = (2x)y^3 = 2xy^3$ 。

同様に z_y は「 x は定数だと思って固定し」関数 $y \mapsto z = x^2 y^3$ を y に関して微分すればよい。よって $z_y = x^2(3y^2) = 3x^2 y^2$ 。

例題 4.1 (導関数の計算) 次の関数の偏導関数を求めよ。

$$(1) z = Ax + By + C \quad (2) z = x^2 + y^2 \quad (3) z = \sin(x^2 + y^3)$$

解答. (1) $z_x = A$, $z_y = B$. (2) $z_x = 2x$, $z_y = 2y$ (3) $z_x = 2x \cos(x^2 + y^3)$, $z_y = 3y^2 \cos(x^2 + y^3)$. ■

全微分 vs. 偏微分

全微分と偏微分の関係詳しく調べてみよう。結論からいうと、全微分可能であれば偏微分可能だが、その逆が成り立つとは限らない。しかし、偏導関数が連続関数であれば、全微分可能性が導かれるのである。

まず命題 4.1 より、全微分可能性から偏微分可能性が導かれることがわかる：

定理 4.2 (全微分可能なら偏微分可能) $z = f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であれば、偏微分可能である。とくに式 (4.1) が成り立つとき、

$$A = f_x(a, b) \text{ かつ } B = f_y(a, b).$$

残念ながら、定理 4.2 の逆は成り立たない。偏微分ができて全微分ができない例が存在するからである。

偏微分可能性 と C^1 級関数. 関数が全微分可能であることを保証するには、偏微分可能性にもっと強い条件を付け加えなくてはならない。そこで、1 変数関数のときと同様に、2 変数の「 C^1 級

関数」を定義する¹:

定義 (C^1 級関数) 関数 $z = f(x, y)$ が C^1 級であるとは、定義域内のすべての点で偏微分可能であり、偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ がともに連続関数であることをいう。

下線部に対する注意. 偏微分可能性は 1 点における性質であったが、まずそれが定義域内の「すべての点」において満たされている。さらに、得られた偏微分係数が定義域内で連続的に変化することが要請されているから、条件はかなり厳しくなっている。

しかし、多項式関数や三角関数・指数関数を合成したような関数など、私たちが「ふつうに」目にする関数はだいたい C^1 級であるから、あまり気にする必要はない。

C^1 級ならば全微分可能. 「 C^1 級関数」であれば、「全微分可能」である。

定理 4.3 (C^1 級ならば全微分可能) 関数 $z = f(x, y)$ が定義域上で C^1 級ならば、全微分可能である。とくに、 $(x, y) = (a, b)$ における勾配ベクトルは

$$\nabla f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b))$$

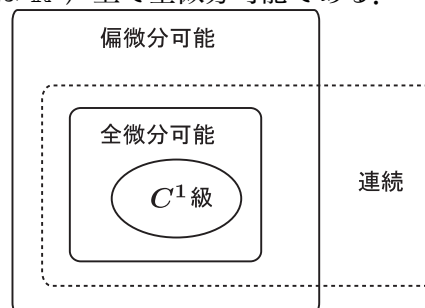
であり、接平面の方程式は $z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ となる。

標語的には「偏導関数が連続関数であれば全微分可能」ということである。偏導関数の形を見るだけで全微分可能性が確認できるので、判定法としてはとても使い勝手がよい。

例 2. すべての多項式は全微分可能である。 $\sin(1 + 3x + y^2)$ や $e^{\cos(1+x-y)}$ なども、連続な偏導関数をもつことが簡単に確認できるから、定義域（この場合は \mathbb{R}^2 ）上で全微分可能である。

注意. 関数の全微分可能性、偏微分可能性、連続性の関係は右の図のようにまとめることができる。

一般にある点で「全微分可能ならば偏微分可能」であり、「全微分可能ならば連続」であるが、これらの逆は成り立たない。さらに厄介なことに、「連続性」と「偏微分可能性」の間には包含関係がない。



証明 (定理 4.3). $\Delta x := x - a$, $\Delta y := y - b$, $A = f_x(a, b)$, $B = f_y(a, b)$ とおく。 $f(x, y)$ が C^1 級という仮定のもと、式 (4.1) を示せばよい。すなわち、 $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ のとき

$$E(x, y) := \frac{|f(x, y) - \{f(a, b) + A\Delta x + B\Delta y\}|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0$$

であることを示せばよい。 y を固定して平均値の定理を用いると、 x と a の間の実数 c_1 と、 y と b の間の実数 c_2 が存在して、

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= \{f(x, y) - f(a, y)\} + \{f(a, y) - f(a, b)\} \\ &= f_x(c_1, y)(x - a) + f_y(a, c_2)(y - b) \\ &= f_x(c_1, y)\Delta x + f_y(a, c_2)\Delta y \end{aligned}$$

が成り立つ。よって

¹ 「 C^2 級」, 「 C^3 級」などの等級もあとで必要になる。

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \frac{|(f_x(c_1, y) - A)\Delta x + (f_y(a, c_2) - B)\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \\ &\leq |f_x(c_1, y) - A| \frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + |f_y(a, c_2) - B| \frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \\ &\leq |f_x(c_1, y) - f_x(a, b)| \cdot 1 + |f_y(a, c_2) - f_y(a, b)| \cdot 1 \rightarrow 0. \quad ((x, y) \rightarrow (a, b)) \end{aligned}$$

ただし、最初の不等号では三角不等式を、次の不等号では偏導関数の連続性と $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき $(c_1, c_2) \rightarrow (a, b)$ であることを用いた。 ■

前回のクイズの答え

問題 3-1 $y = f(x) = x^4$ に対し,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \{B + A(x - 2)\}}{x - 2} = 0$$

となる定数 A と B の組み合わせとして正しいものを選び (慎重に!) :

- (1) $(A, B) = (16, 16)$ (2) $(A, B) = (16, 32)$
 (3) $(A, B) = (32, 16)$ (4) $(A, B) = (32, 32)$

解答 3-1 (3).

解説 (正答率: 88.1%) : 今回の講義で学んだように, この式は $f(x)$ の $x = 2$ における微分可能性の定義式と同じものであり, 1 次関数 $y = B + A(x - 2)$ はそこでの接線の方程式に他ならない. したがって, $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$ と一致する. よって $A = f'(2) = 4 \cdot 2^3 = 32$, $B = f(2) = 2^4 = 16$.

別解: $X = x - 2$ とおくと, 分子は $(X + 2)^4 - B + AX = X^4 + 8X^3 + 16X^2 + (32 - A)X + (16 - B)$. よって

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{X^4 + 8X^3 + 24X^2 + (32 - A)X + (16 - B)}{X} = 0$$

でなくてはならない. これより, $A = 32$, $B = 16$.

問題 3-2 関数 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ に対し,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (2, -1)} \frac{f(x, y) - \{3 + A(x - 2) + B(y + 1)\}}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}} = 0$$

となる定数 A と B の組み合わせとして正しいものを選び (慎重に!) :

- (1) $(A, B) = (2, 4)$ (2) $(A, B) = (-2, -4)$
 (3) $(A, B) = (4, -2)$ (4) $(A, B) = (4, 2)$

解答 3-2 (4).

解説 (正答率: 85.7%) : この極限は (x, y) がどのように $(2, -1)$ に近づいても, 0 にならない. そこで, $y = -1$ として $x \rightarrow 2$ としてみると,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{x^2 - (-1)^2\} - \{3 + A(x - 2)\}}{|x - 2|} = 0 &\iff \lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{x^2 - 4 - A(x - 2)}{x - 2} \right| = 0 \\ &\iff \lim_{x \rightarrow 2} |x + 2 - A| = 0 \iff A = 4. \end{aligned}$$

同様に, $x = 2$ として $y \rightarrow -1$ としてみると,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -1} \frac{\{2^2 - y^2\} - \{3 + B(y + 1)\}}{|y + 1|} = 0 &\iff \lim_{y \rightarrow -1} \left| \frac{1 - y^2 - B(y + 1)}{y + 1} \right| = 0 \\ &\iff \lim_{y \rightarrow -1} |1 - y - B| = 0 \iff B = 2. \end{aligned}$$

注意. 最初に $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{x^2 - (-1)^2\} - \{3 + A(x - 2)\}}{|x - 2|} = 0$ とわかった段階で, $F(x) = x^2 - (-1)^2$ の $x = 2$ における接線の方程式が $3 + A(x - 2)$ だとわかる. よって $A = F'(2) = 4$. ここで, $F'(2)$ は偏微分係数 $f_x(2, -1)$ に他ならない.

第5回 (10/12)：合成関数の微分

配布日：10/12/2021 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 19 章, [三宅] 4.2

合成関数の微分

「1 変数 \mapsto 1 変数 \mapsto 1 変数」の場合. x 軸 (数直線) 上を移動する動点があり, 時刻 t における位置が実数 $x(t)$ で与えられているとする.

さらに x を変数とする関数 $y = f(x)$ があるとき, $x = x(t)$ を合成した関数 $y = f(x(t))$ の微分は公式

$$\{f(x(t))\}' = \frac{df}{dx}(x(t)) \cdot x'(t) \iff \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (5.1)$$

で与えられるのであった. すなわち, 合成関数の微分は

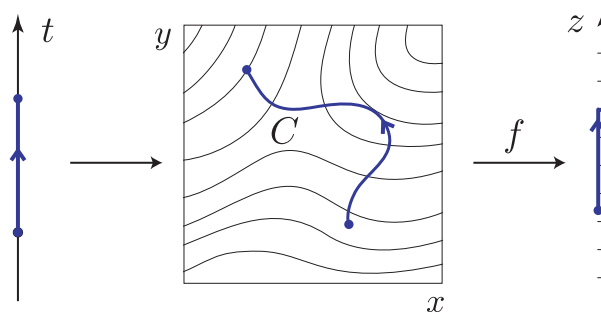
「 $f(x)$ の微分係数」と「 $x(t)$ の速度」の積

として与えられる. まずはこれを, 2 変数の場合に拡張しよう.

「1 変数 \mapsto 2 変数 \mapsto 1 変数」の場合. 時刻を表す変数 t をパラメーターとする xy 平面内の曲線

$$C: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

を考える. さらに xy 平面には関数 $z = f(x, y)$ が定義されているとしよう. たとえば, ある列車の経路が $(x, y) = (x(t), y(t))$ で, そこでの海拔高度が $z = f(x, y)$ で与えられているような場合である (下の図).



このとき, 合成関数

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(x(t), y(t)) = z \quad (5.2)$$

の, 与えられた時刻 t_0 における微分係数 $\frac{dz}{dt}(t_0)$ (これは $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=t_0}$ とも表される) を与える公式はどんなものだろうか? 結果だけを標語的に述べれば, それは

「 $f(x, y)$ の勾配ベクトル」と「 $(x(t), y(t))$ の速度ベクトル」の内積

となるのである¹.

¹全微分のところで学んだように, 「勾配ベクトル」とは 2 変数関数の「微分係数」にあたる概念であることに注意しよう.

以下, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = f(x, y)$ はすべて C^1 級だと仮定する. このとき, 定理 4.3 より, $f(x, y)$ は定義域上のすべての点で全微分可能であることに注意しよう. また, ダッシュ (') は変数 t による微分 $\frac{d}{dt}$ を表すものとする.

公式 5.1 (合成関数の微分公式 1) 関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = f(x, y)$ が C^1 級であるとき, 式 (5.2) で与えられる合成関数 $z = z(t) = f(x(t), y(t))$ の t による微分は, $f(x, y)$ の勾配ベクトル $(f_x(x, y), f_y(x, y))$ と $(x(t), y(t))$ の速度ベクトル $(x'(t), y'(t))$ の内積で与えられる. すなわち,

$$\{f(x(t), y(t))\}' = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$$= f_x(x, y) x'(t) + f_y(x, y) y'(t). \quad (5.4)$$

ただし, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ はそれぞれ $f_x(x(t), y(t))$, $f_y(x(t), y(t))$ を略記したものである. さらに, 式 (5.4) は次のように表すこともできる:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (5.5)$$

証明. まず, 時刻 $t = t_0$ における曲線 C 上の点の位置を $(a, b) := (x(t_0), y(t_0))$ としよう. この (a, b) における $f(x, y)$ の勾配ベクトルを $(A, B) := (f_x(a, b), f_y(a, b))$ とおく.

時刻が $t = t_0$ から微小量 Δt だけ変化するとき, 曲線 C 上の点 $(a, b) = (x(t_0), y(t_0))$ からの移動量 (ベクトル) を

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(t_0 + \Delta t) \\ y(t_0 + \Delta t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}$$

とおく. いま $x(t)$, $y(t)$ は微分可能なので, それぞれの時刻 t_0 における微分係数を

$$v_1 := x'(t_0), \quad v_2 := y'(t_0)$$

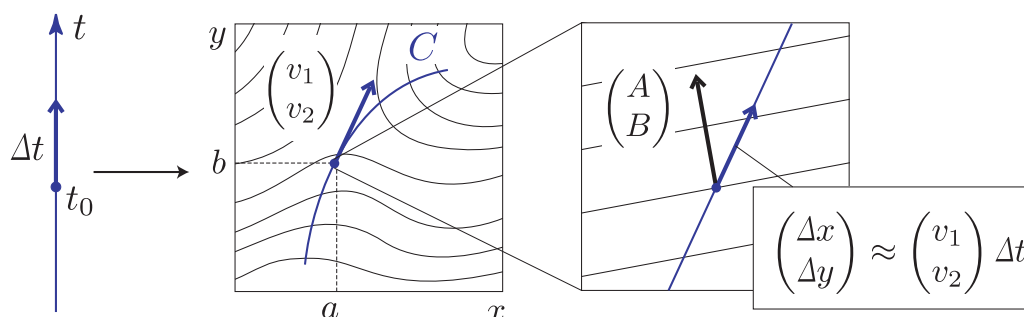
とすれば, $\Delta t \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) &= v_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ y(t_0 + \Delta t) - y(t_0) &= v_2 \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Delta t + \begin{pmatrix} o(\Delta t) \\ o(\Delta t) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

が成り立つ. ここで下線部は誤差として「無視したい」部分である (以下同様).



担当教員：川平 友規

一方, $z = f(x, y)$ は C^1 級であるから, (a, b) において全微分可能である (定理 4.3). よって $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + o(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}).$$

すなわち, $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ であれば

$$\begin{aligned} \Delta z &:= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \\ &= A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \end{aligned}$$

が成り立つ. 下線部はやはり「無視したい」誤差部分である. 式 (5.6) を代入して,

$$\begin{aligned} \Delta z &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Delta t + \begin{pmatrix} o(\Delta t) \\ o(\Delta t) \end{pmatrix} \right\} + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Delta t + \underline{A o(\Delta t) + B o(\Delta t)} + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \end{aligned}$$

ここで $\Delta t \rightarrow 0$ (よって $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$) とするとき, $\Delta x^2 + \Delta y^2 = 0$ ならば最後の $o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ の部分は 0 である. $\Delta x^2 + \Delta y^2 \neq 0$ ならば, 式 (19.6) より

$$\begin{aligned} \frac{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})}{|\Delta t|} &= \frac{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta t|} \\ &= \frac{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \frac{|\Delta t| \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)} + o(1)}{|\Delta t|} \\ &\rightarrow 0 \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0). \end{aligned}$$

よって最後の $o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ の部分は $o(\Delta t)$ で置き換えられて,

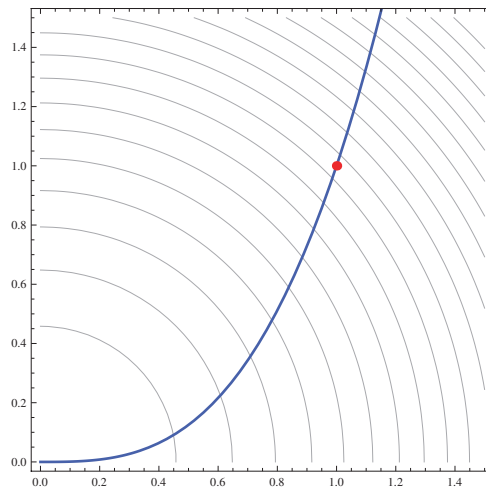
$$\Delta z = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Delta t + \underline{o(\Delta t)}.$$

いま $\Delta z = f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0))$ であるから, 次の式を得る:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : \text{勾配ベクトルと速度ベクトルの内積} \\ &= \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \\ &= f_x(a, b)x'(t_0) + f_y(a, b)y'(t_0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

具体例をみていこう.

例題 5.1 (合成関数の微分) $(x, y) = (t, t^3)$, $z = x^2 + y^2$ のとき, $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=1}$ の値をもとめよ.



解答. 一般に (x, y) における z の勾配ベクトルは $(z_x, z_y) = (2x, 2y)$ であり, (x, y) の t に関する速度ベクトルは $(1, 3t^2)$ である.

$t = 1$ のとき, $(x, y) = (1, 1)$ であるから, 公式 5.1 より, 求める微分係数は

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=1} = \left. \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \right|_{(x,y)=(1,1)} \cdot \left. \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \right|_{t=1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 8.$$

検算してみよう. $z = x^2 + y^2 = t^2 + t^6$ より, $\frac{dz}{dt} = 2t + 6t^5$. よって $t = 1$ のとき $\frac{dz}{dt} = 8$. ■

上の例題は z が t だけの式で具体的に書けてしまうので公式 5.1 のありがたみがみえてこないだろう. 本当に威力を発揮するのは次の例題のような場面である:

例題 5.2 (合成関数の微分) $z = f(x, y)$ を C^1 級関数とすると, 次の関数の変数 t に関する導関数を求めよ.

