

担当教員：川平 友規

この講義について

配布日：9/14/2021 Version：1.1

担当教員：川平 友規 (Kawahira, Tomoki；経済学部，大学院経済学研究科)

本授業の目的およびねらい (シラバスより)：「幾何学 I」「幾何学 II」と合わせて，空間内の曲線と曲面の微分幾何学に関する基本的事柄を学びます．曲線や曲面の「曲がり具合」を定量的に表現する方法を習得し，曲面に関するガウス・ボンネの定理を理解することを目標とします．

講義で扱うトピック (予定)：以下の各項目について 2~3 回かけて解説します．

- 1. 曲線の定義と例
- 2. 曲率と振率，フレネ・セレの公式
- 3. 空間曲線の基本定理
- 4. 曲面の定義と例
- 5. 第一基本形式と第二基本形式
- 6. ガウス曲率と平均曲率
- 7. ガウスの驚異の定理と曲面論の基本定理
- 8. 測地線と測地三角形
- 9. ガウス・ボンネの定理
- 10. 球面幾何学と双曲幾何学

時間に余裕があれば，受講生の興味に応じて，ベクトル場に関するポアンカレ・ホップの定理，等温座標の存在，多様体上の微分幾何学 (上記の理論の一般化・高次元化) 等について概説します．

幾何学 I の講義日 (予定)

幾何学 II の講義日 (予定)

第 1 回	9 月 14 日	火 2 限		第 1 回	11 月 2 日	火 2 限	
第 2 回	9 月 17 日	金 2 限		第 2 回	11 月 5 日	金 2 限	
第 3 回	9 月 21 日	火 2 限		第 3 回	11 月 9 日	火 2 限	
第 4 回	9 月 24 日	金 2 限		第 4 回	11 月 12 日	金 2 限	
第 5 回	9 月 28 日	火 2 限		第 5 回	11 月 16 日	火 2 限	
第 6 回	10 月 1 日	金 2 限			(11 月 19 日)	(金)	(一橋祭で休み)
第 7 回	10 月 5 日	火 2 限		第 6 回	11 月 23 日	火 2 限	(金曜日の振替日)
第 8 回	10 月 8 日	金 2 限		第 7 回	11 月 26 日	金 2 限	
第 9 回	10 月 12 日	火 2 限		第 8 回	11 月 30 日	火 2 限	
第 10 回	10 月 15 日	金 2 限		第 9 回	12 月 3 日	金 2 限	
第 11 回	10 月 19 日	火 2 限		第 10 回	12 月 7 日	火 2 限	
第 12 回	10 月 22 日	金 2 限		第 11 回	12 月 10 日	金 2 限	
第 13 回	10 月 26 日	火 2 限		第 12 回	12 月 14 日	火 2 限	(オンデマンド)
第 14 回	10 月 29 日	金 2 限	期末試験	第 13 回	12 月 17 日	金 2 限	(オンデマンド)
				第 14 回	12 月 21 日	火 2 限	期末試験

担当教員：川平 友規

教科書および参考書：教科書にあたる講義プリントを manaba 上で pdf 形式で配布します。自習用の参考書として、以下を挙げておきます：

- 小林昭七, 『曲線と曲面の微分幾何』, 裳華房
- 梅原雅顕・山田光太郎, 『曲線と曲面 — 微分幾何学的アプローチ』, 裳華房
- 川崎徹郎, 『曲面と多様体』, 朝倉書店
- 千葉逸人, 『ベクトル解析からの幾何学入門』, 現代数学社
- 砂田利一, 『曲面の幾何』, 岩波書店

クイズ：毎週（2 回に 1 度），Google Forms を用いたクイズ（小テスト）を行います。URL は manaba 上で公開します。

成績評価の方法：クイズ（30～50 %）と期末試験（50～70 %）。幾何学 I と幾何学 II はそれぞれ独立に成績をつけます。

質問受付：次の 3 つの方法で質問や問い合わせを受け付けます。

- 授業中や授業後の休み時間に直接質問する。
- クイズのコメント欄に質問を書く。
- 質問を手書きして写真をとり，pdf や jpeg 画像の形でメールに添付する。

よく使う記号など：数の集合

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (1) \mathbb{C} : 複素数全体 | (2) \mathbb{R} : 実数全体 | (3) \mathbb{Q} : 有理数全体 |
| (4) \mathbb{Z} : 整数全体 | (5) \mathbb{N} : 自然数全体 | (6) \emptyset : 空集合 |

ギリシャ文字

- | | | | | |
|-------------------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| (1) α : アルファ | (2) β : ベータ | (3) γ, Γ : ガンマ | (4) δ, Δ : デルタ | (5) ϵ : イプシロン |
| (6) ζ : ゼータ | (7) η : エータ | (8) θ, Θ : シータ | (9) ι : イオタ | (10) κ : カッパ |
| (11) λ, Λ : ラムダ | (12) μ : ミュー | (13) ν : ニュー | (14) ξ, Ξ : クシー | (15) o : オミクロン |
| (16) π, Π : パイ | (17) ρ : ロー | (18) σ, Σ : シグマ | (19) τ : タウ | (20) υ, Υ : ウプシロン |
| (21) ϕ, Φ : ファイ | (22) χ : カイ | (23) ψ, Ψ : プサイ | (24) ω, Ω : オメガ | |

その他

- (1) \leq, \geq は \leq, \geq と同じ意味。
- (2) $x \in X$ と書いたら、「 x は集合 X に属する」すなわち「 x は X の元」という意味。
- (3) 「 \dots をみたく X の元全体の集合」を $\{x \in X \mid (x \text{ に関する条件})\}$ の形で表す。たとえば「 $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ 」
- (4) $X \subset Y$ と書いたら、「集合 X は集合 Y に含まれる」という意味。 $X \subseteq Y$, $X \subseteq\subseteq Y$ も同じ意味。
- (5) $A := B$ と書いたら A を B で定義する，という意味。たとえば $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 。
- (6) (文章 1) : \iff (文章 2) と書いたら，(文章 1) の意味は (文章 2) であることと定義する，という意味。たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 : \iff ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$ 。」

第1回 (9/14) ベクトルの内積・外積

配布日：2021年9月14日 Version：1.1

 n 次元ユークリッド空間

高次元のベクトル空間としてもっとも基本的な「ユークリッド空間」の定義を思い出しておこう。

- n を自然数とし, n 個の実数を並べたもの (a_1, a_2, \dots, a_n) を n 次元数ベクトルもしくは単にベクトル (vector) とよぶ¹. また, その全体からなる集合

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

を n 次元ユークリッド空間 (n dimensional Euclidean space, もしくは n 次元数空間, n 次元数ベクトル空間, n dimensional coordinate space) とよび, \mathbb{R}^n で表す.

- $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ はそれぞれ実数の集合 \mathbb{R} (数直線), xy, xyz 空間と同一視される.
- \mathbb{R}^n の元 $(0, 0, \dots, 0)$ をゼロベクトルとよび, $\mathbf{0}$ と表す. また, n 個のベクトル $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ をそれぞれ e_1, e_2, \dots, e_n と表し, これらをまとめて \mathbb{R}^n の標準基底 (canonical basis) とよぶ.
- $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ を \mathbb{R}^n の元, t を実数とするとき, その和 (sum) を

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),$$

実数倍 (multiple of a real number) を

$$t\mathbf{a} := (ta_1, \dots, ta_n)$$

と定義する.

内積による長さや角度の定義

定義 (内積) \mathbf{a} と \mathbf{b} の内積 (inner product) を

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

で定義する.

この内積は「標準内積」ともよばれる. 定義より, 次のことがわかる (各自確認せよ):

命題 1.1 (内積の性質) $k \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ のとき, 次が成り立つ:

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- (2) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- (3) $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- (4) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$. 等号成立は $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のときに限る.

¹縦ベクトルと横ベクトルの区別はしないが, 必要に応じて $n \times 1$ 行列もしくは $1 \times n$ 行列と解釈することもある.

担当教員：川平 友規

長さ. ベクトル \mathbf{a} のノルム (norm) もしくは長さ (modulus) を次で定める：

$$\|\mathbf{a}\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

また、 \mathbb{R}^n 内の 2 点 \mathbf{a}, \mathbf{b} の距離 (distance) (もしくはユークリッド距離 (Euclidean distance)) は $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ で与えられる。

定理 1.2 任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し、以下が成り立つ：

(1) シュワルツの不等式：

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \quad \text{すなわち} \quad \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right). \quad (1.1)$$

(2) 三角不等式： $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$

証明. (1) $B = \sum_{k=1}^n a_k b_k$, $A = \sum_{k=1}^n a_k^2$, $C := \sum_{k=1}^n b_k^2$ とおくと、示すべき不等式は $B^2 \leq AC$ となる。

$B^2 - AC$ は 2 次関数の判別式の形であることに着目して、変数 t に関する 2 次関数 $f(t) = \sum_{k=1}^n (a_k t - b_k)^2$ を考えよう。明らかに $f(t) \geq 0$ であり、このとき $f(t) = At^2 - 2Bt + C$ と書けることから、(判別式) $4 = B^2 - AC \leq 0$ 。

(2) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2$ 。シュワルツの不等式より $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ であるから、 $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2$ 。 ■

角度. シュワルツの不等式より、 \mathbf{a} と \mathbf{b} がともに $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ でないとき、

$$-1 \leq \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \leq 1$$

であるから、

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

を満たす $\theta \in [0, \pi]$ がただ 1 つ存在する。これを \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角 (角度) とよぶ。

$\theta = \pi/2$ のとき、 \mathbf{a} と \mathbf{b} は垂直であるといい、 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ と表す。また、 $\theta = 0$ あるいは π のとき、 \mathbf{a} と \mathbf{b} は平行であるといい、 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ と表す。

3 次元ベクトルの外積

以下ではおもに 3 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 を考える。3 次元ベクトルには次の「外積」が定義される²：

²覚え方. 外積は高校時代に学んだ人も多いだろう。いろいろと覚え方があるが、ここでは行列式を用いた次の式を紹介する：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = e_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + e_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad “=” \quad \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

最後の式は 3 次行列式の成分に強引に標準基底を入れこんだものだが、余因子展開の式とちゃんとつじつまが合っていて面白い。

定義 (外積) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ に対し, 3次元ベクトル

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

を \mathbf{a} と \mathbf{b} の**外積** (outer product) という.

外積は次のような性質をもつ演算である:

命題 1.3 (外積の性質) k を実数, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ とするとき, 以下が成り立つ:

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, とくに $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.
- (2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.
- (3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.
- (4) $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b})$.
- (5) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

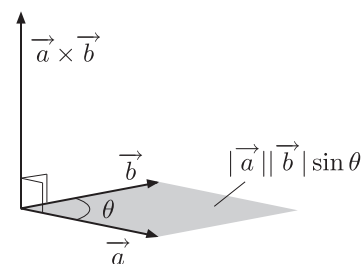
証明は定義に基づいて成分計算をすればよい (省略). さらに, 次のような幾何学的な性質ももつ:

命題 1.4 (外積の幾何学的性質) $\mathbf{0}$ でないベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角度を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする. このとき, 以下が成り立つ:

- (1) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$. とくに, この値は $\mathbf{0}$, \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ を頂点にもつ平行四辺形の面積に等しい.
- (2) ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} が平行 $\iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.
- (3) ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} が平行でないとき, すなわち $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ のとき, 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は \mathbf{a} と \mathbf{b} の両方に垂直.

証明. (1) :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2} \right) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$



(2) (1) より $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ は $\sin \theta = 0$ と同値. これは $\theta = 0$ または π と同値.

(3) 命題 ?? の (5) より明らか. ■

注意. 外積は結合法則 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ を満たさない. (反例をあげてみよ.)

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください.

第2回 (9/17) 平面内の曲線

配布日：2021 年 9 月 17 日 Version : 1.2

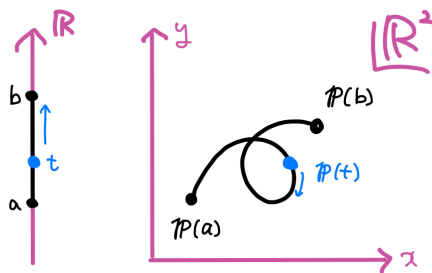
平面内の曲線

以下、 \mathbb{R}^2 を xy 平面とみなす。

時間を表すパラメーター（「時刻」ともよぶ） t を変数とする 2 つの連続関数 $x = x(t)$ と $y = y(t)$ が与えられているとき、 t に依存するベクトル

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

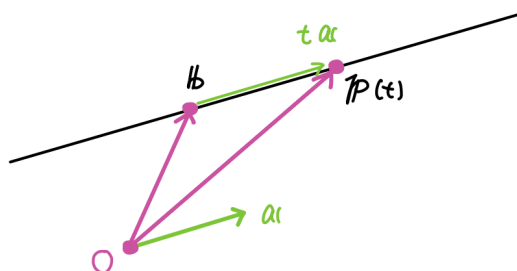
が定まる。時刻 t は数直線 \mathbb{R} のある区間 I を増加する方向に変化するものとするとき、これを「曲線 $\mathbf{p}(t)$ ($t \in I$)」という。実用上は閉区間 $I = [a, b]$ ($a < b$) であることが多く、「曲線 $\mathbf{p}(t)$ ($a \leq t \leq b$)」とも表す。また、理論を組み立てる上では t の変域を気にしない場合も多いので、そのような場合は単に「曲線 $\mathbf{p}(t)$ 」ともいう。



例 1 (直線). $a \neq 0$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{b} + t\mathbf{a} \quad (t \in \mathbb{R})$$

は曲線を定める¹. これは時刻 0 に \mathbf{b} をもち、方向ベクトル \mathbf{a} をもつ「直線 (のパラメーター表示)」である。



例 2 (円) $r > 0$ に対し,

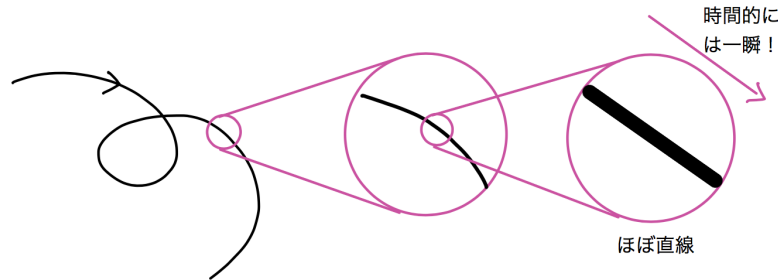
$$\mathbf{p}(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

は曲線を定める。これはいわゆる「円 (のパラメーター表示)」である。

¹ $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ であるとき、 $\mathbf{p}(t) = (b_1 + a_1 t, b_2 + a_2 t)$ と表すことができる。すなわち、 $x = x(t)$, $y = y(t)$ は 1 次関数の形になっている。

速度

与えられた曲線を図のように拡大していくと、(直観的には) ほとんど直線のように見えるであろう。拡大されて直線のように見える部分を $\mathbf{p}(t)$ が通過するのは、ほんの「一瞬」の出来事である。すなわち、ほんの「一瞬」だけみると、曲線は直線のように見えることが期待される。これを数式で表現してみよう。



曲線 $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$ において、関数 $x(t)$, $y(t)$ がそれぞれ変数 t について微分可能であるとする。このとき、各時刻 t に対し

$$\dot{x}(t) := \frac{dx}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$\dot{y}(t) := \frac{dy}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

とおく²。いま、ある特定の時刻 t_0 に対し、 $\Delta t \approx 0$ (十分に 0 に近い、すなわち「一瞬」) のとき

$$\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \approx \dot{x}(t_0) \iff x(t_0 + \Delta t) \approx x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t,$$

同様に $y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \dot{y}(t_0)\Delta t$ が成立している³。したがって、

$$\mathbf{p}(t_0 + \Delta t) = \begin{pmatrix} x(t_0 + \Delta t) \\ y(t_0 + \Delta t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t \\ y(t_0) + \dot{y}(t_0)\Delta t \end{pmatrix} = \mathbf{p}(t_0) + \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix} \Delta t$$

となる。いま $\mathbf{b} = \mathbf{p}(t_0)$, $\mathbf{a} = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0))$, $t = \Delta t$ と思えばこれは例 1 の「直線」 $\mathbf{b} + \mathbf{a}t$ と同じ形をしている。すなわち、曲線上の動点 $\mathbf{p}(t)$ の、各パラメータ t における「一瞬」の動きを捉えれば、それは方向ベクトル $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ の直線のように見えるということである。こうして定まる「ある瞬間の方向ベクトル」

$$\dot{\mathbf{p}}(t) := (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

を曲線 $\mathbf{p}(t)$ の時刻 t における**速度 (ベクトル)** という。

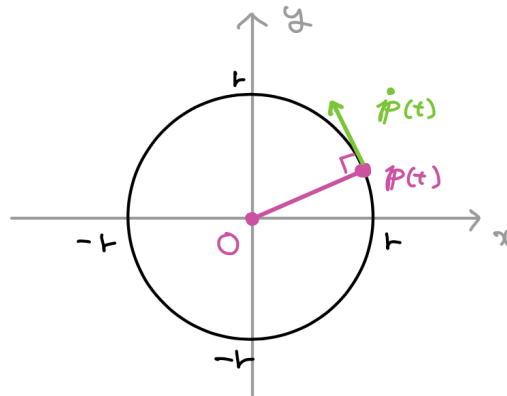
例 3. 例 1 (脚注も参照) の直線 $\mathbf{p}(t) = \mathbf{b} + \mathbf{a}t$ の場合、 $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{a}$ である。

例題 2.1 (円の速度ベクトル) 定数 $r > 0, \omega \neq 0$ によって定まる曲線 $\mathbf{p}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ に対し、速度ベクトル $\dot{\mathbf{p}}(t)$ を求めよ。また、 $\mathbf{p}(t) \perp \dot{\mathbf{p}}(t)$ を示せ。

証明 $\dot{\mathbf{p}}(t) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$ である。 $\mathbf{p}(t) \neq \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{p}}(t) \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) = 0$ は計算からすぐわかるから、 $\mathbf{p}(t) \perp \dot{\mathbf{p}}(t)$. ■

²それぞれ「 x ドット」、「 y ドット」と読む。ニュートンを起源とする由緒正しい記法である。

³ $A \approx B$ は「 A が B で近似される」という文章を数式っぽく書いたものである。厳密な数式ではないが、近似の精度 (誤差) を明確にすることで厳密な数式に移行できる、ということが暗に示唆されている。



曲線の長さ

曲線の長さを考えよう.

定義. 曲線 $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$ ($a \leq t \leq b$) が C^1 級曲線であるとは, 関数 $x(t), y(t)$ が変数 t に関する C^1 級関数であることをいう. すなわち, $\dot{x}(t)$ および $\dot{y}(t)$ が存在し, それぞれ連続関数となることをいう.

