担当教員：川平 友規

この講義について

配布日：2024 年 4 月 16 日 Version：1.1

担当教員： 川平 友規（Kawahira, Tomoki；経済学部 / 大学院経済学研究科）

授業科目の概要（シラバスより）： 線形代数は，比例のような 1 次関係式の持つ良い性質（線形性）を扱う数学である。線形性の考え方は，自然科学のみならず社会科学においても，様々な現象を記述・解析する上で必要不可欠である．

この講義では，連立 1 次方程式の解法を背景として，主に行列と行列式の理論について学び，実際に使えるようになることを目的とする．引き続き線形空間（ベクトル空間）や線形写像の理論を扱う《線形代数》を履修することを勧める．

授業科目の到達目標（シラバスより）： 行列とその演算，行列の基本変形と階数，連立 1 次方程式とその解法，逆行列，行列式とその幾何学的な意味，余因子行列とクラメルの公式，空間における直線・平面の方程式などについて理解する。

講義日と授業内容：

第 1 回	4 月 16 日	データ，ベクトル，行列
第 2 回	4 月 23 日	行列の演算
第 3 回	4 月 30 日	行列のべき乗・行列の分割
第 4 回	5 月 7 日	連立一次方程式とガウスの消去法
第 5 回	5 月 14 日	連立一次方程式と行列の階数
第 6 回	5 月 21 日	逆行列
第 7 回	5 月 28 日	行列式に向けて・置換 (1)
第 8 回	6 月 4 日	置換 (2) ・行列式
第 9 回	6 月 11 日	行列式の性質
第 10 回	6 月 18 日	余因子行列
第 11 回	6 月 25 日	クラメールの公式
第 12 回	7 月 2 日	行列式の応用，1 次変換
第 13 回	7 月 9 日	1 次変換と行列式・体積
第 14 回	7 月 16 日	期末試験

教科書および参考書： 教科書は指定しません．講義資料を毎回 manaba 上で配布します．さらなる自習用の参考書として，以下を挙げておきます．

- 三宅敏恒,『入門線形代数』，培風館
- 藤岡敦,『手を動かして学ぶ　線形代数』，裳華房

クイズ： ほぼ毎回，Google Forms を用いたクイズ（小テスト）を行います（火曜出題，金曜締切の予定）．URL は manaba の「コースニュース」上で公開します．

出席確認： 講義中にその日の「キーワード」を伝えますので，それをクイズに回答することで出席を確認します．公平性を保つために,「キーワード」は他の人に教えてはいけません．

成績評価の方法： クイズ（30〜50 %）と期末試験 （50〜70 %）

質問受付： 次の 3 つの方法で質問や問い合わせを受け付けます．

- 授業中や授業後の休み時間に直接質問する．

- クイズのコメント欄に質問を書く．
- 質問を手書きして写真をとり，pdf や jpeg 画像の形でメールに添付する．

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体　(2) $\mathbb{R}$: 実数全体　(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体　(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体　(6) $\emptyset$: 空集合

ギリシャ文字

(1) α: アルファ　(2) β: ベータ　(3) γ, Γ: ガンマ　(4) δ, Δ: デルタ　(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ　(7) η: エータ　(8) θ, Θ: シータ　(9) ι: イオタ　(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ　(12) μ: ミュー　(13) ν: ニュー　(14) ξ, Ξ: クシー　(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ　(17) ρ: ロー　(18) σ, Σ: シグマ　(19) τ: タウ　(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ　(22) χ: カイ　(23) ψ, Ψ: プサイ　(24) ω, Ω: オメガ

その他

(1) $\leq$，$\geq$ は $\leqq$，$\geqq$ と同じ意味．

(2) $x \in X$ と書いたら,「x は集合 X に属する」すなわち「x は X の元 」という意味．

(3) 「⋯をみたす X の元全体の集合」を $\{x \in X \mid (\ x$ に関する条件$)\}$ の形で表す．たとえば「$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ 」

(4) $X \subset Y$ と書いたら,「集合 X は集合 Y に含まれる」という意味．$X \subseteq Y$，$X \subseteqq Y$ も同じ意味．

(5) $A := B$ と書いたら A を B で定義する，という意味．たとえば $e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(6) （文章 1）$:\Longleftrightarrow$ (文章 2) と書いたら,（文章 1）の意味は（文章 2）であることと定義する，という意味．たとえば「数列 $\{a_n\}$ が上に有界 $:\Longleftrightarrow$ ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対し $a_n \leq M$.」

※この講義プリントは小森靖さん・坂内健一さん作成のスタイルファイルを使用しています．

担当教員：川平 友規

第 1 回（4/16）データ・ベクトル・行列

配布日：2024 年 4 月 17 日 Version：1.2

線形代数 I の目標

この講義の（理想的な）目標を掲げておこう．それは

> n 元連立 1 次方程式を自分が（コンピューターが）解けるようになる（する）こと

である．ここでいう n **元連立 1 次方程式**とは，n 個の未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が満たす複数の関係式が

$$m\text{ 個}\begin{cases} \bigcirc\, x_1 + \bigcirc\, x_2 + \cdots + \bigcirc\, x_n &= \triangle \\ \bigcirc\, x_1 + \bigcirc\, x_2 + \cdots + \bigcirc\, x_n &= \triangle \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \bigcirc\, x_1 + \bigcirc\, x_2 + \cdots + \bigcirc\, x_n &= \triangle \end{cases}$$

という形で与えられたものをいう．ここで,「○」は連立 1 次方程式の「係数」とよばれるもので,合計 mn 個の具体的な数値である．同様に「△」も，m 個の具体的な数値である．

いま，未知数の数 n や方程式（関係式）の数 m は 100 万，1 億といった巨大な自然数かもしれないことに注意しよう．私たちは，その値によらず，与えられた 1 次連立方程式の完全な解を与える方法を学びたいのである．また，コンピューターにその計算をまかせるためには，有限時間で終了するアルゴリズムを与える必要がある．

今後は，この「目標」を意識して学習を進めていこう．

データの型としての 2 次元配列

「表にできるデータ」の表現方法について考えよう．たとえばここに，以下のような「成績表」が与えられているとする：

学生＼科目	国語	英語	数学	理科	$\cdots$
A さん	80	80	100	90	$\cdots$
B さん	75	90	90	70	$\cdots$
C さん	100	100	20	30	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

A さんや B さん達は学生（テストの受験生）であり，全体で m 人からなるものとする．また．国語や英語といったテストの科目も，全体で n 科目あるものとする．いま，m 人の n 科目分の成績データ，すなわち mn 個の数値が与えられているのである．

2 次元配列とその表記． 上の表においては,（上から）i 番目の学生の,（左から）j 番目の科目の成績としてある数値が与えられている．一般に，各 $i = 1, 2, \cdots, m$ と $j = 1, 2, \cdots, n$ のペア (i, j) に対し，ある数値 $a(i, j)$ への対応が与えられたものを $m \times n$ **型の 2 次元配列**という[1]．以下，数値 $a(i, j)$ は

$$a_{ij}, \qquad a_{i,j}$$

[1] じつは「配列」というのはプログラミング用語である．もちろん，1 次元配列や 3 次元配列も考えられる．どんなものか，そのようなものがいつ必要になるか，想像してみよう．

のようにも表すことにする[2].

2 次元配列は自然数のペア (i,j) に 1 つの数値が対応する関数のようなものであるが，それを人間やコンピューターにわかるように表記（表現）する必要がある．たとえば $m=2, n=3$ のときの表記方法を紹介しよう．

例 1（表，人間むけ）

$i \backslash j$	1	2	3
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}

人間には直観的でわかりやすいが，複数の行が必要．一方，コンピューターの記憶装置は「0 か 1 が記録できる素子が 1 列に並んだもの」であるから,「行」や「掛け線」といった概念は適さない．

例 2（*Mathematica* 風，コンピューターむけ）

$$\{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}\}$$

カギ括弧 { やコンマ , で数値の区切りを表現することですべてを 1 行で表現でき，コンピューターの記憶装置の構造にも適している．

例 3（MatLab 風，コンピューターむけ）

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13};\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}]$$

例 2 と同様だが，角括弧 [でデータの始まりと終わり，セミコロン ; で改行が表現されている．また，印刷には見えないが数値と数値の間には半角スペース（プログラミングなんかで ␣ と書かれるやつ）が記入されていて，コンピューターの記憶装置には区切りとして認識させることができる．

例 4（行列，数学者むけ？） 私たちがこれから学ぶ「行列」は，19 世紀の数学者たちが編み出した 2 次元配列の表現方法の 1 つである．

行列 (matrix)

$m \times n$ 型の 2 次元配列を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

のように（手書き，あるいは印刷で）表現したものを $m \times n$ **型の行列**といい，

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n} \quad \text{もしくは単に} \quad A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$$

のように表す．

注意！ 行列の両側にある角カッコは丸カッコで書くこともある．これらのカッコは便宜的なものであって，行列の「本体」は 2 次元配列としての数値の集まり（データ）のほうであることに注意しよう．

行列のパーツごとの名称．

[2]小さく書かれた ij や i,j の部分は**添字** (index) とよばれる．

(1) 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ における a_{ij} を行列 A の (i, j) **成分**という．

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{第 } 1 \text{ 行} \\ \leftarrow \text{第 } 2 \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } m \text{ 行} \end{array} \end{array}$$

(2) 行列 A の上から i 行目[3]を行列 A の**第 i 行**という．これは $1 \times n$ 型の行列

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

とみなすことができる．$1 \times n$ 型の行列を n **次元行ベクトル**ともいう．

(3) 行列 A の左から j 列目を行列 A の**第 j 列**という．これは $m \times 1$ 型の行列

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

とみなすことができる．$m \times 1$ 型の行列を m **次元列ベクトル**ともいう．

例題 1.1 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 100 & 90 \\ 75 & 90 & 90 & 70 \\ 100 & 100 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

と定めるとき，以下の空白を埋めよ．

(1) A は $\boxed{} \times \boxed{}$ 型である．

(2) A の $(3, 2)$ 成分は $\boxed{}$．

(3) 75 は A の $(\boxed{}, \boxed{})$ 成分．

(4) A の第 3 行は $\boxed{}$．

解答 簡単なので省略． ■

個性的な行列たち

ゼロ行列． すべての成分の値が 0 の $m \times n$ 型の行列を $m \times n$ 型の**ゼロ行列**もしくは**零（れい）行列**といい，

$$O_{m,n} \qquad \text{もしくは単に} \qquad O$$

[3] 英語などの横書き言語における「行」．

と表す．例えば，

$$O_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad O_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad O_{3,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \cdots$$

などなど．

正方行列． 自然数 n に対し，$n \times n$ 型の行列を n **次正方行列**もしくは単に**正方行列**という．正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

において，対角線上に並んだ $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ を行列 A の**対角成分**という．正方行列は，線形代数 II で学ぶベクトル空間の理論において中心的な役割を果たす．また，このあと学ぶ「行列式」が定義できるのも，正方行列に対してだけである．

正方行列のゼロ行列． $n \times n$ 型のゼロ行列 $O_{n,n}$ は O_n と表されることがある．

クロネッカーのデルタと単位行列． i と j が 1 から n までの自然数であるとき，

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．この記号を**クロネッカーのデルタ** (Kronecker's delta) という．これを用いて，

$$E_n := \begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le n}$$

によって定まる n 次正方行列を（n 次の）**単位行列**という．n が文脈から明らかな場合は E_n を単に E と表す[4]．例えば，

$$E_1 = \begin{bmatrix} \delta_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \cdots$$

などなど．すなわち，E_n は「対角成分がすべて 1 で，それ以外の成分は 0」となる n 次正方行列である．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．

[4] 単位行列を I や I_n で表す書籍もある．

第 2 回（4/23）行列の演算

配布日： 2024 年 7 月 15 日 Version： 1.3

（ア）行列の和

同じ型の行列に対しては「和」を考えることができる．いま，A と B を同じ $m \times n$ 型行列とし，それぞれ成分で

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$$

と表されるとする．このとき，$m \times n$ 型行列 $A + B$ を

$$A + B := \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix}$$

によって定め，A と B の**和** という．すなわち，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

以上の式で，$+$ （プラス）を $-$ （マイナス）に変えることで**差** $A - B := \begin{bmatrix} a_{ij} - b_{ij} \end{bmatrix}$ も定義できる．

例.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

（イ）行列の定数倍（スカラー倍）

ベクトルの定数倍はベクトルの各成分にそれぞれ同じ定数を掛けるものであった．行列でも同様に，定数倍を考えることができる．いま $c \in \mathbb{R}$ と $m \times n$ 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ に対し，$m \times n$ 型行列 $c\,A$ を

$$c\,A := \begin{bmatrix} c\,a_{ij} \end{bmatrix}$$

によって定め，**行列 A の（定数）c 倍** という．すなわち，

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\,a_{11} & \dots & c\,a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c\,a_{m1} & \dots & c\,a_{mn} \end{bmatrix}$$

例.

$$10 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$$

注意！ 定数倍 $c\,A$ を明示的に $c \cdot A$ と表すこともある．たとえば，$0 \cdot A = O$．また，$(-1)A$ を $-A$ とも表す．このとき，

$$A + (-A) = A - A = O$$

である[1]．

[1] もう少し丁寧に書くと，$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ のとき，$A + (-A) = A + (-1)A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-1) \cdot a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} + (-1) \cdot a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} - a_{ij} \end{bmatrix} (= A - A) = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = O$.