- (1) $f(\cos t, \sin t)$ (2) $\exp f(t, 1 - t)$ (3) $f(t^2, f(t, t))$

解答. (1) $F(t) := f(\cos t, \sin t)$ とおくと, これは $t \mapsto (\cos t, \sin t) \mapsto f(\cos t, \sin t)$ と合成したものと考えられる. 公式 5.1 より求める導関数は

$$F'(t) = \begin{pmatrix} f_x(\cos t, \sin t) \\ f_y(\cos t, \sin t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = -f_x(\cos t, \sin t) \sin t + f_y(\cos t, \sin t) \cos t.$$

(2) $G(t) := f(t, 1 - t)$ とおくと, 求める導関数は $\{e^{G(t)}\}' = G'(t)e^{G(t)}$ によって計算できる. $G(t)$ は $t \mapsto (t, 1 - t) \mapsto f(t, 1 - t)$ と合成したものと考えられるから, 公式 5.1 より

$$G'(t) = \begin{pmatrix} f_x(t, 1 - t) \\ f_y(t, 1 - t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f_x(t, 1 - t) - f_y(t, 1 - t).$$

ゆえに求める導関数は

$$\{\exp f(t, 1 - t)\}' = G'(t)e^{G(t)} = \{f_x(t, 1 - t) - f_y(t, 1 - t)\} \exp f(t, 1 - t).$$

(3) 関数 $H(t) := f(t, t)$ は $t \mapsto (t, t) \mapsto f(t, t)$ と合成したものと考えられるから, 公式 5.1 より

$$H'(t) = \begin{pmatrix} f_x(t, t) \\ f_y(t, t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_x(t, t) + f_y(t, t).$$

一方、与えられた関数は $t \mapsto (t^2, H(t)) \mapsto f(t^2, H(t))$ と合成したものであるから、求める導関数は

$$\begin{aligned}\{f(t^2, f(t, t))\}' &= \begin{pmatrix} f_x(t^2, H(t)) \\ f_y(t^2, H(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ H'(t) \end{pmatrix} \\ &= 2t f_x(t^2, f(t, t)) + (f_x(t, t) + f_y(t, t)) f_y(t^2, f(t, t)). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

第 6 回 (10/19) : 合成関数の微分 2 (変数変換)

配布日：10/19/2021 Version：1.0

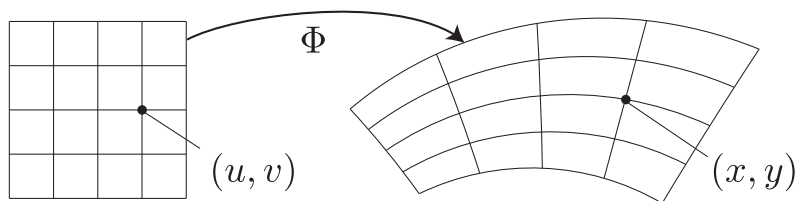
参考書の該当箇所：[川平] 20-21 章, [三宅] 4.2

2 変数関数の変数変換

まずは「変数変換」とは何か定義しておこう。

定義 (変数変換) uv 平面上の集合を定義域とする C^1 級関数 $x(u, v), y(u, v)$ があるとき, xy 平面上のベクトル変数 (x, y) にベクトル $\Phi(u, v) := (x(u, v), y(u, v))$ 割り当てる. これを (C^1 級) **変数変換** とよび, $(x, y) = \Phi(u, v)$ もしくは縦ベクトルを用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ と表す. ほかに,

$$\Phi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{もしくは} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

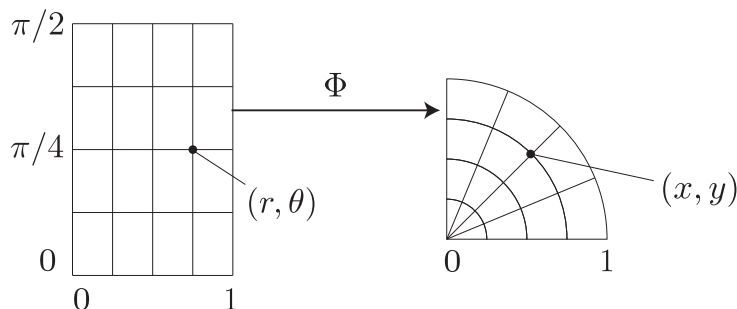
と表し, 「変数変換 Φ は (u, v) を (x, y) に写す」ともいう。

典型的かつ重要な変数変換として, 「極座標変換」と「1次変換」がある。

例 1 (極座標変換). ベクトル変数 (r, θ) に対し, ベクトル変数 (x, y) を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

として対応させる変数変換 $(x, y) = \Phi(u, v)$ をベクトル変数 (x, y) の**極座標変換**とよぶ. 極座標変換は $r\theta$ 平面上の区画を xy 平面上の円板 (もしくは扇形) に対応付ける座標変換である. たとえば区画 $E := \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ は扇形 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ に対応する. (これを $D = \Phi(E)$ と表す.)

**例 2 (1次変換)**. 定数 a, b, c, d が与えられているとき, ベクトル変数 (u, v) に対し, ベクトル変数 (x, y) を

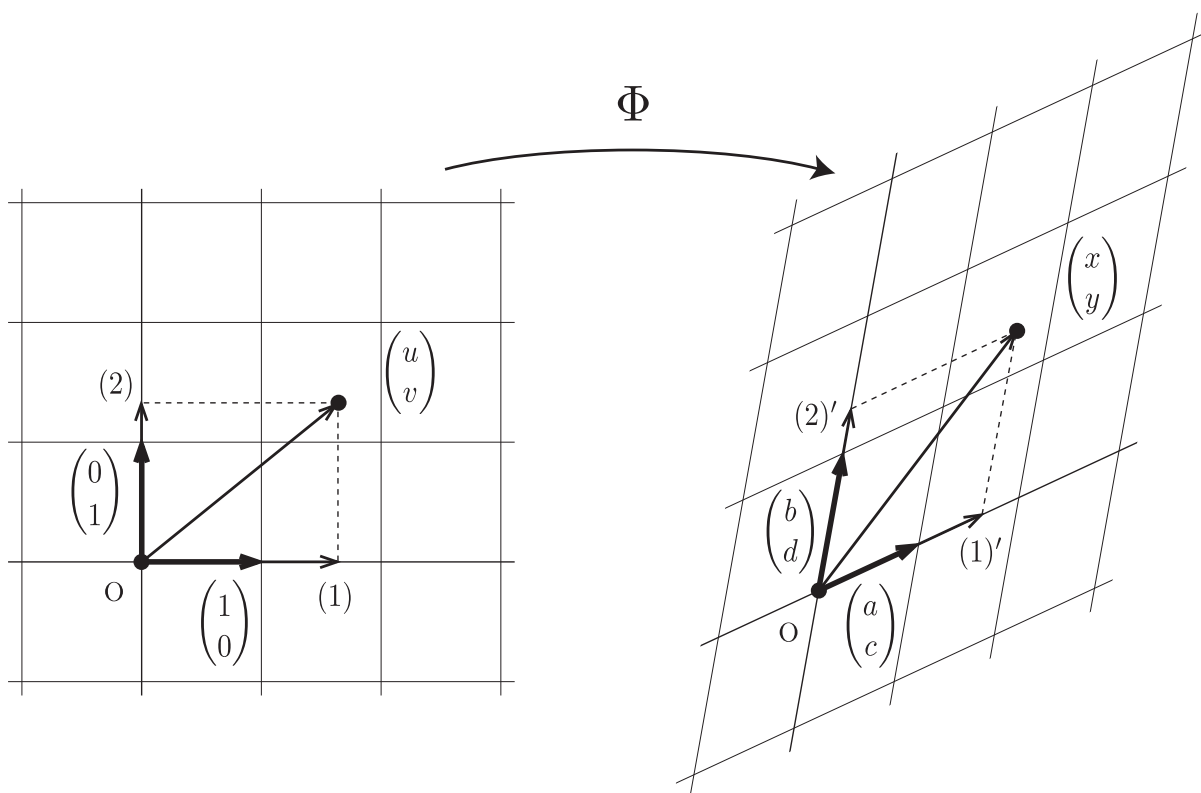
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

として対応させる変数変換 $(x, y) = \Phi(u, v)$ を **1 次変換** もしくは **線形変換** とよぶ¹. 1 次変換はあらゆる変数変換の中でも基本といえるものなので, その作用はある程度理解しておく必要がある.

いま, ベクトル (a, c) と (b, d) はともにゼロベクトルではなく, 平行でもないとする (この条件は $ad - bc \neq 0$ と言い換えることができる.). このとき,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(1)} + v \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{(2)}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}}_{(1)'} + v \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}_{(2)'}$$

が成り立つ. よって uv 平面と xy 平面は変数 u と v を介して次の図のように対応する. たとえば u, v いずれかが整数となるような点の集合は図の左のような格子 (網目) をなす. その像は右のような歪んだ格子 (網目) となる.



変数変換と偏微分

「2 変数 \mapsto 2 変数 \mapsto 1 変数」の場合. C^1 級関数 $x = x(u, v)$ と $y = y(u, v)$ が定める変数変換 $(x, y) = \Phi(u, v)$ と, C^1 級関数 $z = f(x, y)$ が与えられているとき, 合成関数

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(x(u, v), y(u, v)) = z$$

¹線形代数で学ぶ行列の記号を用いると, 1 次変換は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ と表現される

が考えられる。式が複雑なので、この合成関数を $z = F(u, v)$ で表そう。すなわち、

$$F(u, v) := f(\Phi(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v)).$$

この関数 $z = F(u, v)$ の、変数 u もしくは v による偏微分係数・偏導関数は、どのように計算できるだろうか？

合成関数の偏微分の公式

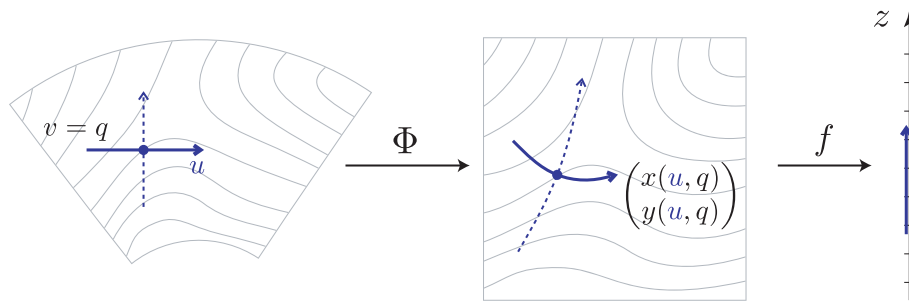
関数 $z = F(u, v)$ の u 偏導関数とは、たとえば「 v を定数 q として固定し」関数 $u \mapsto F(u, q)$ を変数 u について微分して得られるものであった。この関数は

$$u \mapsto \begin{pmatrix} x(u, q) \\ y(u, q) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(x(u, q), y(u, q))$$

と表現できるから、前回の式 (5.2) と同じ形になっている。すなわち、変数 u を時間パラメーターとする xy 平面上の曲線

$$u \mapsto \begin{pmatrix} x(u, q) \\ y(u, q) \end{pmatrix}$$

があり、その曲線上で関数 $z = f(x, y)$ を考えているのである (図)。



したがって公式??と同じ原理により、関数 $z = F(u, v)$ の u 偏導関数とは

「 $f(x, y)$ の勾配ベクトル」と「 $(x(u, v), y(u, v))$ の速度ベクトル」の内積

として与えられる。すなわち、

公式 6.1 (合成関数の微分公式 2：変数変換と偏微分) C^1 級関数 $x = x(u, v)$ と $y = y(u, v)$ が定める変数変換 $(x, y) = \Phi(u, v)$ と、 C^1 級関数 $z = f(x, y)$ が与えられているとき、合成関数 $F(u, v) := f(x(u, v), y(u, v))$ の偏導関数 $F_u = F_u(u, v)$ および $F_v = F_v(u, v)$ は次で与えられる：

$$F_u = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = f_x x_u + f_y y_u \tag{6.3}$$

$$F_v = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = f_x x_v + f_y y_v \tag{6.4}$$

ただし、 $f_x(x(u, v), y(u, v))$ を f_x 、 $x_u(u, v)$ を x_u などと略記した。変数 $z = f(x, y) = F(u, v)$ を用いると、次のようにも表すこともできる：

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

証明. 変数 v の値は固定し定数だとみなすとき, 変数 u を時間パラメーターとする曲線

$$u \mapsto \begin{pmatrix} X(u) \\ Y(u) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

が定まる. ダッシュ (') は偏微分 $\frac{\partial}{\partial u}$ を表すものとすれば, この曲線の速度ベクトルは $(X'(u), Y'(u))$ である. また, 合成関数

$$u \mapsto \begin{pmatrix} X(u) \\ Y(u) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(X(u), Y(u))$$

の u に関する微分は, 公式 5.1 より勾配ベクトルと速度ベクトルの内積

$$\{f(X(u), Y(u))\}' = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X'(u) \\ Y'(u) \end{pmatrix}$$

となる. これをもとの式に直すと,

$$F_u(u, v) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u(u, v) \\ y_u(u, v) \end{pmatrix}$$

となり式 (6.3) を得る. F_v についても同様である. ■

例 3. では公式 6.1 を応用してみよう.

例題 6.1 (合成関数の偏微分) $z = f(x, y)$ を C^1 級関数とすると, 次の関数の変数 u および v に関する偏導関数を f_x, f_y を用いて表せ.

$$(1) F(u, v) = f(u \cos v, u \sin v) \qquad (2) G(u, v) = \exp f(u + v, u - v)$$

解答. (1) $F(u, v)$ は $(u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v) \mapsto f(u \cos v, u \sin v)$ と合成したものと考えられるから, 公式 6.1 より求める偏導関数は

$$\begin{aligned} F_u &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (u \cos v)_u \\ (u \sin v)_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} = f_x \cos v + f_y \sin v, \\ F_v &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (u \cos v)_v \\ (u \sin v)_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \end{pmatrix} = -f_x u \sin v + f_y u \cos v. \end{aligned}$$

ただし $f_x = f_x(u \cos v, u \sin v)$, $f_y = f_y(u \cos v, u \sin v)$ とする.

(2) $g(x, y) := \exp f(x, y)$ とおくと, $g_x = f_x(x, y) \exp f(x, y)$, $g_y = f_y(x, y) \exp f(x, y)$ を満たす. $G(u, v)$ は $(u, v) \mapsto (u + v, u - v) \mapsto g(u + v, u - v)$ と合成したものと考えられるから, 公式 6.1 より

$$\begin{aligned} G_u &= \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (u + v)_u \\ (u - v)_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = g_x(x, y) + g_y(x, y) \\ &= f_x(x, y) \exp f(x, y) + f_y(x, y) \exp f(x, y) \\ &= \{f_x(u + v, u - v) + f_y(u + v, u - v)\} \exp f(u + v, u - v). \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} G_v &= \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (u + v)_v \\ (u - v)_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = g_x(x, y) - g_y(x, y) \\ &= \{f_x(u + v, u - v) - f_y(u + v, u - v)\} \exp f(u + v, u - v). \end{aligned}$$

■

前回のクイズの解答

問題 5-1 2変数関数 $f(x, y)$ に対し、正しくないものを1つ答えよ.

- (1) 全微分可能ならば、偏微分可能である.
- (2) C^1 級ならば全微分可能である.
- (3) 全微分可能ならば連続である.
- (4) 偏微分可能ならば連続である.

解答 5-1 答えは (4).

解説 (正答率 100%) : (1) から (3) はこれまでのプリントに証明が書いてあるので参照されたい. (4) が成り立たない具体例が存在する. やや人工的だが, 関数 $z = f(x, y)$ を原点以外で $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, 原点で $f(0, 0) = 0$ と定義すると, 原点において偏微分可能であるが連続ではない. たとえば $x = y$ を満たしながら $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とした場合, $f(x, y) = 1/2 \neq 0 = f(0, 0)$.

問題 5-2 $f(x, y) = x^2 + y^2$, $z = z(t) = f(t, t^2)$ とおく. このとき, $\frac{dz}{dt}(-1)$ の値を求めよ.

解答 5-2 -6.

解説解説 (正答率 80%) : 講義で紹介した方法で計算してみよう. $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, $(x, y) = (t, t^2)$ の速度ベクトルは $(1, 2t)$ なので, $\frac{dz}{dt} = (2x, 2y) \cdot (1, 2t) = 2x + 4yt = 2t + 4t^3$. よって $t = -1$ のとき $\frac{dz}{dt}(-1) = -2 - 4 = -6$.

検算 : $z = f(t, t^2) = t^2 + t^4$ より $\frac{dz}{dt} = 2t + 4t^3$. よって $t = -1$ のとき $\frac{dz}{dt}(-1) = -2 - 4 = -6$.

第7回 (10/26)：高階導関数とテイラー展開

配布日：10/26/2021 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 22 章, [三宅] 4.3

高階の偏導関数

1 変数関数のときと同様に、2 変数関数にも「滑らかさ」に応じた等級をつけるのがならわしである。ただの連続関数（そのグラフはガタガタしているかもしれない）を最低レベルの「滑らかさ」として、

$$\text{連続} = C^0 \text{級} < C^1 \text{級} < C^2 \text{級} < \dots < C^\infty \text{級}$$

といった等級を定義しよう。

まず関数 $z = f(x, y)$ が「 C^1 級」とは、「偏導関数 f_x, f_y が存在し、それぞれ連続」であることをいうのであった（第 18 章）。 f_x, f_y はとくに **1 階偏導関数**ともよばれる。

さらに f_x, f_y の偏導関数

$$(f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \dots$$

が存在するとき、これらは

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \dots$$

のように表され、 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を $f(x, y)$ の **2 階偏導関数**とよぶ。

2 階偏導関数もそれぞれ偏微分可能であれば、

$$f_{xxx} = ((f_x)_x)_x = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad f_{xyy} = ((f_x)_y)_y = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x},$$

$$f_{xyx} = ((f_x)_y)_x = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \dots$$

など、 $2^3 (= 8)$ 通りの **3 階偏導関数**が定まる。一般の n 階偏導関数も同様である。

定義 (C^n 級と C^∞ 級) 整数 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対し、

- $f(x, y)$ が n 回微分可能であるとは、 n 階偏導関数がすべて存在することをいう。
- $f(x, y)$ が C^n 級であるとは、 n 階以下の偏導関数がすべて存在し、それらがすべて連続であることをいう。
- $f(x, y)$ が C^∞ 級であるとは、任意の n について C^n 級であることをいう。

具体例をみてみよう。以下の例はすべて C^∞ 級の関数である。

例 1. $z = x^3 + y^3$ のとき、 $z_x = 3x^2, z_y = 3y^2$ 。よって 2 階偏導関数は

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yx} = 0, \quad z_{yy} = 6y.$$

また、 $z_{xxx} = z_{yyy} = 6$ であり、それ以外の 3 階偏導関数はすべて 0 である。

例 2. $z = x^3y^5$ のとき, $z_x = 3x^2y^5$, $z_y = 5x^3y^4$. よって 2 階偏導関数は

$$z_{xx} = 6xy^5, \quad z_{xy} = 15x^2y^4, \quad z_{yx} = 15x^2y^4, \quad z_{yy} = 20x^3y^3.$$

例 3. $z = \sin xy^2$ のとき, $z_x = y^2 \cos xy^2$, $z_y = 2xy \cos xy^2$. よって 2 階偏導関数は

$$\begin{aligned} z_{xx} &= -y^4 \sin xy^2, & z_{xy} &= 2y \cos xy^2 - 2xy^3 \sin xy^2, \\ z_{yx} &= -2xy^3 \sin xy^2 + 2y \cos xy^2, & z_{yy} &= 2x \cos xy^2 - 4x^2y^2 \sin xy^2. \end{aligned}$$

以上の例ではすべて $z_{xy} = z_{yx}$ が成り立っているが, これは定理であり, 偶然ではない:

定理 7.1 (偏微分の順序交換) 関数 $z = f(x, y)$ が C^2 級であれば,

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

とくに, C^∞ 級関数であれば偏微分の順序は自由に交換できる.