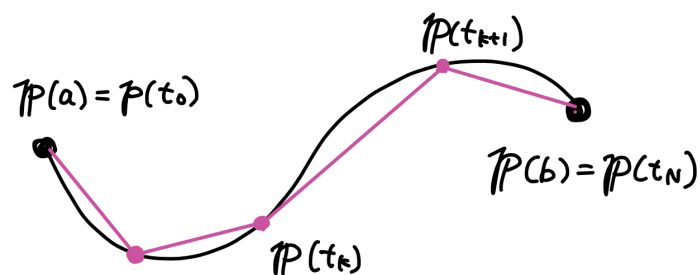
言い換えると, $\mathbf{p}(t)$ の速度 (ベクトル) $\dot{\mathbf{p}}(t)$ が連続に変化するということである. このとき, 速度のノルム

$$\|\dot{\mathbf{p}}(t)\| = \sqrt{\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)} = \sqrt{\{\dot{x}(t)\}^2 + \{\dot{y}(t)\}^2} \geq 0$$

は t の連続関数であるから, 積分

$$\int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt$$

が存在する. これを曲線 $\mathbf{p}(t)$ ($a \leq t \leq b$) の長さもしくは弧長という.



正当化. 上の積分値が曲線の長さとして妥当なものであることを正当化しておく. パラメーター (時刻) の分割点 $\{t_k\}_{k=0}^N$ を $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$ とするとき, 曲線の分割点 $\{\mathbf{p}(t_k)\}_{k=0}^N$ を線分で結んだ「折れ線」は曲線 C を近似していると考えられる. すると, 「曲線の長さ」は「折れ線の長さ」

$$\sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{p}(t_{k+1}) - \mathbf{p}(t_k)\|$$

の分割点を細かくしていった極限だと考えるのが自然であろう. $\Delta t_k := t_{k+1} - t_k > 0$ とおくと, これは N が十分に大きいとき 0 に近づくので (時間的には「一瞬」), 近似式

$$\mathbf{p}(t_{k+1}) \approx \mathbf{p}(t_k) + \dot{\mathbf{p}}(t_k) \Delta t_k$$

担当教員：川平 友規

が成り立つ。よって

$$\sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{p}(t_{k+1}) - \mathbf{p}(t_k)\| \approx \sum_{k=0}^{N-1} \|\dot{\mathbf{p}}(t_k)\| \Delta t_k \rightarrow \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt \quad (N \rightarrow \infty).$$

例 4 (円) 例 2 の円 $\mathbf{p}(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) の長さを求めてみよう。上の例題より $\dot{\mathbf{p}}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ であるから、

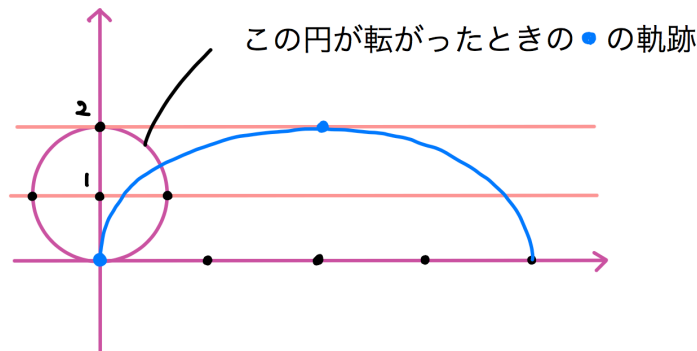
$$[\text{求める長さ}] = \int_0^{2\pi} \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

例題 2.2 サイクロイド $\mathbf{p}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) の長さ ℓ を求めよ。

解答. $\dot{\mathbf{p}}(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ より、

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8. \end{aligned}$$

ここで、 $\cos t = 1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2}$ であること (倍角の公式)、 $0 \leq t \leq 2\pi$ のとき $\sin \frac{t}{2} \geq 0$ であることを用いた。 ■



ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください。

第3回 (9/21) 平面曲線の曲率

配布日：2021 年 9 月 28 日 Version : 1.2

弧長パラメーター

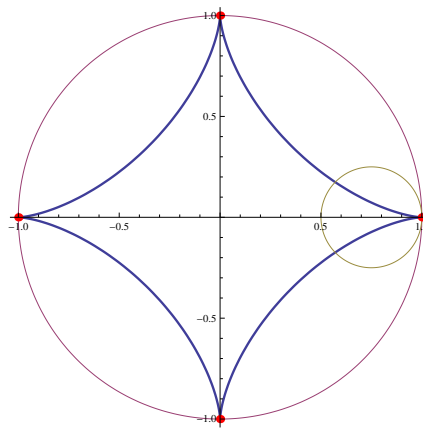
曲線 $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$ ($a \leq t \leq b$) が滑らかであるとは、次の 2 条件を満たすことをいう：

- (i) $x(t), y(t)$ はともに変数 t に関する C^∞ 級関数
- (ii) $\dot{\mathbf{p}}(t) \neq \mathbf{0}$ ($a \leq t \leq b$).

注意. 条件 (i) の「 C^∞ 級」を「 C^r 級」に変えたとき、 $\mathbf{p}(t)$ は正則 C^r 級曲線であるという¹.

以下、曲線 $\mathbf{p}(t)$ は滑らかであることを仮定するが、実際には適当な $r \geq 2$ に対し正則 C^r 曲線であることを仮定すれば十分である.

滑らかではない例. アステロイド $\mathbf{p}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) は条件 (i) は満たすが、 $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ の 4 点に対応する $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ において $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$ となり、(ii) を満たさない.



このように、 $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$ を満たす点においては曲線に「角」(かど)ができる可能性がある. 条件 (ii) はそのような可能性を排除し、必ず接線が存在することを保証する.

弧長パラメーター. 滑らかな曲線 $\mathbf{p}(t)$ ($a \leq t \leq b$) に対し、 $\mathbf{p}(a)$ から $\mathbf{p}(t)$ までの弧長 $s(t)$ は積分

$$s = s(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{p}}(u)\| du$$

で与えられる. このとき、微分積分学の基本定理²より、

$$\frac{d}{dt}s(t) = \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| > 0.$$

であるから、 $s = s(t)$ は真に単調増加 ($t_1 < t_2 \implies s(t_1) < s(t_2)$) である. よって、同じく真に単調増加な逆関数 $t = t(s)$ が存在し、逆関数の微分公式より

$$\frac{dt}{ds}(s) = \left(\frac{ds}{dt}(t(s)) \right)^{-1} = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{p}}(t(s))\|} > 0.$$

¹正則 C^1 級曲線のことを「滑らかな曲線」と呼ぶ流儀もある.

² $f(t)$ が連続であるとき、 $\frac{d}{dt} \int_a^t f(u) du = f(t)$. 積分して微分すると元の関数に戻る、ということ.

担当教員: 川平 友規

を満たす。このとき、

$$\tilde{\mathbf{p}}(s) := \mathbf{p}(t(s)) \quad (0 \leq s \leq \ell)$$

(ただし、 $\ell = s(b)$, 曲線 $\mathbf{p}(t)$ 全体の長さ) で定まる曲線を曲線 $\mathbf{p}(t)$ の弧長パラメーター表示という。

いま、

$$\tilde{\mathbf{p}}'(s) := \frac{d}{ds} \tilde{\mathbf{p}}(s) = \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{p}}(t(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{\mathbf{p}}(t(s))\|}$$

より、 s の値によらず $\|\tilde{\mathbf{p}}'(s)\| = 1$ が成り立つ。すなわち、曲線 $\tilde{\mathbf{p}}(s)$ の速度ベクトルは常に長さ 1 (単位ベクトル) なのである。

注意. 曲線 $\mathbf{p}(t)$ ($a \leq t \leq b$) と $\tilde{\mathbf{p}}(s)$ ($0 \leq s \leq \ell$) は集合としては同じ曲線 (軌跡) を表す。いわば、同じ経路に対し、前者は自動車で加速や減速を繰り返しつつ進むのに対し、後者はゆっくりめの徒歩で、秒速 1 メートルという一定の割合で進む。

例題 3.1 定数 $r, \omega > 0$ を固定する。円 $\mathbf{p}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi/\omega$) に対し、弧長パラメーター表示 $\tilde{\mathbf{p}}(s)$ を求めよ。

解答. $\dot{\mathbf{p}}(t) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$ より、 $\|\dot{\mathbf{p}}(t)\| = r\omega$ がわかる。ゆえに、

$$s(t) = \int_0^t r\omega \, du = r\omega t \iff t(s) = s/(r\omega)$$

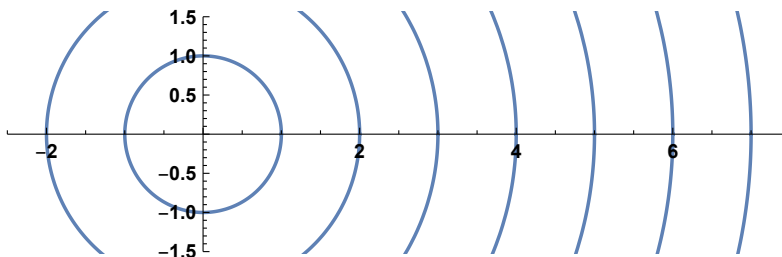
を得る。すなわち、求める弧長パラメーター表示は

$$\tilde{\mathbf{p}}(s) := \mathbf{p}(t(s)) = \mathbf{p}(s/(r\omega)) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right) \quad (0 \leq s \leq 2\pi r).$$

■

注意. $r = 1$ の場合、 $\tilde{\mathbf{p}}(s) := (\cos s, \sin s)$ となる。単位円のもっとも標準的なパラメーター表示だが、すでに弧長パラメーター表示にもなっていることがわかる。

また、円の半径が大きいほど、曲線としての「曲がり具合」は緩やかになる。



曲率の定義

いよいよ曲線の「曲率」を定義するが、その前に準備をしておこう。

内積の微分.

命題 3.1 ベクトル値関数 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(s)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$ がそれぞれ変数 s について微分可能であるとき, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(s) := \mathbf{a}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \in \mathbb{R}$ で定義される関数は s について微分可能であり,

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}'.$$

ただし, $' = \frac{d}{ds}$ である.

この結果は s が弧長パラメーターではなくても一般に成立する.

証明 (その 1). $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, と成分で表示する. 各成分は s に依存する関数であり, $a_1 = a_1(s)$, $a_2 = a_2(s)$ などと書かれるべきものを省略している. 積の微分公式 (ライプニッツ則, $(fg)' = f'g + fg'$) より

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})' = (a_1b_1 + a_2b_2)' = (a_1'b_1 + a_1b_1') + (a_2'b_2 + a_2b_2') = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}'.$$

証明 (その 2) 微分係数の本来の意味³ に即して公式を導いてみよう. 以下は記号 \approx を用いるぶん厳密性に欠けるが, たとえば「ランダウの記号」を用いることで厳密に正当化ができる.

パラメーター s を固定する.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(s + \Delta s) \cdot \mathbf{b}(s + \Delta s) &\approx \{\mathbf{a}(s) + \mathbf{a}'(s)\Delta s\} \{\mathbf{b}(s) + \mathbf{b}'(s)\Delta s\} \\ &= \mathbf{a}(s) \cdot \mathbf{b}(s) + \{\mathbf{a}'(s)\mathbf{b}(s) + \mathbf{a}(s)\mathbf{b}'(s)\}\Delta s + (\mathbf{a}'(s) \cdot \mathbf{b}'(s))\Delta s^2 \end{aligned}$$

より, s における微分係数は $\mathbf{a}'(s)\mathbf{b}(s) + \mathbf{a}(s)\mathbf{b}'(s)$. ■

曲率の定義. 曲線 $\mathbf{p}(s) = (x(s), y(s))$ を弧長パラメータ表示された滑らかな曲線とする (ここでは簡略化のため $\tilde{\mathbf{p}}(s)$ とはしない). このとき,

- $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(s) := \mathbf{p}'(s)$ (弧長パラメーターなのでこれは単位ベクトル).
- $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(s)$: \mathbf{e}_1 を反時計回りに 90 度回転させた単位ベクトル

とする. 成分で表すと,

$$\mathbf{e}_1 = (x', y') \quad \mathbf{e}_2 = (-y', x')$$

であることに注意しておく.

いま, \mathbf{e}_1 は s に依存するが $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \|\mathbf{e}_1\|^2 = 1$ であるから, この式を上命題 3.1 によって微分して

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)' = 0 \iff \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_1 = 0,$$

すなわち $\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_1 = 0$. いま, $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$ であることから, $\mathbf{e}_1' \perp \mathbf{e}_1$ であるか, あるいは $\mathbf{e}_1' = \mathbf{0}$ でなくてはならない. $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_1$ より, ある実数 $\kappa = \kappa(s)$ が存在し,

$$\mathbf{e}_1' = \kappa \mathbf{e}_2 \iff \mathbf{e}_1'(s) = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s)$$

(ただし, $\kappa = 0 \iff \mathbf{e}_1' = \mathbf{0}$) が成り立つ. このようにして導かれる関数 $\kappa = \kappa(s)$ を曲線 $\mathbf{p}(s)$ の曲率といい, 値 $\kappa(s)$ をパラメーター s における曲率ともいう. 次回はこの量の幾何学的な意味を調べていく.

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があれば メール にてご指摘ください.

³ $A = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s + \Delta s) - f(s)}{\Delta s}$ のとき, $\Delta s \approx 0$ であれば $A \approx \frac{f(s + \Delta s) - f(s)}{\Delta s} \iff f(s + \Delta s) \approx f(s) + A\Delta s$ である.

第4回 (9/24) 曲率円

配布日：2021年9月28日 Version：1.2

弧長パラメーター

曲率の定義 (再). 曲線 $p(s) = (x(s), y(s))$ を弧長パラメータ表示された滑らかな曲線とする (ここでは簡略化のため $\tilde{p}(s)$ とはしない). また, ここでは曲線の局所的な性質を考えているので, s の変域はとくに指定しない). このとき,

- $e_1 = e_1(s) := p'(s)$ (弧長パラメーターなのでこれは単位ベクトル).
- $e_2 = e_2(s)$: e_1 を反時計回りに 90 度回転させた単位ベクトル

とする. 成分で表すと,

$$e_1 = (x', y') \quad e_2 = (-y', x')$$

であることに注意しておく.

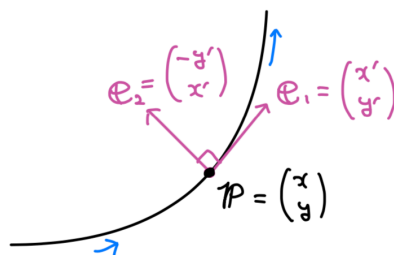
いま, e_1 は s に依存するが $e_1 \cdot e_1 = \|e_1\|^2 = 1$ であるから, この式の両辺を s で微分して

$$(e_1 \cdot e_1)' = 0 \iff e_1' \cdot e_1 + e_1 \cdot e_1' = 2e_1' \cdot e_1 = 0,$$

すなわち $e_1' \cdot e_1 = 0$. いま, $e_1 \neq \mathbf{0}$ であることから, $e_1' \perp e_1$ であるか, あるいは $e_1' = \mathbf{0}$ でなくてはならない. $e_2 \perp e_1$ より, ある実数 $\kappa = \kappa(s)$ が存在し,

$$e_1' = \kappa e_2 \iff e_1'(s) = \kappa(s)e_2(s) \quad (4.1)$$

(ただし, $\kappa = 0 \iff e_1' = \mathbf{0}$) が成り立つ. このようにして導かれる関数 $\kappa = \kappa(s)$ を曲線 $p(s)$ の**曲率**といい, 値 $\kappa(s)$ をパラメーター s における**曲率**ともいう.



命題 4.1 ベクトル $e_1 = e_1(s)$, $e_2 = e_2(s)$ と曲率 $\kappa = \kappa(s)$ は次を満たす.

$$\kappa = e_1' \cdot e_2 = x' y'' - x'' y' \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} e_1' = \kappa e_2 \\ e_2' = -\kappa e_1 \end{cases} \quad (4.3)$$

注意. 式 (4.2) を曲率の定義として採用することもある (そちらのほうがスマートではある). 式 (4.3) は**フルネ (Frenet) の公式**ともよばれ,

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

のように行列の形で書かれることもある.

証明. 曲率の定義式にあたる式 (4.1) $e_1' = \kappa e_2$ の両辺と e_2 の内積をとれば, e_2 が単位ベクトルであることより,

$$e_1' \cdot e_2 = \kappa e_2 \cdot e_2 = \kappa.$$

担当教員：川平 友規

よって式 (4.2) を得る.

式 (4.3) の 1 つ目の式は式 (4.1) そのもの. これを成分で表すと, $e_1' = p''$ より

$$(x'', y'') = \kappa(-y', x') = (-\kappa y', \kappa x')$$

となる. これより,

$$e_2' = (-y', x')' = (-y'', x'') = (-\kappa x', -\kappa y') = -\kappa e_1. \quad \blacksquare$$

曲率の意味. いま, 単位ベクトル $e_1 = e_1(s)$ と $e_2 = e_2(s)$ の始点を原点に移すと, これらは単位円上の動点を定める. その振る舞いを観測してみよう.

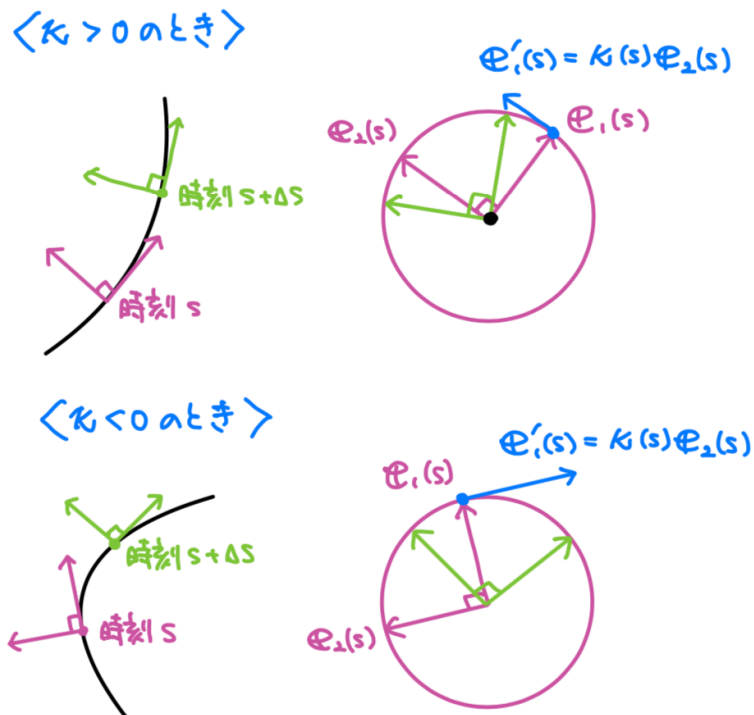
時刻 s を固定し, そこから $\Delta s > 0$ だけ変化したとしよう. このとき, $e_1(s + \Delta s)$ と $e_2(s + \Delta s)$ のペアは $e_1(s)$ と $e_2(s)$ のペアからどのように変化するだろうか. いま, 曲率の定義である $e_1'(s) = \kappa(s)e_2(s)$ という関係式は

「 $e_1(s)$ の単位円上での速度ベクトルは $\kappa(s)e_2(s)$ 」

であることを意味している. すなわち, $\Delta s \approx 0$ のとき

$$e_1(s + \Delta s) \approx e_1(s) + e_1'(s)\Delta s = e_1(s) + \kappa(s)e_2(s)\Delta s$$

という近似式が成り立つ. したがって, e_1 の瞬間的な変化の方向は e_2 と平行であり, その向きは $\kappa(s)$ の正負に, 変化の大きさは $\kappa(s)$ の絶対値に依存することがわかる.