（ウ）行列の積

行列の積は少し特殊で，**行列 A と行列 B の「型」が特定の条件を満たすときにだけ，積 AB を考えることができる．** これから与える行列の積の定義は一見ややこしいが，まさに「習うより慣れろ」の典型で，具体例を計算していくうちに簡単に身に付くものである．一旦定義はスルーして，そのあとの具体例の計算を観察しておくのも良い学習方法かもしれない．

行列の積の定義. 行列 A は $m \times n$ 型，行列 B は $n \times l$ 型とする．このとき，$m \times l$ 型行列 AB を以下で定める：

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{jk} \end{bmatrix}_{1 \le j \le n,\, 1 \le k \le l}, \quad AB = \begin{bmatrix} c_{ik} \end{bmatrix}_{1 \le i \le m,\, 1 \le k \le l}$$

と表すとき，AB の (i,k) 成分は

$$c_{ik} := a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

$$\underset{\text{第 } i \text{ 行}}{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}} \underset{\text{第 } k \text{ 列}}{\begin{bmatrix} \vdots & b_{1k} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{2k} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nk} & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}} = \underset{(i,k)\text{成分}}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_{ik} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}$$

すなわち，

- 行列 A の列の数（「行列のヨコの長さ」）と行列 B の行の数（「行列のタテの長さ」）が一致したときだけ，行列の積 AB が定義される．
- 行列 AB の (i,k) 成分は，A の第 i 行である n 次元行ベクトルと，B の第 k 行の n 次元列ベクトルから定まる．
- $n = 2$ や 3 のとき，c_{ik} の計算は高校で学んだ平面ベクトルや空間ベクトルの内積の計算と同じものである．実際，n 次元ベクトルの「内積」はこの形の式で定義される（線形代数 II）ので，行列の積は n 次元ベクトルのペアの内積を繰り返し計算することで得られる．

例題 2.1 次の行列の積を考える：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) $(1,3)$ 成分を求めよ．

(2) $(2,4)$ 成分を求めよ．

(3) 積そのものを計算せよ．

解答. 慣れるまでは，次のように「行」と「列」に線を引くとわかりやすい．

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

これは 2×3 型行列と 3×4 型行列の積なので，2×4 型行列が得られるはずである．

(1) $(1,3)$ 成分は左の行列の 1 行目と右の行列の 3 列目の「内積」であるから，

$$1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 = -7.$$

(2) $(2,4)$ 成分は左の行列の 2 行目と右の行列の 4 列目の「内積」であるから，

$$2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = -2.$$

(3) 同様に計算すれば，

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 2 & -2 & -7 & -1 \\ \hline -1 & 6 & 7 & -2 \end{array}\right].$$

■

例（ある大学の入試）. いま，A さんと B さんの国語・数学・英語の成績が左の表のように与えられており，ある大学の文学部と理学部の，総合点における科目ごとの比率（重み）が右の表のように与えられている：

学生＼科目	国語	数学	英語
A さん	50	90	70
B さん	80	60	80

科目＼学部	文学部	理学部
国語	2	1
数学	1	2
英語	2	2

このとき，A さんが文学部を受験するときの点数は

$$50 \times 2 + 90 \times 1 + 70 \times 2 = 330$$

であり，理学部だと

$$50 \times 1 + 90 \times 2 + 70 \times 2 = 370$$

となる．B さんも同様に計算して表にすれば，

学生＼学部	文学部	理学部
A さん	330	370
B さん	380	360

これは

$$\begin{bmatrix} 50 & 90 & 70 \\ 80 & 60 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 & 370 \\ 380 & 360 \end{bmatrix}$$

という行列計算にほかならない．

例（連立 1 次方程式）. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x - z = 2 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

は，行列を用いて

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

と表現できる．

例（2 変数の 2 次関数）． $a,\, b,\, c$ を定数（ただし，$(a,b,c) \neq (0,0,0)$）とするとき，2 次関数 $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ は

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と表される．実際，

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{先に計算}} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{bmatrix} = x(ax+by) + y(bx+cy) = f(x,y).$$

行列の計算公式

最後に，行列の計算規則をまとめておく．

和と定数倍に関する公式． $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$，$A,\, B,\, C$ を $m \times n$ 型行列，$O = O_{m,n}$ とする．このとき，次が成り立つ：

(1) $A + B = B + A$

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) $\alpha\,(\beta\, A) = (\alpha\beta)\, A$

(4) $\alpha\,(A + B) = \alpha\, A + \alpha\, B$

(5) $(\alpha + \beta)\, A = \alpha\, A + \beta\, A$

(6) $1 \cdot A = A, \quad 0 \cdot A = O$

(7) $A + O = A = O + A$

ただし，数の計算と同様に，括弧の部分は先に計算する，という意味．

積に関する公式. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$A, B, C$ を行列とすると，以下が成り立つ．ただし，これらの等式は **「（行列の型がマッチして）左辺と右辺がそれぞれ計算ができるとき，両辺は同じ行列を定める」** という意味．

(1) $(AB)C = A(BC)$

(2) $A(B+C) = AB + AC$

(3) $(A+B)C = AC + BC$

(4) $(\alpha A)B = \alpha(AB)$

(5) $A(\beta B) = \beta(AB)$

注意！ 行列に関しては，$AB = BA$ とは限らない！例えば，

- A が 2×4 型，B が 4×3 型の場合，積 AB は考えられても（2×3 型），積 BA はそもそも考えることができない．
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ かつ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき，$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ だが $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．

担当教員：川平 友規

第 3 回（4/30）行列のべき乗・行列の分割

配布日： 2024 年 7 月 15 日 Version : 1.3

行列のべき乗

前回やった行列の積に関する補足として，行列のべき乗（冪乗）を考えよう．行列 A に対し，A と A 自身の積 AA を考えられるとすれば，それは $n \times n$ 型の行列，すなわち n 次正方行列しかありえない（理由を考えよ）．

行列 A は n 次正方行列と仮定しよう．2 つの A の積 AA を A^2，3 つの積 AAA を A^3 と表記するのは自然に思える．そこで，帰納的に

$$A^0 := E_n, \qquad A^{p+1} := A^p\, A \quad (p = 0, 1, 2, \cdots)$$

と定め，A^p を行列 A の p **乗**という．A^p は，A を p 個掛け合わせた $AAAA \cdots A$ の形の積だとみなすことができる[1]．

公式（指数法則）． 正方行列 A と負でない整数 p と q に対し，次が成り立つ：

(1) $A^p\, A^q = A^{p+q}$.

(2) $(A^p)^q = A^{pq}$.

公式を確認するには，単に両辺で掛け合わせられている A の個数を数え上げて比較すればよい．

例． $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ のとき，

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 125 \end{bmatrix}.$$

同様にすれば（正確には，数学的帰納法により），任意の負ではない整数 p に対し

$$A^p = \begin{bmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & 5^p \end{bmatrix}$$

となることがわかる．同じ理屈で，単位行列 $E_2 = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ のべき乗について

$$E^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

であることもわかる．

例（ケーリー・ハミルトンの定理）． $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき，

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E_2 = O_2$$

[1] 行列をかける順番に依存せずに「A を合計 p 個かけたもの」は A^p と同じ行列を定める．例えば $p = 2$ のときは明らかで，$p = 3$ のとき，A を 3 つ掛ける順番は $A(AA) = A\,A^2$ か $(AA)A = A^2\,A$ しかないが，行列の積に関しては，一般に結合法則 $A(BC) = (AB)C$ が成立することから，$B = C = A$ とすることで $A(AA)$ と $(AA)A$ が等しく A^3 を定めることがわかる．$p = 4$ のとき，たとえば $(AA)(AA) = A^2\,A^2$ は，結合法則 $A(BC) = (AB)C$ で A を (AA)，B と C をともに A で置き換えれば，$(AA)(AA) = ((AA)A)\,A = A^3\,A$ となるのでこれも定義から A^4 である．

が成り立つ（左辺を計算し，ゼロ行列となることを確認せよ）．これを**ケーリー・ハミルトンの定理**という．

注意！ この等式は,「任意の 2 次正方行列 A はある（行列の）2 次方程式の解になっている」ことだと解釈できる．ケーリー・ハミルトンの定理は，より一般に,「n 次正方行列はある（行列の）n 次方程式の解になっている」ことを主張する定理である．

例（多項式と行列）． 多項式の恒等式 $x^2-4=(x+2)(x-2)$ が成り立つように，任意の正方行列 A についても恒等式

$$A^2-4E=(A+2E)(A-2E)$$

が成り立つ．オリジナルの多項式版の右辺は，分配法則[2]を繰り返し適用することで

$$(x+2)(x-2)=(x+2)x+(x+2)(-2)=x^2+2x+(-2)x-4=x^2-4$$

と計算できたが，行列の場合も分配法則により

$$(A+2E)(A-2E)=(A+2E)A+(A+2E)\left((-2)E\right)=A^2+2A+(-2)A-4E^2=A^2-4E.$$

と計算できるからである．より一般に，x だけの多項式 $P(x)=a_dx^d+\cdots+a_1x+a_0=\sum_{k=0}^{d}a_kx^k$ に関する恒等式から行列の多項式

$$P(A):=a_dA^d+\cdots+a_1A+a_0E=\sum_{k=0}^{d}a_kA^k$$

に関する恒等式を導くことができる．

注意！ 2 つ以上の文字（x や y などの変数）からなる多項式に関する恒等式の場合，それを無条件に 2 つ以上の行列からなる多項式に関する恒等式に読み替えることは**できない**．たとえば，$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ という恒等式から無批判的に

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

などとしてはいけないのである．実際，左辺は

$$(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

であり，これが $A^2+2AB+B^2$ と一致するのは $AB=BA$ が成り立つ場合に限る．より一般に，$AB=BA$ となる特殊なペアに対しては，2 文字の多項式の恒等式からそのままの恒等式を導くことができる．

例題 2.1（ケーリー・ハミルトンの応用） $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$ のとき，A^p $(p=1,2,3,\cdots)$ を求めよ．

解答． $p=1$ のときは A そのものなので，$p\geq 2$ の場合を考えよう．ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^2-3A+2E=O$．ここで,

$$x^p=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$$

という形の恒等式を考える．ただし，$Q(x)$ は $(p-2)$ 次の多項式である．すなわち，x^p を多項式 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ で割った商を $Q(x)$，あまりを $ax+b$ とおいたのである．両辺に $x=1$，$x=2$ を代入すれば，$1=a+b$，$2^p=2a+b$ を得る．これより $a=2^p-1$，$b=2-2^p$．よって

$$x^p=(x^2-3x+2)Q(x)+(2^p-1)x+(2-2^p).$$

[2]分配法則とは，$a(b+c)=ab+ac$ あるいは $(a+b)c=ac+bc$ の形の計算法則のことをいう．

この恒等式とケーリー・ハミルトンの定理から

$$A^p = (A^2 - 3A + 2E)Q(A) + (2^p - 1)A + (2 - 2^p)E = (2^p - 1)A + (2 - 2^p)E.$$