例 4. たとえば C^∞ 級関数では

$$f_{xxyy} = f_{xyxy} = f_{yxyx} = \dots$$

などが成り立つ. n 階偏導関数は 2^n 個存在するが, 実際には (x についての偏微分が n 回のうち何回かに応じて) $n+1$ 通りの関数しか現れないのである.

定理 7.1 の証明. (a, b) を $f(x, y)$ の定義域から任意に選んで固定する. また, (a, b) に十分近い (x, y) に対し, $\Delta x := x - a$, $\Delta y := y - b$ とおく.

さて唐突だが,

$$Q = \{f(x, y) - f(x, b)\} - \{f(a, y) - f(a, b)\} \quad (7.1)$$

という量を考えてみよう. これは

$$Q = \{f(x, y) - f(a, y)\} - \{f(x, b) - f(a, b)\} \quad (7.2)$$

と書いても同じことである. いま $K(x, y) := f(x, y) - f(x, b)$ とおくと式 (7.1) の左辺は $K(x, y) - K(a, y)$ であり, 平均値の定理より適当な a' が x と a の間に存在して

$$K(x, y) - K(a, y) = K_x(a', y)\Delta x = \{f_x(a', y) - f_x(a', b)\}\Delta x$$

と書ける. さらに $y \mapsto f_x(a', y)$ に平均値の定理を適用すると,

$$f_x(a', y) - f_x(a', b) = f_{xy}(a', b')\Delta y$$

となる b' が y と b の間に存在するから, 結果として式 (7.1) の Q は $f_{xy}(a', b')\Delta y\Delta x$ と表される.

次に $L(x, y) := f(x, y) - f(a, y)$ とおいて式 (7.2) に関して同様の議論を行えば, 適当な a'' と b'' がそれぞれ x と a の間と y と b の間に存在して, 式 (7.2) の右辺は $f_{yx}(a'', b'')\Delta x\Delta y$ と書けることがわかる. すなわち $Q = f_{xy}(a', b')\Delta x\Delta y = f_{yx}(a'', b'')\Delta x\Delta y$ である. いま, $f(x, y)$ が C^2 級であることから f_{xy} および f_{yx} は連続関数である. $\Delta x, \Delta y \neq 0$ を満たしつつ $(x, y) \rightarrow (a, b)$ とすれば, $(a', b'), (a'', b'') \rightarrow (a, b)$ であるから, 求める関係式 $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ を得る. ■

2 次のテイラー展開

1 変数関数のテイラー展開を思い出そう。たとえば $y = f(x)$ が C^2 級であれば、2 次の「テイラー展開」

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c)}{2!}(x - a)^2$$

(ただし c は x と a の間にある正体不明の数) が成り立つのであった。これは $\Delta x := x - a$ とおくと、

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(c)}{2!}\Delta x^2$$

と書いても同じことである。 a から $+\Delta x$ 変化したとき、関数の値が $f(a)$ から Δx に依存してどのくらい変化するかがわかる書き方である。

2 変数関数の場合でも、同様の「テイラー展開」を考えよう。ここでは応用上重要な 2 次の展開を主に扱うことにする。

定理 7.2 (2 変数 2 次のテイラー展開) $z = f(x, y)$ は点 (a, b) を含む円板上の C^2 級関数とする。 $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ がその円板内にあるとき、 (a, b) と $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ を結ぶ線分上の点 (a', b') が存在して、次の等式が成り立つ：

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + P\Delta x + Q\Delta y \quad : 1 \text{ 次近似}$$

$$+ \frac{1}{2}(A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2). \quad : \text{剰余項}$$

ただし、 $P := f_x(a, b)$, $Q := f_y(a, b)$, $A' := f_{xx}(a', b')$, $B' := f_{xy}(a', b')$, $C' := f_{yy}(a', b')$.

下線部に関する注意. 「円板」であることは本質的ではなく、たとえば楕円や長方形でもよい。証明を見ればわかるが、点 (a, b) と $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ を結ぶ線分上で関数が定義されていることが本質的な条件である。

また、 (a', b') は存在だけが保証された「正体不明の点」である。これは (a, b) と $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ を内分する点であるから、 $0 < c < 1$ を満たす (正体不明の) 定数 c が存在して $(a', b') = (a + c\Delta x, b + c\Delta y)$ と表される。

例 5. $z = x^3 + y^3$, $(a, b) = (1, 2)$ とする。例 1 で求めた 2 階までの偏導関数を用いると、定理 7.2 より、2 次のテイラー展開は次のようになる：

$$(1 + \Delta x)^3 + (2 + \Delta y)^3$$

$$= 9 + 3\Delta x + 12\Delta y + \frac{1}{2}(6a'\Delta x^2 + 2 \cdot 0 \cdot \Delta x\Delta y + 6b'\Delta y^2)$$

$$= 9 + 3\Delta x + 12\Delta y + 3a'\Delta x^2 + 3b'\Delta y^2.$$

ただし (a', b') は $(1, 2)$ と $(1 + \Delta x, 2 + \Delta y)$ を結ぶ線分上にある「正体不明の点」である。(素直に展開すれば $(1 + \Delta x)^3 + (2 + \Delta y)^3 = 9 + 3\Delta x + 12\Delta y + 3\Delta x^2 + 6\Delta y^2 + \Delta x^3 + \Delta y^3$ であるから、剰余項の実体は $3\Delta x^2 + 6\Delta y^2 + \Delta x^3 + \Delta y^3$ 。これより $(a', b') = (1 + \Delta x/3, 2 + \Delta y/3)$ だとわかる。)

例 6. $z = e^{x+y}$ に対し、原点 $(0, 0)$ を中心とする 2 次のテイラー展開を計算してみよう。 $z_x = z_y = e^{x+y}$ より、 $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = e^{x+y}$ 。とくに、 $(0, 0)$ における 2 階までの導関数の値はすべて 1 である。

$(\Delta x, \Delta y)$ にあたるものとして任意に (x, y) を選ぶと, 定理 7.2 より, ある (a', b') が (x, y) と原点を結ぶ線分上に存在し,

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= 1 + x + y + \frac{1}{2}(e^{a'+b'}x^2 + 2e^{a'+b'}xy + e^{a'+b'}y^2) \\ &= 1 + (x + y) + e^{a'+b'}\frac{(x + y)^2}{2!} \end{aligned}$$

となる.

定理 7.2 (2 次のテイラー展開) の証明. 十分に小さい Δx と Δy を固定する. このとき点 (a, b) と点 $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ を結ぶ線分は関数 $f(x, y)$ の定義域に入っている. その線分を時間パラメーター t を用いて

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}}_{\text{速度ベクトル}} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

と表現しておく.

さて $F(t) := f(x(t), y(t))$ ($0 \leq t \leq 1$) とする. このとき, 合成関数の微分公式 (公式 5.1) より

$$F'(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \begin{pmatrix} f_x(x(t), y(t)) \\ f_y(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

であるから,

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y. \quad (7.3)$$

同様に 2 階導関数について

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt}\{F'(t)\} \\ &= \frac{d}{dt}\{f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y\} \\ &= \frac{d}{dt}\{f_x(x(t), y(t))\}\Delta x + \frac{d}{dt}\{f_y(x(t), y(t))\}\Delta y \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} f_{xx}(x(t), y(t)) \\ f_{xy}(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right\} \Delta x + \left\{ \begin{pmatrix} f_{yx}(x(t), y(t)) \\ f_{yy}(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right\} \Delta y \end{aligned}$$

であるから,

$$F''(t) = f_{xx}(x(t), y(t))\Delta x^2 + 2f_{xy}(x(t), y(t))\Delta x\Delta y + f_{yy}(x(t), y(t))\Delta y^2 \quad (7.4)$$

が成り立つ. $f(x, y)$ は C^2 級なので, 式 (7.4) より $F''(t)$ は連続である. すなわち関数 $t \mapsto F(t)$ は C^2 級であるから, 1 変数のテイラー展開より, ある 0 と t の間の数 c が存在して

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(c)}{2!}t^2$$

が成り立つ. とくに $t = 1$ とすれば, ある $c \in (0, 1)$ が存在して $F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(c)}{2!}$ となる. $(x(0), y(0)) = (a, b)$, $(x(1), y(1)) = (a + \Delta x, b + \Delta y)$, および式 (7.3) より,

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \frac{F''(c)}{2!}. \quad (7.5)$$

右辺の $F''(c)$ の部分は, 式 (7.4) に $t = c$ を代入することで詳しく書き下すことができる. とくに, $(x(c), y(c)) = (a + c\Delta x, b + c\Delta y)$ を (a', b') とおけば, 式 (7.5) は求めるテイラー展開の式となる. ■

一般次数のテイラー展開

かなり複雑になるが、3 次以上のテイラー展開・漸近展開も 2 次の場合と同様に求めることができる。結果だけ紹介しておこう。

定理 7.3 (2 変数 n 次のテイラー展開) 関数 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) を含む円板上で C^n 級とする。 $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ がその円板内にあるとき、その点と (a, b) を結ぶ線分上にある (a', b') が存在して、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = & f(a, b) + \frac{1}{1!} (\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y) f(a, b) \\ & + \frac{1}{2!} (\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^2 f(a, b) \\ & + \cdots \\ & + \frac{1}{(n-1)!} (\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^{n-1} f(a, b) \\ & + \frac{1}{n!} (\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^n f(a', b'). \end{aligned}$$

ただし $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$ であり、 $(\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^j$ の部分は

$$\begin{aligned} (\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)^2 f(a, b) &= (\Delta x^2 \partial_x^2 + 2\Delta x \Delta y \partial_x \partial_y + \Delta y^2 \partial_y^2) f(a, b) \\ &= \Delta x^2 f_{xx}(a, b) + 2\Delta x \Delta y f_{xy}(a, b) + \Delta y^2 f_{yy}(a, b) \end{aligned}$$

のように計算する。

前回のクイズの解答

問題 6-1 $f(x, y)$ を C^1 級とし, $z = z(t) = f(t, t^2)$ とおく. このとき, $\frac{dz}{dt}(t)$ と等しいものはどれか?

- (1) $f_x(t, t^2) + f_y(t, t^2)^2$
- (2) $f_x(t, t^2) + 2t f_y(t, t^2)$
- (3) $t f_x(t, t^2) + t^2 f_y(t, t^2)$

解答 6-1 答えは (2).

解説 (正答率 94.7%) : $(x, y) = (t, t^2)$ において, 合成関数の微分公式を適用すれば良い. 勾配ベクトルは $(f_x(t, t^2), f_y(t, t^2))$, 速度ベクトルは $(1, 2t)$ なので, その内積が答え.

問題 6-2 $f(x, y)$ を C^1 級とし, $f(1, 0) = 7$ かつ $\nabla f(1, 0) = (2021, 1012)$ とする. $z = z(t) = t f(\cos t, \sin t)$ とおくと, $\frac{dz}{dt}(0)$ の値を求めよ.

解答 6-2 7.

[解説 (正答率 84.6%)]. 講義でやったように $g(t) := f(\cos t, \sin t)$ とおくと, $z'(t) = (tg(t))' = g(t) + tg'(t)$. この段階で, $z'(0) = g(0) + 0 = f(1, 0) = 7$ とわかるが, 練習だと思って, 一応最後まで微分を計算してみよう. $g'(t)$ は勾配ベクトル $\nabla f(\cos t, \sin t) = (f_x(\cos t, \sin t), f_y(\cos t, \sin t))$ と速度ベクトル $(-\sin t, \cos t)$ の内積であるから,

$$g'(t) = -f_x(\cos t, \sin t) \sin t + f_y(\cos t, \sin t) \cos t.$$

よって

$$z'(t) = f(\cos t, \sin t) + t\{-f_x(\cos t, \sin t) \sin t + f_y(\cos t, \sin t) \cos t\}.$$

あとは $t = 0$ を代入すると, $z'(0) = f(1, 0) + 0 = 7$.

第8回 (11/2)：極大と極小

配布日：11/2/2021 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 9.4 節, 23 章 [三宅] 4.3.

グラフの凹凸と極大・極小の判定

関数のグラフがある点で極大か極小か判定する方法を考えよう. 普通は増減表を用いるが, 極値をとる点でのグラフの凹凸がわかれば, 極大か極小かの判定はある程度可能なのである (その証明にテイラー展開を用いる.).

まず関数の凹凸を定義しよう:

定義 (グラフの凹凸) C^2 級の関数 $y = f(x)$ が区間 I で上に凸 [下に凸] であるとは, I 上で $f''(x) < 0$ [$f''(x) > 0$] であることをいう. また, $x = a$ を境にして $f''(x)$ の符号が変化するとき, 点 $(a, f(a))$ をグラフ上の**変曲点**という.

このとき, 次が成り立つ:


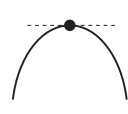
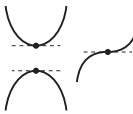
定理 8.1 (極大・極小の判定) C^2 級の関数 $y = f(x)$ は $x = a$ において $f'(a) = 0$ を満たすとする. このとき,

- (1) $f''(a) > 0$ (すなわち下に凸) であれば, $x = a$ で極小値.
- (2) $f''(a) < 0$ (すなわち上に凸) であれば, $x = a$ で極大値.
- (3) $f''(a) = 0$ のときは, さらに調べないとわからない.

例 1. $y = f(x) = x^3 - 3x$ のとき, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. $f'(x) = 0$ となるのは $x = \pm 1$ であるから, これが極値を与える x の候補である ([川平] 命題 7.3 参照). $f''(-1) = -6 < 0$, $f''(1) = 6 > 0$ であるから, 定理 8.1 より, $x = -1$ で極大値 2, $x = 1$ で極小値 -2 となる.

例 2. $y = f(x) = x^4$ のとき, $x = 0$ で明らかに極小だが $f'(0) = f''(0) = 0$. これは定理 8.1 の (3) にあたる.

例 3. $y = f(x) = x^3$ のときも同様に, $f'(0) = f''(0) = 0$ だが $x = 0$ では極値をとらない. このとき $(0, 0)$ は $y = f(x)$ のグラフの変曲点である.

$f'(a) = 0$		
$f''(a) > 0$	$f''(a) < 0$	$f''(a) = 0$
		
極小	極大	?

定理 8.1 の証明. $f'(a) = 0$ と仮定する. このとき, $f(x)$ の $x = a$ における 2 次のテイラー展開は

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(c)}{2!}(x - a)^2$$

と表される. ただし c は x と a の間の実数である. いま $f(x)$ は C^2 級なので, $f''(x)$ は連続である. よって $x \rightarrow a$ のとき $c \rightarrow a$ かつ $f''(c) \rightarrow f''(a)$ となる. とくに $f''(a) > 0$ のとき, x が a に十分近ければ $f''(c) > 0$ であり, $x \neq a$ のとき

$$f(x) - f(a) = \frac{f''(c)}{2!}(x - a)^2 > 0.$$

よって $x = a$ で $f(x)$ は極小となる. $f''(a) < 0$ のときも同様である. ■

2 変数関数の極大と極小

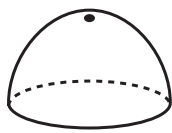
2 変数関数についても、1 変数と同様の判定基準をテイラー展開から導くことができるのである。

2 変数関数の極大・極小. まずは極値とは何かを定義しておこう。

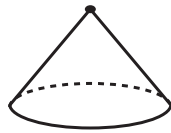
定義 (極大値と極小値) 連続な関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) で**極大 [極小]** であるとは、 (a, b) を含む十分小さな円板の上で、 $(x, y) \neq (a, b)$ のとき $f(x, y) < f(a, b)$ [$f(x, y) > f(a, b)$] が成り立つことをいう。

このとき $f(a, b)$ の値を**極大値 [極小値]** とよぶ。極大値と極小値はあわせて**極値**ともよばれる。

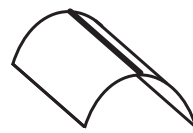
たとえば次の図の場合、左のふたつは極大値を与えているが右のふたつは極大値ではない。極大値を与える点は、局所的に最大値をとる「唯一の」点でなくてはならないからである。



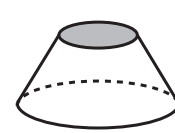
極大



極大

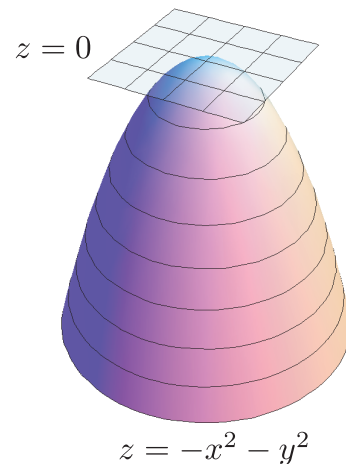
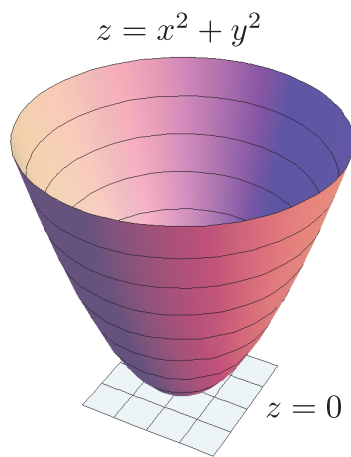


極大でない



極大でない

例 1 (極大と極小). 2 次関数 $z = x^2 + y^2$ は原点 $(0, 0)$ において極小値をとる。(原点では $z = 0$ だが、それ以外では $z > 0$ なので。) 同様に、 $z = -x^2 - y^2$ は原点において極大である。



例 2 (全微分できないが極大). 上の図の左から 2 番目のような円錐状のグラフを実現する関数として、 $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ (の原点近く) が考えられる。簡単な関数に見えるが、原点のまわりで C^1 級でない (接平面をもたない、すなわち原点で全微分可能ではない) ため、このあと紹介する極値の判定法 (定理 8.4) の適用範囲外である。

極値なら偏微分が 0. 次の命題は 1 変数のときの「 $x = a$ で極値なら $f'(a) = 0$ 」にあたる条件である。

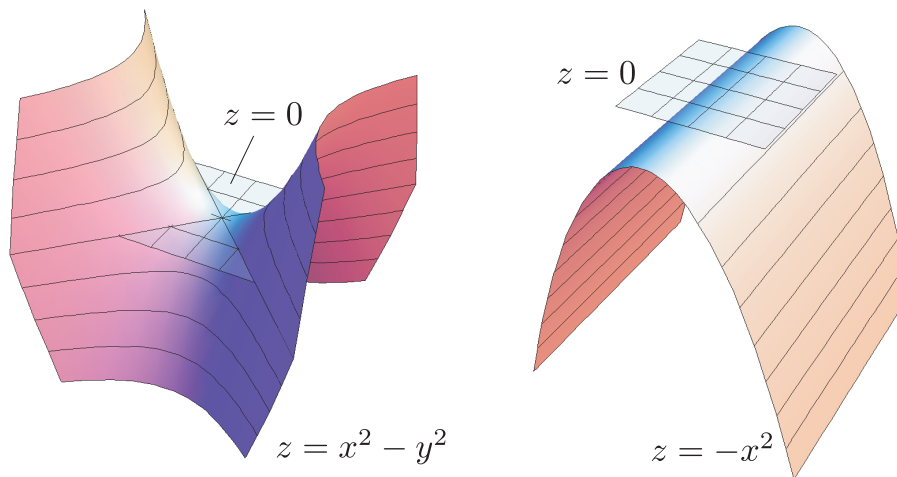
命題 8.2 (極値の必要条件) C^1 級関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) で極値をもつならば,

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

証明. 3次元グラフもしくは等高線グラフの $x = a$ および $y = b$ における切り口を考えれば明らか. (ちゃんと示すにはロルの定理の証明のような議論を関数 $x \mapsto f(x, b)$ や $y \mapsto f(a, y)$ に適用すればよい. ロルの定理については, [川平] 定理 7.1, [三宅] 定理 2.2.2) ■

命題 8.2 の逆は成り立たない. すなわち, 次の例のように, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ であっても極値をとるとはかぎらない.