• $\kappa > 0$ のとき: e_1 の瞬間的な変化の方向は e_2 と同じ向きである. e_2 は e_1 を「左へ」90度回転させたものだから, e_1 は左方向に変化する. e_1 は p の速度ベクトルであるから, 曲線は $p(s)$ において左に曲がっていることがわかる.

• $\kappa < 0$ のとき: e_1 の瞬間的な変化の方向は e_2 と逆向きであるから, 曲線は $p(s)$ において右に曲がっていることがわかる.

担当教員：川平 友規

• $\kappa = 0$ のとき： $\kappa = 0$ となるのは、曲線が右から左へ（あるいは、左から右へ）曲がる方向を変えるその瞬間に起きるが、もしずっと $\kappa = 0$ のままだったら、それは直線となる。次の例で確認してみよう。

例（直線, $\kappa = 0$ で一定とき）. 任意の直線は弧長パラメーターを取ることで $\mathbf{p}(s) = \mathbf{b} + \mathbf{a}s$ の形（ただし \mathbf{a} は単位ベクトル）で表現される（理由を考えよ）。 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ と表すと、

$$\mathbf{e}_1(s) = \mathbf{p}'(s) = (b_1 + a_1 s, b_2 + a_2 s)' = (a_1, a_2) = \mathbf{a}.$$

よって

$$\mathbf{e}_1'(s) = (0, 0) = 0 \cdot \mathbf{e}_2(s)$$

を満たすから、 $\kappa(s) = 0$ で一定となる。

逆に、 $\kappa(s) = 0$ で一定であるとき、 $\mathbf{e}_1'(s) = (0, 0)$ よりある定数 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ が存在して $\mathbf{e}_1(s) = (a_1, a_2)$ となる。もし $\mathbf{p}(s)$ が滑らかな曲線であれば $\mathbf{e}_1 = \mathbf{p}' = (a_1, a_2)$ は単位ベクトルであり、成分ごとに s で積分すれば、ある定数 $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ が存在して $\mathbf{p}(s) = (b_1 + a_1 s, b_2 + a_2 s)$ の形となる。以上から、「曲率が 0 で一定であるような滑らかな曲線は直線」であることが示された。

例題 4.1 半径 $r > 0$ の円 $\mathbf{p}(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r})$ の曲率 $\kappa = \kappa(s)$ を求めよ。

解答. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{p}' = (-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r})$ より $\mathbf{e}_2 = (-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r})$. 一方,

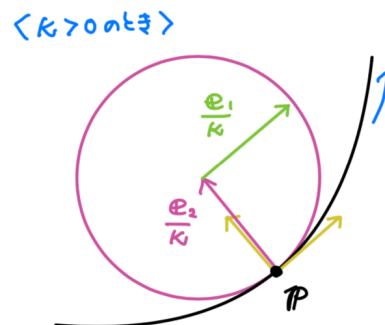
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{p}'' = (-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}) = \frac{1}{r} \mathbf{e}_2$$

となるから、 $\kappa(s) = 1/r$ で一定の値となる。 ■

曲線のテイラー展開と曲率円

曲がりの「大きさ」を感覚的に理解するための補助的な道具として、「曲率円」というものを考えよう。

定義. 弧長パラメーター表示された曲線 $\mathbf{p}(s)$ は $s = s_0$ において $\kappa(s_0) \neq 0$ を満たすものとする。このとき、中心 $\mathbf{p}(s_0) + \frac{\mathbf{e}_2(s_0)}{\kappa(s_0)}$, 半径 $\frac{1}{|\kappa(s_0)|}$ の円を曲線 $\mathbf{p}(s)$ の $\mathbf{p}(s_0)$ における**曲率円**といい、半径 $r = \frac{1}{|\kappa(s_0)|}$ を**曲率半径**という。



例. 半径 $r > 0$ の円の曲率円はその円自身であり、曲率半径はつねに r （確かめてみよ）。

担当教員：川平 友規

テイラー展開と曲率円による曲線の 2 次近似. 弧長パラメータ表示とは限らない一般の滑らかな曲線 $\mathbf{p}(t)$ に対し、ある時刻 t_0 におけるテイラー展開

$$\mathbf{p}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{p}(t_0) + \dot{\mathbf{p}}(t_0)\Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{2!}\Delta t^2 + \dots$$

を考えることができる. \mathbf{p} がベクトルであることを考えると少し違和感があるが, x 成分と y 成分にわけて, それらを C^∞ 級関数としてテイラー展開したものをまとめて書いてだけである. $\Delta t \approx 0$ (経過時間は一瞬) のときの近似式 $\mathbf{p}(t_0 + \Delta t) \approx \mathbf{p}(t_0) + \dot{\mathbf{p}}(t_0)\Delta t$ は成分ごとにみると Δt の 1 次式による近似なので, これを曲線の「1 次近似」という. 幾何学的には, 接線で曲線を近似することに相当する.

いま, $\mathbf{p}(t)$ のかわりに弧長パラメータ表示された $\mathbf{p}(s)$ を考えると, 時刻 $s = s_0$ におけるテイラー展開は次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(s_0 + \Delta s) &= \mathbf{p}(s_0) + \mathbf{p}'(s_0)\Delta s + \frac{\mathbf{p}''(s_0)}{2!}\Delta s^2 + \dots \\ &= \mathbf{p}(s_0) + \mathbf{e}_1(s_0)\Delta s + \frac{\kappa(s_0)}{2!}\mathbf{e}_2(s_0)\Delta s^2 + \dots \end{aligned}$$

これを便宜的に, **弧長テイラー展開**と呼ぶことにしよう. 弧長テイラー展開を用いると, 曲率円は次の定理の意味で, 曲線の「2 次近似」を与えるものであることがわかる:

定理 4.2 (曲率円の性質) 弧長パラメータ表示された曲線 $\mathbf{p}(s)$ と 0 でない曲率を持つ点 $\mathbf{p}(s_0)$ に対し, そこでの曲率円の弧長パラメータ表示 $\mathbf{q}(s)$ を $\mathbf{p}(s_0) = \mathbf{q}(s_0)$ となるようにとる. このとき, $\mathbf{p}(s)$ と $\mathbf{q}(s)$ の $s = s_0$ における弧長テイラー展開は, 2 次の項まで一致する.

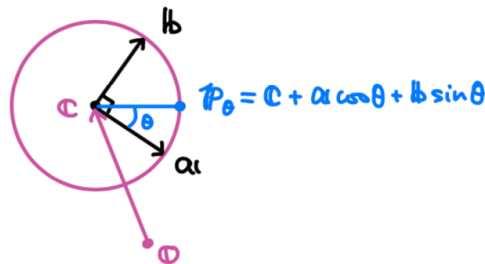
証明. まず, 一般の円のパラメータ表示を求めておく. \mathbf{a} を反時計回りに 90 度回転させて得られるベクトルを \mathbf{b} とするとき, \mathbf{c} を中心とし $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ を通る円は

$$\mathbf{p}_\theta = \mathbf{c} + \mathbf{a} \cos \theta + \mathbf{b} \sin \theta \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

の形で表される (この \mathbf{p}_θ は, $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ から円に沿って角度 θ 進んだ点を表している). $\theta \approx 0$ のときのテイラー展開 $\cos \theta = 1 - \theta^2/2! + \dots$, $\sin \theta = \theta - \theta^3/3! + \dots$ を用いると, θ に関するテイラー展開

$$\mathbf{p}_\theta = \mathbf{c} + \mathbf{a} + \mathbf{b}\theta - \frac{\mathbf{a}}{2}\theta^2 + \dots \quad (4.4)$$

を得る.



いま, 収束円は

$$\mathbf{c} := \mathbf{p}(s_0) + \frac{\mathbf{e}_2(s_0)}{\kappa(s_0)}, \quad \mathbf{a} := -\frac{\mathbf{e}_2(s_0)}{\kappa(s_0)}, \quad \mathbf{b} := \frac{\mathbf{e}_1(s_0)}{\kappa(s_0)}$$

担当教員：川平 友規

とすることで与えられる。また、「 $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ から円に沿って角度 θ 進んだ点 \mathbf{p}_θ 」は、「 $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ から円に沿って弧長 $\Delta s = \frac{1}{\kappa(s_0)} \cdot \theta > 0$ 進んだ点 $\mathbf{q}(s_0 + \Delta s)$ 」とみなせる。とくに、 $\theta = \kappa(s_0)\Delta s$ が成り立つ。

以上のデータを式 (4.4) に代入すると、収束円の弧長パラメータ表示 $\mathbf{q}(s)$ の $s = s_0$ での弧長テイラー展開は

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(s_0 + \Delta s) &= \left(\mathbf{p}(s_0) + \frac{\mathbf{e}_2(s_0)}{\kappa(s_0)}\right) + \left(-\frac{\mathbf{e}_2(s_0)}{\kappa(s_0)}\right) + \frac{\mathbf{e}_1(s_0)}{\kappa(s_0)} \cdot \kappa(s_0) \Delta s - \left(-\frac{\mathbf{e}_2(s_0)}{2\kappa(s_0)}\right) \cdot (\kappa(s_0)\Delta s)^2 + \dots \\ &= \mathbf{p}(s_0) + \mathbf{e}_1(s_0)\Delta s + \frac{\kappa(s_0)}{2!} \mathbf{e}_2(s_0) \Delta s^2 + \dots\end{aligned}$$

これはもとの曲線の弧長テイラー展開の 2 次までの部分と一致する。 ■

一般パラメータ表示による曲率の計算

曲率は弧長パラメータ表示された曲線に対してのみ定義されているが、一般に弧長パラメータを計算することは簡単ではなく、具体的な関数で表現することが不可能な場合も多々ある。そこで、一般の、弧長とは限らないパラメータで表示された曲線に対して（弧長パラメータ表示を計算せずに）曲率を計算する式が次のものである：

定理 4.3 滑らかな曲線 $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$ の時刻 t での曲率 $\kappa(t)$ は

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\|\dot{\mathbf{p}}(t)\|^3} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{3/2}}$$

で与えられる。

証明 (その 1, テイラー展開を比較する方法). $\tilde{\mathbf{p}}(s) = \mathbf{p}(t(s)) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ を $\mathbf{p}(t)$ の弧長パラメータ表示とする。この弧長テイラー展開より、

$$\tilde{\mathbf{p}}(s + \Delta s) - \tilde{\mathbf{p}}(s) = \mathbf{e}_1(s) \Delta s + \frac{\tilde{\kappa}(s)}{2} \mathbf{e}_2(s) \Delta s^2 + \dots \quad (4.5)$$

ただし、 $\tilde{\kappa}(s)$ は曲線 $\tilde{\mathbf{p}}(s)$ の曲率であり、 $\tilde{\kappa}(s) = \kappa(t(s))$ である。一方、 $\mathbf{p}(t)$ のテイラー展開より

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t) \Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t)}{2!} \Delta t^2 + \dots \quad (4.6)$$

となるが、 $t(s + \Delta s) = t + \Delta t$ となるように Δs をとると、式 (4.5) と式 (4.6) の値は一致する。また、 $\frac{dt}{ds}(t) = \|\dot{\mathbf{p}}(t)\|^{-1} =: A_0$ とすると、 $\Delta t = A_0 \Delta s + \dots$ より¹,

$$\mathbf{e}_1(s) \Delta s + \frac{\tilde{\kappa}(s)}{2} \mathbf{e}_2(s) \Delta s^2 + \dots = \dot{\mathbf{p}}(t) (A_0 \Delta s + \dots) + \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t)}{2} (A_0 \Delta s + \dots)^2 + \dots$$

そこで、これらの右辺と $\mathbf{e}_2(s)$ の内積を取ると、 $\mathbf{e}_1(s) \perp \mathbf{e}_2(s)$, $\mathbf{e}_1(s) \parallel \dot{\mathbf{p}}(t)$ より

$$0 + \frac{\tilde{\kappa}(s)}{2} \cdot 1 \cdot \Delta s^2 + \dots = 0 + \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t) \cdot \mathbf{e}_2(s)}{2} \cdot A_0^2 \cdot \Delta s^2 + \dots$$

となる (\dots の部分には Δs^2 よりも高次の項しか現れない)。よって

$$\tilde{\kappa}(s) = \ddot{\mathbf{p}}(t) \cdot \mathbf{e}_2(s) A_0^2 = \{\dot{x}(t)(-\tilde{y}'(s)) + \dot{y}(t)\tilde{x}'(s)\} A_0^2.$$

¹正確には、 $\Delta t = A_0 \Delta s + o(\Delta s)$ ($\Delta s \rightarrow 0$) のように、ランダウの記号を用いて書かれるべきである。ここで関数 $f(x)$ が $f(x) = o(x)$ ($x \rightarrow 0$) であるとは、 $f(x)/x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) となることをいう。

担当教員：川平 友規

いま, $\tilde{x}'(s) = \frac{d}{ds}x(t(s)) = \frac{d}{dt}x(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \dot{x}(t)A_0$ であり, 同様に $\tilde{y}'(s) = \dot{y}(t)A_0$ であるから,

$$\tilde{\kappa}(s) = \kappa(t) = \{-\ddot{x}(t)\dot{y}(t) + \dot{y}(t)\ddot{x}(t)\}A_0^3.$$

よって求める公式を得る. ■

証明 (その 2, 直接計算). 弧長パラメータ表示 $\tilde{\mathbf{p}}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ を用いると, $\tilde{\kappa} = \begin{pmatrix} \tilde{x}'' \\ \tilde{y}'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\tilde{y}' \\ \tilde{x}' \end{pmatrix}$ と表されるのであった. ここで,

$$\begin{aligned} \tilde{x}''(s) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds}x(t(s)) \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{dt}{ds} \cdot \frac{dx}{dt}(t(s)) \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dt}{ds} \right) \cdot \dot{x}(t(s)) + \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d}{ds} \left(\dot{x}(t(s)) \right) \\ &= \frac{d^2t}{ds^2} \cdot \dot{x}(t(s)) + \frac{dt}{ds} \cdot \left(\frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\dot{x}}{dt}(t(s)) \right) \\ &= \frac{d^2t}{ds^2} \cdot \dot{x}(t(s)) + \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \cdot \ddot{x}(t(s)) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}''(s) \\ \tilde{y}''(s) \end{pmatrix} = \frac{d^2t}{ds^2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t(s)) \\ \dot{y}(t(s)) \end{pmatrix} + \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}(t(s)) \\ \ddot{y}(t(s)) \end{pmatrix}.$$

同様に

$$\begin{pmatrix} -\tilde{y}'(s) \\ \tilde{x}'(s) \end{pmatrix} = \frac{dt}{ds} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{y}(t(s)) \\ \dot{x}(t(s)) \end{pmatrix}$$

なので, これら 2 つのベクトルの内積をとれば曲率となる. $\begin{pmatrix} -\dot{y}(t(s)) \\ \dot{x}(t(s)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t(s)) \\ \dot{y}(t(s)) \end{pmatrix} = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} \kappa(t) = \tilde{\kappa}(s(t)) &= \begin{pmatrix} -\tilde{y}'(s(t)) \\ \tilde{x}'(s(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}''(s(t)) \\ \tilde{y}''(s(t)) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \begin{pmatrix} \ddot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{p}}(t)\|^3} \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 (関数のグラフ). $y = f(x)$ のグラフに相当する曲線 $\mathbf{p}(t) = (t, f(t))$ ($t \in \mathbb{R}$) に対し, $\dot{\mathbf{p}}(t) = (1, \dot{f}(t))$, $\ddot{\mathbf{p}}(t) = (0, \ddot{f}(t))$ より, 曲率 $\kappa(t)$ は

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{f}}{\{1 + \dot{f}^2\}^{3/2}}$$

で与えられる.

例 (楕円). $0 < b < a$ を満たす定数 a, b に対し, 楕円 $\mathbf{p}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) を考える. $\dot{\mathbf{p}}(t) = (-a \sin t, b \cos t)$, $\ddot{\mathbf{p}}(t) = (-a \cos t, -b \sin t)$ より, 曲率 $\kappa(t)$ は

$$\kappa(t) = \frac{ab}{\{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t\}^{3/2}}$$

で与えられる.

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください.

第5回 (9/28) 平面曲線の基本定理

配布日：2021 年 10 月 6 日 Version : 1.2

平面曲線の基本定理

次のような問題を考えてみよう。

与えられた C^∞ 級関数 $\kappa = \kappa(s)$ ($0 \leq s \leq \ell$) に対し、これを曲率にもつような平面曲線 $p(s)$ は存在するか？

例 (直線). $\kappa(s) = 0$ (一定) のときは、直線のみがその条件を満たしているのであった。

例 (円). 半径 r の円であれば、曲率は $1/r$ で一定となることは前回確かめた。その逆は成り立つだろうか？すなわち、 $\kappa(s) = 1/r$ (一定) となるのは半径 r の円に限る、ということがいえるだろうか？直観的には、車や自転車のハンドルを左か右に動かしてある場所で固定すると、円運動をするように思われる。

例 (道路やジェットコースターの設計). 高速道路を設計するときに、直線と円をうまくつないでいけばよいようにも思えるが、それだと直線部分から半径 r の円に入った瞬間に曲率が 0 から $1/r$ に不連続に変化するため、ハンドルを急いで回さなくてはならず、ドライバーへの負担が大きい。ジェットコースターも同様で、円と直線ではつなぎ目で乗客に不連続かつ急激な加速が加わり、体に強い負荷がかかってしまう¹。そこで、曲率が 0 から $1/r$ に徐々に変化するような曲線があると望ましい。たとえば、 $\kappa(s) = As$ (A は 0 でない定数) のような形の関数に対し、それを曲率にもつような曲線を求めたくなる。

その存在を保証するのが、次の定理である。

定理 5.1 (平面曲線の基本定理) $\kappa = \kappa(s)$ ($0 \leq s \leq \ell$) を滑らかな C^∞ 級関数とする。このとき、 s を弧長パラメーターとする滑らかな曲線 $p(s)$ ($0 \leq s \leq \ell$) で、以下の 2 条件を満たすものがただ 1 つ存在する：

- (1) 曲線 $p(s)$ の曲率は $\kappa(s)$.
- (2) **正規化条件**： $p(0) = \mathbf{0} = (0, 0)$ かつ $p'(0) = (1, 0)$.

証明 定理のような $p(s) = (x(s), y(s))$ が存在したとしよう。その速度 $e_1(s) = p'(s)$ は滑らかに変化する単位ベクトルであるから、 $e_1(s)$ と $(1, 0)$ がなす角を $\theta(s)$ とすることで、 $e_1(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ のように表現できる。条件 (1) より $s = 0$ のとき $e_1(0) = (1, 0)$ でなくてはならないから、初期条件 $\theta(0) = 0$ を得る。いま、

$$e_1'(s) = p''(s) = \frac{d\theta}{ds}(s) \begin{pmatrix} -\sin \theta(s) \\ \cos \theta(s) \end{pmatrix} = \frac{d\theta}{ds}(s) e_2(s).$$

いま、条件 (1) より $e_1' = \kappa e_2$ でなくてはならないから、 $\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds}(s)$ 。よって、積分して

$$\int_0^s \kappa(u) du = \int_0^s \frac{d\theta}{du}(u) du = \theta(s) - \theta(0) = \theta(s).$$

いま、(1) の条件より $x(0) = y(0) = 0$ となるから、

$$\begin{cases} x'(s) = \cos \theta(s), & x(0) = 0 \\ y'(s) = \sin \theta(s), & y(0) = 0 \end{cases}$$

¹かつてそのように設計されたジェットコースターがニューヨークのコニーアイランドにあって、首を痛める乗客が頻発したといわれている。

担当教員：川平 友規

より, たとえば x について

$$x(s) = \int_0^s x'(v) dv = \int_0^s \cos \theta(v) dv = \int_0^s \cos \left(\int_0^v \kappa(u) du \right) dv$$

となるから,

$$\mathbf{p}(s) = \left(\int_0^s \cos \left(\int_0^v \kappa(u) du \right) dv, \int_0^s \sin \left(\int_0^v \kappa(u) du \right) dv \right)$$

でなくてはならない. すなわち, 条件を満たす $\mathbf{p}(s)$ が一意に定まった. 逆に, この形の $\mathbf{p}(s)$ が定理の条件を満たすことは (計算を逆にたどれば) 簡単にわかる. ■

例 (円). $r > 0$ に対し $\kappa = \kappa(s) = 1/r$ (一定) として, 定理を適用してみよう.