すなわち，

$$A^p = (2^p - 1)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} + (2 - 2^p)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2^p - 1\\ 0 & 2^p\end{bmatrix}.$$

行列の分割

行列の積を「ブロック」に分割して計算することができる．実用上，それほどありがたみを感じる機会はないかもしれないが，理論上（たとえば，何かの公式や定理を証明するとき）には重要なアイディアである．

例. 最初に例をみていこう．次のような行列の積を考える：

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 9\\ 1 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

積を考えやすいように補助線的な色をつけているが，無視してよい．さてこの左辺の 2 つの行列を，次のように「ブロック」に分割する：

$$\left[\begin{array}{cc|c|cc}1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}0 & 2\\ 1 & 1\\ \hline 2 & 0\\ \hline 0 & 2\\ 0 & 1\end{array}\right]$$

ここで補助的にいれた線は「ブロックの分割線」であり，

$$\left[\begin{array}{c|c|c}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}\right]$$

のように，6 つのブロック（小さな行列）と 3 つのブロック（小さな行列）に分割しているのである．これを便宜的に「ブロック（からなる）行列」とよぼう．分割に際しては，左の行列の列を「2 列＋ 1 列＋ 2 列」に分割し，右の行列の行を「2 行＋ 1 行＋ 2 行」に分割している．これらの数の並び $(2, 1, 2)$ が一致していることが，あとで積を考えるさいに重要である．

さて，成分として現れる行列を ■ で表して簡略化すると，

$$\left[\begin{array}{c|c|c}\blacksquare & \blacksquare & \blacksquare\\ \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\blacksquare\\ \hline \blacksquare\\ \hline \blacksquare\end{array}\right]$$

担当教員：川平 友規

となり，$\boxed{2}\times\boxed{3}$ 型のブロック行列と，$\boxed{3}\times\boxed{1}$ 型のブロックの行列の積を考えていることがわかる．そこで，

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \blacksquare \\ \hline \blacksquare \\ \hline \blacksquare \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} \blacksquare \\ \hline \blacksquare \end{array}\right]$$

のような，$\boxed{2}\times\boxed{1}$ 型のブロック行列が計算できないかと期待してしまう．そのような計算は本当に可能で，先ほどの「数の並び（$2,1,2$）の一致」が効いて，

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix}0&2\\1&1\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&1\end{bmatrix}+[1]\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix}2&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&5\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}1&1\\1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix}4&9\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}1&3\\1&3\end{bmatrix} \end{array}\right]$$

となり，この結果は最初の「ふつうの計算」と一致する．

これは何ら不思議な現象ではなく，特定の成分に着目し，行列の積の計算ルールに照らし合わせてみれば，もとの「ふつうの計算」も，「ブロックによる計算」も全く同じ計算過程を経ていることが見て取れるであろう（青字部分に注目）．

一般化. 以上の計算を一般化して，公式の形にまとめておこう（といっても，ふつうの行列の積の計算と同じ形になるので，実質的に覚えることな何もない）．

まず，$m\times n$ 行列 A と $n\times l$ 行列 B をとり，積 AB を考える．このとき，自然数 m,n,l をそれぞれ p,q,r 個の自然数の和

$$\begin{aligned} m &= m_1+m_2+\ \cdots\ +m_p \\ n &= n_1+n_2+\ \cdots\ +n_q \\ l &= l_1+l_2+\ \cdots\ +l_r \end{aligned}$$

として表す（これらが，ブロックの行や列の分割に対応する）．

行列 A，B，AB をそれぞれ $\boxed{p}\times\boxed{q}$ 型，$\boxed{q}\times\boxed{r}$ 型，$\boxed{p}\times\boxed{r}$ 型のブロック行列

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pq} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & \dots & B_{qr} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & \dots & C_{pr} \end{bmatrix}$$

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

に分割する．ただし，

$$A = \big[\, A_{ij} \,\big]_{1 \le i \le p,\, 1 \le j \le q}, \quad B = \big[\, B_{jk} \,\big]_{1 \le j \le q,\, 1 \le k \le r}, \quad AB = \big[\, C_{ik} \,\big]_{1 \le i \le p,\, 1 \le k \le r}$$

と表すとき，各 A_{ij}，B_{jk}，C_{ik} はそれぞれ $m_i \times n_j$ 型，$n_j \times l_k$ 型，$m_i \times l_k$ 型 の行列となるように分割するのである[3]．これらの行列を直観的に「ブロック」と呼ぶことにする．

このとき，ブロック C_{ik} は次のように計算できる：

$$C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + A_{i2}B_{2k} + \cdots + A_{iq}B_{qk} = \sum_{j=1}^{q} A_{ij}B_{jk}.$$

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{iq} \\ \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \blacksquare & B_{1k} & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & B_{2k} & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \blacksquare & B_{qk} & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & C_{ik} & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$$

第 i 行　　第 k 列　　(i,k) 成分

ベクトルによる行列の表示

行ベクトル（$1 \times n$ 型行列）や列ベクトル（$n \times 1$ 型行列）は太字の小文字で

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{e},\ \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g},\ \boldsymbol{h},\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{l},\ \boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$$

などと表す．また，行または列ベクトルのゼロ行列は，数字のゼロの太文字で

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

などと表される．記号 $\mathbf{0}$ が行ベクトルか列ベクトルかは，文脈で判断するしかない．

いま 2 つの行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad と \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

が与えられてているとき，

- A の第 i 行の行ベクトルを $\boldsymbol{a}_i := \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \end{bmatrix}$
- B の第 j 列の列ベクトルを $\boldsymbol{b}_j := \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdots \\ b_{lj} \end{bmatrix}$

[3]改めて注意しておくが，行列の横にある角かっこ [ ] は補助的なものであり，数がタテヨコの長方形型に配置されていればそれはすべて行列とよばれる資格を持つ．

と表すとしよう．このとき，もとの行列を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix},$$

とも表す．つまり，A を $\boxed{m} \times \boxed{1}$ 型のブロック行列，B を $\boxed{1} \times \boxed{l}$ 型のブロック行列と見なしているのである．

また，これらの（ブロック行列としての）積 AB は，(i,k) 成分に相当するブロックが 1×1 行列

$$\boldsymbol{a}_i\,\boldsymbol{b}_k = \begin{bmatrix} a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \end{bmatrix}$$

として与えられることから，$m \times l$ 行列 AB を各ブロックが 1×1 行列（すなわち，実数１つ）からなる $\boxed{m} \times \boxed{l}$ 型のブロック行列とみなして

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\,\boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_m\,\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

とも表現できる．また，この第 j 列（$1 \le j \le n$）は

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_j \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix} \boldsymbol{b}_j = A\,\boldsymbol{b}_j$$

とも表されることから，

$$AB = \begin{bmatrix} A\,\boldsymbol{b}_1 & A\,\boldsymbol{b}_2 & \cdots & A\,\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

という表記もありである．同様の理屈で，

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\,B \\ \boldsymbol{a}_2\,B \\ \cdots \\ \boldsymbol{a}_n\,B \end{bmatrix}$$

という表記もできる．

例（単位行列） 自然数 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し，列ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を j 行目の成分だけが 1 であとはすべて 0 となるものとする．たとえば $n = 4$ のとき，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

このとき，一般の n に対し

$$E_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$$

が成り立つ．

例（連立 1 次方程式）． 連立方程式

$$\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ x + 2y &= 3 \end{cases}$$

が与えられているとき，2×2 行列 A と 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

と定めると，与えられた方程式は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表される．したがって，**もし** $BA = E$ **となる行列** B **がみつかれば，**

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \implies BA\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b} \iff E\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b}$$

となり（ここで $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$，すなわち $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を用いた），連立方程式が解けるのではないか？このアイディアがうまく行く場合や，行かない場合の一般論を展開することが今後の目標である．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．

担当教員：川平 友規

第 4 回（5/7）連立 1 次方程式とガウスの消去法

配布日：2024 年 5 月 15 日 Version：1.2

連立 1 次方程式

例（連立 1 次方程式，再）． 連立方程式

$$\begin{cases} 2x-y &= 1 \\ x+2y &= 3 \end{cases}$$

が与えられているとき，2×2 行列 A と 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b}$ を

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

と定めると，与えられた方程式は

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

と表される．したがって，**もし $BA=E$ となる行列 B がみつかれば**[1]，

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \implies BA\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{b} \iff E\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x}=B\boldsymbol{b}$$

となり（ここで $E\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，すなわち $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を用いた），連立方程式が解けるのではないか？このアイディアがうまく行く場合や，行かない場合の一般論を展開することが今後の目標である．

一般化． 一般に，未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対し，

$$m\text{ 個}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

の形で与えられる n 元連立 1 次方程式は，

$$A:=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}:=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}:=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とおくと

$$A\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{b}$$

[1] そのような B は存在しないかもしれない．たとえば $A=O$ のときは明らかにダメだし，$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ の場合もダメである．実際，どんな $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対しても $BA=\begin{bmatrix} 3a+2b & 0 \\ 3c+2d & 0 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ である．

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

と表すことができる．左辺は $m \times n$ 型行列と $n \times 1$ 型行列の積であり，右辺は $m \times 1$ 型行列になっている．このとき，行列 A をこの連立 1 次方程式の**係数行列**といい，行列

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

（これは，$m \times (n+1)$ 型の行列を $\boxed{1} \times \boxed{2}$ 型のブロック行列として表現したものである．角カッコや縦線はいつものように，便宜的なものであり無視してもよい）を**拡大係数行列**という．

注意！ コンピューターに方程式を解かせる（そのためのアルゴリズムを作る）という観点では，データとしてこの拡大係数行列を入力し，答えとして n 次元のベクトル $\boldsymbol{x}$ を出力することになる．すなわち，上記の未知数を含む方程式は「人間用」の表現に他ならない．

ガウスの消去法（掃き出し法）

与えられた連立方程式を解く実用的なアルゴリズムとしてよく知られているのが，**ガウスの消去法**（Gaussian elimination）もしくは**掃き出し法**と呼ばれるものである[2]．

具体例として，連立方程式

$$(*) \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 3x - y = 3 \\ -x - 3y + 2z = -5 \end{cases}$$

をガウスの消去法で解いてみよう．以下，対応する拡大係数行列と比較しながら式変形を進めていく．その際，方程式 $(*)$ あるいは行列の第 i 行目を ⓘ と表すものと約束する．また，変形「前」の注目ポイントは字を青く，変形「後」の注目ポイントは背景を青くした．

初期状態：

$$(*) \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 3x - y = 3 \\ -x - 3y + 2z = -5 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right].$$

$\longrightarrow$ ① $\times \dfrac{1}{2}$ **（第 1 行を 1/2 倍する）**：

$$(*) \begin{cases} x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ 3x - y = 3 \\ -x - 3y + 2z = -5 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$ ② + ① $\times (-3)$, ③ + ① $\times 1$ **（第 2 行に第 1 行の (-3) 倍を加え，第 3 行に第 1 行の 1 倍を加える．以下同様）**：

$$(*) \begin{cases} x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ 0 - 4y - \frac{3}{2}z = 3 \\ 0 - 2y + \frac{5}{2}z = -5 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & -2 & \frac{5}{2} & -5 \end{array}\right]$$

[2] コンピューターに与えるアルゴリズムとして，どう実現（プログラミング）すべきか考えながら読むこと．

$\longrightarrow$ ② $\times \left(-\dfrac{1}{4}\right)$：

$$(*) \begin{cases} x & +y & +\frac{1}{2}z & = 0 \\ & y & +\frac{3}{8}z & = -\frac{3}{4} \\ & -2y & +\frac{5}{2}z & = -5 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -2 & \frac{5}{2} & -5 \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$ ③ $+$ ② $\times 2$：

$$(*) \begin{cases} x & +y & +\frac{1}{2}z & = 0 \\ & y & +\frac{3}{8}z & = -\frac{3}{4} \\ & 0 & +\frac{13}{4}z & = -\frac{13}{2} \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} & -\frac{13}{2} \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$ ③ $\times \frac{4}{13}$：

$$(*) \begin{cases} x & +y & +\frac{1}{2}z & = 0 \\ & y & +\frac{3}{8}z & = -\frac{3}{4} \\ & & z & = -2 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