例 3 (極値でない例: 鞍点). $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ のとき, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. しかし, $y = 0$ のとき $f(x, y) = x^2 \geq 0$, $x = 0$ のとき $f(x, y) = -y^2 \leq 0$ となるので, 原点において極大でも極小でもない (次の図, 左). いわゆる, **鞍点**の例である¹.



例 4 (極値でない例). $z = f(x, y) = -x^2$ のとき, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. しかし関数の値は $y = 0$ のとき (すなわち x 軸上で) 恒等的に 0 なので, 原点において極大でも極小でもない (上の図, 右).

判別式による極値の判定法

テイラー展開を用いた考察. 1変数のとき (定理 8.1) は, 関数を 2 次のテイラー多項式で近似することで, 極大と極小を判定した.

2変数関数で同様の考察をしてみよう. まずはテイラー展開を思い出しておく:

¹ $f(x, y)$ の 3次元グラフを考えたとき, 平面 $y = 0$ での断面では極小だが, 平面 $x = 0$ での断面では極大である. このように, 断面をとる方向に応じて極大と極小が混在するような点を「鞍点」という.

定理 8.3 (2変数2次のテイラー展開) $z = f(x, y)$ は点 (a, b) を含む円板上の C^2 級関数とする. その円板内の任意の点 $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ に対し, この点と (a, b) の内分点 (a', b') が存在して, 次の等式が成り立つ:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + P\Delta x + Q\Delta y \quad : 1 \text{ 次近似}$$

$$+ \frac{1}{2}(A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2). \quad : \text{剰余項}$$

ただし, $P := f_x(a, b)$, $Q := f_y(a, b)$, $A' := f_{xx}(a', b')$, $B' := f_{xy}(a', b')$, $C' := f_{yy}(a', b')$.

関数 $f(x, y)$ が (a, b) で極値を取るならば, 命題 8.2 より $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ でなくてはならない. よって 2 変数テイラー展開 (定理 8.3) より, $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ が $(0, 0)$ に十分に近いとき

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) \approx f(a, b) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) \quad (8.1)$$

と近似される. ただし $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$ である. したがって, (a, b) から $(\Delta x, \Delta y)$ 移動したときの関数の増減はほぼ下線部の正負だけで決まる. そこで, $A \neq 0$ と仮定した上で

$$\underline{A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2} = A\left(\Delta x + \frac{B\Delta y}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}\Delta y^2$$

と式変形してみよう. たとえば $A > 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ であるとき, この式の値は正である. これは, $f(x, y)$ が (a, b) において極小値をとることを示唆している. (近似式による議論なのでこの時点では断定はできない.)

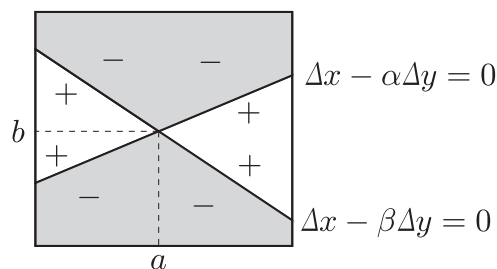
同様に, $A < 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ であるとき, 下線部の値は負となるので, $f(x, y)$ は (a, b) で極大値をとるであろう.

$AC - B^2 < 0$ のときは, 方程式 $At^2 + 2Bt + C = 0$ が異なるふたつの実数解をもつから, それを α, β とおく, このとき

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = A(\Delta x - \alpha\Delta y)(\Delta x - \beta\Delta y)$$

と書ける. よって右図 (これは $A > 0$ のときの図) のように考えると, $(\Delta x, \Delta y)$ のとり方次第で下線部は正の値も負の値も取りうるようになる. これは $f(x, y)$ が (a, b) で極値でない (鞍点である) ことを示唆している.

以上のような議論を精密に行うことで, 次のような極値判定法が得られるのである.




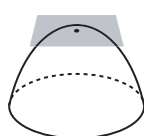

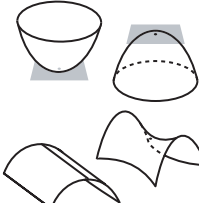
定理 8.4 (極値の判定) C^2 級関数 $z = f(x, y)$ は (a, b) で $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ を満たすとする。このとき、

$$D = D(a, b) := f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \{f_{xy}(a, b)\}^2$$

を $f(x, y)$ の (a, b) における**判別式**とよび、以下が成り立つ。

- (i) $D > 0$, $f_{xx}(a, b) > 0$ のとき, (a, b) で**極小**.
- (ii) $D > 0$, $f_{xx}(a, b) < 0$ のとき, (a, b) で**極大**.
- (iii) $D < 0$ のとき, (a, b) は**極値とならない (鞍点)**.
- (iv) $D = 0$ のときは, さらに調べないと分からない.

結果を表にしてまとめておこう。証明は例題のあとで与える。

$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$			
$D > 0$		$D < 0$	$D = 0$
$f_{xx}(a, b) > 0$	$f_{xx}(a, b) < 0$		
			
(i) 極小	(ii) 極大	(iii) 極値でない	(iv) ?

例 5. 例 1 の関数 $z = x^2 + y^2$ の原点は (i) の例, $z = -x^2 - y^2$ の原点は (ii) の例である。また, 例 3 の関数 $z = x^2 - y^2$ の原点は (iii) の例, 例 4 の関数 $z = -x^2$ の原点は (iv) の例である。(これらはすべて 2 次関数なので, 先ほどの式 (8.1) を用いた議論が「近似による推論」ではなく, 「証明」になっている。)

例題 8.1 (極大・極小 1) $f(x, y) = 1 + 2x - 3y - 2x^2 - xy - y^2$ の極値が存在すれば, すべて求めよ。

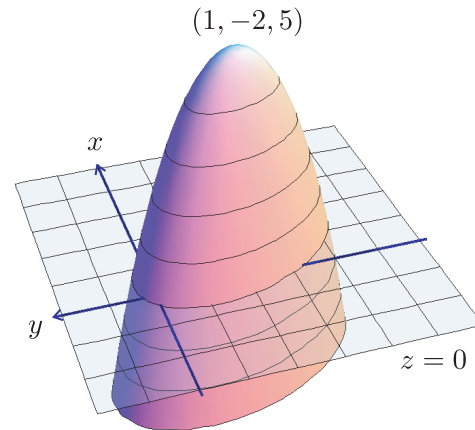
解答. 連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2 - 4x - y = 0 \\ f_y(x, y) = -3 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

をとくと, $(x, y) = (1, -2)$. よってこれが極値を与える点の唯一の候補である (命題 8.2). また, $f_{xx}(x, y) = -4$, $f_{xy}(x, y) = -1$, $f_{yy}(x, y) = -2$ より, 判別式は

$$D(1, -2) = -4 \cdot (-2) - (-1)^2 = 7 > 0.$$

よって定理 8.4 の (ii) より, $(1, -2)$ で極大値 $f(1, -2) = 5$ をとる. ■



例題 8.2 (極大・極小 2) $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ の極値が存在すれば, すべて求めよ.

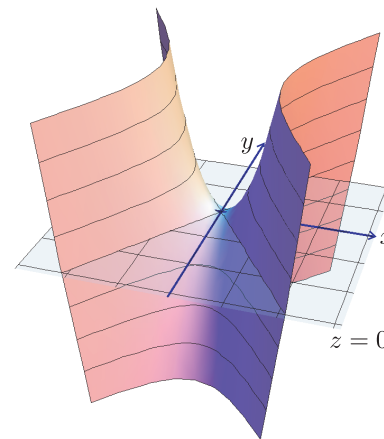
解答. 連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x = 0 \\ f_y(x, y) = -2y = 0 \end{cases}$$

をとくと, $(x, y) = (0, 0)$. よってこれが極値を与える点の唯一の候補である. また, $f_{xx}(x, y) = 4$, $f_{xy}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = -2$ より, 判別式は

$$D(0, 0) = 4 \cdot (-2) - 0^2 = -8 < 0.$$

よって定理 8.4 の (iii) より, $(0, 0)$ は極値ではない. すなわち, 関数 $f(x, y)$ は極値をとらない. ■



例題 8.3 (極大・極小 3) $f(x, y) = x^2 + y^4$ の極値が存在すれば, すべて求めよ.

考察. 連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x = 0 \\ f_y(x, y) = 4y^3 = 0 \end{cases}$$

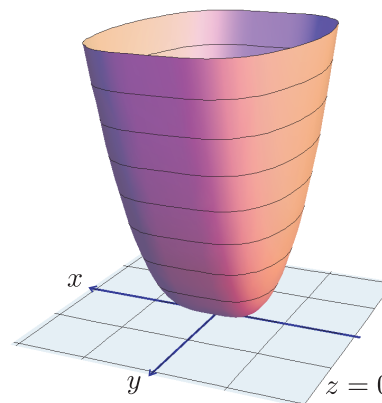
をとくと, $(x, y) = (0, 0)$. よってこれが極値を与える点の唯一の候補である. また, $f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = 12y^2$ より, 判別式は

$$D(x, y) = 2 \cdot 12y^2 - 0^2 = 24y^2.$$

したがって $D(0, 0) = 0$ である. 定理 8.4 の (iv) より, $(0, 0)$ が極値かどうかはさらに詳しく調べないと判定できない.

実際には, 極小値をとることがごく簡単にわかる:

解答. $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき, 明らかに $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$. よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で極小値 0 をとる. ■



担当教員：川平 友規

最後に定理 8.4 の厳密な証明を与えておこう。

定理 8.4 の証明. 以下記号を簡単にするために

$$A = f_{xx}(a, b), \quad B = f_{xy}(a, b) \quad C = f_{yy}(a, b), \quad D = AC - B^2$$

とおく。また、以下、 $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ と仮定する。

定理 8.3 より、 $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ が (a, b) を中心とする十分小さな円板内にあるとき、これら 2 点を結ぶ線分の上にある (a', b') が存在し、次が成り立つ：

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \frac{1}{2}(A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2).$$

ただし $A' = f_{xx}(a', b')$, $B' = f_{xy}(a', b')$, $C' = f_{yy}(a', b')$ である。仮定より関数 $f(x, y)$ は C^2 級なので、2 階偏導関数は連続である。いま $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ のとき、 $(a', b') \rightarrow (a, b)$ であるから、

$$A' \rightarrow A, \quad B' \rightarrow B, \quad C' \rightarrow C$$

となる。よって、(i) の条件「 $D > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) = A > 0$ 」を仮定すると、 $(\Delta x, \Delta y)$ が十分 $(0, 0)$ に近ければ $A'C' - (B')^2 > 0$ かつ $A' > 0$ が成り立つ。このとき下線部は

$$\underline{A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2} = A' \left(\Delta x + \frac{B'\Delta y}{A'} \right)^2 + \frac{A'C' - (B')^2}{A'} \Delta y^2 > 0$$

であるから、 (a, b) において f は極小値をとる。(ii) の場合も同様である。

次に (iii) の条件を仮定してみよう。このとき、2 次以下の関数 $F(t) = At^2 + 2Bt + C$ は正負いずれの値をとることもできる²。

そこで、まず $F(t_0) > 0$ となる t_0 を選んで固定する。 $(\Delta x, \Delta y)$ を $\Delta x = t_0\Delta y \neq 0$ を満たすようにとるとき、定理 8.3 より上と同様に (a', b') と A', B', C' がとれて、

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = \frac{1}{2}(A'\Delta x^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'\Delta y^2) = \frac{\Delta y^2}{2}(A't_0^2 + 2B't_0 + C').$$

ここで、 $(\Delta x, \Delta y)$ が $\Delta x = t_0\Delta y \neq 0$ かつ $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ となるとき、やはり $(a', b') \rightarrow (a, b)$ であるから、

$$A' \rightarrow A, \quad B' \rightarrow B, \quad C' \rightarrow C$$

が成り立つ。このとき、

$$F(t_0) - (A't_0^2 + 2B't_0 + C') = (A - A')t_0^2 + 2(B - B')t_0 + (C - C') \rightarrow 0$$

であるから、 $F(t_0) > 0$ より、 $(\Delta x, \Delta y)$ が十分に $(0, 0)$ に近いとき $A't_0^2 + 2B't_0 + C' > 0$ である。よって、そのような $(\Delta x, \Delta y)$ に対し、 $f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) > 0$ である。すなわち、 $f(x, y)$ は (a, b) の近くで $f(a, b)$ よりも大きな値を取ることがわかる。

同様の議論を行えば、 $f(x, y)$ は (a, b) の近くで $f(a, b)$ よりも小さな値を取ることがわかる。以上のことから、 $f(a, b)$ は極値ではない。 ■

²高校数学。 $A^2 - BC < 0$ より、 $A = 0$ ならば $B \neq 0$ なので、グラフは傾きが 0 でない直線となる。 $A \neq 0$ ならば 2 次関数であり、 $A^2 - BC < 0$ よりグラフの頂点は t 軸を突き抜ける。

前回のクイズの解答

問題 7-1 $f(x, y)$ を C^1 級とし, $z = z(u, v) = f(e^{u+v}, e^{u-v})$ とおく. このとき, $\frac{\partial z}{\partial v}(u, v)$ と等しいものはどれか?

- (1) $e^{u+v} f_x(e^{u+v}, e^{u-v}) + e^{u-v} f_y(e^{u+v}, e^{u-v})$
- (2) $-e^{u+v} f_x(e^{u+v}, e^{u-v}) + e^{u-v} f_y(e^{u+v}, e^{u-v})$
- (3) $e^{u+v} f_x(e^{u+v}, e^{u-v}) - e^{u-v} f_y(e^{u+v}, e^{u-v})$
- (4) $-e^{u+v} f_x(e^{u+v}, e^{u-v}) - e^{u-v} f_y(e^{u+v}, e^{u-v})$

解答 7-1 答えは (3).

勾配・速度の内積で計算できる. $(x, y) = (e^{u+v}, e^{u-v})$ として, v 方向の速度 (すなわち, v 偏微分) は $(e^{u+v}, -e^{u-v})$. 勾配ベクトルは $(f_x(e^{u+v}, e^{u-v}), f_y(e^{u+v}, e^{u-v}))$ なので, これらの内積が答え.

問題 7-2 $z = f(x, y) = x^3 y^2$ に対し, $f_{xx}(1, -1) + f_{xy}(1, -1) + f_{yy}(1, -1)$ の値を求めよ.

解答 7-2 答えは 2.

$f_x = 3x^2 y^2$, $f_y = 2x^3 y$ より, $f_{xx} + f_{xy} + f_{yy} = 6xy^2 + 6x^2 y + 2x^3$. $(1, -1)$ を代入して, $6 - 6 + 2 = 2$.

第9回 (11/09)：区画上の重積分

配布日：11/09/2021 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 25 章 [三宅] 5.1

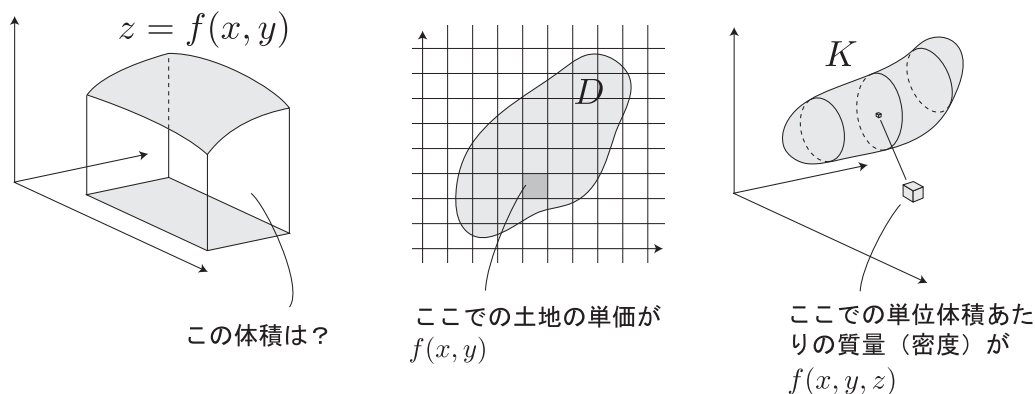
多変数の積分の目的

1 変数関数の積分は長さや面積の計算に有効であった。多変数関数の積分（**重積分**ともよばれる）ではどのような量が計算できるか、具体例を挙げておこう。

体積. 与えられた関数 $z = f(x, y)$ に対し、そのグラフと xy 平面 ($z = 0$) が囲む部分の体積は重積分によって表される（下図左）。

土地の値段. 平面上の点 (x, y) における地価（単位面積あたりの土地の値段）が $z = f(x, y)$ で与えられているとき、土地 D の値段も重積分によって表される（下図中央）。

質量. 3次元空間内に、点 (x, y, z) における単位体積あたりの質量（密度）が $w = f(x, y, z)$ で与えられるような物体 K があるとき、 K の質量もまた重積分によって表される（下図右）。



これらの例だけみても、重積分が応用上重要であることが想像されるだろう。ほかにも、2変数関数の3次元グラフの「曲面積」を定義するときにも、重積分が用いられる。

重積分の定義

重積分の定義は複雑であるから、便宜的に(ア)から(オ)までの5ステップにわけてみよう。

(ア)：区画. まずは「区画」という言葉の定義を思い出しておこう。数直線 \mathbb{R} 上の閉区間 $[a, b]$, $[c, d]$ に対し、

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

と表される集合を**区画**とよび、 $D = [a, b] \times [c, d]$ と表すのであった。

以下、(少なくとも)区画 D 上で定義された関数 $z = f(x, y)$ の積分（重積分）を定義していこう¹。

(イ)：区画の分割. 区間 $[a, b]$ を m 分割する点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

と区間 $[c, d]$ を n 分割する点

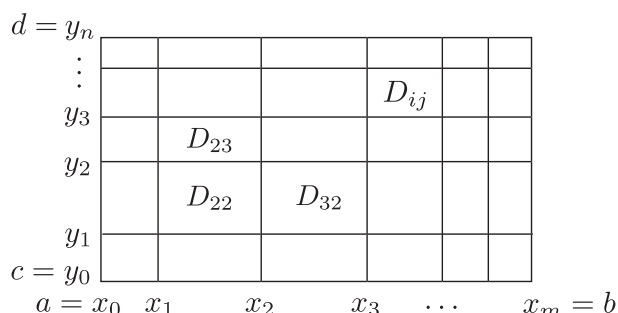
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

¹現時点では、 $f(x, y)$ は必ずしも連続関数とは限らない。

をとる. これによって, 区画 $D = [a, b] \times [c, d]$ は mn 個の区画に分割される (図). それぞれを

$$D_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

(ただし $1 \leq i \leq m$ かつ $1 \leq j \leq n$) とおく.