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(u) du = \int_0^s \frac{1}{r} du = \frac{s}{r}$$

より,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(s) &= \left(\int_0^s \cos \frac{v}{r} dv, \int_0^s \sin \frac{v}{r} dv \right) = \left(\left[r \sin \frac{v}{r} \right]_0^s, \left[-r \cos \frac{v}{r} \right]_0^s \right) \\ &= \left(r \sin \frac{s}{r}, r - r \cos \frac{s}{r} \right) \\ &= \left(0, r \right) + \left(r \cos \left(\frac{s}{r} - \frac{\pi}{2} \right), r \sin \left(\frac{s}{r} - \frac{\pi}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

これは $(0, r)$ を中心とする半径 r の円で, 正規化条件 $\mathbf{p}(0) = (0, 0)$, $\mathbf{p}'(0) = (1, 0)$ を満たすものになっている.

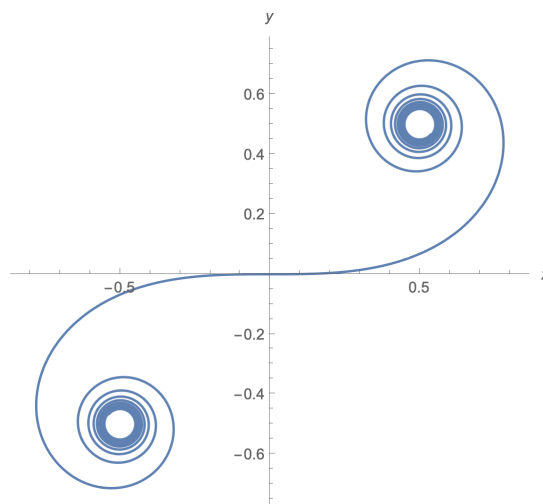
例 (クロソイド曲線). $A > 0$ に対し $\kappa = \kappa(s) = As$ ($0 \leq s \leq \ell$) として, 定理を適用してみよう.

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(u) du = \int_0^s Au du = \frac{A}{2} s^2$$

より,

$$\mathbf{p}(s) = \left(\int_0^s \cos \frac{A}{2} v^2 dv, \int_0^s \sin \frac{A}{2} v^2 dv \right).$$

これらの積分は意味を持ち, ちゃんと C^∞ 級の s の関数が定まるのだが, 原始関数は初等関数 (多項式, 有理式, 三角・指数・対数関数) の組み合わせでは表示できないので, これ以上の計算はできない. ここから先は数値的に解析するしかない. この曲線は**クロソイド曲線** (clothoid curve) と呼ばれる. 次の図は $A = 1$ に対して $\mathbf{p}(s)$ を $-20 \leq s \leq 20$ の範囲で描いたものである.



担当教員：川平 友規

クロソイド曲線は実際に道路やジェットコースターの設計に使われている。

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください。

第 6 回 (10/1) 空間曲線の曲率と捩率

配布日：2021 年 10 月 6 日 Version：1.2

空間曲線と弧長パラメーター

\mathbb{R}^3 内の曲線 $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ($a \leq t \leq b$) が滑らかであるとは、次の 2 条件を満たすことをいう：

- (i) $x(t), y(t), z(t)$ はともに変数 t に関する C^∞ 級関数
- (ii) $\dot{\mathbf{p}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \neq \mathbf{0}$ ($a \leq t \leq b$).

ただし、平面のときと同様に、ドット ($\dot{\cdot}$) はパラメーター t に関する微分 $\frac{d}{dt}$ を表すものとする。

注意. 条件 (i) の「 C^∞ 級」を「 C^r 級」に変えたとき、 $\mathbf{p}(t)$ は正則 C^r 級曲線であるという¹。

以下、曲線 $\mathbf{p}(t)$ は滑らかであることを仮定するが、実際には適当な $r \geq 2$ に対し正則 C^r 曲線であることを仮定すれば十分である。

弧長パラメーター. 空間内の滑らかな曲線 $\mathbf{p}(t)$ ($a \leq t \leq b$) に対し、平面曲線のときと同様に弧長パラメーター $s = s(t)$ を

$$s = s(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{p}}(u)\| du$$

として定める。微分積分学の基本定理より、

$$\frac{d}{dt} s(t) = \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| > 0.$$

であり、真に単調増加かつ微分可能な逆関数 $t = t(s)$ が存在する。このとき、

$$\tilde{\mathbf{p}}(s) := \mathbf{p}(t(s)) \quad (0 \leq s \leq \ell)$$

(ただし、 $\ell = s(b)$ 、曲線 $\mathbf{p}(t)$ 全体の長さ) で定まる曲線を曲線 $\mathbf{p}(t)$ の弧長パラメーター表示という。

いま、平面のときと同様に、弧長パラメーター s による微分を $' := \frac{d}{ds}$ で表すものとする、速度ベクトル $\tilde{\mathbf{p}}'(s)$ は長さ 1 (単位ベクトル) となることに注意しよう..

例題 6.1 (常らせん (常螺旋)) 定数 $a > 0, b \in \mathbb{R}$ を固定する。このとき、曲線 $\mathbf{p}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) に対し、弧長パラメーター表示 $\tilde{\mathbf{p}}(s)$ を求めよ。

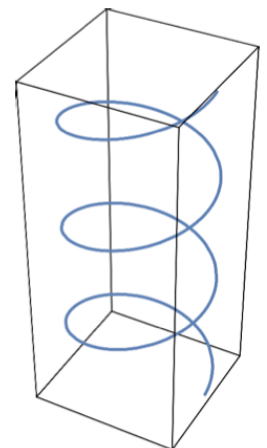
解答. $\dot{\mathbf{p}}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ より、 $\|\dot{\mathbf{p}}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ 。よって、

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

いま $c := \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ とおくと、 $t = s/c$ より、求める弧長パラメーター表示は

$$\tilde{\mathbf{p}}(s) := \mathbf{p}(t(s)) = \mathbf{p}(s/c) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{b}{c} s \right) \quad (0 \leq s \leq 2\pi c).$$

■



¹正則 C^1 級曲線のことを「滑らかな曲線」と呼ぶ流儀もある。

曲率

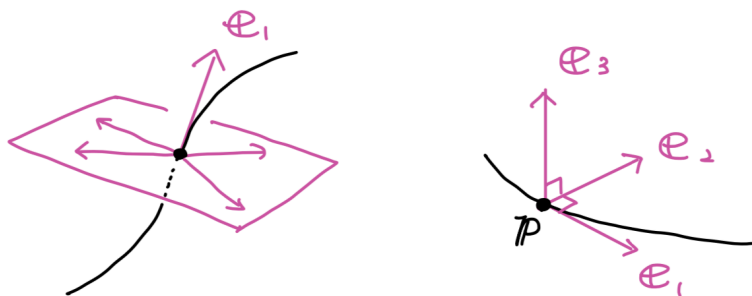
以下、 $p(s)$ で弧長パラメータ表示された滑らかな曲線を表すものとする。また、曲線の局所的な形状を記述したいだけなので、パラメータの変域は特に指定しない。

フルネ標構. 平面の場合と同様に、単位ベクトル e_1 と e_2 を考えよう。

まず、 $p(s)$ が弧長パラメータ表示されていることから、平面ベクトルと同様にその速度ベクトル（長さ 1）を考え、

$$e_1 = e_1(s) := p'(s)$$

とおく。平面曲線の場合はこれを「反時計回りに」90度回転させて e_2 を定めたが、空間曲線の場合はどの向きに90度回転させるべきか、すぐには見当がつかない。



そこで、次のように考える： $e_1 = e_1(s)$ は単位球面の上を動くのだから、平面曲線のときに考察したように、 $e_1'(s)$ は単位球面の e_1 における接平面方向を向いている。すなわち、 e_1 と直交するはずである。実際、

$$\|e_1\| = 1 \iff e_1 \cdot e_1 = 1 \implies 2e_1' \cdot e_1 = 0$$

より、パラメータ s において

- $e_1' \neq 0$ かつ $e_1' \perp e_1$, または
- $e_1' = 0$

のいずれか一方のみが起きる。以下では、パラメータ s において $e_1' = p'' \neq 0$ を仮定しよう。すなわち、 $e_1' \perp e_1$ としてよい。したがって、 e_1' の向きに e_1 を90度回転させて得られる単位ベクトルを e_2 として採用しよう。すなわち、

$$e_2 = e_2(s) := \frac{e_1'(s)}{\|e_1'(s)\|}$$

とする。さらに、曲線 $p(s)$ の**曲率** $\kappa = \kappa(s)$ を

$$\kappa = \kappa(s) := e_1'(s) \cdot e_2(s)$$

によって定義する。この内積は

$$e_1'(s) \cdot e_2(s) = \frac{e_1'(s) \cdot e_1'(s)}{\|e_1'(s)\|} = \|e_1'(s)\|$$

と計算できるから、最初から

$$\kappa = \kappa(s) := \|e_1'(s)\|$$

担当教員：川平 友規

と定義しても同じことである。とくに $e_1' \neq 0$ という仮定より、**曲率はつねに正**になるように定義した²。

さらに、空間曲線特有の第3の方向として、

$$e_3 = e_3(s) := e_1(s) \times e_2(s)$$

を考える。 $\|e_1(s) \times e_2(s)\| = \|e_1(s)\| \|e_2(s)\| \sin(\pi/2) = 1$ より、 e_3 も単位ベクトルである。また、外積の性質より、 e_3 は e_1 と e_2 に直交する。

こうして得られるベクトルの組 $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$ は $p(s)$ における**フルネ標構** (Frenet frame) とよばれ、とくに $e_2(s)$ は**主法線ベクトル**、 $e_3(s)$ は**従法線ベクトル**とよばれる。

注意. フルネ標構は、(始点を原点に持って来れば) \mathbb{R}^3 の正規直交基底をなす。すなわち、任意の $p \in \mathbb{R}^3$ に対し、 $p = xe_1 + ye_2 + ze_3$ を満たす実数の組 x, y, z がただ1つだけ存在する。

捩率

次に、平面曲線にはない、空間曲線特有の量として「捩率」の概念を導入しよう。その幾何学的な意味は次回にまわして、ここでは定義と、ごく基本的な性質のみを述べておく。

いま $e_3 = e_3(s)$ は単位ベクトルなので、先ほどの $e_1 = e_1(s)$ とまったく同じ議論を適用して、

- $e_3' \neq 0$ かつ $e_3' \perp e_3$, または
- $e_3' = 0$

のいずれか一方のみが成立している。さらに、次の補題を準備しておく：

補題 6.1 i と j は 1, 2, 3 のいずれかで、互いに異なるものとする。このとき、

$$e_i' \cdot e_j = -e_i \cdot e_j'$$

証明. $e_i \perp e_j$ より、 $e_i \cdot e_j = 0$ 。この両辺を s を変数とする (定数) 関数とみなし、 s で微分すると、

$$e_i' \cdot e_j + e_i \cdot e_j' = 0 \iff e_i' \cdot e_j = -e_i \cdot e_j'$$

■

この補題を $i = 3, j = 1$ として適用すると、

$$e_3' \cdot e_1 = -e_3 \cdot e_1' = -e_3 \cdot (\kappa e_2) = -\kappa e_3 \cdot e_2 = 0.$$

$e_1 \neq 0$ より、

- $e_3' \neq 0$ かつ $e_3' \perp e_1$, または
- $e_3' = 0$

²平面曲線では、曲率が正なら左回り、負なら右回りという区別ができたが、空間曲線は眺める方向によって右回りにも左回りにも見えるので、正負の区別に大きな意味がないのである。たとえば、遠くに見える観覧車がどちら向きに回っているか、考えてみるとよい。

担当教員：川平 友規

のいずれか一方のみが成り立つことがわかる。以上をまとめると、あるパラメータ s において $e'_3 \neq \mathbf{0}$ であれば、 e'_3 は e_1 と e_3 の両方に直交することになり、それは e_2 に平行でなくてはならない。よって、ある $\tau = \tau(s) \in \mathbb{R}$ が存在し、

$$e'_3(s) = -\tau(s) e_2(s)$$

が成立する³。この等式は $e'_3 = \mathbf{0}$ の場合も $\tau(s) = 0$ とみなすことでカバーしていることに注意しよう。関数 $\tau = \tau(s)$ を曲線 $p(s)$ の**捩率** (れいりつ, torsion) という。

フルネ・セレの公式。 平面曲線の「フルネの公式」にあたるものを導いてみよう。

例題 6.2 $e'_2 = e'_2(s)$ をフルネ標構を用いて $e'_2 = xe_1 + ye_2 + ze_3$ と表すとき、 x, y, z の値を求めよ。

解答 (その 1)。 $e'_2 = xe_1 + ye_2 + ze_3$ の両辺に e_1, e_2, e_3 それぞれとの内積をとる。たとえば、

$$e'_2 \cdot e_1 = xe_1 \cdot e_1 + ye_2 \cdot e_1 + ze_3 \cdot e_1 = x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0 = x.$$

上の補題より

$$x = e'_2 \cdot e_1 = -e_2 \cdot e'_1 = -\kappa.$$

同様に e_2 との内積をとると、

$$e'_2 \cdot e_2 = y$$

を得るが、 e_1 や e_3 と同様に、 $e_2 \cdot e_2 = 1$ の微分を考えることで $e'_2 \cdot e_2 = 0$ 。よって $y = 0$ 。

最後に e_3 との内積をとると、

$$e'_2 \cdot e_3 = z \iff z = -e_2 \cdot e'_3 = \tau.$$

よって、

$$e'_2 = -\kappa e_1 + 0 \cdot e_2 + \tau e_3$$

解答 (その 2)。 一般に、微分可能なベクトル値関数 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(s), \mathbf{b} = \mathbf{b}(s) \in \mathbb{R}^3$ に対し、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}'$$

が成り立つことを用いる⁴。 $e_2 = e_3 \times e_1$ より、

$$e'_2 = e'_3 \times e_1 + e_3 \times e'_1 = (-\tau e_2) \times e_1 + e_3 \times (\kappa e_2) = \tau e_3 - \kappa e_1.$$

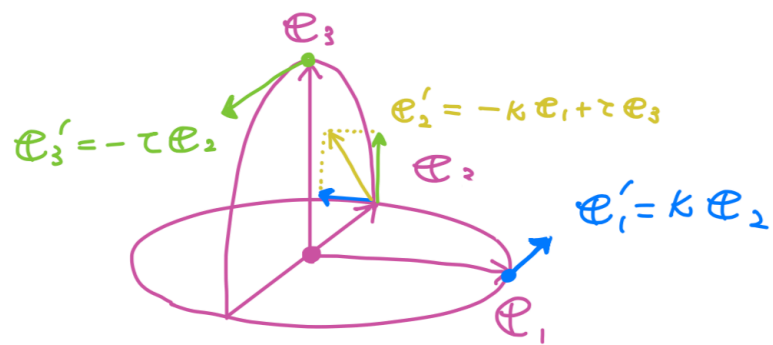
最後の変形では、 $e_2 \times e_1 = -e_3$ 、 $e_3 \times e_2 = -e_1$ を用いた。 ■

これまでに導いた等式 $e'_1 = \kappa e_2$ 、 $e'_3 = -\tau e_2$ と合わせて、次の**フルネ・セレの公式** (the Frenet-Serret formulas) を得る。

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

³習慣的に $e'_3 = \tau e_2$ とはせず、あえてマイナスをつけ $e'_3 = -\tau e_2$ とする。

⁴内積の場合と同様のアイデアで証明できる。たとえば、 $\mathbf{a}(s+\Delta s) \approx \mathbf{a}(s) + \mathbf{a}'(s)\Delta s$ を用いて、 $\mathbf{a}(s+\Delta s) \times \mathbf{b}(s+\Delta s) \approx (\mathbf{a}(s) + \mathbf{a}'(s)\Delta s) \times (\mathbf{b}(s) + \mathbf{b}'(s)\Delta s) = \mathbf{a}(s) \times \mathbf{b}(s) + (\mathbf{a}'(s) \times \mathbf{b}(s) + \mathbf{a}(s) \times \mathbf{b}'(s))\Delta s + \dots$ のように計算すればよい。



ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください.

第7回 (10/5) κ と τ

配布日：2021 年 10 月 7 日 Version : 1.1

曲率と捩率：具体例

前回の復習： 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の弧長パラメータ表示された滑らかな曲線 $p(s)$ に対し、そのフルネ標構を e_1, e_2, e_3 , 曲率と捩率をそれぞれ κ, τ と表す¹. ただし、曲率を定義するために、つねに $e'_1 \neq \mathbf{0}$ であることを仮定しておく.

このとき、次の**フルネ・セレの公式** (the Frenet-Serret formulas) が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

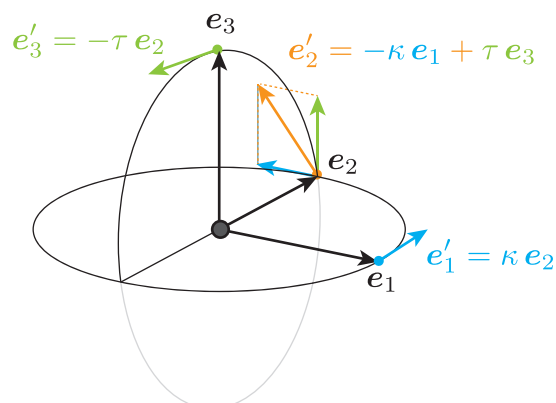
この公式の幾何学的な意味を考えてみよう.