以上の操作を「前進消去」という．以下の操作は「後退代入」とよばれる．

$\longrightarrow$ ① $+$ ③ $\times (-\frac{1}{2})$， ② $+$ ③ $\times (-\frac{3}{8})$：

$$(*) \begin{cases} x & +y & +0 & = 1 \\ & y & +0 & = 0 \\ & & z & = -2 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$ ① $+$ ② $\times (-1)$：

$$(*) \begin{cases} x & +0 & & = 1 \\ & y & & = 0 \\ & & z & = -2 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

よって，方程式の解として $x = 1, y = 0, z = -2$ を得る．とくに，拡大係数行列のほうは $\left[\, E_3 \mid \boldsymbol{c} \,\right]$ の形になっていることに注意．

行基本変形と（行）階段形

上の方程式 $(*)$ の計算では，方程式を変形するよりも，シンプルに拡大係数行列のほうだけで対応する変形をすれば十分だとわかる．

一般に，「ガウスの消去法」で行われる行列への操作は，以下の 3 つであり，これを**行基本変形**という：α を 0 でない定数とし，

(R1) 第 i 行を α 倍する（ⓘ $\longrightarrow$ ⓘ $\times \alpha$）．

(R2) 第 i 行を α 倍し，第 i' 行に加える（i' $\longrightarrow$ i' $+$ ⓘ $\times \alpha$）．

(R3) 第 i 行と第 i' 行を入れ替える．（ⓘ $\longleftrightarrow$ i'）．

一般に，アルゴリズムとして計算が大変なのは「前進消去」までであって，そのあとの「後退代入」は単純に代入を繰り返すことと同じなので比較的楽である.「前進消去」まで終了したときの（拡大）係数行列の形は，特別な名前で「階段形」もしくは「階段行列」とよばれている．正確な定義は，以下の通り：

定義． 与えられた $m \times n$ 行列 $A = \left[a_{ij} \right]$ が **（行）階段形** ((row) echelon form) もしくは **階段行列**であるとは，以下の (E1) と (E2) を満たすことをいう.

(E1) もしゼロベクトルである行が存在すれば，それはゼロベクトルではない行よりも下の行である.

(E2) もし第 1 行から第 m_0 行までがゼロベクトルではないならば，各 $i = 1, 2, \cdots, m_0$ に対し条件

$$1 \leq j(1) < j(2) < \cdots < j(m_0) \leq n$$

を満たす $j(i)$ が存在し，

- $1 \leq j < j(i)$ のとき $a_{ij} = 0$ （$j(1) = 1$ のとき，そのような j は存在しない），かつ
- $j = j(i)$ のとき $a_{ij} = 1$.

この手の定義は，具体例を先に見た方がわかりやすい：

例． 以下，$*$ は「ワイルドカード」（どんな数字が入ってもよいことを表す記号）である：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ガウスの消去法の基本原理． ガウスの消去法がアルゴリズムとして成立する（すなわち，有限時間で終了することを保証する）根拠となるのが，次の定理である：

定理 4.1 (ガウスの消去法の基本原理) 任意の行列に対し，行基本変形を繰り返し施すことで,（行）階段形にすることができる.

例． 最初の 2 元連立 1 次方程式をガウスの消去法で解いてみよう．

$$\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ x + 2y &= 3 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

最初は ①×(1/2) として左上の係数を 1 としたくなるが，この場合は行の入れ替えを用いた方が割り算や掛け算による誤差が混入しない：

$\xrightarrow{\text{(R3)}}$ ① $\longleftrightarrow$ ② **（第 1 行と第 2 行を入れかえ）：**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ② + ① × (−2)：

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R1)}}$ ② × (−1/5)：

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

以上が前進消去であり，ここまでで階段形が得られた．最後に後退置換を行う．

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ① + ② × (−2)：

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1. \end{cases}$$

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．

担当教員：川平 友規

第 5 回（5/14）連立 1 次方程式と行列の階数

配布日：2024 年 5 月 15 日　Version：1.1

行列の階数

前回学んだ「ガウスの消去法の基本定理」を再掲する：

定理 5.1 (ガウスの消去法の基本原理，再) 任意の行列に対し，行基本変形を繰り返し施すことで，(行）階段形にすることができる．

階段形の行にゼロベクトルがあれば，それはゼロベクトルではない行よりも下にあるのであった（前回）．すなわち，与えられた行列を階段形に変形したとき，もしゼロベクトルになっている行が存在するならば，それはある行から下にまとめて並んでいるのである．そこで，つぎのような数を定義する：

定義 (行列の階数) $m \times n$ 型の行列 A を行基本変形によって得られた階段形にしたとき，「ゼロベクトルではない行」の個数をこの行列の**階数** (rank) といい，

$$\operatorname{rank} A$$

と表す．

注意！ 行列の階段形は必ずしも一意的ではない（一通りには定まらない，ということ．実際，下の行の定数倍を上の行に足しても階段形の形は維持される）が，階数は変化しないことが知られている．

例. すでに階段形の行列であれば，階数はすぐにわかる：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

例. ほぼ階段形の場合：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

注意！ 一般の行列に対しては，ガウスの消去法のプロセスを経て階段形にしないと，階数はわからない．

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

例. $m \times n$ 行列 A に対し $m \leq n$ が成り立つとき，その階数は明らかに全体の行の数 m を超えることはできないので，$\mathrm{rank}\, A \leq m$ が成り立つ．一方，$m \geq n$ が成り立つとき，階段形の定義から階数は列の数 n を超えることはできないので，$\mathrm{rank}\, A \leq n$ が成り立つ．すなわち，

$$\mathrm{rank}\, A \leq \min\{m, n\}$$

が成り立つ[1]．

$$m \leq n \text{ のとき：} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{bmatrix} \quad m \geq n \text{ のとき：} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

連立 1 次方程式と階数

行列とベクトルで表示された連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．以下，

「連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解く」

とは，

「$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ をすべて決定する」

ことだと定義しよう．また，そのような $\boldsymbol{x}$ を**連立 1 次方程式** $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ **の解**とよぶことにする．このあと確認するように，解には 3 つのケースがありえる：

(1) 解が存在しない．

(2) 解は無限個存在する．

(3) 解はただ 1 つだけ存在する．

じつは，

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の個数は $\mathrm{rank}\, A$ と $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A \mid \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ だけで判定できる

のである！

注意！ $m \times n$ 型の係数行列 $A = [a_{ij}]$ が与えられているとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} x_j + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \boldsymbol{b}$$

とも表現できる．もし，A の第 j 列 $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ がゼロベクトルであったならば，そもそも未知数 x_j が方程式に現れる理由はないので，最初から $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} x_j$ の項を消去して考えるべきである．とくに，第 1 列目 $\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$

[1] 記号 $\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ は，「$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の中で最小のもの」を表す．

にはゼロでない成分が含まれるから，行列 A の階段形をもとめたとき，その $(1,1)$ 成分は 1 であると仮定してよい．

命題 5.2 以下のいずれかが成り立つ：

（ア） $\mathrm{rank}\left[\,A\mid \boldsymbol{b}\,\right]=\mathrm{rank}\,A.$

（イ） $\mathrm{rank}\left[\,A\mid \boldsymbol{b}\,\right]=\mathrm{rank}\,A+1.$

証明． $\mathrm{rank}\,A=r$ としよう．$\left[\,A\mid \boldsymbol{b}\,\right]$ に対し，A が階段形になるように行変形を施すと，

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & * & * & \cdots & \cdots & * & c_1 \\ 0 & 1 & * & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * & c_r \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_m \end{array}\right]$$

のような形になる．もし

$$c_{r+1}=\cdots=c_m=0$$

であれば，$\mathrm{rank}\left[\,A\mid \boldsymbol{b}\,\right]=r$ であり（ア）が成り立つ．そうでなければ，c_{r+1} から c_m までに少なくとも 1 つ 0 ではない成分 c_i が含まれることになるから，行基本変形 (R1) により第 i 行を $1/c_i$ 倍して 1 とし，さらなる行基本変形 (R2) と (R3) を繰り返し施すことで

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & * & * & \cdots & \cdots & * & c_1 \\ 0 & 1 & * & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * & c_r \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

という形にできる．したがって，$\mathrm{rank}\left[\,A\mid \boldsymbol{b}\,\right]=r+1$ であり（イ）が成り立つ． ■

ケース 1：解が存在しない場合． 上の命題で（イ）の場合，方程式は

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\iff \left[\begin{array}{cccccc} 1 & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]$$

が成り立つ．いま，解 $\boldsymbol{x}$ が存在したと仮定すると，この等式の第 $r+1$ 行は

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n=1\iff 0=1$$

となり矛盾である．よって，次の定理が得られた：

定理 5.3 $\mathrm{rank}\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right] = \mathrm{rank}\,A + 1$ のとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たない．

注意！ 先の命題より，$\mathrm{rank}\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right] = \mathrm{rank}\,A + 1$ とは $\mathrm{rank}\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right] \neq \mathrm{rank}\,A$ と同値である．すなわち，定理は「$\mathrm{rank}\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right] \neq \mathrm{rank}\,A$ ならば解なし」，あるいは対偶をとって，「解が存在するための必要条件は $\mathrm{rank}\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right] = \mathrm{rank}\,A$」とも言い換えられる．

例（解なし）． 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;:\Longleftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が解をもつか調べてみよう．拡大係数行列を行変形によって階段形にする：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$\overset{(\mathrm{R2})}{\longrightarrow}$ ③ + ① × 1，④ + ① × (−2)：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$\overset{(\mathrm{R2})}{\longrightarrow}$ ④ + ② × (−1)：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

これは階段形であるが，$3 = \mathrm{rank}\,A < \mathrm{rank}\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right] = 4$ であるから，定理 5.3 よりこの方程式は解をもたない．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．

担当教員：川平 友規

第 6 回（5/21）連立 1 次方程式と行列の階数 (2) ・逆行列

配布日： 2024 年 7 月 13 日 Version： 1.2

連立 1 次方程式と階数（前回からのつづき）

前回，行列とベクトルで表示された連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$（ただし，$A$ は $m \times n$ 型）に対し，次の命題を証明した：

> **命題 6.1 (再)** 以下のいずれかが成り立つ：
>
> （ア） $\mathrm{rank}\,[\,A \mid \boldsymbol{b}\,] = \mathrm{rank}\,A$.
>
> （イ） $\mathrm{rank}\,[\,A \mid \boldsymbol{b}\,] = \mathrm{rank}\,A + 1$.