(ウ) 代表点選びとリーマン和の計算. それぞれの D_{ij} から, 代表点 $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in D_{ij}$ を自由に選んで,

$$\Sigma := \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \times (x_i - x_{i-1}) \times (y_j - y_{j-1}) \tag{9.1}$$

とおく. この量はリーマン和とよばれている. 私たちが計算しているのが土地代だとすれば, $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ は区画 D_{ij} の「単価」であり, $(x_i - x_{i-1}) \times (y_j - y_{j-1})$ は D_{ij} の「広さ」を表す. リーマン和 Σ は D の土地代を表現しているが, 分割点 $\{x_i \mid 0 \leq i \leq m\}$ および $\{y_j \mid 0 \leq j \leq n\}$, 代表点 $\{(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ をうまく選ぶと土地代を高く見積もったり低く見積もったりできるので, 不満に思う人もいるかもしれない.

(エ) リーマン和の極限としての重積分. 誰もが納得する値を得るためには, 区画 D の分割をより細かくするのがよいだろう. そこで, 次のように定義する:

定義 (区画上の重積分) 関数 $z = f(x, y)$ が区画 D 上で積分可能であるとは, 区画 D の分割の最大幅

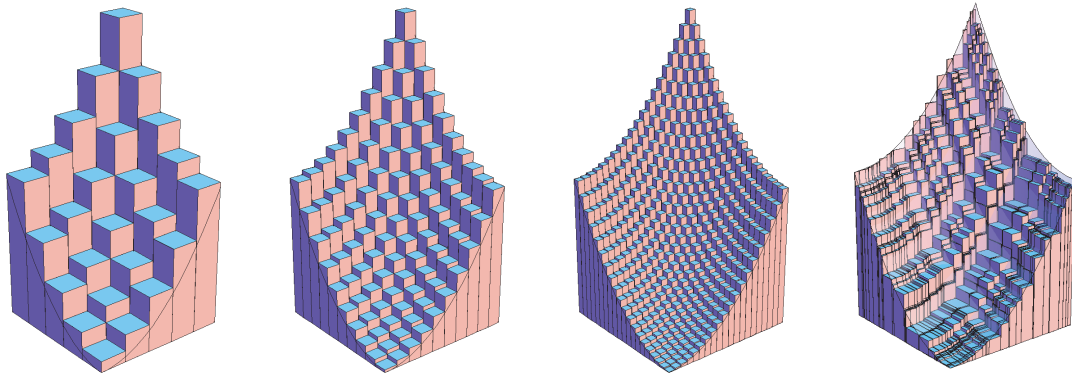
$$\max\{|x_1 - x_0|, \dots, |x_m - x_{m-1}|, |y_1 - y_0|, \dots, |y_n - y_{n-1}|\}$$

が 0 に近づくように区画の分割点の数を増やすとき, そのような分割点の選び方, 代表点 $\{(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ の選び方に依存せず, 式 (9.1) のように計算したリーマン和 Σ が一定の実数値 I に近づくことをいう. このとき,

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx dy$$

と表す. この定数 I は関数 $f(x, y)$ の区画 D 上での重積分 (もしくは単に積分) とよばれる. また D を積分領域, $f(x, y)$ を被積分関数とよぶ.

例 1 (数値計算の例). 1次元の積分が直観的には「短冊の面積和」であったように, 2次元の積分は「細い角材を寄せ集めた体積和」のように解釈できる. たとえば下の図は, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $D = [0, 1] \times [0, 1]$ に対し, 区間 $[0, 1]$ の分割点として 5 等分, 10 等分, 20 等分と増やしたときの「角材」の様子である. (代表点は等分割された各区画のなかでもっとも大きな値を取る右上隅を選んでいる.) また, 右端の図は分割点・代表点をランダムに選んだものである.



積分 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ の真の値は $2/3 = 0.6666\dots$ である. この図においては, 5 等分のときのリーマン和は 0.880, 10 等分のとき, 0.770, 20 等分のとき 0.7175 となる. 400 等分してやっと約 0.6692 となり, 相対誤差は 0.4 パーセント程度になる².

(オ)：区画以外での重積分. (エ) での定義を拡張しよう. D が区画でない有界集合のときの積分は次のように定義する.

定義 (有界領域上での重積分) 有界集合 D 上の関数 $z = f(x, y)$ が D 上で積分可能であるとは, D を含む十分大きな区画 \tilde{D} をとり, \tilde{D} 上の関数 $z = \tilde{f}(x, y)$ を

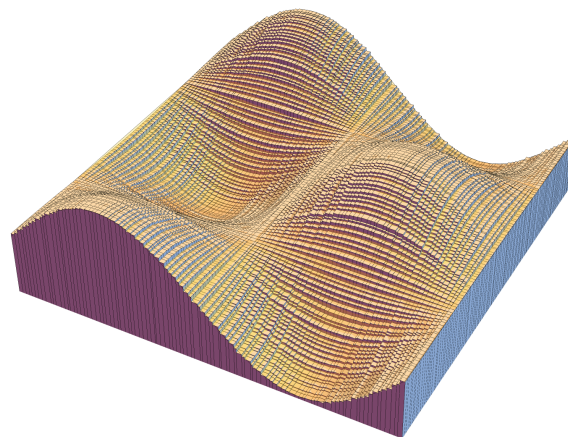
$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

と定義するとき, $\tilde{f}(x, y)$ が \tilde{D} 上で積分可能となることをいう. このとき,

$$\iint_D f(x, y) dx dy := \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(x, y) dx dy$$

と定義する.

以上で重積分の「定義」だけが完了した.



²400 等分するとき, 「角材」は $400^2 = 16$ 万本必要となる. すなわち, 16 万個の代表点において関数 $f(x, y)$ 値を一定の精度で計算しなくてはならない. もちろん, パソコンが不可欠である.

面積の定義と重積分の性質

面積の定義. 積分の応用として, これまで (小学校以来!) あいまいだった「面積」の概念に, 厳密な定義を与えることができる.

定義 (平面集合の面積) 有界な平面集合 D に対し, 定数関数 $f(x, y) = 1$ が D 上積分可能であるとき, すなわち積分

$$\iint_D dx dy := \iint_D 1 dx dy$$

が存在するとき, 集合 D は**面積確定**であるという. また, この積分値を D の**面積** とよび, $\text{Area}(D)$ で表す.

この定義ではある意味, 土地の値段で土地の広さを測っていることになる.

例 2 (区画の面積). 区画 $D = [a, b] \times [c, d]$ は面積確定であり, $\text{Area}(D) = (b - a)(d - c)$ である. 実際に区画上で $f(x, y) = 1$ の積分を定義どおりに計算してみると, どのような分割 D_{ij} に対してもリーマン和は一定値 $\Sigma = (b - a)(d - c)$ となる. よって積分値 $\int_D dx dy$ も同じ値である.

例 3 (グラフで囲まれた集合). 連続関数 $\phi_1(x)$ と $\phi_2(x)$ が区間 $[a, b]$ 上で $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ を満たすとき, 集合

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

は面積確定である (このような集合は「タテ線領域」とよばれる.).

例 4. 本講義で扱う重積分の積分領域は, 閉領域であり, 境界が「有限個の (区分的に) 滑らかな曲線を組み合わせたもの」になっている. このような閉領域は面積確定であり, 実用上はこれで十分に事足りる³.

連続関数の積分可能性. 私たちが扱うのはおもに連続関数である. 連続関数については, 次のような定理が知られている (証明略):

定理 9.1 (連続性と積分可能性) 関数 $z = f(x, y)$ は面積確定かつ有界な閉集合 D の上で連続であるとする. このとき $f(x, y)$ は D 上積分可能である.

約束. 以下で扱う重積分はすべてこの定理の条件を満たすものばかりであるから, 今後は「積分領域が面積確定かどうか」「関数が積分可能かどうか」についてはとくに断らないことにする.

例 5. 定理 9.1 は例 1 のような数値計算の有効性を保証してくれる. すなわち, 分割を細かくすれば, リーマン和が積分の真の値を近似する精度は着実に良くなる.

注意. このように理論上の積分可能性が保証されていても, 定義どおりに重積分を計算し, その真の値を求めるのは難しい. (ただし例 1 のように, 数値計算であれば原理的には任意の精度で実行できる.) このあたりの事情は 1 変数のときと同じだが, 1 変数のときには「微積分の基本定理」があるので, 計算がうまくできていたのである. 次回, 重積分をうまく 1 変数関数の積分に帰着させて計算する方法を学ぶ.

重積分の性質. 重積分の基本的な性質を証明抜きで公式としてまとめておこう.

³ちなみに, 「面積確定」でない集合も存在するが, 数学者が無理矢理ひねり出したような例ばかりである.

公式 9.2 (重積分の性質) $f(x, y)$, $g(x, y)$ は連続関数, D , D_1 , D_2 は有界な閉領域とする.

(1) $\text{Area}(D_1 \cap D_2) = 0$ のとき,

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy.$$

(2) D 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$ であれば,

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx dy.$$

(3) α を定数とするとき,

$$\begin{aligned} \iint_D \{f(x, y) + g(x, y)\} \, dx dy &= \iint_D f(x, y) \, dx dy + \iint_D g(x, y) \, dx dy, \\ \iint_D \alpha f(x, y) \, dx dy &= \alpha \iint_D f(x, y) \, dx dy. \end{aligned}$$

(4) 定数 M が存在し D 上で $|f(x, y)| \leq M$ であるとき,

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \leq M \text{Area}(D).$$

前回のクイズのこたえ

問題 8-1. C^2 級関数 $y = f(x)$ に対し、正しいものを選べ.

- (1) $x = a$ で極大であれば、 $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$.
- (2) $x = a$ で極大であれば、 $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$.
- (3) $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ であれば、 $x = a$ で極大.
- (4) $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ であれば、 $x = a$ で極大.

解答 8-1. 答えは (4).

[解説] (正答率 90.5%) : (1), (2) の反例は $y = -x^4$, $a = 0$. (3) は「 $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ であれば、 $x = a$ で極小」なので間違い.

問題 8-2. $z = f(x, y) = x - x^2 + 2y^2$ の $(1, -1)$ における 2 次のテイラー展開は

$$f(1 + \Delta x, -1 + \Delta y) = 2 + P \Delta x + Q \Delta y + \frac{1}{2!} \{A \Delta x^2 + 2B \Delta x \Delta y + C \Delta y^2\}$$

の形で与えられる. $P + Q + \frac{A}{2} + B + \frac{C}{2}$ の値を求めよ.

解答 8-2. 答えは -4 .

[解説] (正答率 76.2%) : まずは正攻法でもとめる. $z_x = 1 - 2x$, $z_y = 4y$, $z_{xx} = -2$, $z_{xy} = 0$, $z_{yy} = 4$ より, $(1, -1)$ での 2 次のテイラー展開は

$$f(1 + \Delta x, -1 + \Delta y) = 2 + (-1) \Delta x + (-4) \Delta y + \frac{1}{2!} \{(-2) \Delta x^2 + 2 \cdot 0 \cdot \Delta x \Delta y + 4 \Delta y^2\}.$$

もちろん, 本来は「 $(1, -1)$ と $(1 + \Delta x, -1 + \Delta y)$ の間の (a', b') が存在し, そこでの 2 階偏微分係数として A, B, C が定まる」という形で書くべきだが, 2 階偏導関数が定数関数なので (a', b') を表に出す必要がない. よって $P + Q + \frac{A}{2} + B + \frac{C}{2} = (-1) + (-4) + \frac{-2}{2} + 0 + \frac{4}{2} = -4$.

つぎに, 多項式でしか使えない (講義でも紹介した) 方法. $\Delta x = x - 1$, $\Delta y = y + 1$ とおくと,

$$z = f(x, y) = x - x^2 + 2y^2 = (1 + \Delta x) - (1 + \Delta x)^2 + 2(-1 + \Delta y)^2 = 2 - \Delta x - 4\Delta y - \Delta x^2 + 2\Delta y^2.$$

あとは係数を比較すれば P, Q 等の値が定まる.

第10回 (11/16)：累次積分

配布日：11/18/2020 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 26 章 [三宅] 5.1

タテ線領域・ヨコ線領域と累次積分

タテ線・ヨコ線. まずは「タテ線領域」「ヨコ線領域」とよばれる集合を定義しよう¹. 結論からいうと、これらの集合上で定義された連続関数の重積分は 1 変数の積分計算に帰着できるので、計算がしやすいのである：

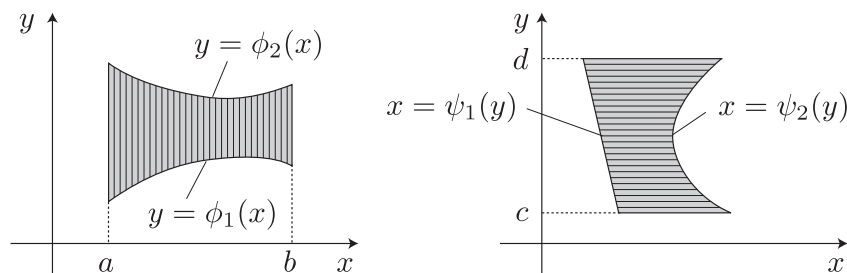
定義 (タテ線領域とヨコ線領域) 関数 $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$ は区間 $[a, b]$ 上の連続関数で $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ を満たすものとする. このとき,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\} \quad (10.1)$$

の形で表される平面集合を**タテ線領域**とよぶ. 同様に, **ヨコ線領域**とは, 区間 $[c, d]$ 上の連続関数 $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ で $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ を満たすものを用いて

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \quad (10.2)$$

の形で表される平面集合をいう.



このとき次が成り立つ (証明略)：

定理 10.1 (タテ線・ヨコ線領域での重積分) 式 (10.1) のように与えられるタテ線領域 D 上の連続関数 $z = f(x, y)$ は D 上で積分可能であり, 次の等式が成り立つ：

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \quad (10.3)$$

また, 式 (10.2) のようなヨコ線領域についても同様の公式が成り立つ.

累次積分. 式 (10.3) は実用上もっとも重要な計算公式であり, 右辺のような「積分の積分」には, 特別な名前がついている：

¹もちろん「縦線領域」と書いてもよいが, 見易さと書きやすさを考慮して「タテ線」にしている.

定義 (累次積分) 連続関数 $z = f(x, y)$ と式 (10.1) ようなタテ線領域に対し、「積分の積分」

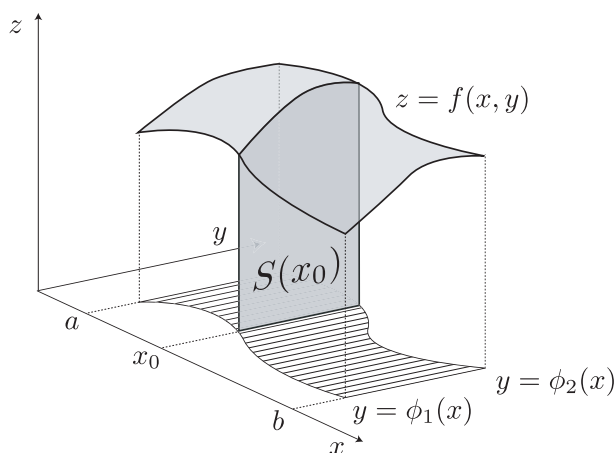
$$\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (10.4)$$

を関数 $f(x, y)$ の**累次積分**とよぶ。累次積分は

$$\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \quad (10.5)$$

のようにも表される。また、変数 x と y の役割を入れ替えることで、ヨコ線領域上の累次積分も同様に定義される。

累次積分の直観的な意味。 この累次積分の値は、タテ線領域上の関数 $z = f(x, y)$ の 3次元グラフと、 xy 平面で囲まれる部分 K の「体積」にほかならない²。実際、 K の平面 $x = x_0$ での切り口の面積 $S(x_0)$ は積分 $\int_{\phi_1(x_0)}^{\phi_2(x_0)} f(x_0, y) dy$ で与えられるから、式 (10.4) の累次積分は K の体積が $\int_a^b S(x) dx$ で与えられる、という高校数学でもおなじみの事実を示唆している。



計算方法。 式 (10.4) もしくは式 (10.5) の形の累次積分を計算するときは、まずは x をいったん定数だと思って $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$ の部分を変数 y に関する積分として計算する。その結果は x を含む式 (関数) となるので、それを区間 $[a, b]$ 上でふつうに x で積分すればよい。

例 1 (第 8 回の例 1)。 定理 10.1 と累次積分を用いて、区画 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 上の積分 $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ を計算してみよう。 $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = 1$ (定数関数) とすれば、区画 D もタテ線領域

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

とみなすことができる。よって定理 10.1 より、

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx.$$

² 「体積」の概念も「面積」と同様に定義が必要であるが、「3重積分」を用いればよいとすぐに想像がつくだろう。

担当教員: 川平 友規

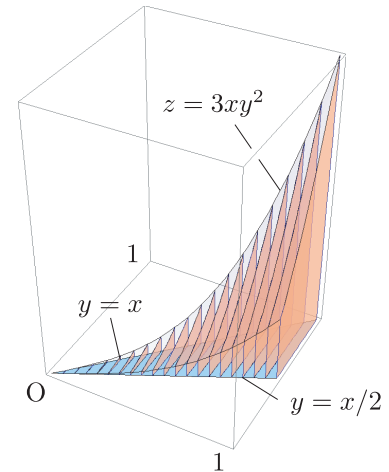
カッコ内の積分を x を定数とみなして計算すればよいので,

$$I = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

例題 10.1 (累次積分による重積分の計算) 関数 $z = f(x, y) = 3xy^2$ の積分領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x/2 \leq y \leq x\}$ における重積分を求めよ.