まず、 e_k ($k=1,2,3$) は単位ベクトルなので、単位球面上しか動けない. そのため、パラメータ s による微分 e'_k は $\mathbf{0}$ か、そうでなければ e_k 自身と「垂直な」方向である. とくに、

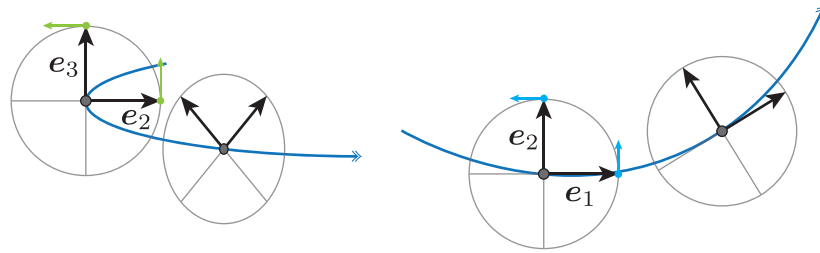
- e'_1 は e_2 と平行 (同じ向き)
- e'_3 も e_2 と平行

という事実から、曲率 κ と捩率 τ が $e'_1 = \kappa e_2$, $e'_3 = -\tau e_2$ を満たす量として定められている (図). 前者は e_1 と e_2 を含む単位円の e_3 を軸にした「右ねじの」回転速度 (図の青い矢印), 後者は e_2 と e_3 を含む単位円の e_1 を軸にした「右ねじの」回転速度 (図の緑の矢印) になっている. e_3 の方向から眺めることで、前者の回転速度は、曲線がどのぐらい「左に」曲がっているかを表すことがわかるし、 e_1 の方向から眺めることで、後者の回転速度は、曲線が進行方向を軸にどの程度「ねじれているか」を表すことがわかる.

一方、 e'_2 はこれらの回転速度の和 (図のオレンジ色の矢印) となるので、 $e'_2 = -\kappa e_1 + \tau e_3$ となるわけである.



¹これらのベクトルや量は弧長パラメータ s に依存しており、 $e_1(s)$, $\kappa(s)$ のように書くべきだが、しばしばこの (s) は省略される. s は時間のパラメータでもあり、すべてのものに時間は流れに応じて変化する. 中には、変化せず不変 (一定) のものもある.



e_1 方向から眺めた「ねじれ」の様子 e_3 方向から眺めた「まがり」の様子

例題 7.1 $a > 0, b \neq 0, c = \sqrt{a^2 + b^2}$ とし、弧長パラメーター表示された常らせん

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{b}{c} s \right) \quad (s \in \mathbb{R})$$

を考える。このとき、そのフルネ標構 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 、曲率 κ 、捩率 τ を求めよ。

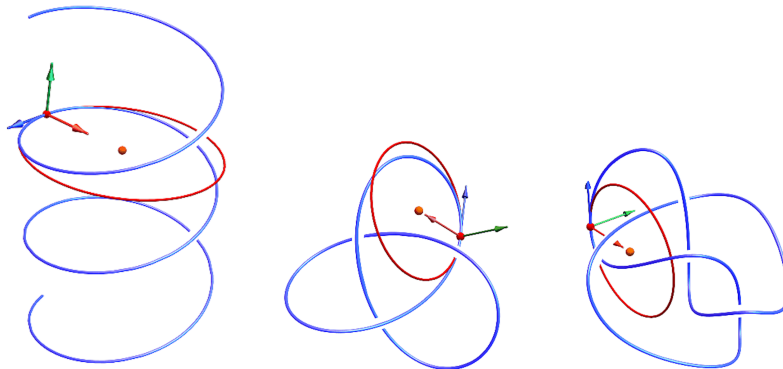
解答. とにかく計算していく。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 = \mathbf{p}' &= \left(-\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right), \\ \mathbf{e}'_1 = \mathbf{p}'' &= \left(-\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right), \\ \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}'_1}{\|\mathbf{e}'_1\|} &= \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right), \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \right), \\ \mathbf{e}'_3 &= \left(\frac{b}{c^2} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right) = -\frac{b}{c^2} \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

よって、

$$\kappa = \|\mathbf{e}'_1\| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

注意. 常らせんの曲率、捩率はともに 0 ではない定数である²。



ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください。

²このことから、常らせんは平面曲線における円(曲率円)のような役割(空間曲線の曲がり方をモデル化するサンプルのようなもの)を果たすのではないかと推察されるのだが、残念ながら常らせんでは表現しきれないファクターが存在するのである。

第 8 回 (10/8) 空間曲線の基本定理

配布日：2021 年 10 月 10 日 Version : 1.2

曲率と捩率：具体例 (つづき)

与えられた曲率や捩率が曲線の形にどのような影響を与えるか考えてみよう。以下、 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ は弧長パラメータ表示された滑らかな曲線とし (パラメータ s の変域はとくに指定しない)、そのフルネ標構を $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(s)$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(s)$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3(s)$, 曲率を $\kappa = \kappa(s)$, 捩率を $\tau = \tau(s)$ で表す。

少しおさらいしておこう。空間曲線に対し曲率を定義するためには (少なくとも、指定されたパラメータ s において) $\mathbf{e}'_1(s) = \mathbf{p}''(s) \neq \mathbf{0}$ であることが必要であった¹。このとき、曲率

$$\kappa = \kappa(s) = \mathbf{e}'_1(s) \cdot \mathbf{e}_2(s) = \|\mathbf{e}'_1\| > 0$$

および捩率

$$\tau = \tau(s) = -\mathbf{e}'_3(s) \cdot \mathbf{e}_2(s) \in \mathbb{R}$$

が定義できる。ここで、曲率の定義を (途中の \mathbf{e}_2 を使った式を無視すれば)

$$\kappa = \kappa(s) = \|\mathbf{e}'_1\|$$

だと思ってしまうと、 $\mathbf{e}'_1(s) = \mathbf{p}''(s) = \mathbf{0}$ の場合も含めて曲率の定義ができる。すなわち、そのような場合は $\kappa(s) = 0$ だとしておくのである。これで、曲線 $\mathbf{p}(s)$ 上のすべての点で曲率 $\kappa(s) \geq 0$ が定まることになった。

例 (直線) もし、曲率が $\kappa = 0$ (一定) だとしたら、曲線はどのような形状になるだろうか。これは $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{p}'' = \mathbf{0}$ (一定) ということである。平面曲線と同様に $\mathbf{p}(s) \in \mathbb{R}^3$ の成分ごとの s の関数を考えると、 $\mathbf{p}''(s) = \mathbf{0}$ (一定) より $\mathbf{p}'(s) = \mathbf{a}$ (一定) となる。とくに、 \mathbf{p} は滑らかな弧長パラメータ表示された曲線だと仮定しているのだから、 \mathbf{a} は単位ベクトルである。さらに、各成分ごとに積分をすれば $\mathbf{p}(s) = \mathbf{b} + \mathbf{a}s$ ($\mathbf{b}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{a}\| = 1$) の形の直線となる。その逆が成り立つことも明らかであろう。

例 (ある平面内の曲線) 以下、 $\mathbf{e}'_1(s) = \mathbf{p}''(s) \neq \mathbf{0}$ を仮定する。

上の例でみた直線は「曲率が 0 で一定」の場合に相当するが、今度は「捩率が 0 で一定」の場合を考えてみよう。じつは、次が成り立つ：

定理 8.1 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ を弧長パラメータ表示された滑らかな曲線とし、曲率 $\kappa = \kappa(s) > 0$ と仮定する。このとき、以下は同値 (互いに必要十分条件) である。

- (i) $\tau = \tau(s) = 0$ (一定)。
- (ii) 曲線 $\mathbf{p}(s)$ はある平面上に含まれる。

証明の前に、3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の平面の一般形について復習しておく (このあと曲面について学ぶ際にも重要になる)。

\mathbb{R}^3 内の平面 Π とは、以下のいずれかの形で与えられる集合である：

(P1) 1次独立なベクトルの組 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ および $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ を用いて、

$$\Pi = \{\mathbf{c} + s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

と表される集合。

¹ベクトル値関数 $s \mapsto \mathbf{e}'(s)$ は連続であるから、ある s_0 において $\mathbf{e}'(s_0) \neq \mathbf{0}$ であれば、その s_0 に十分近い s においても $\mathbf{e}'(s) \neq \mathbf{0}$ が成り立つ。よって、 s_0 をふくむ十分小さな区間においては、曲率を考えることができる。

担当教員：川平 友規

(P2) ある $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ および $k \in \mathbb{R}$ を用いて,

$$\Pi = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = k\}$$

と表される集合.

(P3) ある $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ と $d \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + c + d = 0\}$$

と表される集合.

これら (P1) から (P3) までの条件はすべて同値である (各自証明を考えよ). ここでは, 条件 (P2) を用いて曲線を含む平面を捉えよう.

証明. (i) \implies (ii) を示す. $\mathbf{e}'_3 = \tau \mathbf{e}_2 = 0 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ であるから, \mathbf{e}_3 はある一定な単位ベクトルとなる (直線の例の考え方を参照). そこで, $\mathbf{e}_3 := \mathbf{A}$ とおこう. いま, 関数 $s \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(s)$ を s で微分すると, \mathbf{A} を $s \mapsto \mathbf{A}$ という定ベクトル値関数と思うことで

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p})' = (\mathbf{A})' \cdot \mathbf{p} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}' = 0 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1.$$

\mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_3 は直交するから, この値は 0 で一定である. よって, ある定数 k が存在し, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(s) = k$ となる. これは, $\mathbf{p}(s)$ が条件 (P2) の形で表される平面上にあることを意味する.

次に (ii) \implies (i) を示す. 仮定および条件 (P2) より, ある $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ と $k \in \mathbb{R}$ が存在し, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ が定義されているすべての s に対して $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(s) = k$ が成り立つ. これを s に関する定数関数とみなし, 繰り返し s で微分していこう. まず

$$0 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p})' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1$$

より $\mathbf{A} \perp \mathbf{e}_1$ をえる. さらに微分して,

$$0 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1)' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}'_1 = \mathbf{A} \cdot (\kappa \mathbf{e}_2) = \kappa \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2$$

が成り立つ. $\kappa > 0$ を仮定しているので $\mathbf{A} \perp \mathbf{e}_2$. さらに微分して, フルネ・セレの公式を用いると

$$0 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2)' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}'_2 = \mathbf{A} \cdot (-\kappa \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_3).$$

いま, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ であつたから $\tau \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ でなくてはならない. ベクトル $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ は s によらず \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 の両方と垂直であつたから, \mathbf{e}_3 と平行である. すなわち, ある実数 $c \neq 0$ が存在し, $\mathbf{A} = c \mathbf{e}_3$ と表される². よって $\tau \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3 = \tau c (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) = \tau c \cdot 1$. これが 0 で一定値をとることから, $\tau = 0$ (一定) である. ■

注意. この証明では, 曲率 κ が 0 にならないことを用いていることに注意しよう. 実際, $\kappa = 0$ となる点が 1 つでもあると, この定理は成立しなくなることが知られている (反例が存在する).

空間曲線の基本定理

ジェットコースターのレールや飛行機, 潜水艦の航路を考えたとき, その曲率や捩率が急激に変化することは好ましくない. 空間内の 2 点を結ぶ曲線を考える際にも, これらの量が適切に (できるだけ穏やかに) 変化するように調整できないだろうか. 一般に, 「平面曲線の基本定理」と同様に, 与えられた曲率と捩率をもつ空間曲線が適当な正規化のもとで一意的に存在することが知られている.

² \mathbf{A} は固定されており, \mathbf{e}_3 は単位ベクトルなので, $c = \pm \|\mathbf{A}\|$. 実数 c は s の連続関数になるはずなので, 符号はどちらか一方に定まる. すなわち, s によらず一定値となる.

定理 8.2 (空間曲線の基本定理) $\kappa = \kappa(s) > 0, \tau = \tau(s)$ ($0 \leq s \leq \ell$) を滑らかな C^∞ 級関数とする. このとき, s を弧長パラメータとする滑らかな曲線 $\mathbf{p}(s)$ ($0 \leq s \leq \ell$) で, 以下の 2 条件を満たすものがただ 1 つ存在する:

- (1) 曲線 $\mathbf{p}(s)$ の曲率は $\kappa(s)$, 捩率は $\tau(s)$.
- (2) **正規化条件**: $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ かつ $s = 0$ でのフルネ標構は

$$\mathbf{e}_1(0) = (1 \ 0 \ 0), \quad \mathbf{e}_2(0) = (0 \ 1 \ 0), \quad \mathbf{e}_3(0) = (0 \ 0 \ 1).$$

証明のアイデアは平面曲線の基本定理とおなじで, フルネ・セレの公式をフルネ標構が満たす(線形常)微分方程式とみなし, その解を求めるのである. 求めるといっても, 具体的な表示式があるわけではなく, 微分方程式の一般論から, そのような解の存在と, 初期条件に関する一意性だけが保証される. そうして存在と一意性を保証された解が, 本当に(直交する単位ベクトルからなる)フルネ標構であることを確認し, さらに \mathbf{e}_1 を \mathbf{p}' とみなし, 積分することで定理の条件を満たす \mathbf{p} を得る. 証明の詳細については, 参考文献 ([梅原・山田] など) を参照されたい.

テイラー展開と κ & τ

平面曲線と同様に, 滑らかな曲線の弧長テイラー展開 (漸近展開)

$$\mathbf{p}(s + \Delta s) = \mathbf{p}(s) + \mathbf{p}'(s)\Delta s + \frac{\mathbf{p}''(s)}{2!}\Delta s^2 + \frac{\mathbf{p}'''(s)}{3!}\Delta s^3 + \dots$$

を考えてみよう. ただし, s は定数で, 十分 0 に近い値をとる Δs を変数だと考えている.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(s) &= \mathbf{e}_1(s), \\ \mathbf{p}''(s) &= \mathbf{e}_1'(s) = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s), \\ \mathbf{p}'''(s) &= (\kappa(s)\mathbf{e}_2(s))' = \kappa'(s)\mathbf{e}_2(s) + \kappa(s)\mathbf{e}_2'(s) \\ &= \kappa'(s)\mathbf{e}_2(s) + \kappa(s)\{-\kappa(s)\mathbf{e}_1(s) + \tau(s)\mathbf{e}_3(s)\} \end{aligned}$$

より, つぎのブーケ (Bouquet) の公式をえる:

定理 8.3 (ブーケの公式) 弧長パラメータ表示された滑らかな曲線 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ に対し, $\kappa(s) > 0$ であるとき次が成り立つ: $\Delta s \rightarrow 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(s + \Delta s) &= \mathbf{p}(s) + \mathbf{e}_1(s)\Delta s + \frac{\kappa(s)\mathbf{e}_2(s)}{2!}\Delta s^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}\{-\kappa(s)^2\mathbf{e}_1(s) + \kappa'(s)\mathbf{e}_2(s) + \kappa(s)\tau(s)\mathbf{e}_3(s)\}\Delta s^3 + \dots \end{aligned}$$

注意. 平面曲線と同様に, $\mathbf{p}(s)$ の曲率円として, $\mathbf{p}(s)$ を通り, 中心が $\mathbf{p}(s) + \mathbf{e}_2(s)/\kappa(s)$, 半径が $1/\kappa(s)$ の円で, $\mathbf{e}_1(s)$ と $\mathbf{e}_2(s)$ で張られる平面に含まれるものを考えることができる (したがって, その捩率は 0 で一定である). 平面の場合と同様に計算すれば, この曲率円を適切にパラメータ表示したとき³, もとの曲線と 2 次までの弧長テイラー展開が一致していることがわかる.

³平面の場合と同様の考え方で, 曲率円上を $\mathbf{p}(s)$ から長さ Δs 進んだ点は

$$\mathbf{q}(s + \Delta s) = \mathbf{p}(s) + \frac{\mathbf{e}_2(s)}{\kappa(s)} + \frac{1}{\kappa(s)}\{-\mathbf{e}_2(s)\cos(\kappa(s)\Delta s) + \mathbf{e}_1(s)\sin(\kappa(s)\Delta s)\}$$

と表される.

担当教員：川平 友規

曲率円は曲率が正で一定、捩率が0で一定の曲線であるから、曲率と捩率が一定な「常らせん」を用いると3次までの弧長テイラー展開が一致するようにできそうに思える。しかし、弧長テイラー展開の3次の項の係数には $\kappa'(s)$ が含まれるので、曲率一定の上螺旋ではこの部分が常に0になってしまって、不十分なのである。

いずれにしろ、曲線が特定の平面から出るために必要な「ねじり」に関する情報は、弧長テイラー展開の3次の項にすこし雑多な形で取り込まれている。

参考：成分による表示。 ブーケの公式において、

$$\mathbf{e}_1(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と仮定してみよう。このとき、

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} := \mathbf{p}(s + \Delta s) - \mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \Delta s - \kappa(s)^2 \Delta s^3 + \dots \\ \kappa(s) \Delta s^2 / 2 + \kappa'(s) \Delta s^3 / 6 + \dots \\ \kappa(s) \tau(s) \Delta s^3 / 6 + \dots \end{pmatrix}$$

となる。第1座標について、

$$\Delta s = \Delta x + \kappa(s)^2 \Delta s^3 + \dots = \Delta x + \kappa(s)^2 (\Delta x + \kappa(s)^2 \Delta s^3 + \dots)^3 + \dots = \Delta x + \kappa(s)^2 \Delta x^3 + \dots$$

のように計算できる⁴。この結果を Δy と Δz に代入すると

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \kappa(s) \Delta x^2 / 2 + \kappa'(s) \Delta x^3 / 6 + \dots \\ \kappa(s) \tau(s) \Delta x^3 / 6 + \dots \end{pmatrix}$$

すなわち、曲線の $\mathbf{p}(s)$ のまわりでの形状は、 xy 平面ではほぼ

$$y = \frac{\kappa(s)}{2} x^2 + \frac{\kappa'(s)}{6} x^3$$

のように見えて（この右辺第2項は収束円や常らせんのとき消えてしまう）、 xz 平面ではほぼ

$$z = \frac{\kappa(s) \tau(s)}{6} x^3 + \dots$$

のように見える。

一般パラメーター表示における曲率・捩率

計算は大変だが、弧長とは限らないパラメーター表示がされている曲線に対して、以下の公式が知られている。

⁴このような計算を正当化するには、べき級数の絶対収束性を確認する必要があるが、この場合は問題ない。

定理 8.4 $p(t)$ を (弧長とは限らない) パラメーター t で表示された滑らかな曲線とする. このとき, フルネ標構, 曲率, 捩率は以下の公式によって計算できる.

$$e_1 = \frac{\dot{p}}{\|\dot{p}\|}, \quad e_2 = \frac{(\dot{p} \times \ddot{p}) \times \dot{p}}{\|(\dot{p} \times \ddot{p}) \times \dot{p}\|}, \quad e_3 = \frac{\dot{p} \times \ddot{p}}{\|\dot{p} \times \ddot{p}\|},$$

$$\kappa = \frac{\|\dot{p} \times \ddot{p}\|}{\|\dot{p}\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\dot{p}, \ddot{p}, \ddot{\ddot{p}})}{\|\dot{p} \times \ddot{p}\|^2}.$$

ただし, これらはすべて t の関数であり, $p(t)$ を弧長パラメーター $s = s(t)$ で表示した滑らかな曲線 $\tilde{p}(s)$ に関して, $\tilde{p}(s(t))$ におけるフルネ標構, 曲率, 捩率を与えるものである.

注意. 一般に, $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ のとき, これらを縦ベクトル (3×1 行列) とみなし, 横に並べて得られる 3 次正方行列を (a, b, c) と表す. その行列式を $\det(a, b, c)$ と表し, さらに

$$\det(a, b, c) = (a \times b) \cdot c$$

が成り立つことが簡単な計算で確かめられる.