とくに（イ）の場合，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解は存在しないことを示した．

今回は,（ア）の場合を考える．

ケース 2：解が存在する場合． 上の命題で（ア）の場合，方程式は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{bmatrix} 1 & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

の形になる．ただし，$r = \mathrm{rank}\,A$ である．このとき，第 $(r+1)$ 行以下は $0 = 0$ という自明な（ようするに，あたりまえな）等式を与えているだけなので，方程式の解 $\boldsymbol{x}$ を特徴付ける条件にはならない．すなわち，

方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は，実質的に r 個の条件式からなる

ことがわかる．このとき，方程式は必ず解をもつことを確認していこう．まずは具体例をひとつ調べてみる：

例（パラメーターつきの解）． 5 元連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;:\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

が解をもつかガウスの消去法で調べてみよう．まずは拡大係数行列を行変形によって階段形にする（前進消去，青字は注目ポイント）：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R1)}}$ ②＋①×(−1)，③＋①×(−2)：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ③＋②×(−1)：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

以上で前進消去は終了し，階段形が得られた．また，$\operatorname{rank}\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right] = \operatorname{rank} A = 3$ であることもわかる．

方程式を解くためには，さらに後退代入を進めなくてはならない．ここでは，「$\boxed{0}$ の階段」の上にならぶ，行の「先頭」にある $\boxed{1}$ の上の数（赤字）を消去し，0 にしていく．すなわち，

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ②＋③×(−1)：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

これ以上 0 は増やせないので，ガウスの消去法としてのアルゴリズムはこれで終わりである．これをもとの連立方程式（の同値変形）として解釈すると，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_5 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = -1 + x_4 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

後退代入のおかげで，最後の式の右辺には左辺の x_1, x_3, x_5 が含まれず，x_2 と x_4 のみで表現されていることに注意しよう．さらに $x_2 = s$, $x_4 = t$ とおくと，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2s - 3t \\ s \\ -1 + t \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (s,\ t \text{ は実数})$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (s,\ t \text{ は実数}).$$

すなわち，2 つのパラメーター s と t の値を任意に選んだとき，上の形で与えられる $\boldsymbol{x}$ はもとの方程式の解になっているわけである．

注意！ 幾何学的には，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の全体は，実 5 次元空間 $\mathbb{R}^5$ の中の平面をなす．

（ア）の一般の場合． 一般に（ア）の $\mathrm{rank}\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right] = \mathrm{rank}\, A =: r\ (\leq n)$ がなりたつとき，ガウスの消去法のアルゴリズム（前進消去＋後退代入）によって

$$\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right] \iff \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & * & 0 & \cdots & * & 0 & * & c_1 \\ 0 & 1 & * & 0 & \ddots & * & 0 & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & c_r \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

のように，「 0 の階段」の上にならぶ，行の「先頭」にある 1 の上に，0 だけが並んでいるようにできる．

$r < n$ のとき：行の「先頭」が 1 である列に対応する r 個の添字

$$1 = j_1 < j_2 < \cdots < j_r\ (\leq n)$$

と，それ以外の $n - r$ 個の添字

$$1 < j'_1 < j'_2 < \cdots < j'_{n-r}\ (\leq n)$$

が存在し，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{cases} x_{j_1} &= \ (x_{j'_1}, \cdots, x_{j'_{n-r}} \text{ の 1 次式}) \\ x_{j_2} &= \ (x_{j'_1}, \cdots, x_{j'_{n-r}} \text{ の 1 次式}) \\ \ \vdots & \ \vdots \qquad \vdots \\ x_{j_r} &= \ (x_{j'_1}, \cdots, x_{j'_{n-r}} \text{ の 1 次式}) \end{cases}$$

の形で表すことができる．$x_{j'_k} = t_k\ (1 \leq k \leq n - r)$ とおけば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は各成分 $x_j\ (1 \leq j \leq n)$ がパラメーター $t_1, \cdots, t_{n-r}$ の 1 次式によって表されることがわかる．すなわち，**解は $n - r$ 個のパラメーターをもつ．**

次に $r = n$ のときを考えよう（もともと $r \leq m$ であるから，このとき $n \leq m$ でもある．すなわち，行列は正方形か縦長）．この場合，上のように拡大係数行列 $\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right]$ を行基本変形し後方代入まで完了させたものは，

$$\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right] \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} E_n & \boldsymbol{c} \\ \hline O_{m-n,n} & \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

のように，第 n $(= r)$ 行目までが単位行列 E_n になっているので，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$，すなわち $x_1 = c_1, \cdots, x_n = c_n$ が**ただ 1 つの解**を与える．以上を定理としてまとめておこう：

定理 6.2 $\operatorname{rank}\left[A \mid \boldsymbol{b}\right] = \operatorname{rank} A =: r\ (\le n)$ とする．このとき，

(1) $r < n$ ならば，解は $n - r$ 個のパラメーターをもつ．よって，解は無限個存在する．

(2) $r = n$ ならば，解はただ 1 つに定まる．

例題 6.1 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ :\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

を解け．

解答． 拡大係数行列を行変形によって階段形にする（青字は注目ポイント）：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R1)}}$ ① × (1/2)，② × (1/3)：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1/2 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ③ + ② × (−3)：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1/2 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ③ × (−1/2)：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1/2 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

よって $\operatorname{rank}\left[A \mid \boldsymbol{b}\right] = \operatorname{rank} A = 3$ であり，解は存在する．さらに後退代入を進めていく：

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ① + ③ × (−1), ② + ③ × (−4/3) ：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1/2 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ① + ② × (−3) ：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & -9/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

これをもとの連立方程式（の同値変形）として解釈すると，

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \iff \begin{cases} x_1 \qquad -x_3/2 = -9/2 \\ \qquad x_2 \; +x_3/3 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = -2 \end{cases}$$

$x_3 = t$ とおくと，

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/2+t/2 \\ 3-t/3 \\ t \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (t \text{ は実数})$$

$$= \begin{bmatrix} -9/2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (t \text{ は実数}).$$

■

注意！ 幾何学的には，方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の全体は，実 4 次元空間 $\mathbb{R}^4$ の中の 1 つの直線をなすことがわかる．

正則行列

A を n 次正方行列とする．連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に対し，$BA=E$ $(=E_n)$ となる n 次正方行列 B 存在すれば，解は $\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{b}$ と表される（しかも，解は 1 つだけに定まる）のであった．それを念頭に，以下のような言葉の定義をする：

定義 （逆行列/正則行列） n 次正方行列 A に対し，同じく n 次正方行列 B が

$$BA = AB = E$$

を満たすとき，B は A の**逆行列** (inverse matrix) であるといい，$B = A^{-1}$ と表す．逆行列が存在するような行列は**正則** (regular) である，または**正則行列** (regular matrix) であるという．

注意！ 定義の対称性より，$B=A^{-1}$ であれば，$A=B^{-1}$ である．すなわち，A^{-1} も正則行列であり，$(A^{-1})^{-1}=A$.

注意！ A の逆行列は，存在するならば 1 つだけである．実際，B と C がともに A の逆行列であれば，

$$BA = AB = E = CA = AC$$

より，

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

例 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

であるから，$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ はともに正則であり，互いに逆行列である．

例 2. $EE = E$ であるから，$E^{-1} = E$.

例 3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ かつ $ad - bc \neq 0$ であるとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

（計算して確認せよ.）

例 4. $O = O_{n,n}$ とするとき，任意の n 次正方行列 A に対し $AO = O \neq E$. よって，O は逆行列をもつことができないから，正則行列ではない.

例 5. 同様に，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ は逆行列を持たないことを示そう．もし $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が存在したと仮定すると，

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}.$$

これが単位行列であるならば，$a + c = 1$ かつ $a + c = 0$ となり矛盾する.

正則行列の特徴づけ. 正則行列を決定する条件は複数あり，いずれも重要である.

定理 6.3 n 次正方行列 A に対し，以下は同値（互いに必要十分条件）：

(1) $\operatorname{rank} A = n$

(2) A は行基本変形により E_n となる.

(3) 任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解をもつ.

(4) A は逆行列をもつ．すなわち，A は正則行列.

証明は次回に与える.

注意！ (3) は

(3)’ <u>ある</u> n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}$ が存在し，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解をもつ.

に変えてもよい．また，より具体的に

(3)” 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみである.

と代えてもよい.

証明:. (1) $\Longrightarrow$ (2)：$\operatorname{rank} A = n$ のとき，A を階段形まで変形させた場合ゼロベクトルとなる行は存在せず，対角成分は全て 1 ，それより下に並ぶ成分はすべて 0 となる．よって，さらに「ガウスの消去法」の後退代入に相当する操作まで完了させれば，行基本変形だけで E_n とできる.
(2) $\Longrightarrow$ (3)：方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $\begin{bmatrix} A \mid \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ に対し，上で行ったような A から E_n への行基本変形を行えば，

$$\begin{bmatrix} A \mid \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} E \mid \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

となる列ベクトル $\boldsymbol{c}$ が定まる．これは $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ を意味するから．解はただ 1 つだけ存在する.
(3) $\Longrightarrow$ (4)：$E = E_n$ を 列ベクトルを用いて

$$E = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$$

（ただし，$\boldsymbol{e}_j$ は上から j 番目の成分が 1 でそれ以外は 0）のようにあらわすことにする．いま，仮定より方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$ の解がただ 1 つ定まるので，それを $\boldsymbol{c}_j$ とすると，

$$\begin{bmatrix} A\boldsymbol{c}_1 & \cdots & A\boldsymbol{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \iff A\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$$

よって n 次正方行列 B を $B := \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}$ とすれば，

$$AB = E.$$

このとき，$BA = E$ も成立する（このあと，第 10 回で正当化する）ことが知られているので，B は A の逆行列である．したがって A は正則行列．

(4) $\Longrightarrow$ (3)：任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

すなわち，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解 $A^{-1}\boldsymbol{b}$ をもつ．

(3) $\Longrightarrow$ (1)：背理法を用いる．一般に $r := \operatorname{rank} A \le n$ が成り立つが，$r < n$ であったと仮定しよう．このとき先の定理より，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $n - r$ 個のパラメーターをもつので，無限個の解をもつことになる．これは (3) に矛盾する． ■

逆行列の計算方法

上の「(3) $\Longrightarrow$ (4)：」の部分において，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$ の解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_j$ を求めたが，これは拡大係数行列でいうと

$$\begin{bmatrix} A \mid \boldsymbol{e}_j \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} E \mid \boldsymbol{c}_j \end{bmatrix}$$

という行基本変形（ガウスの消去法の前進消去＋後退代入）によって得られる．とくに，行基本変形の施し方は $A \longleftrightarrow E$ の変形のみで決定されるので j によらず共通である．したがって，$j = 1$ から $j = n$ までをブロック状に並べても同一の行基本形により

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \ A\ & \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c|c} \ E\ & \boldsymbol{c}_1 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{array}\right]$$

とできる．すなわち，もし

$$\begin{bmatrix} A \mid E \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} E \mid B \end{bmatrix}$$

という行基本変形ができれば，$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix} = A^{-1}$ であり，逆行列が求まることがわかる．さらに，もしそのような行基本変形ができなければ，最初から A は正則ではなかったのである．

例． $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めて（存在を判定して）みよう．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ②＋①$\times(-3)$，③＋①$\times(-2)$：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R1)}}$ ② × (−1/4)：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ③ + ② × 2：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ① + ③ × (−3), ② + ③ × (−2)：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5/2 & 3/2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & 3/4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ① + ② × (−2) ：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & 3/4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

よって $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7/4 & 3/4 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

例. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列が存在しないことを確かめてみよう.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{(R2)}}$ ② + ① × (−1) ：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

ここで $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ の階数は $1\,(<2)$ であるから，これ以上基本変形を施しても $\left[\,E_2 \mid B\,\right]$ の形にはできない．よって逆行列は存在しない．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．

担当教員：川平 友規

第 7 回（5/28）行列式にむけて / 置換 (1)

配布日： 2024 年 5 月 30 日 Version： 1.3

行列式にむけて

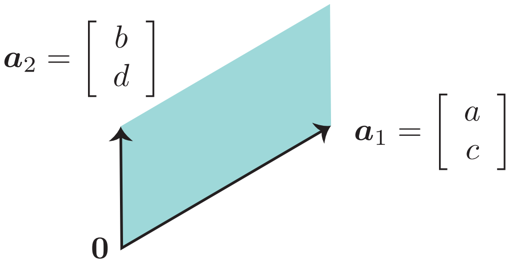
これから数回の講義で，正方行列に対し「行列式」という量を定義する，その動機付けを与えておこう．

2 次正方行列の行列式． いま，

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$$

とするとき,「A の行列式」とよばれる量（実数）を

$$\det A := ad - bc$$



と定める（より一般的な定義は次回あたえる）．
幾何学的には，図のように 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ で張られる平行四辺形の（符号つき）面積が $ad - bc$ であるから，ある意味で行列 A の「体積」や「重さ」のようなものに相当するのだと想像される．

このとき，以下が成り立つ：

> **定理 7.1** すべての 2 次正方行列 A に対し，以下が成り立つ．
>
> (1) A が正則 $\iff \det A \neq 0$
>
> (2) (1) の条件が成り立つとき，$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

以下では，この一般化を考えたい．A を n 次正方行列とし，$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ とおく．このとき,「A の行列式」

$$\det A := (a_{ij} \text{ たちのものすごく複雑な式})$$

を，

$$A \text{ が正則} \iff \det A \neq 0$$

が成り立つように定めるのである[1]．すると，次の「クラメールの公式」が成り立つ：

> **クラメール (Cramer) の公式．** A を正則な n 次正方行列とする．任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は次で与えられる：
>
> $$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ のとき } \quad x_i = \frac{\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}}{\det A} \quad (1 \leq i \leq n)$$

[1] 正確には,「A が正則 $\iff \det A \neq 0$」が成り立つような式は複数あるので，その中から都合のよいものを選ぶことになる．また，式が複雑だからといって，計算が複雑なわけではない．うまく効率的に計算する技法もちゃんと学ぶ．