解答. $f(x, y) = 3xy^2$ は D 上で連続なので, 定理 10.1 より

$$\begin{aligned} \iint_D 3xy^2 dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x/2}^x 3xy^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[xy^3 \right]_{x/2}^x dx \\ &= \int_0^1 x \{ x^3 - (x/2)^3 \} dx \\ &= \int_0^1 \frac{7x^4}{8} dx \\ &= \left[\frac{7x^5}{40} \right]_0^1 = \frac{7}{40}. \end{aligned}$$



次に, 高校でおなじみの公式を確認しよう.

命題 10.2 (グラフで囲まれた部分の面積) タテ線領域

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

は面積確定であり, その面積は

$$\text{Area}(D) = \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\} dx$$

で与えられる. ヨコ線領域についても同様である.

証明. $f(x, y) = 1$ は D 上で連続なので, 定理 10.1 が適用できる.

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \iint_D 1 dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} 1 dy \right) dx = \int_a^b \left[y \right]_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dx \\ &= \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\} dx. \end{aligned}$$

積分の順序交換

タテ線領域でありヨコ線領域でもある集合上での重積分は, 定理 10.1 より 2 通りの累次積分が考えられる. その性質を利用すると, 積分計算がうまくいく場合がある.

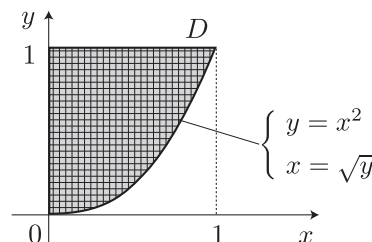
例題 10.2 (積分の順序交換) 次の積分を求めよ.

$$I = \iint_D x e^{-y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$$

失敗例. D はタテ線領域なので, 定理 10.1 を適用して

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x e^{-y^2} dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_{x^2}^1 e^{-y^2} dy \right) dx$$

関数 e^{-y^2} の不定積分 (原始関数) は初等関数で表現できないことが知られており, これ以上の計算はできない.



解答. D を図示してみると,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

とヨコ線領域としても表現できることがわかる. よって定理 10.1 がヨコ線領域に関して適用できて,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} x e^{-y^2} dx \right) dy = \int_0^1 e^{-y^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y}{2} dy = \left[-\frac{e^{-y^2}}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{4}(e^{-1} - 1) = \frac{1 - 1/e}{4}. \end{aligned}$$

例題 10.3 (積分の順序交換 2) ヨコ線領域

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y - 1 \leq x \leq 1 - y\}$$

上の連続関数 $f(x, y)$ の積分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx$$

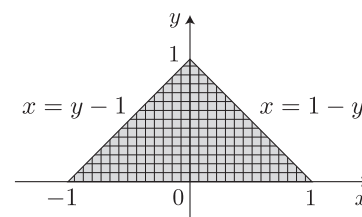
をタテ線領域上の積分として表せ.

解答. まずは積分領域 D を図示してみると, 右図のようになる. よって D はふたつのタテ線領域

$$D_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq x + 1\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x + 1\}$$

の和集合 $D_1 \cup D_2$ と表現できるので, 公式 8.2 (1) より



$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

前回のクイズのこたえ

問題 9-1. 以下のように与えられる関数 $z = f(x, y)$ で、原点 $(0, 0)$ において「極大」となるものを選べ.

(1) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(2) $f(x, y) = -x^2$

(3) $f(x, y) = -x^2 - y^2$

(4) $f(x, y) = x^2 + y^2$

解答 9-1. 答えは (3).

[解説] (正答率 87.2%) : (1) は $x = 0$ のとき 0 以下の値となり、 $y = 0$ のとき 0 以上の値となる。よって極大とはなれない。判別式を用いれば、原点が鞍点となることがわかる。(2) は $x = 0$ のとき y の値によらず 0 となるので極大ではない。(3) が極大であることは式の形からもわかるし、判別式を用いた方法も使える。(4) が極小であることは式の形からもわかるし、判別式を用いた方法も使える。

問題 9-2. $z = f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ はある点 (a, b) において唯一の極小値をもつ。そこでの判別式

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

の値を求めよ。

解答 9-2. 答えは 27.

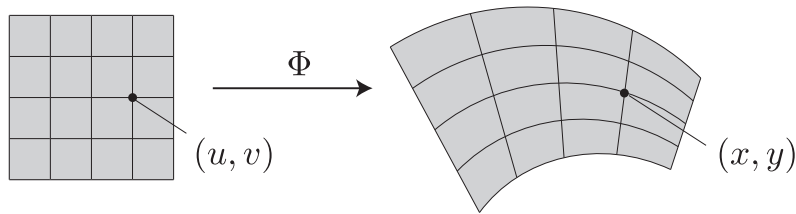
[解説] (正答率 82.1%) : $f_x = 3x^2 - 3y$, $f_y = -3x + 3y^2$ より、 $f_x = f_y = 0$ となるのは $(0, 0)$ もしくは $(1, 1)$ である。 $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$ より判別式 $D = 36xy - (-3)^2$ を計算すると、 $(0, 0)$ では $D = -9 < 0$ となり極大でも極小でもない (鞍点)。 $(1, 1)$ では $D = 36 - 9 = 27 > 0$ となり、 $f_{xx} = 6 > 0$ より極小。したがって、もとめる D の値は 27.

第 11 回 (11/30) : 変数変換

参考書の該当箇所：[川平] 20 章と 27 章, [三宅] 5.2

重積分の変数変換

重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ を考える. 一般に積分領域 D がタテ線領域でもヨコ線領域でない場合は累次積分に持ち込めないため, 重積分の値を厳密に計算することは難しい. しかし「変数変換」によって積分領域 D を別のタテ線領域 E に変換できれば, 積分がうまく計算できるかもしれない.



ヤコビアン.

定義 (ヤコビアン) uv 平面上の閉領域 E 上で定義された C^1 級関数 $x = x(u, v)$ と $y = y(u, v)$ が定める変数変換 $\Phi: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$ に対し, 関数

$$x_u y_v - x_v y_u = x_u(u, v) y_v(u, v) - x_v(u, v) y_u(u, v)$$

を変数変換 $\Phi: (u, v) \mapsto (x, y)$ のヤコビアンといい,

$$\det D\Phi \quad \text{もしくは} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

と表す.

注意.

- 参考書 [川平] では $\det D\Phi$ を, 参考書 [三宅] では $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を用いている.
- 一般に, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の形で表される行列に対し,

$$\det A := ad - bc$$

と定め, これを行列 A の行列式という. 変数変換 Φ に対し, (u, v) に依存して定まる行列

$$D\Phi = D\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix}$$

を Φ のヤコビ行列という. ヤコビ行列は変数変換の (u, v) における「微分係数」に当たるものである.

例 1 (1 次変換) 実数 a, b, c, d が定める 1 次変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{pmatrix}$ に対し, そのヤコビアン $D\Phi$ は

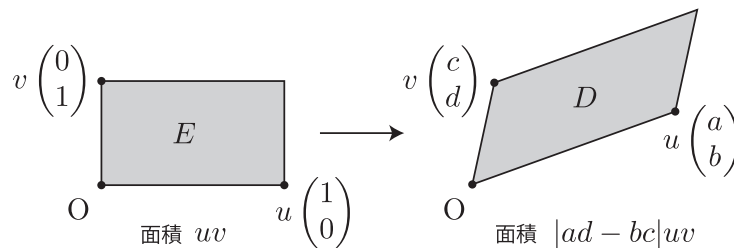
$$D\Phi(u, v) = ad - bc$$

で与えられる。じつは、次が成り立つ：

命題 11.1 (面積の拡大率) $ad - bc \neq 0$ のとき、1 次変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{pmatrix}$ は uv 平面
上の任意の長方形 E を xy 平面上のある平行四辺形 D に写す。さらに、次が成り立つ：

$$\text{Area}(D) = |ad - bc| \text{Area}(E). \quad (11.1)$$

証明. $u, v > 0$ とし、 E として原点、 $(u, 0)$ 、 (u, v) 、 $(0, v)$ を頂点に持つものを考えれば十分である。この
1 次変換はベクトル $\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られる正方形をベクトル $u \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $v \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ で張
られる平行四辺形に写す。このとき、この平行四辺形の面積は $|ad - bc|uv$ によって与えられる¹。 ■



例 2 (極座標変換) uv 平面の代わりに $r\theta$ 平面を用いて、変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$
を考える。これを極座標変換というのであった。このヤコビアン $D\Phi$ は

$$D\Phi(r, \theta) = r$$

となる。実際、

$$D\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta)_r (r \sin \theta)_\theta - (r \cos \theta)_\theta (r \sin \theta)_r = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

注意. これは、 (r, θ) という点における極座標変換 Φ の「局所的な面積の拡大率」がちょうど r で与えら
れることを意味する。一般に、「ヤコビアン」の絶対値は変数変換における「局所的な面積の拡大率」を表
すのである。このことを確認してみよう。

変数変換 $(x, y) = \Phi(u, v)$ を定める関数 $x = x(u, v)$ と $y = y(u, v)$ が C^1 級であるとしよう。このとき、
 $(u, v) = (p, q) \in E$ において全微分可能であるから、 $x_u(p, q) = a$ 、 $x_v(p, q) = b$ 、 $y_u(p, q) = c$ 、 $y_v(p, q) = d$ 、
とおくと、 (u, v) が (p, q) から $(p + \Delta u, q + \Delta v)$ に微小変化するとき、 $\Delta x = x(p + \Delta u, q + \Delta v) - x(p, q)$ と
 $\Delta y = y(p + \Delta u, q + \Delta v) - y(p, q)$ に対し近似式

$$\Delta x \approx a\Delta u + b\Delta v, \quad \Delta y \approx c\Delta u + d\Delta v$$

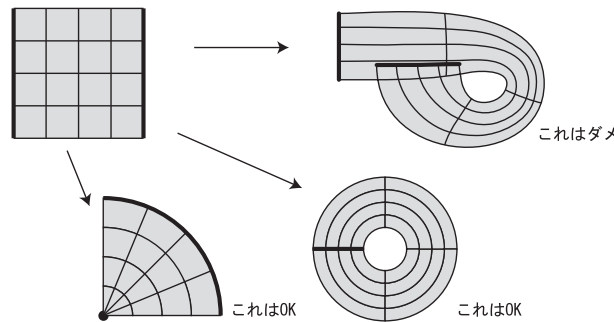
が成立する。すなわち、 $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ は 1 次変換 $\begin{pmatrix} a\Delta u + b\Delta v \\ c\Delta u + d\Delta v \end{pmatrix}$ によって近似されるのである。したがって、命
題 11.1 より、 (p, q) 付近の微小な長方形は「ほぼ」 $(x(p, q), y(p, q))$ 付近の微小な平行四辺形に写り、その面
積は「ほぼ」 $|ad - bc|$ 倍される。この倍率は、ヤコビアン $D\Phi(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ の (p, q) での値に他なら
ない！

以下、次の条件を満たす変数変換のみを考える：

¹高校では「 $(0, 0)$ 、 (a, c) 、 (b, d) を頂点にもつ三角形の面積は $|ad - bc|/2$ 」という形で公式として学んだと思う。こ
れを用いた。

- (1) E は uv 平面上の有界な領域 E° とその境界 ∂E の和集合として表される閉領域であり, ∂E は面積確定かつ面積 0.
- (2) 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を定める関数 $x = x(u, v)$ および $y = y(u, v)$ は, E 上の C^1 級関数.
- (3) Φ は領域 E° 上の異なる 2 点を xy 平面上の異なる 2 点に写す.
- (4) Φ のヤコビアン $D\Phi(u, v) = x_u y_v - x_v y_u$ は領域 E° 上で 0 にならない.

条件 (1) を満たすには, 例えば境界 ∂E が「閉区間上の 1 変数関数のグラフ」を (回転および平行移動させて) 有限個つなぎ合わせたものであればよい. 条件 (2) によって関数の全微分可能性が保証され, さらに条件 (4) によって, 領域 E° 内の微小な長方形の像は微小な平行四辺形で近似できるようになる. 条件 (3) は「 Φ は領域 E° 上で 1 対 1」ともいわれる. 一方, 境界 ∂E 上の異なる 2 点は, 同じ点に写ってもよいし (次の図), 境界 ∂E 上でヤコビアンが 0 になってもよい.



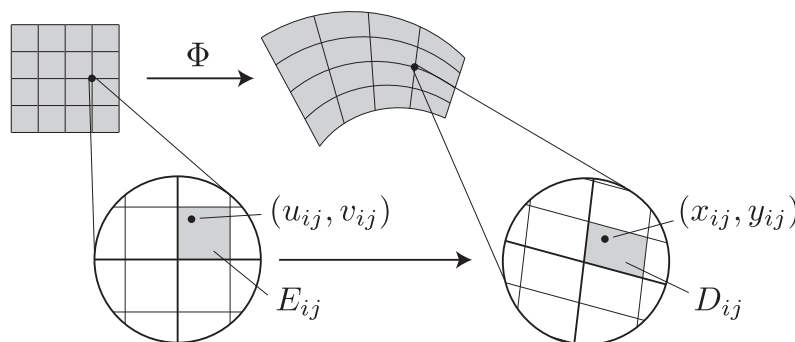
このような変数変換 Φ による閉領域 E の像を D と表す. このとき, 次が成り立つ:

定理 11.2 (変数変換) $z = f(x, y)$ が D 上積分可能であるとき,

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |D\Phi(u, v)| \, du dv. \quad (11.2)$$

この定理の証明には ϵ - δ 論法が必要であるから省略する². かわりに直観的な説明を試みてみよう.

説明. 実用上 E はタテ線領域 (もしくはヨコ線領域) であることが期待されているが, 話を単純にするために E は区画であるとしてよう.



変数変換 Φ も, 局所的には面積を「ヤコビアンの絶対値」倍する 1 次変換のように見えるから, 区画 E を (重積分を定義したときのように) 十分細かな区画 E_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) に分割する. さらに, 区

² E が有界な閉集合であり, 変数変換 Φ がある面積確定かつ面積 0 の集合 $K \subset E$ を除いた部分で 1 対 1 かつヤコビアンが 0 でなければ, 定理は正しい. 杉浦光夫『解析入門 II』(東京大学出版会) の第 VII 章を参照せよ.

画 E_{ij} から代表点 (u_{ij}, v_{ij}) を自由を選んでおく。このとき、 Φ による区画 E_{ij} の像を D_{ij} , (u_{ij}, v_{ij}) でのヤコビアン値を K_{ij} , $(x_{ij}, y_{ij}) := (x(u_{ij}, v_{ij}), y(u_{ij}, v_{ij}))$ とおけば、面積に関する近似式

$$\text{Area}(D_{ij}) \approx |K_{ij}| \text{Area}(E_{ij}) \tag{11.3}$$

が成立している。また、 D_{ij} は積分領域 D を細分したものであるため、式 (11.2) 右辺の積分を近似した式

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \text{Area}(D_{ij})$$

を得る。(ただしシグマの i, j は $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ の範囲で可能な mn 個の組み合わせをすべて取る。) 各 D_{ij} が十分に小さければ、この近似はいくらでもよくなると期待される。さらに D_{ij} の面積に関する近似式 11.3 を用いると、上の式に続けて

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \text{Area}(D_{ij}) &\approx \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) |K_{ij}| \text{Area}(E_{ij}) \\ &= \sum_{i,j} f(x(u_{ij}, v_{ij}), y(u_{ij}, v_{ij})) |K_{ij}| \text{Area}(E_{ij}) \\ &\approx \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |D\Phi(u, v)| dy dv \end{aligned}$$

を得る。結局、 E の分割 E_{ij} が十分に細かければこれらの近似式は限りなく等式に近くなり、求める式 (11.2) が得られるのである。

定理 11.2 の証明は複雑だが、本質的にはこの考察を精密にただけである。 ■

1 次変換と極座標変換

もっとも基本的な変数変換である 1 次変換と極座標変換について具体例を計算してみよう。

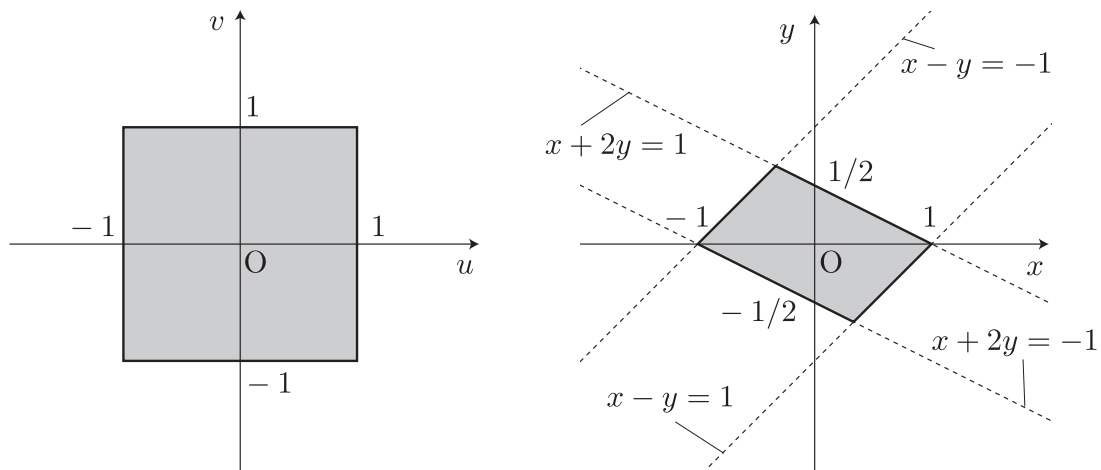
例題 11.1 (1 次変換) 閉領域 $D = \{(x, y) \mid |x + 2y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$ に対し、積分

$$I = \iint_D (x - y)^2 dx dy$$

を求めよ。

重積分の計算においてまず重要なことは、積分領域を図示することである。タテ線領域かヨコ線領域であることが確認できれば、累次積分で計算できるだろう。そうでなければ、複数個のタテ線もしくはヨコ線領域に分割するか、変数変換を考えなくてはならない。

この例の場合、 D は平行四辺形となるから、複数個のタテ線領域に分割することができる。したがって累次積分も可能だが、「正方形は 1 次変換で平行四辺形に写る」という事実を用いて次のように計算するほうが簡単である。



担当教員: 川平 友規

解答. $u = x + 2y, v = x - y$ とおくと, 平行四辺形 D は uv 平面内の正方形 (区画)

$$E = \{(u, v) \mid |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$$

に対応する. 逆に x と y について解くと $x = \frac{u+2v}{3}, y = \frac{u-v}{3}$ であるから, 変数変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u+2v \\ u-v \end{pmatrix}$$

によって積分を書き換えよう. ヤコビアンは $D\Phi(u, v) = -\frac{1}{3}$. よって変数変換の式 (11.2) より

$$\begin{aligned} I &= \iint_E v^2 \cdot \left| -\frac{1}{3} \right| du dv = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{v^2}{3} dv \right) du \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{v^3}{9} \right]_{-1}^1 du = \int_{-1}^1 \frac{2}{9} du = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

例題 11.2 (極座標変換) $R > 0, D_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ とするとき, 積分

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$$

を求めよ.