証明. 弧長パラメーター表示 $p(s)$ の場合に対応する公式を求めて, それを変数変換で一般パラメーター表示の場合にする. 弧長パラメーターの場合, 定義より

$$e_1 = p', \quad \kappa = \|p''\|, \quad e_2 = \frac{p''}{\kappa}, \quad e_3 = e_1 \times e_2 = \frac{p' \times p''}{\kappa}$$

と表される. さらに,

$$\tau = -e_3' \cdot e_2 = -(e_1 \times e_2)' \cdot e_2 = -(e_1' \times e_2 + e_1 \times e_2') \cdot e_2$$

と変形すると, $e_1' \times e_2$ は 0 であるか, あるいは e_2 と垂直なので,

$$\tau = -(e_1 \times e_2') \cdot e_2 = -\det(e_1, e_2', e_2) = \det(e_1, e_2, e_2').$$

ここで, $e_2' = \left(\frac{p''}{\kappa}\right)' = \frac{1}{\kappa} p''' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} p''$ であるから,

$$\tau = \det\left(p', \frac{1}{\kappa} p'', \frac{1}{\kappa} p''' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} p''\right) = \det\left(p', \frac{1}{\kappa} p'', \frac{1}{\kappa} p'''\right) = \frac{\det(p', p'', p''')}{\kappa^2}$$

を得る⁵. つぎに, $p(t)$ の弧長パラメーター $s = s(t)$ を用いて, $\tilde{p}(s) := p(t(s))$, すなわち $p(t) = \tilde{p}(s(t))$ であるとき, 上で得られた公式に微分の変換公式

$$\tilde{p}' = \frac{dt}{ds} \dot{p}, \quad \tilde{p}'' = \frac{d^2t}{ds^2} \dot{p} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \ddot{p}$$

$$\tilde{p}''' = \frac{d^3t}{ds^3} \dot{p} + 3\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right) \ddot{p} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \ddot{\ddot{p}},$$

および $dt/ds = \|\dot{p}\|^{-1}$ を代入していけばよい. (e_2 に関しては $e_2 = e_3 \times e_1$ を用いるとよい.)
まず e_1 について,

$$e_1 = \tilde{p}' = \frac{dt}{ds} \dot{p} = \frac{\dot{p}}{\|\dot{p}\|}.$$

つぎに e_3 について,

$$e_3 = \frac{\tilde{p}' \times \tilde{p}''}{\kappa} = \frac{(dt/ds)^3 \dot{p} \times \ddot{p}}{\kappa} = \frac{\dot{p} \times \ddot{p}}{\|\dot{p}\|^3 \kappa}$$

⁵行列式の一般的な性質 $\det(a, b, c + kb) = \det(a, b, c)$ を用いた.

担当教員：川平 友規

だが、これは単位ベクトルなので

$$e_3 = \frac{\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}}{\|\dot{\mathbf{p}}\|^3 \kappa} = \frac{\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}}{\|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}\|} \iff \|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}\| = \|\dot{\mathbf{p}}\|^3 \kappa \iff \kappa = \frac{\|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}\|}{\|\dot{\mathbf{p}}\|^3}.$$

さらに、 $e_2 = e_3 \times e_1$ を用いると、 e_2 は $(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \times \dot{\mathbf{p}}$ の正の定数倍であることがわかり、単位ベクトルとなることから

$$e_2 = \frac{(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \times \dot{\mathbf{p}}}{\|(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \times \dot{\mathbf{p}}\|}$$

と表される。最後に τ について、行列式の性質より

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\det(\tilde{\mathbf{p}}', \tilde{\mathbf{p}}'', \tilde{\mathbf{p}}''')}{\kappa^2} = \frac{1}{\kappa^2} \det\left(\frac{dt}{ds} \dot{\mathbf{p}}, \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \ddot{\mathbf{p}}, \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \ddot{\mathbf{p}}\right) \\ &= \left(\frac{\|\dot{\mathbf{p}}\|^3}{\|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}\|}\right)^2 \cdot \frac{\det(\dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}})}{\|\dot{\mathbf{p}}\|^6} = \frac{\det(\dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}})}{\|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}\|^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください。

第9回 (10/12) 滑らかな曲面

配布日：2021 年 10 月 25 日 Version : 1.1

「滑らかな曲線」とは何だったか

以下, a, b を $a < b$ を満たす実数とする.

「曲線」とは, xyz 空間 \mathbb{R}^3 内の「曲線」とは,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

の形のベクトル値関数で, 各成分 x, y, z は t に関して連続であるようなものをいうのであった. しかし, このままでは私たちが「曲線」とは呼びたくないような集合まで「曲線」となってしまう. (たとえば, 「角 (かど)」があったり, 「ペアノ曲線」のような病的なものまで含んでしまう.)

そこで, 「滑らかな曲線」という概念を考えた. すなわち,

- x, y, z は t の C^∞ 級関数.
- $\dot{\mathbf{p}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \neq \mathbf{0} \quad (a \leq t \leq b)$

と仮定する. これによって, 曲線上の各点において「接線」を考えることができ, しかもそれが「滑らかに」変化してくれるのであった. たとえば, パラメーター t を固定し定数とみなしたとき, $\Delta t \approx 0$ (パラメーターの「一瞬」の変化量を表す) とすると,

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) \approx \mathbf{p}(t) + \dot{\mathbf{p}}(t)\Delta t$$

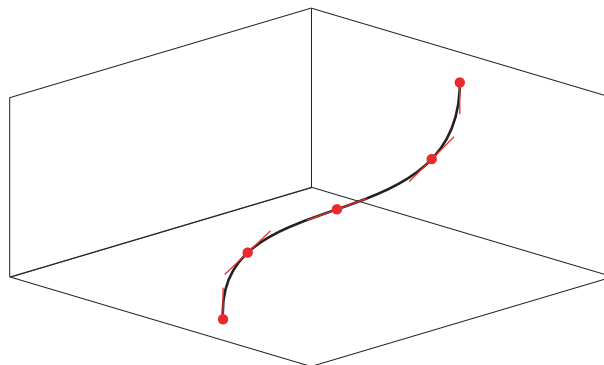
という近似式が成立しており, 局所的に (あるいは, 「一瞬」の変化においては) 曲線の動きが直線的であることを示唆している. この右辺を Δt のベクトル値関数とみなした

$$\mathbf{q}(\Delta t) = \mathbf{p}(t) + \dot{\mathbf{p}}(t)\Delta t \quad (\Delta t \in \mathbb{R})$$

が接線のパラメーター表示である¹. この接線を決定する「係数」にあたる $\mathbf{p}(t)$ と $\dot{\mathbf{p}}(t)$ は滑らかに変化する (x, y, z 各成分が t の滑らかな関数) ので,

接線がすべての点で存在し, 滑らかに変化する

ことがわかる.



¹ここでは, あとの議論との整合性のために, あえて Δt をパラメーターとして用いている.

「滑らかな曲面」への準備

以上をふまえて、「曲面」と「滑らかな曲面」を定義しよう。

以下、曲面を表示するために用いるパラメーターとしておもに $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ を用いることとし、 \mathbb{R}^2 も適宜 uv 平面とみなす。また、 D を \mathbb{R}^2 内の領域とする。ここで、「領域」とは連結な開集合のことである²。

定義 (\mathbb{R}^3 内の曲面) 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ でパラメーターづけられた曲面もしくは曲面片とは、3つの連続関数 $x, y, z: D \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

のように表される D 上のベクトル値関数のことをいう。

注意. また、この関数の像にあたる集合

$$S = \{\mathbf{p}(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in D\}$$

も曲面(片)とよばれる³。この意味で、複数の曲面(片)の和集合(貼り合わせ)として表される集合もまた曲面という。

例 (グラフ). $z = f(x, y)$ を領域 D 上の連続関数とする。このとき、

$$\mathbf{p}(u, v) := (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

は曲面を定める。これは、関数 $f(x, y)$ の「グラフ」として得られる曲面である。しかし、 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ や $z = |x|$ のグラフを考えるとわかるように、円錐の頂点のような「角(ツノ)」や、板を折ったような「角(かど)」があるかもしれない。そこで、「滑らかな曲線」を定義したときを参考に

「接平面」がすべての点で存在し、滑らかに変化する

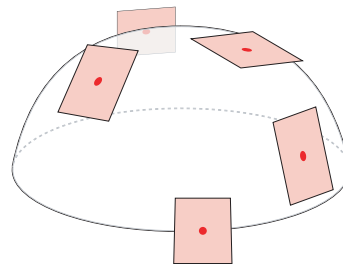
ような条件を加えよう。

まずは準備から。

[1 次独立性と外積.] ふたつのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ が **1 次独立** (linearly independent) であるとは、ともにゼロベクトル $\mathbf{0}$ ではなく、平行でもないことをいうのであった⁴。

このとき、次が成り立つ：

命題 9.1 (1 次独立性と外積) \mathbb{R}^3 内のふたつのベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} が 1 次独立であることの必要十分条件は $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立つことである。



²開集合とは境界点を含まない集合のことであり、連結な開集合とは、その中の任意の2点を結ぶ折れ線が、その集合の中に存在することをいう。

³その場合は $S: \mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) \ ((u, v) \in D)$ のようにも表す。

⁴線形代数では $A\mathbf{a} + B\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ならば $A = B = 0$ と学んだと思うが、それと同値である(確認せよ)。

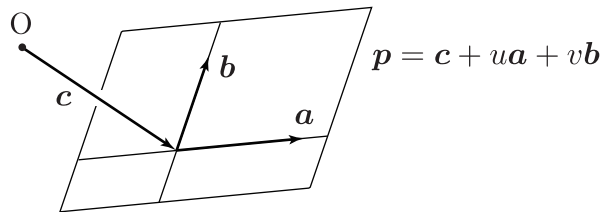
担当教員：川平 友規

証明. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = 0$. これは、「 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ かつ $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta \neq 0$ (θ は \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角)」と同値. さらに $\sin \theta \neq 0 \iff \theta \neq 0, \pi$ であるから、「 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 」 \iff 「 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ かつ \mathbf{a} と \mathbf{b} が平行ではない」が示された. ■

平面の一般形 1次独立なベクトルの組 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ と $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ が与えられたとき、「 \mathbf{c} を通り \mathbf{a} と \mathbf{b} で張られる平面」のパラメーター表示は

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) = \mathbf{c} + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

で与えられる.



「滑らかな曲面」の定義

次のようなアナロジーに基づいて、「滑らかな曲面」を定義をする：

滑らかな曲線	滑らかな曲面
区間上のベクトル値関数 $\mathbf{p}(t)$	領域上のベクトル値関数 $\mathbf{p}(u, v)$
C^∞ 級	?
$\dot{\mathbf{p}}(t) \neq \mathbf{0}$?
各点で接線が存在	各点で接平面が存在
接線は連続に動く	接平面は連続に動く

定義 (滑らかな曲面) \mathbb{R}^3 内の曲面

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

が滑らかな曲面 (smooth surface) であるとは,

- x, y, z が (u, v) の C^∞ 級関数であり, かつ
- すべての $(u, v) \in D$ において $\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v \neq \mathbf{0}$. ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_u &= \mathbf{p}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)), \\ \mathbf{p}_v &= \mathbf{p}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)). \end{aligned}$$

注意. 「 C^∞ 級」を「 C^r 級」に変えたものを**正則 C^r 級曲面**という. 以下の議論は, 十分に大きな r に対して正則 C^r 級曲面を考えれば十分である.

注意 (記号). 偏微分 \mathbf{p}_u はとは (ベクトルの) 極限

$$\mathbf{p}_u(u, v) := \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}(u + \Delta u, v) - \mathbf{p}(u, v)}{\Delta u} \in \mathbb{R}^3$$

担当教員：川平 友規

として直接定義することもできる. p_v についても同様.

ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください.

第 10 回 (10/15) 接平面と曲面積

配布日: 2021 年 10 月 30 日 Version: 1.2

滑らかな曲面と接平面

以下, \mathbb{R}^3 内の滑らかな曲面

$$S: \mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

を考える (ただし, S は \mathbf{p} が動いて得られる集合としての曲面). すなわち, 以下を仮定する:

- x, y, z が (u, v) の C^∞ 級関数であり, かつ
- すべての $(u, v) \in D$ において $\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v \neq \mathbf{0}$. ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_u &= \mathbf{p}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)), \\ \mathbf{p}_v &= \mathbf{p}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)). \end{aligned}$$

「滑らかな曲線」と同様に, その各点において「接平面」が定義でき, 滑らかに変化することを確認しよう.

2 変数のテイラー展開. 準備として, C^∞ 級 2 変数関数 $x = x(u, v)$ のテイラー展開を思い出しておく. (u, v) を固定し定数 (定ベクトル?) と思い, $(\Delta u, \Delta v)$ を微小な変化量¹ とするとき,

$$\begin{aligned} x(u + \Delta u, v + \Delta v) &= \frac{x(u, v) + x_u(u, v)\Delta u + x_v(u, v)\Delta v +}{+ \frac{1}{2!} \{x_{uu}(u, v)\Delta u^2 + 2x_{uv}(u, v)\Delta u\Delta v + x_{vv}(u, v)\Delta v^2\} + \dots} \end{aligned}$$

が成り立つのであった (... の剰余項にあたる部分は省略したが, 一応, 教科書等で確認しておくこと). ひとまず下線部の 1 次の展開部分に着目しよう. y, z についても同様の展開ができるので, それらを組み合わせて近似式

$$\mathbf{p}(u + \Delta u, v + \Delta v) \approx \mathbf{p}(u, v) + \mathbf{p}_u(u, v)\Delta u + \mathbf{p}_v(u, v)\Delta v$$

を得る. いま $\mathbf{p}_u = \mathbf{p}_u(u, v)$ と $\mathbf{p}_v = \mathbf{p}_v(u, v)$ は 1 次独立なので, 右辺は $\mathbf{p}(u, v)$ を通り, \mathbf{p}_u と \mathbf{p}_v で張られる平面 (前回のノート参照) になっている. すなわち,

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\Delta u, \Delta v) = \mathbf{p}(u, v) + \mathbf{p}_u(u, v)\Delta u + \mathbf{p}_v(u, v)\Delta v \quad ((\Delta u, \Delta v) \in \mathbb{R}^2)$$

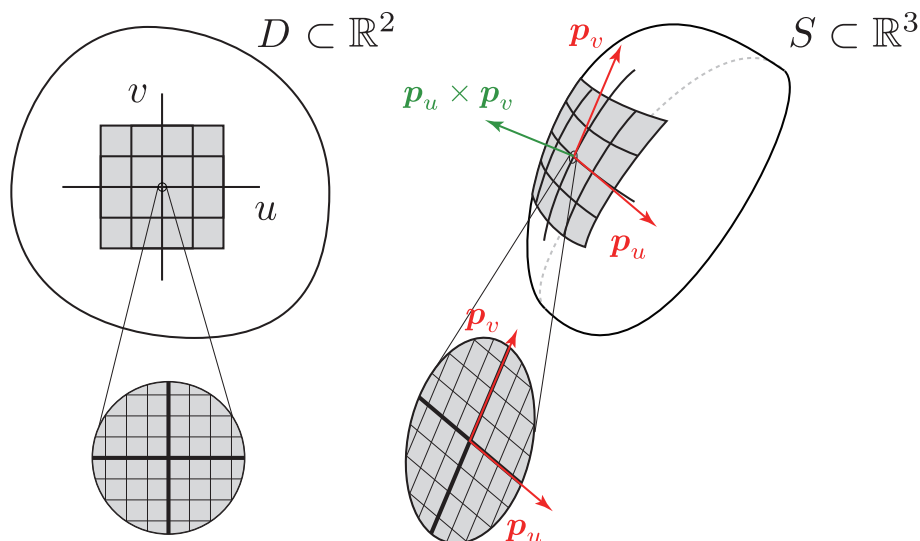
と表される平面である. これを $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$ における**接平面**という.

注意. 接平面の法線ベクトルとして外積 $\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v$ を取ることができる. 実際, このベクトルは \mathbf{p}_u と \mathbf{p}_v に直交するため, 接平面上の任意の (位置) ベクトル $\mathbf{q} = \mathbf{p}(u, v) + \mathbf{p}_u(u, v)\Delta u + \mathbf{p}_v(u, v)\Delta v$ に対し

$$\mathbf{q} - \mathbf{p}(u, v) = \mathbf{p}_u(u, v)\Delta u + \mathbf{p}_v(u, v)\Delta v$$

は $\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v$ と直交する.

¹ uv 平面上の動点の, ある一瞬の変化量.



曲面積

$\Delta u > 0, \Delta v > 0$ とし、これらが十分に小さいと仮定する。このとき、パラメータが u から $u + \Delta u$ まで、 v から $v + \Delta v$ までの範囲を動いて得られる曲面の「ひとかけ」は、 \mathbf{p} を始点とし、 $\mathbf{p}_u \Delta u$ と $\mathbf{p}_v \Delta v$ によって張られる平行四辺形（これは、接平面の「ひとかけ」）によって近似される。このことから、曲面のその部分の面積を

$$\|\mathbf{p}_u \Delta u\| \|\mathbf{p}_v \Delta v\| \sin \theta = \|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\| \Delta u \Delta v$$

(ただし、 θ は \mathbf{p}_u と \mathbf{p}_v のなす角) によって近似するのは自然であろう。そこで、曲面の(一部分の)面積を次のように定義する：

定義 (曲面積). K を D 内のコンパクト (有界かつ閉) な集合とする。このとき、曲面 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$ の K に対応する部分 (K でパラメーターづけされる部分)

$$S_K := \{\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in K\}$$

の**曲面積**もしくは単に**面積**を

$$\text{Area}(S_K) := \int_K \|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\| \, du dv$$

と定義する。

例 (グラフの面積). $z = f(x, y)$ を領域 D 上の C^∞ 関数とし、

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

とする。このとき、

$$\mathbf{p}_u = (1, 0, f_x(u, v)), \quad \mathbf{p}_v = (0, 1, f_y(u, v))$$

より、その外積は

$$\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v = (-f_x(u, v), -f_y(u, v), 1)$$

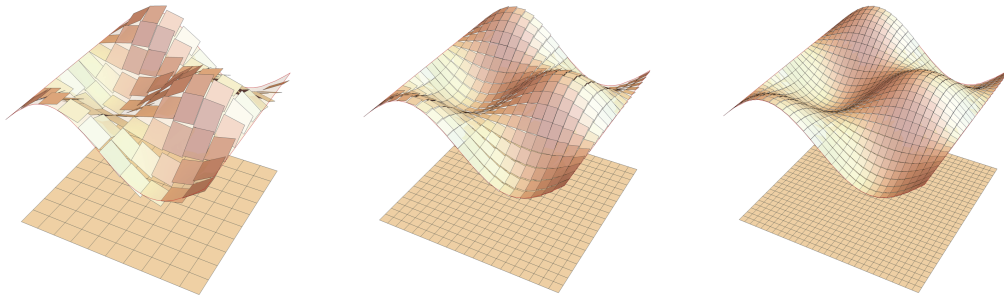
となる。 z 成分が 1 なので、これは決して $\mathbf{0}$ とはならない。すなわち、滑らかな曲面を定める。

担当教員：川平 友規

いま、コンパクト集合 $K \subset D$ に対し、対応する部分の曲面積は

$$\text{Area}(S_K) = \int_K \|(-f_x(u, v), -f_y(u, v), 1)\| \, dudv = \int_K \sqrt{f_x(u, v)^2 + f_y(u, v)^2 + 1} \, dudv$$