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

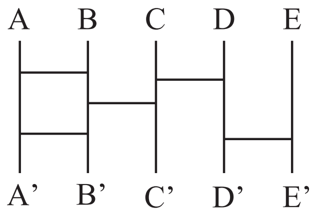
また，A の逆行列を $A^{-1} = \left[\, c_{ij} \,\right] = \left[\, \boldsymbol{c}_1\ \boldsymbol{c}_2\ \cdots\ \boldsymbol{c}_n \,\right]$ とおくと，各列ベクトル $\boldsymbol{c}_j$ $(1 \le j \le n)$ は $A\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{e}_j$ を満たす唯一のものであった（ただし，$E_n = \left[\, \boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n \,\right]$）から，

$$c_{ij} = \frac{\det \left[\, \boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{e}_j\ \boldsymbol{a}_{i+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n \,\right]}{\det A}$$

となる．上で述べたように，行列式の定義式は複雑で，(数値）計算で用いるには時間がかかりすぎてあまり実用的ではない．しかし，明示的な式表現をもつことは理論上極めて有用なのである．

置換

次の「あみだくじ (ghost leg)」を考えてみよう：



このあみだくじは A，B，C，D，E の 5 文字をそれぞれ

$$\mathrm{A} \mapsto \mathrm{C}',\ \ \mathrm{B} \mapsto \mathrm{B}',\ \ \mathrm{C} \mapsto \mathrm{E}',\ \ \mathrm{E} \mapsto \mathrm{A}',\ \ \mathrm{E} \mapsto \mathrm{D}'$$

に対応させる．このように，あみだくじは文字を互いに入れ替える（シャッフルする）効果を持っている．アルファベットなどの文字の数には限りがあるので,（限りなく存在する）数字をかわりにもちいることにすれば,

$$1 \mapsto 3\ \ 2 \mapsto 2,\ \ 3 \mapsto 5,\ \ 4 \mapsto 1,\ \ 5 \mapsto 4$$

という数字の置き換えだと考えることもできる．より一般に，文字の置き換えを次のように定式化しよう：

定義 （定義（置換）） 集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ からそれ自身への 1 対 1 対応を n 文字の**置換**という．置換 σ が

$$1 \mapsto k_1, \quad 2 \mapsto k_2, \quad \cdots, \quad n \mapsto k_n$$

という対応を定めるとき，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

と表す．また，関数のように

$$\sigma(1) = k_1, \quad \sigma(2) = k_2, \quad \cdots, \quad \sigma(n) = k_n$$

とも表す．

例． 上の「あみだくじは」

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

という置換を定める．また，$\sigma(1)=3$，$\sigma(2)=2$，$\sigma(3)=5$，$\sigma(4)=1$，$\sigma(5)=4$ である．

書き方のルール. 置換の表示方法には，次のようなルールがある：

(1) 列の順序は（上下の数字の組みを保っていれば）入れ替えてもよい．たとえば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 動かさない文字は省略してもよい．たとえば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

置換の積と逆置換

置換に関連する言葉を定義していこう：

（ア） n 文字の置換全体からなる集合を S_n と表す[2]．

（イ） 各 $i=1, 2, \cdots, n$ に対し $\epsilon(i)=i$ となる置換 $\epsilon \in S_n$ を**単位置換**という．

（ウ） $\sigma, \tau \in S_n$ のとき，積 $\sigma\tau \in S_n$ を

$$\sigma\tau(i) := \sigma\big(\tau(i)\big) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

と定める．

（エ） 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ に対し，置換

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

を σ の**逆置換**といい，σ^{-1} と表す．とくに，$\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=\epsilon$ が成り立つ．

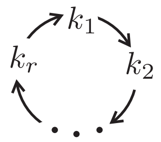
（オ） 集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ から相異なる $r\ (\leq n)$ 個の元 $\{k_1, k_2, \cdots, k_r\}$ を選んで得られる

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 \end{pmatrix}$$

という形の置換 $\sigma \in S_n$ を**巡回置換**といい，

$$(k_1 \ \ k_2 \ \ \cdots \ \ k_r)$$

とも表す．



[2]「n 次対称群」ともよばれる．

例.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 5\ \ 3) = (5\ \ 3\ \ 1) = (3\ \ 1\ \ 5)$$

例.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (1\ \ 4\ \ 2)(3\ \ 6\ \ 5) = (3\ \ 6\ \ 5)(1\ \ 4\ \ 2).$$

ただし，中央と右は巡回置換の積である．一般に，次が成り立つ：

定理 7.2 すべての $\sigma \in S_n$ は，複数の巡回置換の積で表すことができる．ただし，そのような表し方は 1 つではない．

証明の代わりに具体例をみてみよう．S_7 に属する置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．まず 1 に着目しそれぞれ σ での行き先をみると，

$$1 \overset{\sigma}{\longmapsto} 6 \overset{\sigma}{\longmapsto} 2 \overset{\sigma}{\longmapsto} 7 \overset{\sigma}{\longmapsto} 1$$

となり 4 回で元に戻るループができていることがわかる．このループに含まれなかった最小の数（文字）3 をとると，今度は

$$3 \overset{\sigma}{\longmapsto} 5 \overset{\sigma}{\longmapsto} 4 \overset{\sigma}{\longmapsto} 3$$

という 3 回で元に戻るループができている．これら 2 つの独立したループで 1 から 7 までのすべての数（文字）がつくされているから，

$$\sigma = (1\ \ 6\ \ 2\ \ 7)(3\ \ 5\ \ 4) = (3\ \ 5\ \ 4)(1\ \ 6\ \ 2\ \ 7).$$

一般の場合も同様に，複数の独立したループに分解することで巡回置換の積にできるわけである．

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．

担当教員：川平 友規

第 8 回（6/4）置換 (2) / 行列式

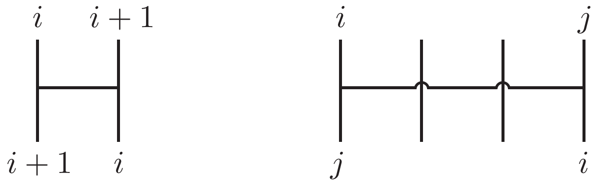
配布日：2024 年 6 月 5 日　Version：1.1

互換とあみだくじ

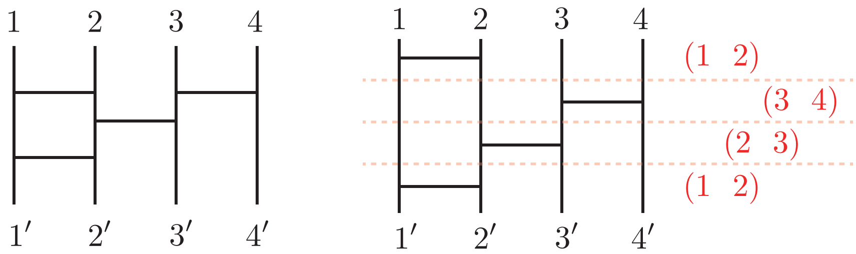
前回に引き続き n を自然数とし，n 文字の置換と，その全体の集合 S_n について考える．

定義 （互換） 2 文字の巡回置換 $(i\ \ j)$ を**互換**という．

あみだくじで互換を表現してみよう．一般に，互換 $(i\ \ i+1)$ は下図の左側のように描けるし，一般の互換 $(i\ \ j)$ $(i<j)$ についても，横棒の形を工夫して「縦棒の飛び越え」も許せば下図の右側のように実現できる．



逆に，あみだくじが任意に与えられたとしよう．たとえば，$n=4$ について下図の左側のようなあみだくじを考える．ここで，必要なら横棒の高さを調節し，横棒たちがすべて異なる高さをもつようにすれば，下図の右側のようにできる．



これは，あみだくじが生成する置換 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\in S_4$ が

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}=(1\ \ 2)(2\ \ 3)(3\ \ 4)(1\ \ 2)$$

のように互換の積として表されることを意味する．実際，数の動きは次のように（上から下へ）追っていけばよい：

$$\begin{array}{ccccl}
1 & 2 & 3 & 4 & \\
\downarrow & \downarrow & | & | & (1\ \ 2)\\
2 & 1 & 3 & 4 & \\
| & | & \downarrow & \downarrow & (3\ \ 4)\\
2 & 1 & 4 & 3 & \\
\downarrow & | & | & \downarrow & (2\ \ 3)\\
3 & 1 & 4 & 2 & \\
| & \downarrow & | & \downarrow & (1\ \ 2)\\
3 & 2 & 4 & 1 &
\end{array}$$

じつは，次が成り立つ：

定理 8.1 任意の置換 $\sigma \in S_n$ は互換の積として表すことができる．ただし，その表し方は一意的ではない．

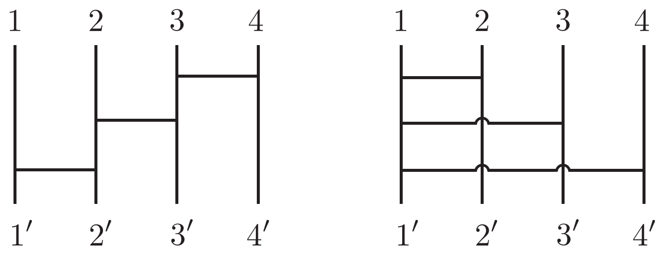
つまり，

任意の置換 $\sigma \in S_n$ を実現するあみだくじが存在する

のである．

証明は難しくない．前回確認したように，任意の置換は巡回置換の積として表現できるので，与えられた巡回置換を互換の積で表現すればよいことになる．すなわち，与えられた巡回置換を実現するあみだくじを考えればよい．

たとえば $n = 4$ のとき，$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$ を実現するあみだくじは



のようなものが考えられるから，

$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4) = (1\ \ 2)(2\ \ 3)(3\ \ 4) = (1\ \ 4)(1\ \ 3)(1\ \ 2)$$

などと表すことができる．より一般に，

$$\begin{aligned}(k_1\ \ k_2\ \ \cdots\ \ k_r) &= (k_1\ \ k_2)(k_2\ \ k_3)\cdots(k_{r-1}\ \ k_r)\\ &= (k_1\ \ k_r)(k_1\ \ k_{r-1})\cdots(k_1\ \ k_2)\end{aligned}$$

と表されるから，上の定理が証明できた．

置換の符号． この定理を用いて，置換の「符号」を以下のように定める：

定義 （置換の符号） $\sigma \in S_n$ が m 個の互換の積で表されるとき，σ の**符号** (signature) $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

と定める．ただし，ϵ は 0 個の互換の積とみなし，$\mathrm{sgn}(\epsilon) = (-1)^0 = 1$ と定める．

この m は，σ をあみだくじで実現したときの横棒の数にほかならない．

この定義は互換による表し方（じつは，σ ごとに無限に表し方がある）に依存しているように見えるが，次の命題からそうではないことがわかる：

命題 8.2 (置換の符号) $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は σ の互換の積としての表し方によらずに決まる．

つまり，σ を互換の積で表す方法（=あみだくじで実現する方法）に対して，

- 互換の数（=あみだくじの横棒の数）が偶数 $\iff$ $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$
- 互換の数（=あみだくじの横棒の数）が奇数 $\iff$ $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$

が成り立つのである．

この命題の証明は少し複雑なので，後回しにする．

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

行列式

定義 (行列式) n 次正方行列 $A = \left[a_{ij} \right]$ に対し，A の行列式 (determinant) $\det A \in \mathbb{R}$ を

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定める．$\det A$ は

$$|A|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

などとも表す．

注意！ $n = 1$ のときは，$\det [a] = a$ とする．

注意！ S_n は $n!$ 個の元からなるので，$\det A$ の定義のシグマ（和の記号）が実際に足している項の数は $n!$ 個となる．たとえば，$n = 2$ で 2，$n = 3$ で 6，$n = 4$ で 24，$n = 5$ で 120 といった具合なので，$n = 4$ のあたりですでに人間が通常計算するレベルではなくなってしまうし，コンピューターでもすぐに限界が来てしまう．実際には，行基本変形のアルゴリズムを応用することで計算を著しく簡略化することができる．実際，行基本変形に必要な計算量（四則演算の回数）は n^3 の定数倍程度だが，行列式を定義どおりに計算すると少なくとも $n \cdot n!$ 程度の計算量が必要である．