解答. 極座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

により, $r\theta$ 平面内の長方形 (区画)

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

は積分領域 D に写る. 例 2 での計算より, $D\Phi(r, \theta) = r \geq 0$. よって $e^{-x^2-y^2} = e^{-r^2}$ および変数変換の公式 (11.2) より

$$I = \iint_E e^{-r^2} \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r e^{-r^2} dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r e^{-r^2} dr.$$

2重下線部は θ を変数として含まないので (すなわち定数なので) 下線部とは独立に計算できる. したがって

$$I = 2\pi \cdot \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^R = 2\pi \left\{ -\frac{e^{-R^2}}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

もうひとつ, 極座標変換の典型的な応用例をみておこう.

例題 11.3 (極座標変換 2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$ とするとき, 積分

$$I = \iint_D x dx dy$$

を求めよ.

解答. 積分領域 D の定義式は $(x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/2^2$ と変形できるので, これは図のような中心 $(1/2, 0)$, 半径 $1/2$ の円板である.

極座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

を用いると, D は $r\theta$ 平面内のヨコ線領域

$$E = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

に対応する. 例題 11.2 と同様に, 極座標変換のヤコビアンは r であるから,

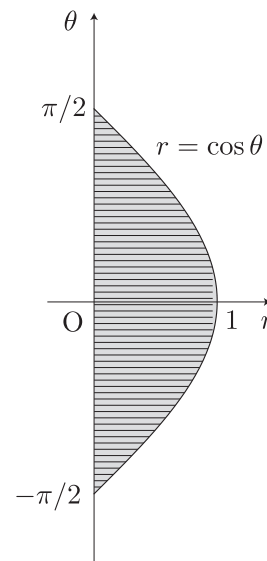
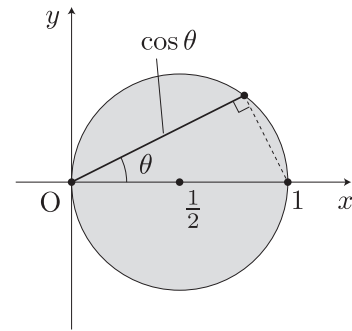
$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} (r \cos \theta) \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\cos \theta \cdot \frac{r^3}{3} \right]_0^{\cos \theta} d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^4 \theta}{3} d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

一般に, $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ とおくと, 部分積分により

$$J_0 = \frac{\pi}{2}, \quad J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

がわかるので ([川平] 公式 10.8, [三宅] 例題 3.2.1),

$$I = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$



■

ガウス積分

重積分を用いて, 応用上重要な次の広義積分を計算してみよう.

定理 11.3 (ガウス積分)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

証明. 原点を中心とする半径 R の閉円板を D_R で表そう. このとき, 正方形 (区画) $Q_R := [-R, R] \times [-R, R]$ は包含関係

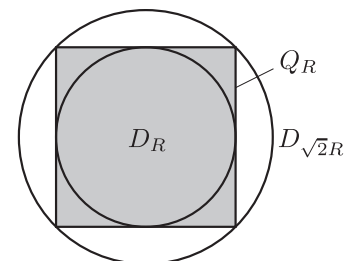
$$D_R \subset Q_R \subset D_{\sqrt{2}R}$$

を満たしている. よって公式 8.2(2) と $e^{-x^2-y^2} > 0$ より,

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

例題 11.2 より,

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \pi(1 - e^{-2R^2})$$



担当教員：川平 友規

が成り立つ。よって $R \rightarrow \infty$ のとき、「はさみうちの原理」により、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi.$$

一方、 Q_R はタテ線領域なので、

$$\begin{aligned} \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-R}^R dy \int_{-R}^R e^{-x^2-y^2} dx \\ &= \int_{-R}^R e^{-y^2} dy \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \\ &= \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

(下線部と2重下線部はそれぞれ定数であり、独立に計算できることに注意。) よって $I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. ■

前回のクイズのこたえ

問題 10-1. タテ線領域

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$$

上の連続関数 $f(x, y)$ に対し, 積分

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy$$

と一致する累次積分を選べ.

(1) $\int_{x^2}^x \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$

(2) $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \right) dx$

(3) $\int_{x^2}^x \left(\int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy$

(4) $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) \, dx \right) dy$

解答 10-1. 答えは (2).

[解説]: 定義通りのものに当てはめるだけ.

問題 10-2. 閉領域

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

に対し, 積分

$$\frac{1}{\pi} \iint_D 1 \, dx dy$$

の値を求めよ.

解答 10-2. 答えは $1/4$.[解説]: 面積の定義より, 求める積分は $\frac{1}{\pi} \text{Area}(D)$ である. D は単位円板を 4 等分したものであるから,

第 12 回 (12/7) : 変数変換 (3 重積分に関する補足)

参考書の該当箇所：[三宅] 5.2

3 重積分 (試験範囲外)

 xyz 空間の直方体

$$D := \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$$

を 3 次元の区画とよび、記号 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ で表すことにする。このような区画上の関数 $w = f(x, y, z)$ について、積分を考えよう。

アイデアは 2 変数の場合と同様である。

- 区間 $[a_1, b_1]$ を l 分割する点 $a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = b_1$,
- 区間 $[a_2, b_2]$ を m 分割する点 $a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2$,
- 区間 $[a_3, b_3]$ を n 分割する点 $a_3 = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b_3$,

を選び、計 lmn 個の小区画

$$D_{ijk} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$

から代表点 $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ を選び、リーマン和

$$\sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

(ただし $1 \leq i \leq l-1$, $1 \leq j \leq m-1$, $1 \leq k \leq n-1$) を考える。各区間の分割の最大幅が 0 に近づくように分割点を増やしていくとき、(分割点や代表点の取り方に依存せず) ある実数 I が存在してリーマン和が I に近づくならば、関数 $f(x, y, z)$ は区画 D 上で積分可能であるといい、

$$I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

と表す。

実際の計算には、たとえば次の公式が使える：

定理 12.1 (3 変数の累次積分) 関数 $f(x, y, z)$ が区画 $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ 上で連続であれば積分可能であり、次の等式が成り立つ：

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

右辺を累次積分とよぶ。この定理の条件下では、積分の順序を交換してもよい。

例題 12.1 (3 重積分の計算) $D = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ とするとき、

$$\iiint_D (x + y + z) dx dy dz \text{ を求めよ。}$$

解答. 定理 12.1 より,

$$\begin{aligned}
 \iiint_D (x+y+z) dx dy dz &= \int_0^a \left(\int_0^b \left(\int_0^c (x+y+z) dz \right) dy \right) dx \\
 &= \int_0^a \left(\int_0^b \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^c dy \right) dx \\
 &= \int_0^a \left(\int_0^b \left(cx + cy + \frac{c^2}{2} \right) dy \right) dx \\
 &= \int_0^a \left[cxy + \frac{cy^2}{2} + \frac{c^2 y}{2} \right]_0^b dx \\
 &= \int_0^a \left(bcx + \frac{b^2 c}{2} + \frac{bc^2}{2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{bcx^2}{2} + \frac{bc(b+c)x}{2} \right]_0^a \\
 &= \frac{abc}{2}(a+b+c). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

区画以外の積分. 関数 $f(x, y, z)$ の定義域 D が区画でない有界閉領域であるとき, D を含む区画 \tilde{D} をとり, D の外側では関数 $f(x, y, z) = 0$ とおくことで, 関数 $f(x, y, z)$ を区画 \tilde{D} 上の関数とすることができる. そのような関数が区画 \tilde{D} 上で積分可能であるとき, $f(x, y, z)$ は D 上の積分可能であるとみなし, $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz := \iiint_{\tilde{D}} f(x, y, z) dx dy dz$ として定義する.

例題 12.2 (区画以外での 3 重積分) $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq \pi\}$ とするとき, $\iiint_D \sin(x + y + z) dx dy dz$ を求めよ.

解答. 2 変数の場合と同様に, 累次積分に置き換えて計算する.

$$\begin{aligned}
 \iiint_D \sin(x + y + z) dx dy dz &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi-x} \left(\int_0^{\pi-x-y} \sin(x + y + z) dz \right) dy \right) dx \\
 &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi-x} \left[-\cos(x + y + z) \right]_0^{\pi-x-y} dy \right) dx \\
 &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi-x} (1 - \cos(x + y)) dy \right) dx \\
 &= \int_0^\pi \left[1 + -\cos(x + y) \right]_0^{\pi-x} dx \\
 &= \int_0^\pi (\pi - x - \sin x) dx = \frac{\pi^2}{2} - 2 \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

体積の定式化. 「面積」の概念と同様に, 「体積」も重積分を用いることで定式化できる.

定義 (空間内の集合の体積) \mathbb{R}^3 内の集合 D に対し定数関数 $f(x, y, z) = 1$ が D 上で積分可能であるとき D は**体積確定**であるといい, その**体積**を $\text{Vol}(D) := \iiint_D dx dy dz$ で定める.

前回, 2 変数関数の「グラフに囲まれる部分の体積」を重積分で定義した. 次の公式は, それを正当化するものである (証明略):

定理 12.2 (曲面ではさまれた部分の体積) xy 平面上の領域 D 上の連続関数 $\phi_1(x, y)$ と $\phi_2(x, y)$ が $\phi_1(x, y) \geq \phi_2(x, y)$ を満たすとき、それらの 3 次元グラフで囲まれる部分

$$K = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

の体積は

$$\text{Vol}(K) = \iint_D \{\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)\} dx dy$$

で与えられる.

3 変数の変数変換とヤコビアン (試験範囲外)

変数 x, y, z がそれぞれ変数 u, v, w の C^1 級関数であるとき、変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix}$ を考えることができる.

このとき、変数 u, v, w の C^1 級関数

$$\det D\Phi(u, v, w) := x_u y_v z_w + x_v y_w z_u + x_w y_u z_v - x_w y_v z_u - x_v y_u z_w - x_u y_w z_v$$

をヤコビアンとよぶ¹. ヤコビアンは $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ とも表される.

2 変数の場合と同様に、 C^1 級の変数変換は局所的に「ヤコビ行列による 1 次変換」によって近似される. また、ヤコビアンの絶対値はその 1 次変換による「局所的な体積の拡大率」となる. 積分に関しては、次の公式が成り立つ (証明略):

定理 12.3 (3 変数関数の積分の変数変換) 変数変換 $(x, y, z) = \Phi(u, v, w)$ によって領域 E が領域 D に対応するとき、

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f(\Phi(u, v, w)) |\det D\Phi(u, v, w)| du dv dw.$$

ただし、 $f(\Phi(u, v, w))$ は $f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ を略記したものである.

例題 12.3 (1 次変換) $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x + y + z \leq 1, 0 \leq y + z \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ で表される平行 6 面体の体積を求めよ.

解答. $\text{Vol}(D) = \iiint_D dx dy dz$ を計算すればよい. $u = x + y + z, v = y + z, w = z$ とおくと、変数変換 $(x, y, z) = \Phi(u, v, w) = (u - v, v - w, w)$ が定まる². このとき、ヤコビアンは $\det D\phi = 1$ (定数関数) で

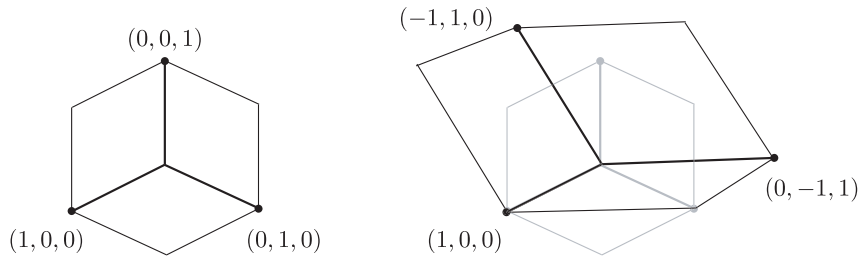
¹行列 $D\Phi = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$ をヤコビ行列とよび、ヤコビアンとはその行列式 $\det D\Phi$ として定義される.

²このときヤコビ行列は $D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

あり、 Φ は区画 $E = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ を D に写すので、求める体積は

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &= \iiint_D 1 \cdot dx dy dz = \iiint_E 1 \cdot |1| du dv dw \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 1 \cdot dw \right) dv \right) du \\ &= 1. \end{aligned}$$

注意 (D の形). この平行 6 面体 D が実際にどのような形をしているのか、式から想像するのは意外と難しい. 線形代数で学ぶ「1 次変換」の考え方に慣れていれば、 E のヤコビ行列 $D\Phi$ による像としてある程度の形がわかる. 具体的にいえば、 D とはベクトル $(1, 0, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(0, -1, 1)$ によって張られる平行 6 面体である.



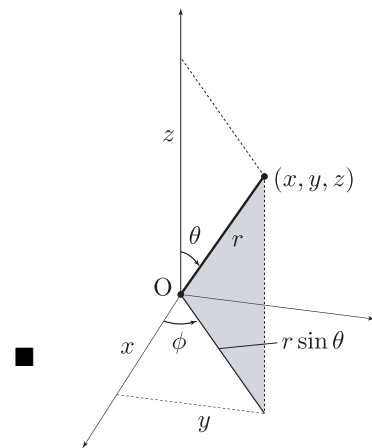
例題 12.4 (空間の極座標変換) 空間の座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

を用いて、半径 $R > 0$ の球体の体積を求めよ.

解答. $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ の体積は $\text{Vol}(D) = \iiint_D dx dy dz$ で与えられる. 空間の極座標変換により、 $r\theta\phi$ 空間の区画 $E = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ が D に写る. このとき、ヤコビアンは $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta$ となる³. よって求める体積は

$$\begin{aligned} \iiint_D 1 \cdot dx dy dz &= \iiint_E 1 \cdot |r^2 \sin \theta| dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta \right) d\phi \right) dr \\ &= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$



³ヤコビ行列は $D\Phi = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$ となる.

別解 (変数変換を用いない). 累次積分を用いて,

$$\begin{aligned}\iiint_D 1 \cdot dx dy dz &= \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2} dy \right) dx\end{aligned}$$

ここで括弧の中の積分は半径 $\sqrt{R^2-x^2}$ の円板の面積なので, 上の式に続けて

$$= \int_{-R}^R \pi(R^2-x^2) dx = \pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad \blacksquare$$

クイズのこたえ

問題 11-1. 閉領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ 上の積分

$$\iint_D x^2 y \, dx dy$$

の値を求めよ.

解答 11-1. 答えは $1/10$.

[解説]：累次積分に直して計算すれば,

$$\iint_D x^2 y \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \left[\frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{10}.$$

問題 11-2. 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ uv \end{pmatrix}$ のヤコビアン J の, $(u, v) = (7, 3)$ における値を求めよ.

解答 11-2. 答えは 4.

[解説]：ヤコビアンの定義より,

$$x_u y_v - x_v y_u = 1 \cdot u - 1 \cdot v = u - v$$

であるから, $(u, v) = (7, 3)$ での値は $7 - 3 = 4$.

第 13 回 (12/14)：体積と曲面積

配布日：12/13/2021 Version：1.0

参考書の該当箇所：[川平] 28 章 [三宅] 5.4

グラフで囲まれた部分の体積

重積分を用いて、2つの関数の3次元グラフに囲まれる部分の「体積」を定義しよう。

定義 (曲面ではさまれた部分の体積) xy 平面上の有界閉領域 D 上の連続関数 $\phi_1(x, y)$ と $\phi_2(x, y)$ が $\phi_1(x, y) \leq \phi_2(x, y)$ を満たすとき、それらの3次元グラフで囲まれる部分

$$K = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

の体積を

$$\iint_D \{\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)\} dx dy$$

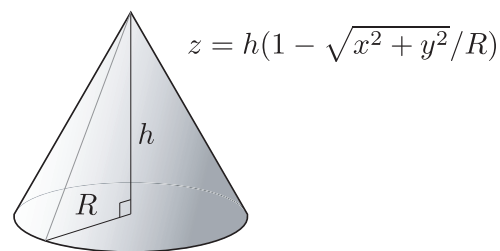
で定義し、 $\text{Vol}(K)$ で表す。

例 1. これまで計算してきた重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ は $z = f(x, y)$ と xy 平面 $z = 0$ で囲まれる部分の符号付き体積だといえる。とくに、 $f(x, y) \geq 0$ であれば本当に体積である。

例題 13.1 (円錐の体積) 半径 R の円板を底面とする高さ h の円錐の体積 V を求めよ。

解答. 求める円錐の体積は、原点中心の円板 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ の上で定義された関数 $z = h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right)$ の3次元グラフと、 xy 平面 $z = 0$ が囲む部分の体積である。よって極座標変換を用いて、

$$\begin{aligned} V &= \iint_D h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) dx dy \\ &= h \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r dr \right) d\theta \\ &= h \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R} \right]_0^R \\ &= 2\pi h \frac{R^2}{6} = \frac{\pi R^2 h}{3}. \end{aligned}$$



例題 13.2 (円柱の交差する部分) $R > 0$ を定数とするとき、ふたつの円柱

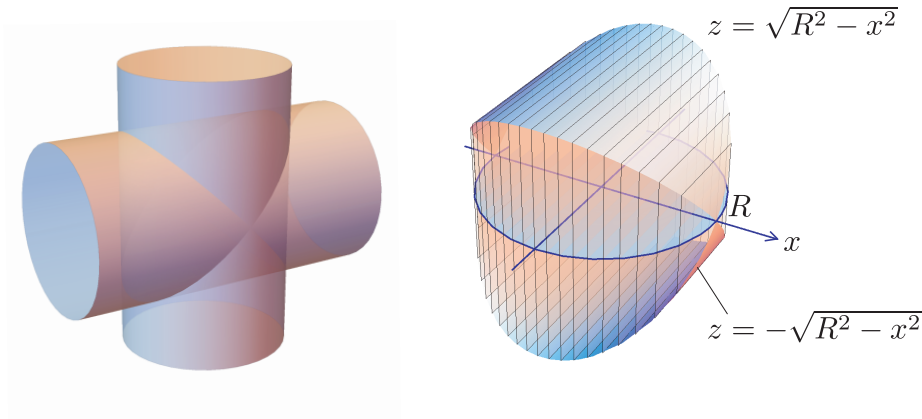
$$\begin{aligned} &\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\} \\ &\{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq R^2\} \end{aligned}$$