となる。



ボーナス問題 (+1 point). このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください。

第 11 回 (10/19) 滑らかな曲面の地図づくり

配布日：2021 年 10 月 30 日 Version : 1.1

滑らかな曲面の例：球面

以下、 \mathbb{R}^3 内の滑らかな曲面の具体例として「球面」を考える。これを「地球」の表面に見立てて、地図を作ることを考えてみよう。 $r > 0$ を定数として、

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

という方程式で定まる集合が「原点中心、半径 r の球面」であった¹。

地図の考え方. ここで、

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \quad ((u, v) \in D)$$

という形の滑らかな曲面があれば、これは

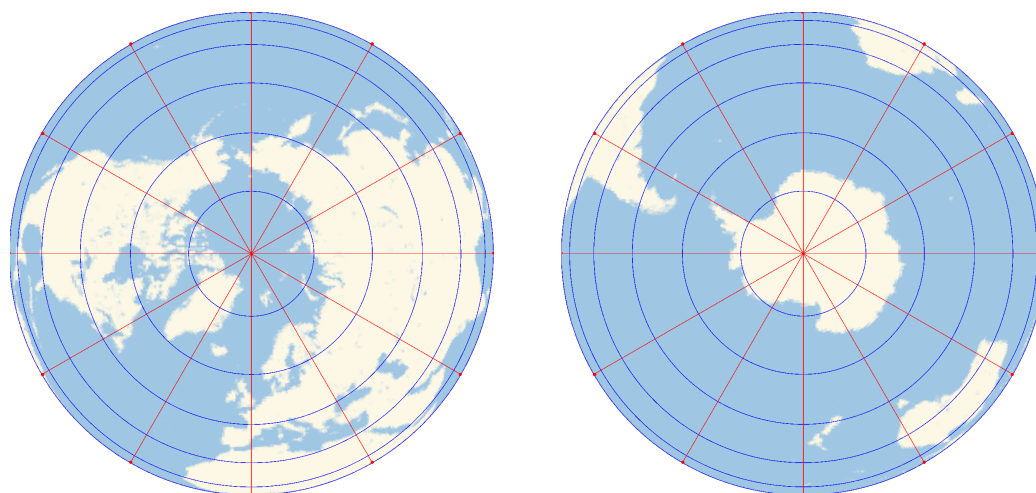
曲面 S 上の点 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$ を平面領域 D 上の (u, v) に写し取っている

と考えられる。 S が地球の表面であれば、実際の大陸や海、都市、道路といったものが、 \mathbb{R}^2 の部分領域である D に $(u, v) \mapsto \mathbf{p}(u, v)$ という写像を通して情報として記録されていると考えられる。したがって、 D は S の一部を表現した「地図」だと考えて良い。そのような具体例を考えよう。

グラフ表示. いま、方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ を $z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ と 2 つの関数の形で表現してみよう。領域 D_+ と D_- をいずれも単位円版 $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ とすると（境界である単位円は含まないことに注意）、

$$S_{\pm}: (u, v, \pm\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}) \quad ((u, v) \in D_{\pm})$$

は滑らかな曲面を定める。 S_+ と S_- は、 S の「赤道」($z = 0$) を除いて得られる「北半球」($z > 0$) と「南半球」($z < 0$) にそれぞれ対応する。このとき、写像 $(u, v) \mapsto \mathbf{p}(u, v)$ は $(x, y, z) \in S_{\pm}$ を $(x, y, 0)$ に射影して得られる「地図」に対応する。これは「垂直投影」とよばれる図法に対応する。



¹ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ というのが正しい書き方だが、それを略記したものと考えればよい。

担当教員：川平 友規

極表示. つぎに, パラメーター u と v を「緯度」と「経度」に見立た地図づくりをしよう.

方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ において, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ と置いてみる. このとき $\rho^2 + z^2 = r^2$ と書き直せるから, $\rho \geq 0$ より, ある u で $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ を満たすもの(「緯度」)がただ 1 つ存在して,

$$\rho = r \cos u (\geq 0), \quad z = r \sin u$$

が成り立つ.

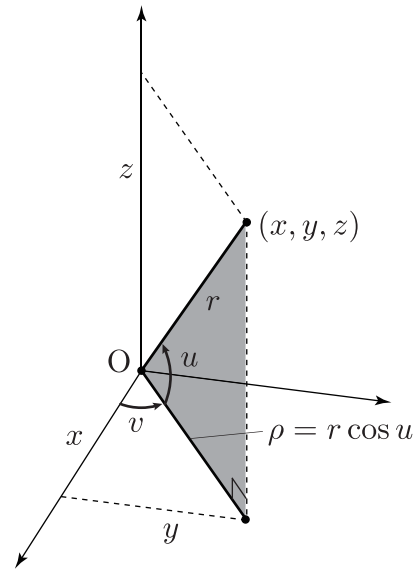
一方, $x^2 + y^2 = \rho^2$ より, ある $v \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v$$

が成り立つ. もし, $-\pi < v \leq \pi$ と制限すれば, そのような v はただ 1 つに定まる(「経度」). したがって, 関係式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \cos u \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}$$

を得る.



例題 11.1 領域 $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid |u| < \pi/2\}$ でパラメーターづけられた曲面

$$S^* : \mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \cos u \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix} \quad ((u, v) \in D)$$

は滑らかな曲面を定めることを確認せよ.

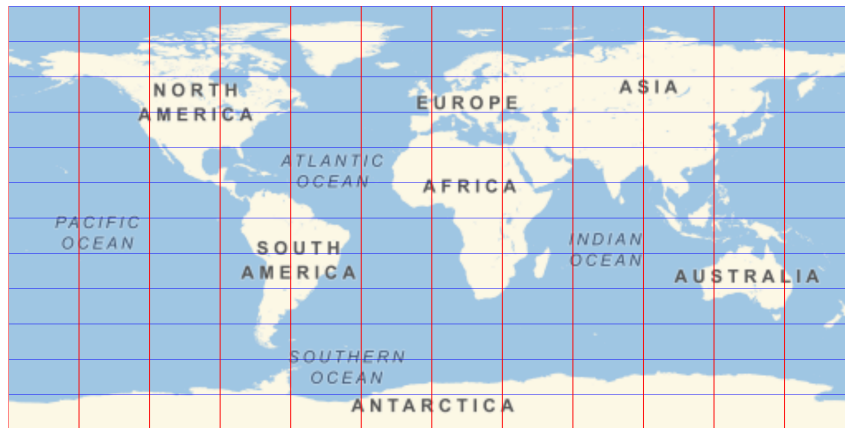
解答.

$$\mathbf{p}_u = r \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_v = r \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v = r^2 \cos u \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = r^2 \cos u \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} = -(r \cos u) \mathbf{p}(u, v).$$

いま, $|u| < \pi/2$ (= を含まない!) より $r \cos u > 0$ が成り立つから, $\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v \neq \mathbf{0}$. すなわち, S^* は滑らかな曲面である. ■

**注意.**

- $u \neq \pi/2$ より, S^* は $(0, 0, 1)$ および $(0, 0, -1)$ を含まない. すなわち, S から「北極点」と「南極点」を除いた部分をカバーする地図になっている.
- ただし, v の範囲には制限をつけていないので, たとえば S^* 上のある 1 点 (「東京」) に対応する点 D 上の点は無数に存在する. 実用上は D に適当な制限 (たとえば, $-1.1\pi < v < 1.1\pi$) をつければよい.
- これに「北半球」 S_+ , 「南半球」 S_- の地図と合わせることで全世界を網羅する地図 (わずか 3 ページ) が得られる.

第12回 (10/22) 第1基本形式 (1)

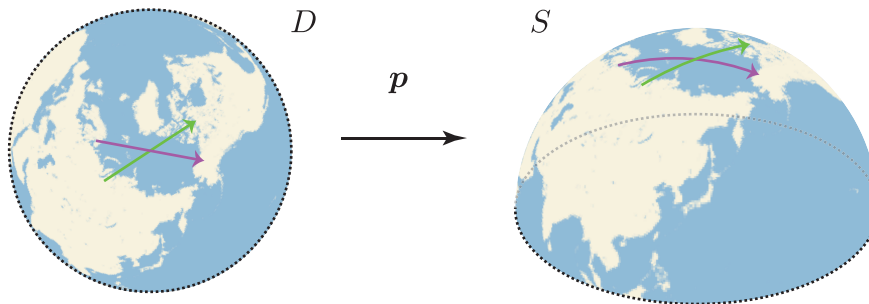
配布日：2021 年 10 月 31 日 Version : 1.1

地図上での計算

以下、 S を \mathbb{R}^3 内の滑らかな曲面（地球の表面の一部だと思ってしまってもかまわない）とし、 uv 平面内の領域 D によって

$$S: \mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \quad ((u, v) \in D)$$

とパラメーターづけられていると仮定する。すなわち、 D は S の地図である。



いま S に含まれる 2 つの滑らかな曲線

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1(t) \in S, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_2(t) \in S \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

があり、時刻 0 で、ある $\mathbf{p}_0 \in S$ において交差するものとする。すなわち、 $\mathbf{c}_1(0) = \mathbf{c}_2(0) = \mathbf{p}_0$ と仮定する。さらに、その状況がリアルタイムで地図上でも観察できるものとする。このとき、以下の 2 つの問題を考えてみよう。

- **問題 1.** 曲線 \mathbf{c}_1 の長さ（弧長） l を地図上で正確に計算できるか？
- **問題 2.** 曲線 \mathbf{c}_1 と曲線 \mathbf{c}_2 の交差角 θ を地図上で正確に計算できるか？

もし、われわれが持っているものが純粋に、紙に地形の模様が描かれただけの地図 D のみであれば、問題 1 も問題 2 も「不可能」である。一般に地図というものは歪みがあるから、地図上で長さや角度を測っても、それが実物の曲面でどのような長さや角度になっているのかわからないからである¹。

そこで、地図にどのような情報を補えば、「地図から読み取ることができるデータだけで、実物の曲線の長さや角度を測ることができるか」を考えてみよう。もちろん、 \mathbf{p} がどういう式で与えられているのかわかっていればよいのだが、できるだけ「3 次元的な情報に頼らずに」頑張りたいのである。

問題 1 に関する考察. いま、 \mathbf{c}_1 の長さは

$$l = \int_{-1}^1 \|\dot{\mathbf{c}}_1(t)\| dt$$

¹これは 3 次元のものを 2 次元に写し取るときに必ず起こる現象であり、不可避とも言える。たとえば、そのへんにある箱（ティッシュの箱とか）を眺めてみれば、実際は直角のものが全然直角に見えていなかったり、遠くの木やビルが小さく（低く）見えているのがわかる。網膜に映った 2 次元的な像を、脳が情報を補って 3 次元的に理解しているにすぎないのである。

担当教員：川平 友規

で与えられている。これは時間のパラメーター t に関する積分であるから、関数

$$f(t) := \|\dot{\mathbf{c}}_1(t)\| = \sqrt{\dot{\mathbf{c}}_1(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}_1(t)}$$

がなにか、地図上で特定できればよい。

問題 2 に関する考察. 求めたい交差角 θ は、2 曲線の時刻 0 での速度ベクトル $\dot{\mathbf{c}}_1(0)$ と $\dot{\mathbf{c}}_2(0)$ のなす角のことであるから、

$$\cos \theta = \frac{\dot{\mathbf{c}}_1(0) \cdot \dot{\mathbf{c}}_2(0)}{\|\dot{\mathbf{c}}_1(0)\| \|\dot{\mathbf{c}}_2(0)\|} = \frac{\dot{\mathbf{c}}_1(0) \cdot \dot{\mathbf{c}}_2(0)}{\sqrt{\dot{\mathbf{c}}_1(0) \cdot \dot{\mathbf{c}}_1(0)} \sqrt{\dot{\mathbf{c}}_2(0) \cdot \dot{\mathbf{c}}_2(0)}}$$

が求まればよい。

以上の考察から、曲面上の曲線の長さや交差角を計算するには、「速度ベクトルの内積」が本質的であることがわかる。すなわち、

地図上の曲線（動点の軌跡）のデータから、実物の曲線の速度ベクトルの内積を正確に計算

できれば問題 1 と問題 2 は解決する。

接平面と接ベクトル空間（接空間）

まず、曲面上のある点 \mathbf{p}_0 を通る曲線の「速度ベクトル」として、どのようなベクトルがあり得るのか考察しておこう。

滑らかな曲線 $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ ($a \leq t \leq b$) は曲面 S 上のみを動くものとしよう。このとき、地図上でその曲線を観測すると、 D 上の曲線として観測されるであろう。こちらのほうを

$$(u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

と表すものとする。すなわち、

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

と表されるものとする²。

いま、時刻 t を固定し、さらに、 $(u_0, v_0) := (u(t), v(t))$, $\mathbf{p}_0 := \mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u_0, v_0) \in S$ とおく。時刻 t から一瞬の時間 Δt が経過したとき、 D 上での $(u_0, v_0) = (u(t), v(t))$ からの変化量 $(\Delta u, \Delta v)$ は

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t + \Delta t) - u(t) \\ v(t + \Delta t) - v(t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \Delta t \\ \dot{v}(t) \Delta t \end{pmatrix}$$

を満たす。曲面 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$ の、パラメーター (u_0, v_0) における 1 次近似式

$$\mathbf{p}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) \approx \mathbf{p}(u_0, v_0) + \mathbf{p}_u(u_0, v_0) \Delta u + \mathbf{p}_v(u_0, v_0) \Delta v$$

²このとき、 $u(t)$ と $v(t)$ はともに C^∞ 級関数となる。これはそれほど自明なことではなく、多変数関数に関する「陰関数定理」という少し高度な定理を必要とする。一方、もし $(u(t), v(t))$ が D 上の滑らかな曲線として先に与えられていて、その \mathbf{p} による像として曲線 $\mathbf{c}(t)$ を定めるのであれば、 \mathbf{c} は空間内の滑らかな曲線となることは簡単にかかる。

より,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t) &= \mathbf{p}(u(t + \Delta t), v(t + \Delta t)) - \mathbf{p}(u(t), v(t)) \\ &= \mathbf{p}(u(t) + \Delta u, v(t) + \Delta v) - \mathbf{p}(u(t), v(t)) \\ &\approx \mathbf{p}_u(u(t), v(t))\Delta u + \mathbf{p}_v(u(t), v(t))\Delta v \\ &\approx \{\mathbf{p}_u(u(t), v(t))\dot{u}(t) + \mathbf{p}_v(u(t), v(t))\dot{v}(t)\} \Delta t \\ &= \{\mathbf{p}_u(u_0, v_0)\dot{u}(t) + \mathbf{p}_v(u_0, v_0)\dot{v}(t)\} \Delta t \end{aligned}$$

したがって,

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t)}{\Delta t} = \mathbf{p}_u(u_0, v_0)\dot{u}(t) + \mathbf{p}_v(u_0, v_0)\dot{v}(t).$$

を得る³. すなわち,

命題 12.1 曲面上の点 $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(u_0, v_0)$ を通る滑らかな曲線の速度ベクトルは

$$\mathbf{p}_u(u_0, v_0)\xi + \mathbf{p}_v(u_0, v_0)\eta \quad ((\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2)$$

の形となる.

逆に, 与えられた $(u_0, v_0) \in D$ と任意の $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ に対し, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(u_0, v_0)$ において速度ベクトル $\mathbf{p}_u(u_0, v_0)\xi + \mathbf{p}_v(u_0, v_0)\eta$ をもつ S 上の曲線 $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ が存在する. 実際, 地図 D 上の直線 (線分)

$$(\dot{u}(t), \dot{v}(t)) = (u_0, v_0) + (\xi, \eta)t$$

(ただし, D から出ないように t は十分 0 に近いものとする) をとれば, $\mathbf{c}(t) := \mathbf{p}(\dot{u}(t), \dot{v}(t))$ は時刻 $t = 0$ において速度ベクトル $\mathbf{p}_u(u_0, v_0)\xi + \mathbf{p}_v(u_0, v_0)\eta$ をもつ.

そのようなベクトル全体を集めた空間に名前をつけておこう:

定義 (接ベクトル空間) \mathbb{R}^3 の部分ベクトル空間

$$\{\mathbf{p}_u(u_0, v_0)\xi + \mathbf{p}_v(u_0, v_0)\eta \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2\}$$

を曲面 S の点 $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(u_0, v_0)$ における**接ベクトル空間**もしくは**接空間**といい,

$$T_{\mathbf{p}_0}S$$

と表す.

注意. 接ベクトル空間 $T_{\mathbf{p}_0}S$ は定義の主旨からすれば「速度ベクトル空間」と呼ばれるべきであろう. この「接ベクトル」という名称は, 曲面 S の点 $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(u_0, v_0)$ における接平面が

$$\mathbf{q}(\Delta u, \Delta v) = \mathbf{p}(u_0, v_0) + \mathbf{p}_u(u_0, v_0)\Delta u + \mathbf{p}_v(u_0, v_0)\Delta v \quad ((\Delta u, \Delta v) \in \mathbb{R}^2)$$

の形で書けることに由来する. すなわち, 接平面上の点は \mathbf{p}_0 に接ベクトル空間 $T_{\mathbf{p}_0}S$ の元を加えたものになっているからである. また, それを理由に, $T_{\mathbf{p}_0}S$ の図として接平面を描くことも多い.

しかし, 今後わたしたちが扱うのはあくまで「速度ベクトル」であるから, 接平面という対象 (図形) のことは忘れてしまってもかまわない⁴.

³手っ取り早く, $\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ において, (u, v) に $(u(t), v(t))$ を代入し合成関数の微分公式を適用すれば厳密に (\approx を使わずに) わかることだが, あえて接平面による近似式を経由して導出してみた.

⁴理解の邪魔になる可能性だってある.