例． 見かけに圧倒されるが，まずは $n = 2$ の場合から攻略しよう．S_2 に属する置換は単位置換 ϵ と互換 $(1\ \ 2) =: \sigma$ の 2 つだけであり，

$$\mathrm{sgn}(\epsilon) = (-1)^0 = 1, \quad \mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^1 = -1$$

であるから，

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \mathrm{sgn}(\epsilon) a_{1\epsilon(1)} a_{2\epsilon(2)} + \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= 1 \cdot a_{11} a_{22} + (-1) \cdot a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \end{aligned}$$

これは，前回与えた定義式 $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ と合致している．

例． 次に $n = 3$ の場合を攻略する．S_3 の元は

$$\epsilon, \quad (1\ \ 2), \quad (2\ \ 3), \quad (3\ \ 1), \quad (1\ \ 2\ \ 3) = (1\ \ 2)(2\ \ 3), \quad (1\ \ 3\ \ 2) = (1\ \ 3)(2\ \ 3)$$

の 2 つであり，

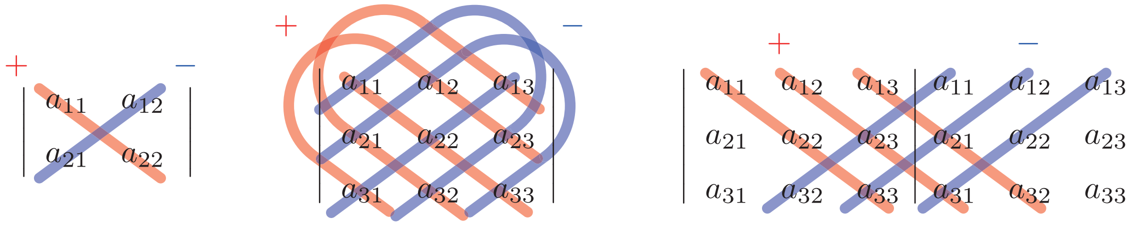
- 符号が 1：ϵ, $(1\ \ 2\ \ 3)$, $(1\ \ 3\ \ 2)$
- 符号が -1：$(1\ \ 2)$, $(2\ \ 3)$, $(3\ \ 1)$

と分けられる．よって，

$$\det\left[a_{ij}\right] := {\color{red}1}\cdot a_{11}a_{22}a_{33} + {\color{red}1}\cdot a_{12}a_{23}a_{31} + {\color{red}1}\cdot a_{13}a_{21}a_{32} \\ {\color{blue}-1}\cdot a_{12}a_{21}a_{33} \ {\color{blue}-1}\cdot a_{11}a_{23}a_{32} \ {\color{blue}-1}\cdot a_{13}a_{22}a_{31}$$

と計算できる．

注意！ 2 次と 3 次の行列式の計算を模式的に表したのが「サラスの方法」(Sarrus rule) [1]と呼ばれるもので，次の図のように矢印を追うことで行列式が計算される．



行列式の性質

行列式を計算するとき，もっとも重要な公式が次のものである：

公式 (D0).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

証明はやや面倒なので，後回しにしよう．

例.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot\{3\cdot 2 - 1\cdot(-1)\} = 35.$$

例（単位行列）.

$$\det E_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 & \\ \vdots & E_{n-1} \\ 0 & \end{vmatrix} = 1\cdot\det E_{n-1} = \det E_{n-1}$$

であるから，$\det E_n = \det E_1 = \det[1] = 1$.

上三角行列の行列式. より一般に，対角成分より下がすべて 0 からなる

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

のような行列（$*$ はワイルドカード，どんな値でもよい）の行列を**上三角行列**という．これに公式 (D0) を繰り返し適用すれば，灰色の網掛けをしたワイルドカードの部分は無視できて，

$$\det A = a_{11}\,a_{22}\cdots a_{nn}$$

[1]Pierre Frdric Sarrus (1798–1861) はフランスの数学者．フランス語の読みは「サリュ」に近い．

と直ちに計算できる．

一般に，階段形の n 次正方行列は上三角行列になっているから（各自確認せよ），任意の行列は行基本変形を繰り返すことで上三角行列にできる．よって，行基本変形による行列式の変化を調べれば，任意の行列の行列式をガウスの消去法程度の計算量で実行することが可能なはずである．次回は，そのための基本公式を与えていく．

命題 8.2 の証明

準備． $n \geq 2$ としてよい．一般に，置換 $\sigma \in S_n$ と n 個の文字をもつ多項式 $P = P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が与えられたとき，新しい多項式 σP を

$$\sigma P = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

と定義する．

さて唐突ではあるが，**差積**とよばれる多項式

$$\Delta = \Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

を考えよう．たとえば，

$$\Delta(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \qquad \Delta(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3),$$
$$\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$$

といった具合である．いま，置換 $\sigma \in S_n$ が与えられたとき，

$$\sigma\Delta := \Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$$

である．また，置換の積の合成の定義から $\sigma, \tau \in \Delta$ のとき

$$\tau(\sigma\Delta) = \Delta(x_{\tau\sigma(1)}, x_{\tau\sigma(2)}, \cdots, x_{\tau\sigma(n)}) = (\tau\sigma)\Delta$$

が成り立つ．多項式 $-\Delta$ に対しても，同様に

$$\sigma(-\Delta) = -\Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

であるから，$-\sigma\Delta = \sigma(-\Delta)$，$\tau(\sigma(-\Delta)) = -\tau\sigma\Delta$ が成り立つ．これらの性質はあとで利用する．

ここで，次を示そう：

補題 8.3 任意の互換 $\tau = (i \ \ j)$ に対して，

$$\tau\Delta = -\Delta.$$

証明． いま，互換 $\tau_0 = (1 \ \ 2)$ に対し，

$$\tau_0\Delta = -\Delta$$

が成り立つことは定義より明らか（$x_1 - x_2$ が $x_2 - x_1$ に変わるだけで，あとはそのままなので）．さらに，任意の置換 $\sigma \in S_n$ について，

$$\tau_0(\sigma\Delta) = \tau_0\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})\right)$$

を考える．このとき，$x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)} = x_1 - x_2$ または $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)} = x_2 - x_1$ となる i と j のペアが存在するが，$\tau_0 = (1 \ \ 2)$ はこれらの符号を変えるだけで，それ以外は変えないから，

$$\tau_0(\sigma\Delta) = -\sigma\Delta$$

が成り立つ．そこで，$\sigma(i) = 1, \sigma(j) = 2$ を満たす任意の $\sigma \in S_n$ を選ぶと，$\tau = \sigma^{-1}\tau_0\sigma$ が成り立つ（確認せよ）ので，

$$\tau\Delta = \sigma^{-1}\tau_0(\sigma\Delta) = \sigma^{-1}(-\sigma\Delta) = \sigma^{-1}(\sigma(-\Delta)) = -\sigma^{-1}\sigma\Delta = -\Delta.$$

■（補題）

命題 8.2 の証明. 与えられた $\sigma \in S_n$ に対し，

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_p = \tau'_1 \cdots \tau'_q$$

（ただし，$\tau_1, \cdots, \tau_p, \tau'_1, \cdots, \tau'_q$ はすべて互換）と書いたとき，上の補題 8.3 より

$$\sigma\Delta = \tau_1 \cdots \tau_p \Delta = (-1)^p \Delta$$

かつ

$$\sigma\Delta = \tau'_1 \cdots \tau'_q \Delta = (-1)^q \Delta.$$

Δ は定数 0 でない多項式なので p と q の偶奇は一致する．したがって，符号は σ のみによって定まる． ■

公式 (D0) の証明

$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ かつ $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$ とする．もし $\sigma \in S_n$ が $\sigma(1) \neq 1$ を満たすならば，$\sigma(k) = 1$ となる $k \neq 1$ が存在する．すなわち，$a_{k\sigma(k)} = a_{k1} = 0$．よって，そのような σ に対しては

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

であり，$\det A$ の定義である

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

には貢献しない．すなわち，

$$\det A = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{11} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

ここで，$\sigma \in S_n$ かつ $\sigma(1) = 1$ という条件は，σ が $\{2, 3, \cdots, n\}$ という $(n-1)$ 文字の置換であり，和はそのすべてを渡ることを意味するから，

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

■

ボーナス問題（+1 point）. このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください.

担当教員：川平 友規

第 9 回（6/11）行列式の性質

配布日：2024 年 8 月 18 日 Version：1.3

行基本変形に対応する行列式の変形

上三角行列の行列式. 対角成分より下がすべて 0 からなる

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

のような行列（$*$ はワイルドカード，どんな値でもよい）の行列を**上三角行列**といい，これに公式 (D0) を繰り返し適用すれば，灰色の網掛けをしたワイルドカードの部分は無視できて，

$$\det A = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

と直ちに計算できるのであった．

一般に，正方行列を行基本変形によって階段形に変化させれば，それは上三角行列になっている．そこで，行基本変形によって行列式がどのように変化するかがわかる公式を作っておこう．

行基本変形の復習. いま，n 次正方行列を行ベクトルを用いて

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

と表現しておく．以下，第 i 行はこれまでと同様に，ⓘ と略記する．

行基本変形とは，以下の 3 つの操作であった：

(R1) ⓘ $\longrightarrow$ ⓘ $\times\, \alpha$

(R2) i' $\longrightarrow$ i' $+$ ⓘ $\times\, \alpha$

(R3) ⓘ $\longleftrightarrow$ i'

ここで，もし $i = i'$ であれば (R2) や (R3) の操作は (R1) に帰着されるので，$i \neq i'$ と仮定してよい．

これらに対応する行列式の公式が，次のものである（証明はこのプリントの最後にまとめる）：

公式 (D1). $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \alpha\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

：(R1) で行列式は α 倍

公式 (D2). $i \neq i'$ のとき，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i'} + \alpha \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

：(R2) で行列式は変化なし

公式 (D3). $i \neq i'$ のとき，

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i'} \\ \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

：(R3) で行列式は (-1) 倍

例 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} (= 0).$$

例 2. 行列 A の第 i 行がゼロベクトル $\mathbf{0}$ だとすれば，$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{0}$ より

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \overset{\text{(D1)}}{=} 0 \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0.$$

例 3. ある $i < i'$ について，行列 A の第 i 行と第 i' 行が一致するとき（つまり，$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_{i'}$），

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i'} \\ \vdots \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i'} + \boldsymbol{a}_i \times (-1) \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{vmatrix} \overset{\text{例 2}}{=} 0.$$

以上より，次の定理を得る：

定理 9.1 行列 A が以下をいずれかを満たす場合，その行列式はゼロ．

(1) ある行がゼロベクトル

(2) ある 2 つの行が一致する

例 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

例 5. 行基本変形で上三角行列を作り，行列式を計算する例（青字は次の操作を決めるための注目ポイント）.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} && (\mathrm{R1}) : ① \longleftrightarrow ② \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} && (\mathrm{R2}) : ③ + ① \times (-2) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} && (\mathrm{R2}) : ③ + ② \times (-1) \\
&= -1 \cdot 2 \cdot (-8) = 16.
\end{aligned}$$

例題 9.1 次の行列式を求めよ．$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

解答. 以下，青字は次の操作を決める注目ポイント.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} && (\mathrm{R2}) : ② + ① \times (-1) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} && (\mathrm{R3}) : ② \longleftrightarrow ③ \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} && (\mathrm{R2}) : ③ + ② \times (-2) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} && (\mathrm{R3}) : ③ \longleftrightarrow ④ \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} && (\mathrm{R2}) : ④ + ③ \times 3 \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5.
\end{aligned}$$

■

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

注意！ このように上三角行列の行列計算に帰着させる方法はガウスの消去法とほぼ同じアルゴリズムであるから，簡単にプログラミングできる．

その他の公式/転置行列

行基本変形とは必ずしも関係しないが，重要な公式たちを列挙しておこう．

公式 (D4).
$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

こちらも，証明は後回しにしよう．

例.
$$\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

転置行列.