の共通部分の体積 V を求めよ。

解答. 求める立体の体積は、原点中心の円板 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ の上で定義された関数 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ と $z = -\sqrt{R^2 - x^2}$ の 3 次元グラフによって囲まれる部分の体積である。 D はタテ線領域

$$D = \{(x, y) \mid -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

とみなせることに注意すると、



$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left\{ \sqrt{R^2 - x^2} - (-\sqrt{R^2 - x^2}) \right\} dx dy = \iint_D 2\sqrt{R^2 - x^2} dx dy \\ &= \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} 2\sqrt{R^2 - x^2} dy \right) dx \\ &= \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - x^2} \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \right) dx \\ &= 4 \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 8 \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{16R^3}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

曲面積の定義

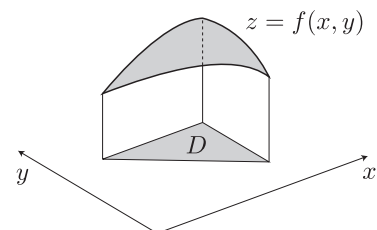
平面集合の「面積」は重積分を用いて定義された。その考え方を一般化して、平面でない曲面の面積（「曲面積」）を重積分を用いて定義してみよう。

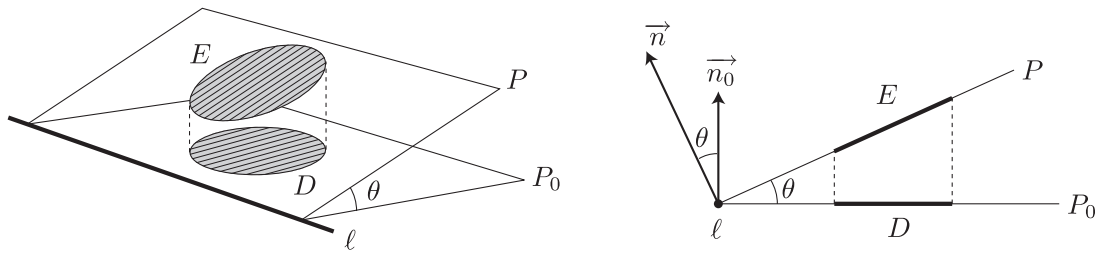
ここで考える「曲面」とは、閉領域 D 上で定義された C^1 級関数 $z = f(x, y)$ の 3 次元グラフのことである。まずはその曲面積を定義し、その定義が妥当であることを確認する。

準備. xy 平面 $z = 0$ を P_0 で表す。また、方程式 $z = Ax + By + C$ で表される平面を P で表す。さらに、平面 P 内の集合 E に対し、それを P_0 に「射影」した集合を D とする。すなわち、 $(x, y, z) \in E$ から平面 P_0 に下ろした垂線の足は $(x, y, 0)$ であるから、

$$D := \{(x, y, 0) \mid (x, y, z) \in E\}$$

と定義される集合である。





いま平面 P と平面 P_0 のなす角を θ (ただし $0 \leq \theta < \pi/2$) とするとき,

$$\text{Area}(E) \cos \theta = \text{Area}(D) \iff \text{Area}(E) = \text{Area}(D) \cdot \frac{1}{\cos \theta} \quad (13.1)$$

が成り立つ。(理由は単純で、図のように E と D を同じ幅の短冊に裁断してから面積を比較すればよい.)

さらに $\cos \theta$ は定数 A と B を用いて表現できる: 平面 P_0 の法線ベクトルとして $\vec{n}_0 = (0, 0, 1)$ を, P の法線ベクトルとして $\vec{n} = (-A, -B, 1)$ を選ぶ¹. このとき,

$$\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}_0}{|\vec{n}| |\vec{n}_0|} = \frac{(-A) \cdot 0 + (-B) \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-A)^2 + (-B)^2 + 1^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}.$$

式 (13.1) とあわせると, 次の関係式を得る:

$$\text{Area}(E) = \text{Area}(D) \sqrt{A^2 + B^2 + 1}. \quad (13.2)$$

曲面積の定義. 以上の考察をふまえて, グラフの曲面積を次のように定義しよう.

定義 (3次元グラフの曲面積) 集合 D 上で定義された関数 $z = f(x, y)$ が C^1 級であるとき, そのグラフ

$$K = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

の**曲面積** (もしくは単に**面積**) を

$$\text{Area}(K) := \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dx dy \quad (13.3)$$

と定義する.

定義の正当化. この積分がグラフ K の「面積」として妥当な量であることをいくつかのステップに分けて確認しよう.

(ア). まず十分に小さい $r > 0$ を選び, 幅 r の升目の仮想的な方眼紙を xy 平面に敷く. これを用いて, 閉集合 D を図のように大量の正方形で近似する.

(イ). これらの正方形を D_1, D_2, \dots, D_N とする. このとき, 各 D_i ($1 \leq i \leq N$) の左下隅の点を (x_i, y_i) とすれば, 区画の記号を用いて

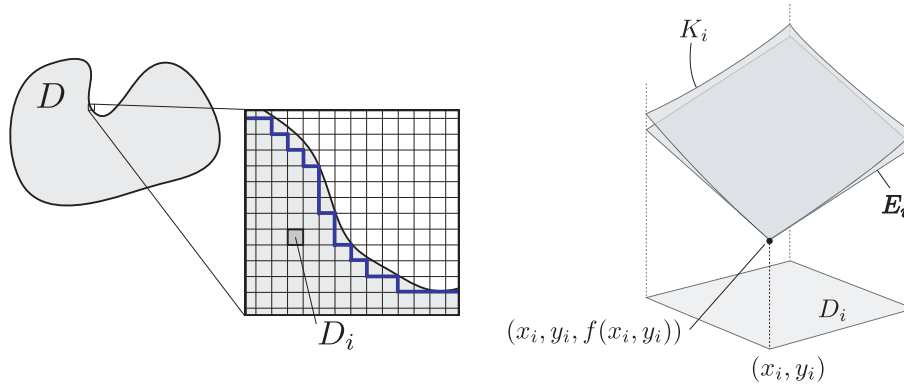
$$D_i = [x_i, x_i + r] \times [y_i, y_i + r]$$

¹ P の方程式は $Ax + By - z + C = 0 \iff \begin{pmatrix} A \\ B \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix}$ と表現できる. したがって法線ベク

トルの方向は $\pm(A, B, -1)$ の 2 種類考えられるが, 図のように z 成分が \vec{n}_0 と同じく正になるように, $(-A, -B, 1)$ を選ぶ必要がある.

と表される.

(ウ). グラフ K を区画 D_i の上に制限した「断片」を K_i と表す. このとき, K_i はグラフ K の $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ における接平面 P_i によって近似されるであろう ($f(x, y)$ は C^1 級, よって D 上全微分可能). より正確に, 接平面 P_i を区画 D_i の上に制限した「断片」を E_i と表すと, K_i は E_i で近似されることになる.



(エ). $A_i := f_x(x_i, y_i)$, $B_i := f_y(x_i, y_i)$ とおくと, 接平面 P_i の方程式は

$$z = f(x_i, y_i) + A_i(x - x_i) + B_i(y - y_i) \iff z = A_i x + B_i y + \{f(x_i, y_i) - A_i x_i - B_i y_i\}$$

であるから, (ウ) と式 (13.2) より

$$\text{Area}(E_i) = \text{Area}(D_i) \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + 1}.$$

(オ). よってグラフ K の考える「面積」の近似値として「各 K_i を近似した E_i の面積の総和」

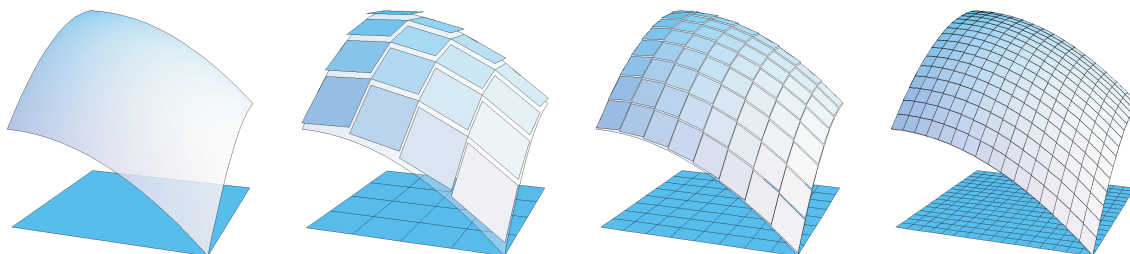
$$\sum_{i=1}^N \text{Area}(E_i) = \sum_{i=1}^N \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + 1} \cdot \text{Area}(D_i)$$

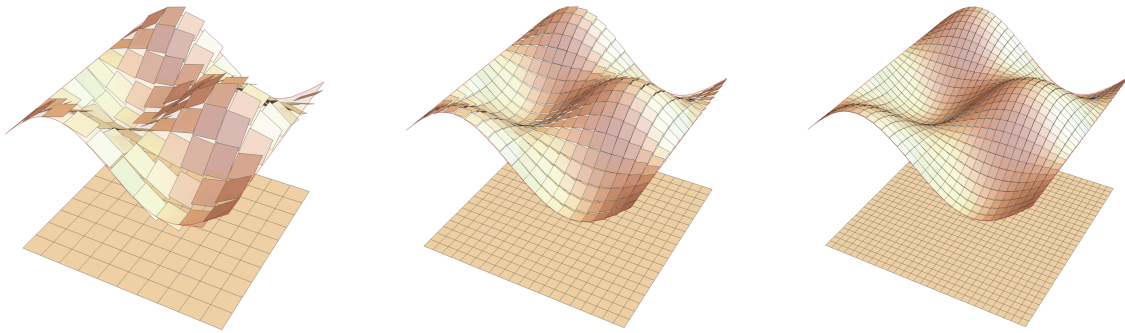
を取るのが妥当であろう. 升目の大きさ r を小さくすれば N は増大するが近似は良くなると考えられるから,

$$\iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dx dy = \lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + 1} \cdot \text{Area}(D_i)$$

を K の「面積」と定義するのである.

次の図は, 区画 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上で関数 $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)/2$ (青) と, 区画 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 上で関数 $f(x, y) = (\sin 2x \cos 2y)/2 + 2$ (茶) のグラフを接平面の断片で近似する様子である.





具体例

まずはおなじみの「球面の面積」の公式を確認してみよう。

例題 13.3 (球の面積) 半径 R の球面の曲面積は $4\pi R^2$ であることを示せ。

解答. 上半分にあたる関数 $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ の 3 次元グラフの曲面積を定義式 (13.3) に従って計算し、2 倍すればよい。

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

より、 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ とおくと

$$\begin{aligned} \text{[求める面積]} &= 2 \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dx dy \\ &= 2 \iint_D \sqrt{\frac{(-x)^2 + (-y)^2 + (R^2 - x^2 - y^2)}{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy \\ &= 2R \iint_D \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy \\ &= 2R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr \\ &= 2R \cdot 2\pi \cdot \left[-\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 4\pi R \cdot R = 4\pi R^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

注意. この計算では、 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy$ という積分が「閉領域上の連続関数の積分」になっていない。実際、 D の境界である円の上では、被積分関数の分母が 0 となり関数の値は定義されていないのである。この積分は「重積分の広義積分」や「累次積分の広義積分版」を考慮することで正当化される。あるいは、最後の節で紹介する曲面の 2 パラメーター表示を経由することによって、広義積分は回避できる。

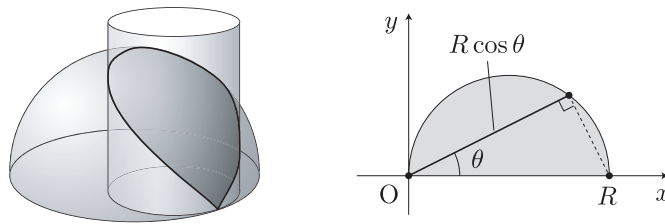
例題 13.4 (円柱で切り取られる球面) 半径 R の半球面

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$$

内で、円柱

$$\left\{ (x, y, z) \mid \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4} \right\}$$

で囲まれる部分の面積を求めよ。



解答 例題 13.3 と同じく $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, とおき, 積分領域として半円板

$$D = \left\{ (x, y) \mid \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}, y \geq 0 \right\}$$

をとる.

極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を用いると, D は $r\theta$ 平面のヨコ線領域

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq R \cos \theta\}$$

を変換したものになるので,

$$\begin{aligned} [\text{求める面積}] &= 2 \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dx dy \\ &= 2R \iint_D \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy \\ &= 2R \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{R \cos \theta} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr \right) d\theta \\ &= 2R \int_0^{\pi/2} \left[-\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^{R \cos \theta} d\theta \\ &= 2R \int_0^{\pi/2} (-R \sin \theta + R) d\theta \\ &= 2R \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = R^2 (\pi - 2). \end{aligned}$$

■

参考：パラメーター付けされた曲面の曲面積の定義

滑らかな曲面. 閉領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を含む開集合上で定義された C^1 関数 $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$ によって定まるベクトル値関数 $\vec{p} = \vec{p}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \in \mathbb{R}^3$ が「滑らかな曲面」であるとは、その s 偏微分 $\vec{p}_s = \vec{p}_s(s, t) = (x_s(s, t), y_s(s, t), z_s(s, t))$ および t 偏微分 $\vec{p}_t = \vec{p}_t(s, t) = (x_t(s, t), y_t(s, t), z_t(s, t))$ が、すべての $(s_0, t_0) \in \Omega$ で

$$\vec{p}_s(s_0, t_0) \times \vec{p}_t(s_0, t_0) \neq \vec{0}$$

を満たすことをいう。 $|\vec{p}_s(s_0, t_0) \times \vec{p}_t(s_0, t_0)|$ は $\vec{p}_s(s_0, t_0)$ と $\vec{p}_t(s_0, t_0)$ が張る平行四辺形の面積を表すことに注意しよう。上記の条件は、そのようにして得られる平行四辺形の面積が 0 にならないことだと解釈できる。しかも、 C^1 級の条件から、そのような平行四辺形は (s, t) の変化に応じて連続的に変化する。

そこで、以下のように定義する：

定義 (曲面の面積) 滑らかな曲面 $S : \vec{p} = \vec{p}(s, t)$ ($(s, t) \in \Omega$) に対し、関数 $\vec{p} = \vec{p}(s, t)$ が 1 対 1 のベクトル値関数であると仮定する。このとき、曲面 S の面積 $\text{Area}(S)$ を重積分

$$\text{Area}(S) := \iint_{\Omega} |\vec{p}_s(s, t) \times \vec{p}_t(s, t)| \, dsdt$$

によって定義する。

注意. また、 $\vec{p} = \vec{p}(s, t)$ がベクトル値関数として C^1 級であることから、被積分関数 $(s, t) \mapsto |\vec{p}_s(s, t) \times \vec{p}_t(s, t)|$ は連続である。 Ω は有界な閉領域であったから、この重積分は存在し、 S の面積はつねに定まる。

参考 (ガウスの記法). $E := \vec{p}_s \cdot \vec{p}_s$, $F := \vec{p}_s \cdot \vec{p}_t$, $G := \vec{p}_t \cdot \vec{p}_t$ とおく。ただし、これらはすべて (s, t) の関数であり、 $E(s, t) := \vec{p}_s(s, t) \cdot \vec{p}_s(s, t)$ などと解釈する。このとき $|\vec{p}_s \times \vec{p}_t| = \sqrt{EG - F^2}$ が成立するので、

$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, dsdt$$

が成り立つ。

クイズのこたえ

問題 12-1. 閉領域 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x + y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x - y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ に対し、積分

$$\iint_D \sin(x + y) \cos(x - y) \, dx dy$$

の値を求めよ.

解答 12-1. 答えは $\frac{1}{2}$.

[解説] (正答率 68.4%) : $x + y = u$, $x - y = v$ とすれば, 変数変換 $(x, y) = \Phi(u, v) = ((u + v)/2, (u - v)/2)$ が定まる. また, そのヤコビアンは $x_u y_v - x_v y_u = -1/4 - 1/4 = -1/2$ である. したがって, $E = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ とすれば,

$$\begin{aligned} \iint_D \sin(x + y) \cos(x - y) \, dx dy &= \iint_E \sin u \cos v \left| -\frac{1}{2} \right| \, du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin u \cos v \, dv \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin u \, du \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos v \, dv \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[-\cos u \right]_0^{\pi/2} \left[\sin v \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

問題 12-2. 閉領域 $D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \}$ に対し、積分

$$\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx dy$$

の値を求めよ.

解答 12-2. 答えは 2.

[解説] (正答率 72.1%) : 極座標変換 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とすれば, D に対応する $r\theta$ 平面上の閉領域として $E = [1, 2] \times [0, 2\pi]$ が得られる. ヤコビアンは r であるから, 求める積分は

$$\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{1}{\sqrt{r^2}} r \, dr d\theta = \frac{1}{\pi} \iint_E 1 \cdot dr d\theta = \frac{1}{\pi} \text{Area}(E) = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2.$$

第 13 回のクイズのこたえ

問題 13-1. 閉領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上の関数 $z = f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ の 3 次元グラフと、 $z = 0$ の 3 次元グラフ (\mathbb{R}^3 の中の xy 平面) で囲まれる部分の体積を S とする。このとき S/π の値を求めよ。

解答 13-1. 答えは $\frac{3}{2}$ 。

[解説] (正答率 62.9%) :

$$\begin{aligned} S &= \iint_D (1 + x^2 + y^2) dx dy = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} (1 + r^2) r dr d\theta = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1 + r^2) r d\theta \right) dr \\ &= \left(\int_0^1 (r + r^3) dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \cdot (2\pi) = \frac{3}{4} \cdot 2\pi. \end{aligned}$$

よって $S/\pi = 3/2$ 。

問題 13-2. 関数 $z = 2x + 5y$ の 3 次元グラフで、円柱 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ と交わる部分の面積を S とする。このとき、 $(S/\pi)^2$ の値を答えよ。

解答 13-2. 答えは 30。

[解説] (正答率 54.3%) : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上の関数 $z = f(x, y) = 2x + 5y$ の 3 次元グラフの (曲) 面積が S である。

$$S = \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy = \iint_D \sqrt{2^2 + 5^2 + 1} dx dy = \sqrt{30} \iint_D 1 \cdot dx dy = \sqrt{30} \text{Area}(D) = \sqrt{30} \pi.$$

よって $(S/\pi)^2 = 30$ 。