地図上での内積の計算と第 1 基本形式

曲面 S の点 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$ における接ベクトル空間 $T_{\mathbf{p}}S$ の基底 $\mathbf{p}_u(u, v), \mathbf{p}_v(u, v)$ を単に $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ と表すことにしよう。いま, D 上のある 2 曲線が点 (u, v) において速度 (ξ_1, η_1) および (ξ_2, η_2) で交差する様子が観測されたとしよう。このとき, 対応する S 上の 2 曲線の速度ベクトル

$$\mathbf{p}_u \xi_1 + \mathbf{p}_v \eta_1, \quad \mathbf{p}_u \xi_2 + \mathbf{p}_v \eta_2 \in T_{\mathbf{p}}S$$

の内積は

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}_u \xi_1 + \mathbf{p}_v \eta_1) \cdot (\mathbf{p}_u \xi_2 + \mathbf{p}_v \eta_2) \\ &= (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u) \xi_1 \xi_2 + (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v) \xi_1 \eta_2 + (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u) \eta_1 \xi_2 + (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v) \eta_1 \eta_2 \\ &= (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u) \xi_1 \xi_2 + (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v) (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) + (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v) \eta_1 \eta_2. \end{aligned}$$

と計算される。そこで,

$$\begin{aligned} E &= E(u, v) = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u = \|\mathbf{p}_u\|^2 > 0, \\ F &= F(u, v) = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v, \\ G &= G(u, v) = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v = \|\mathbf{p}_v\|^2 > 0, \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_u \xi_1 + \mathbf{p}_v \eta_1) \cdot (\mathbf{p}_u \xi_2 + \mathbf{p}_v \eta_2) &= E \xi_1 \xi_2 + F (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) + G \eta_1 \eta_2 \\ &= (\xi_1 \quad \eta_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表される。すなわち, 地図 D 上の各点 (u, v) において, (u, v) から定まる 3 つの値 $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$, さえ正確にわかっているならば, 地図上で計測可能な量であるベクトル量 (ξ_1, η_1) と (ξ_2, η_2) によって実際の曲面上の内積が正確に計算できることになる。極端な話, \mathbf{p} やその偏微分 $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ を知らなくても, E, F, G の値さえ分かっているならば地図上で「実物」の正確な弧長や交差角が計算できるのである。

今回はこの E, F, G についてももう少し掘り下げる。

第13回 (10/26) 第1基本形式 (2)

配布日: 2021 年 10 月 31 日 Version: 1.1

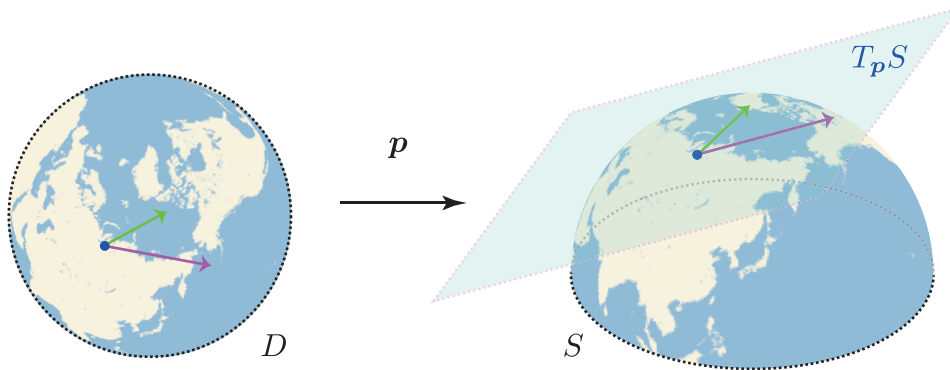
前回同様, S を \mathbb{R}^3 内の滑らかな曲面 (地球の表面の一部だと思ってしまってもかまわない) とし, uv 平面内の領域 D によって

$$S: \mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \quad ((u, v) \in D)$$

とパラメーターづけられていると仮定する. このとき D を \mathbf{p} が定める S の地図とよぶことにする. また, 曲面 S の点 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$ における接ベクトル空間

$$T_{\mathbf{p}}S = \{\mathbf{p}_u(u, v)\xi + \mathbf{p}_v(u, v)\eta \in \mathbb{R}^3, (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2\}$$

の基底 $\mathbf{p}_u(u, v), \mathbf{p}_v(u, v)$ を単に $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ と表すことにしよう.



第1基本形式

いま, D 上のある2曲線が点 (u, v) において速度 (ξ_1, η_1) および (ξ_2, η_2) で交差する様子が観測されたとしよう. このとき, 対応する S 上の2曲線の速度ベクトル

$$\mathbf{p}_u \xi_1 + \mathbf{p}_v \eta_1, \quad \mathbf{p}_u \xi_2 + \mathbf{p}_v \eta_2 \in T_{\mathbf{p}}S$$

の内積は

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_u \xi_1 + \mathbf{p}_v \eta_1) \cdot (\mathbf{p}_u \xi_2 + \mathbf{p}_v \eta_2) &= E \xi_1 \xi_2 + F (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) + G \eta_1 \eta_2 \\ &= (\xi_1 \quad \eta_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算されるのであった. ただし,

$$E = E(u, v) = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u = \|\mathbf{p}_u\|^2 > 0,$$

$$F = F(u, v) = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v,$$

$$G = G(u, v) = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v = \|\mathbf{p}_v\|^2 > 0,$$

である. 地図 D 上の各点 (u, v) において, 3つの値 $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$ さえ正確にわかっているならば, 地図上で計測可能な量であるベクトル量 (ξ_1, η_1) と (ξ_2, η_2) によって実際の曲面上の内積が正確に計算できることになる. とくに,

$$0 \leq \|\mathbf{p}_u \xi_1 + \mathbf{p}_v \eta_1\|^2 = E \xi_1^2 + 2F \xi_1 \eta_1 + G \eta_1^2 = (\xi_1 \quad \eta_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$$

担当教員：川平 友規

が定める関数

$$(\xi_1, \eta_1) \mapsto E \xi_1^2 + 2F \xi_1 \eta_1 + G \eta_1^2$$

を $S: \mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$ の **第 1 基本形式** とよび、現時点では少し奇妙ではあるが

$$I = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

(左辺はローマ数字の 1) もしくは

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

という記号で表す。この記号が直観的に何を示唆しようとしているのかは、曲面上で曲線の長さを考えるときに明らかになるだろう。

命題 13.1 地図 D 上の各点 (u, v) において、 $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$ は

$$EG - F^2 > 0$$

を満たす。

証明 (その 1). 一般に、 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

が成り立つ (命題 1.4(1) の証明参照.) これより、

$$EG - F^2 = \|\mathbf{p}_u\|^2 \|\mathbf{p}_v\|^2 - (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v)^2 = \|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\|^2 \geq 0.$$

滑らかな曲線の定義より、 $\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v \neq \mathbf{0}$ であったから、等号は除外されて $EG - F^2 > 0$ である。 ■**証明 (その 2)**. \mathbf{p}_u と \mathbf{p}_v の 1 次独立性より、任意の実数 t に対し $\mathbf{p}_u t + \mathbf{p}_v \neq \mathbf{0}$. よって、 $E = \|\mathbf{p}_u\|^2 > 0$ であることに注意すると、

$$0 < \|\mathbf{p}_u t + \mathbf{p}_v\|^2 = Et^2 + 2Ft + G = E \left(t + \frac{F}{E} \right)^2 + \frac{EG - F^2}{E}.$$

 t は任意の実数なので、 $EG - F^2 > 0$ でなくてはならない。 ■

2 次形式としての第 1 基本形式

ここで、2 次形式の一般論について少しだけ確認しておく。詳細は線形代数の教科書を確認されたい。

2 次形式. いま、2 次の実対称行列 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ が与えられているとき、2 次元ベクトルのペア (x_1, y_1) と (x_2, y_2) に実数

$$(x_1 \ y_1) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = Ax_1 x_2 + B(x_1 y_2 + y_1 x_2) + Cy_1 y_2$$

を対応させる関数 (写像) を行列 M が定める **対称双 1 次形式** といい、単一の 2 次元ベクトル (x, y) に実数

$$(x \ y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

を対応させる関数を行列 M が定める **2 次形式** という。したがって、第 1 基本形式は S 上の各点で (あるいは、 D 上の各点で) 「行列 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式」を定めている。**正定値対称行列.** 2 次の対称行列については、以下のことが知られている：

定理 13.2 (正定値対称行列の特徴付け) 実対称行列 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ について、以下は同値.

- (1) M の固有値はすべて正.
- (2) $A > 0$ かつ $AC - B^2 > 0$
- (3) $(x, y) \neq 0$ のとき, $(x \ y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$.

これらの条件を満たす M を**正定値対称行列**という.

証明. I を単位行列とすると, M の固有値は方程式

$$\det(M - \lambda I) = 0 \iff f(\lambda) := \lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0$$

の解である. この判別式は $(A + C)^2 - 4(AC - B^2) = (A - C)^2 + 4B^2 \geq 0$ なので, 固有値が実数のみであることはわかる.

(1) を仮定すると, この方程式が正の解のみを持つことになるから, $f(\lambda) = AC - B^2 > 0$ かつ $A + C > 0$ であることが必要かつ十分である. いま, $A \leq 0$ と仮定すると, $C > -A \geq 0$ となるが, このとき $AC - B^2 \leq 0$ となってしまう矛盾である. よって, (2) が成り立つ. 議論を逆にたどれば, (2) ならば (1) であることもわかる.

(2) ならば (3) であることは, 次のようにしてわかる. $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき, $x \neq 0$ または $y \neq 0$ である. $y \neq 0$ の場合, $t = x/y$ とおくと,

$$(x \ y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y^2(At^2 + 2Bt + C) = y^2 \left\{ A \left(t + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A} \right\}$$

と変形できる. 仮定よりこれは正の値のみをとる. $x \neq 0$ の場合も同様である.

(3) ならば (2) も上のような t を用いるとよい. たとえば $y \neq 0$ の場合, $A > 0$ のとき $(AC - B^2)/A > 0$ でなくてはならないので (2) を得る. 一方 $A < 0$ であれば, 上の式が $t \rightarrow \pm\infty$ のときに負になるので不適. $A = 0$ でも,

$$(x \ y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y^2(2Bt + C)$$

は $t \rightarrow -\infty$ のとき負になるので不適. ■

例 (第 1 基本形式). 第 1 基本形式を与える $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ は正定値対称行列である.

例 (単位行列と標準内積). $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, すなわち単位行列をとると, これは明らかに正定値対称行列である. このとき,

$$(x_1 \ y_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

であるから, これは普通の内積 (\mathbb{R}^2 の標準内積) になっている.

参考 (正定値対称行列と内積). 一般の実ベクトル空間 V に対し, ベクトルのペア \mathbf{a}, \mathbf{b} に対し, 以下の性質を満たすような実数 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ が定まっているとき, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ を \mathbf{a} と \mathbf{b} の**内積**という.

- (1) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
- (2) $\langle k\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = k \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
- (3) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$
- (4) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$

担当教員：川平 友規

いま, $V = \mathbb{R}^2$ とし, 正定値対称行列 M が与えられたとしよう. このとき, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ (縦ベクトル) に対し,

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle := {}^t \mathbf{x}_1 M \mathbf{x}_2 = (x_1 \ y_1) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

は $V = \mathbb{R}^2$ の内積を定める (確認せよ). すなわち, 標準内積はその特別な場合だということになる. また, 標準内積で考えられる概念 (ベクトルの長さやベクトル間の角度) はこちらの新しい内積でもまったく同様に定義ができる.

したがって, 曲面に第 1 基本形式が定まるということは, 地図 D 上の各点で, その点を始点とする速度ベクトルたちがなすベクトル空間 (それは \mathbb{R}^2 と同じ物) を考えたとき, その空間に正定値対称行列 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ による内積を与えることだ, ということになる. こうして, 実体であり実物であった曲面から離れて, 地図だけで解析を行う準備が整えられたのである.

地図と曲線の長さ

いま, 地図上の曲線

$$(u(t), v(t)) \in D \quad (a \leq t \leq b)$$

とその \mathbf{p} による像

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t)) \in S$$

に対し, 曲線の長さを考えてみよう. 後者については $\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{p}_u \dot{u}(t) + \mathbf{p}_v \dot{v}(t) \in T_{\mathbf{c}(t)} S$ の長さを積分すればよいので,

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt &= \int_a^b \|\mathbf{p}_u \dot{u}(t) + \mathbf{p}_v \dot{v}(t)\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E(t)\dot{u}(t)^2 + 2F(t)\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G(t)\dot{v}(t)^2} dt \\ &= \int_a^b \left[(\dot{u}(t) \ \dot{v}(t)) \begin{pmatrix} E(t) & F(t) \\ F(t) & G(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} \right]^{1/2} dt \end{aligned}$$

(ただし, $E(t) = E(u(t), v(t))$, $F(t) = F(u(t), v(t))$, $G(t) = G(u(t), v(t))$) となる. ベクトル $(\dot{u}(t), \dot{v}(t))$ は D 上で計測できる曲線の速度であり, それが行列 $\begin{pmatrix} E(t) & F(t) \\ F(t) & G(t) \end{pmatrix}$ によって実物の曲面の速度ベクトルの長さに変換されていることに注意しよう.

等長地図. もし行列 $\begin{pmatrix} E(t) & F(t) \\ F(t) & G(t) \end{pmatrix}$ がつねに単位行列であれば, 等式

$$\int_a^b \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt = \int_a^b \|(\dot{u}(t), \dot{v}(t))\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{u}(t)^2 + \dot{v}(t)^2} dt$$

となり**地図上の曲線の長さ**と**実物の曲線の長さ**が一致する. このような性質をもつ地図を**等長地図**という.

じつは, 特定の曲面を除いて, 等長地図を作ることはできない (幾何学 II のテーマのひとつ).

注意. 区間 $[a, b]$ を $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ となるように分割し,

$$\mathbf{c}_k := \mathbf{c}(t_k), u_k = u(t_k), v_k := v(t_k), E_k := E(u_k, v_k), F_k := F(u_k, v_k), G_k := G(u_k, v_k)$$

とおく. さらに, $0 \leq k < N$ に対し

$$\Delta t_k := t_{k+1} - t_k, \Delta s_k := \|\mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_k\|, \Delta u_k := u_{k+1} - u_k, \Delta v_k := v_{k+1} - v_k$$

担当教員：川平 友規

と定める。このとき、これまでの議論から

$$\Delta s_k^2 = \|\mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_k\|^2 \approx \left\| \dot{\mathbf{c}}(t_k) \Delta t_k \right\|^2 \approx E_k \Delta u_k^2 + F_k \Delta u_k \Delta v_k + G_k \Delta v_k^2$$

であることがわかる。さらに、曲線 $\mathbf{c}(t)$ の長さは $\sum_{k=0}^{N-1} \Delta s_k$ で近似 (折れ線近似) されるから、 $N \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta s_k &\approx \sum_{k=0}^{N-1} [E_k \Delta u_k^2 + F_k \Delta u_k \Delta v_k + G_k \Delta v_k^2]^{1/2} \\ &\approx \sum_{k=0}^{N-1} \left[E_k \left(\frac{\Delta u_k}{\Delta t_k} \right)^2 + 2F_k \frac{\Delta u_k}{\Delta t_k} \frac{\Delta v_k}{\Delta t_k} + G_k \left(\frac{\Delta v_k}{\Delta t_k} \right)^2 \right]^{1/2} \Delta t_k \\ &\rightarrow \int_a^b \sqrt{E(t) \dot{u}(t)^2 + 2F(t) \dot{u}(t) \dot{v}(t) + G(t) \dot{v}(t)^2} dt \\ &= \int_a^b \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt \end{aligned}$$

を得る。第 1 基本形式の

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

という書き方はこのような計算に由来している。

地図と 2 曲線の交差角

接ベクトル空間の元の角度を計算してみよう。 D 上のある 2 曲線が点 (u, v) において速度 (ξ_1, η_1) および (ξ_2, η_2) で交差する様子が観測されたとしよう。これらのベクトルのなす角度を θ' とする。また、対応する S 上の 2 曲線の速度ベクトル

$$\mathbf{p}_u \xi_1 + \mathbf{p}_v \eta_1, \mathbf{p}_u \xi_2 + \mathbf{p}_v \eta_2 \in T_{\mathbf{p}}S$$

のなす角度を θ とする。このとき、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\mathbf{p}_u \xi_1 + \mathbf{p}_v \eta_1) \cdot \mathbf{p}_u \xi_2 + \mathbf{p}_v \eta_2}{\|\mathbf{p}_u \xi_1 + \mathbf{p}_v \eta_1\| \|\mathbf{p}_u \xi_2 + \mathbf{p}_v \eta_2\|} \\ &= \frac{E \xi_1 \xi_2 + F (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) + G \eta_1 \eta_2}{\sqrt{E \xi_1^2 + 2F \xi_1 \eta_1 + G \eta_1^2} \sqrt{E \xi_2^2 + 2F \xi_2 \eta_2 + G \eta_2^2}} \end{aligned}$$

となる。この量も、地図上で観測可能なベクトル (ξ_1, η_1) および (ξ_2, η_2) の情報に、事前に与えられている E, F, G の情報を加えることで計算できる。

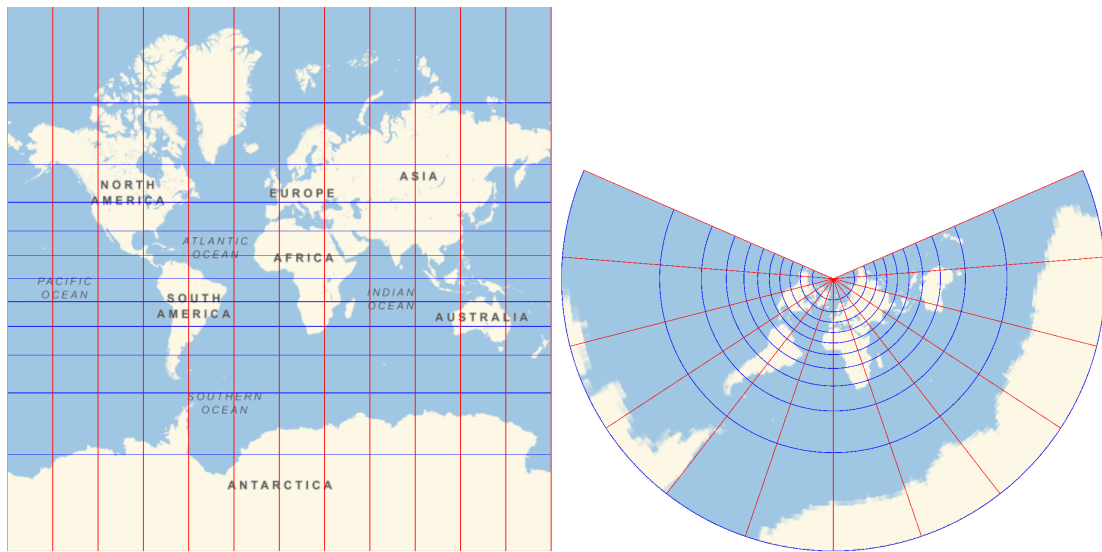
等角地図 (正角図法)。もし $E = G$ かつ $F = 0$ であれば、

$$\cos \theta = \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} = \cos \theta'$$

が成り立つ。これは、**地図上で図った 2 曲線の交差角が、実物の 2 曲線の交差角と正確に一致する**ということである。そのような地図を**等角地図**という。また、そのような地図の書き方を**正角図法**という。

実際の等角地図として有名なものとしては、メルカトル図法 (次の図, 左), ランベルト正角円錐図法 (右) などがある¹。

¹等角地図は航海図として用いられてきた。進行方向と緯線や経線との交差角 (太陽の位置と方位磁針があればわかる) をもとに船の進路を決定すれば、最短とはいかないものの、正しく目的地に到着することができるからである。



地図と面積

最後に地図と面積の関係を見ておこう. $K \subset D$ をコンパクト集合とし, 曲面 S の K でパラメーター付けされる部分を S_K と表した. その面積は,

$$\text{Area}(S_K) = \iint_K \|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\| \, dudv$$

で与えられるが,

$$\|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\|^2 = \|\mathbf{p}_u\|^2 \|\mathbf{p}_v\|^2 - (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v)^2 = EG - F^2$$

より, 公式

$$\text{Area}(S_K) = \iint_K \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

を得る. $\sqrt{EG - F^2}$ は地図上で計算可能な量であるから, 実際の曲面の上に行き測量をしなくても地図の上で面積の計算ができることになる.

等積 (正積) 地図 もし地図上で $EG - F^2 = 1$ (一定) であれば,

$$\text{Area}(S_K) = \iint_K dudv = [K \text{ の面積}]$$

が成り立つ. すなわち, 地図上での面積がそのまま正確に曲面積となるため, 重積分の計算なしで面積が正確に測定できる. そのような地図を作成する方法は**正積図法**と呼ばれており, モルワイデ図法 (図左) やボンヌ図法 (図右) などが有名である.