定義 **（転置）** $m \times n$ 型行列 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ に対し，A の**転置行列** (transpose matrix) を
$$ {}^{\mathrm{t}}A := \begin{bmatrix} a_{ji} \end{bmatrix}_{1 \le j \le n,\, 1 \le i \le m}$$
と定める．これは $n \times m$ 型の行列となる．

例.
$$ {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad {}^{\mathrm{t}}E_n = E_n.$$

転置行列は行列式の値を変化させない（これも証明は後回しにする）：

公式 (D5). A を n 次正方行列とするとき，
$$\det A = \det {}^{\mathrm{t}}A$$

例.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{\text{(D5)}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 9.1}}{=} 0.$$

列基本変形. 一般の $m \times n$ 型の行列 A に対し，行基本変形と同様に次の**列基本変形**を考えよう．

n 次正方行列を列ベクトルをもちいて

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

と表し，第 j 列 $\boldsymbol{a}_j$ を $\boxed{j}$ と略記するとき，

(C1) $\boxed{j} \longrightarrow \boxed{j} \times \alpha$

(C2) $\boxed{j'} \longrightarrow \boxed{j'} + \boxed{j} \times \alpha$

(C3) $\boxed{j} \longleftrightarrow \boxed{j'}$

例.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(C1)}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(C2)}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(C3)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ただし，最初の (C1) は $\boxed{1} \longrightarrow \boxed{1} \times 3$，次の (C2) は $\boxed{3} \longrightarrow \boxed{3} + \boxed{1}$，最後の (C3) は $\boxed{2} \longleftrightarrow \boxed{3}$ である．

公式. 転置行列を考えると，行と列の関係が入れ替わるので，公式 (D5) と公式 (D1)〜(D3) を組み合わせることで，以下を得る：

公式 (D1)'. $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \alpha\boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

：(C1) で行列式は α 倍

公式 (D2)'. $i \neq i'$ のとき，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i'} + \alpha\boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i'} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

：(C2) で行列式は変化なし

公式 (D3)'. $i \neq i'$ のとき，

$$\begin{vmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_{i'} & \cdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_{i'} & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots \end{vmatrix}$$

：(C3) で行列式は (-1) 倍

たとえば (D1)' を証明したければ，(C1) の操作が「転置 $\rightarrow$ (R1) $\rightarrow$ 転置」という操作で置き換えられることを用いれば良い．

定理 9.1 と同様に，以下もわかる：

定理 9.2 行列 A が以下のいずれかを満たす場合，その行列式はゼロ．

(1) ある列がゼロベクトル

(2) ある 2 つの列が一致する

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{(C1)}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 9.2}}{=} 0.$$

ブロック行列と行列式.

公式 (D6). 行列 A と D はそれぞれ n 次と m 次の正方行列とする．このとき，以下が成り立つ：

$$\begin{vmatrix} A & * \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D| = \begin{vmatrix} A & O \\ * & D \end{vmatrix}.$$

ただし，左辺の O は $O_{m,n}$，右辺の O は $O_{n,m}$ であり，$*$ はワイルドカード（どんな値でも良い）である．

これも，証明はこのプリントの最後で与える．

例.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 8 & 10 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) = 1.$$

公式の証明

以下，後回しにした証明を与えていく（多少順番は前後する）.

公式 (D1) の証明. $1 \le k \le n$ に対し $\boldsymbol{a}_k = \begin{bmatrix} a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$ とおくとき，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c\,a_{i1} & \cdots & c\,a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

を示せばよい．左辺を定義通りに書き下すと，

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (c\,a_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= c \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \text{右辺}. \end{aligned}$$

■

公式 (D4) の証明. $1 \le k \le n$ に対し $\boldsymbol{a}_k = \begin{bmatrix} a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_{i1} & \cdots & b_{in} \end{bmatrix}$ とおくとき，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

を示せばよい．左辺を定義通りに書き下すと，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots(a_{i\sigma(i)}+b_{i\sigma(i)})\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots b_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

■

公式 (D3) の証明． $1\le k\le n$ に対し $\boldsymbol{a}_k=\begin{bmatrix} a_{k1} & \cdots & a_{kn}\end{bmatrix}$ とおく．また，行列 $A=\begin{bmatrix} a_{kj}\end{bmatrix}_{1\le k\le n,\,1\le j\le n}$ の i 行目と i' 行目を入れ替えた行列 $B=\begin{bmatrix} b_{kj}\end{bmatrix}_{1\le k\le n,\,1\le j\le n}$ を考えるとき，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i'1} & \cdots & a_{i'n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i'1} & \cdots & a_{i'n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{i1} & \cdots & b_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{i'1} & \cdots & b_{i'n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

を示せばよい．定義通りに書き下すと，

$$\begin{aligned}
\text{最左辺} &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{i'\sigma(i')}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
\text{最右辺} &= -\sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) b_{1\tau(1)}\cdots b_{i\tau(i)}\cdots b_{i'\tau(i')}\cdots b_{n\tau(n)}\\
&= -\sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)}\cdots a_{i'\tau(i)}\cdots a_{i\tau(i')}\cdots a_{n\tau(n)}
\end{aligned}$$

となるから，これを変形していく．ここで，最右辺のほうは和ととるときに置換の文字として σ のかわりに τ を用いた[1]．ただし，和をとるときは，σ も τ も S_n のすべての元を 1 回ずつとることに注意しよう．そこで，σ と τ の動きを以下のように「連動」させる：まず，$\sigma\in S_n$ に対し $\tau:=\sigma\,(i\ \ i')$ （σ と互換 $(i\ \ i')$ の積）とおけば，符号の定義より $\mathrm{sgn}(\tau)=-\mathrm{sgn}(\sigma)$ であり，

$$\begin{cases} \tau(k)=\sigma(k) & k\neq i,\,i'\\ \tau(i)=\sigma(i') \\ \tau(i')=\sigma(i)\end{cases}$$

が成立する．いま，σ が S_n のすべての元を 1 回ずつとるとき，τ も S_n のすべての元を 1 回ずつとるので[2]，

$$\begin{aligned}
\text{最左辺} &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{i'\sigma(i')}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\tau\in S_n} \{-\mathrm{sgn}(\tau)\} a_{1\tau(1)}\cdots a_{i\tau(i')}\cdots a_{i'\tau(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&= -\sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)}\cdots a_{i'\tau(i)}\cdots a_{i\tau(i')}\cdots a_{n\tau(n)}.
\end{aligned}$$

---

[1] $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2=\sum_{i=1}^{10}i^2$ と同じ理屈．

[2] σ と τ の対応は 1 対 1 である．すなわち，任意の $\sigma\in S_n$ に対し $\tau:=\sigma(i\ \ i')$ が 1 つ定まり，任意の $\tau\in S_n$ に対し，$\sigma:=\tau(i\ \ i')$ とおくと，これは $\sigma(i\ \ i')=\tau(i\ \ i')(i\ \ i')=\tau$ を満たすから，τ に対し $\sigma(i\ \ i')=\tau$ を満たすものがただ 1 つ定まる．とくに，2 つの相異なる σ が同じ τ を定めることはないし，2 つの相異なる τ が同じ σ を定めることはない．

これは最右辺の値と一致する． ■

公式 (D2) の証明． ここでは，$i < i'$ のときを示す（$i > i'$ のときも証明は同様）．公式 (D4) より

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i'} + \alpha\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

が成り立つ．ここで，公式 (D3) より

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \iff 2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0.$$

よって公式 (D2) が成り立つ． ■

公式 (D5) の証明． $1 \le k \le n$ に対し $\boldsymbol{a}_k = \begin{bmatrix} a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$ とおく．また，行列 $A = \begin{bmatrix} a_{kj} \end{bmatrix}_{1\le k\le n,\, 1\le j\le n}$ を転置した行列を ${}^t\!A := \begin{bmatrix} b_{kj} \end{bmatrix}_{1\le k\le n,\, 1\le j\le n}$（ただし，$b_{kj} := a_{jk}$）とおくとき，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

を示せばよい．定義通りに書き下すと，

$$\begin{aligned} \text{最左辺} &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ \text{最右辺} &= \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) b_{1\tau(1)} \cdots b_{i\tau(i)} \cdots b_{n\tau(n)} \\ &= \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1} \cdots a_{\tau(i)i} \cdots a_{\tau(n)n} \end{aligned}$$

となる．公式 (D3) の証明と同様に，σ と τ の動きをうまく連動させてこれらが等しいことを確認しよう．すべての $\sigma \in S_n$ に対し（置換の意味をかんがえれば），

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \;=\; a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(i)i} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

が成り立つことから，$\tau := \sigma^{-1}$ とおく．このとき，$\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ であり，

$$\begin{aligned} \text{最左辺} &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{1\sigma(1)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(i)i} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1} \cdots a_{\tau(i)i} \cdots a_{\tau(n)n}. \end{aligned}$$

これは最右辺の値と一致する． ■

公式 (D6) の証明． 公式 (D5) より，

$$|A||D| = \left|\begin{array}{cc} A & O \\ * & D \end{array}\right|$$

を示せば十分である．そこで

$$\tilde{A} := \left[\begin{array}{cc} A & O \\ * & D \end{array}\right] = \left[\ a_{ij}\ \right]_{1\le i\le n+m, 1\le j\le n+m}$$

とおく．定義より，

$$|\tilde{A}| = \sum_{\sigma\in S_{n+m}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} a_{(n+1)\sigma(n+1)}\cdots a_{(n+m)\sigma(n+m)}$$

だが，$1 \le i \le n$ かつ $n+1 \le j \le n+m$ のとき $a_{ij} = 0$ （O に相当する青の網掛け部分）なので，$\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ の中に r より大きなものがあれば

$$a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} a_{(n+1)\sigma(n+1)}\cdots a_{(n+m)\sigma(n+m)} = 0$$

となってしまう．よって，上の和は S_{n+m} のうち

- $\{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\} = \{1, \cdots, n\}$ （集合として一致） かつ
- $\{\sigma(n+1), \cdots, \sigma(n+m)\} = \{n+1, \cdots, n+m\}$ （集合として一致）

が成り立つような σ 全体の集合 T だけを考えればよい．このとき，任意の $\sigma \in T$ に対し，

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \tau' = \begin{pmatrix} n+1 & \cdots & n+m \\ \sigma(n+1) & \cdots & \sigma(n+m) \end{pmatrix}$$

とおくと $\sigma = \tau\tau'$ $(= \tau'\tau)$ であり，$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\tau')$ が成り立つ．逆に，1 から n までの n 文字の置換 τ （それは S_n の元とみなすことができる） と $n+1$ から $n+m$ までの m 文字の置換 τ' を用いて $\sigma := \tau\tau'$ と定めると，$\sigma \in T$ である．$n+1$ から $n+m$ までの m 文字の置換全体を T_m と表すと，

$$\begin{aligned}
|\tilde{A}| &= \sum_{\sigma\in T} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} a_{(n+1)\sigma(n+1)}\cdots a_{(n+m)\sigma(n+m)} \\
&= \sum_{\sigma=\tau\tau'\in T} \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\tau') a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)} a_{(n+1)\tau'(n+1)}\cdots a_{(n+m)\tau'(n+m)} \\
&= \left\{\sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)}\right\}\left\{\sum_{\tau'\in T_m} \mathrm{sgn}(\tau') a_{(n+1)\tau'(n+1)}\cdots a_{(n+m)\tau'(n+m)}\right\}.
\end{aligned}$$

仮定より $A = \left[\ a_{ij}\ \right]_{1\le i\le n,\, 1\le j\le n}$ かつ $D = \left[\ a_{n+i,\, n+j}\ \right]_{1\le i\le m,\, 1\le j\le m}$ であることから，

$$|\tilde{A}| = |A||D|$$

が成り立つ． ■

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．

第 10 回（6/18）行列式の性質 (2) / 余因子行列

配布日：2024 年 6 月 22 日 Version：1.1

積の行列式（＝行列式の積）

これまでに学んだ公式を活用して，次を示そう：

公式 (D7). A と B を n 次正方行列とするとき，

$$\det AB = \det A \det B.$$

標語的にいえば,「積の行列式は行列式の積」ということになる.

証明. $E = E_n$，$O = O_{n,n}$ とし，ブロック行列の行列式 $\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}$ を 2 通りの方法で計算し比較することで求める等式を導こう.

その 1. まずは前回の公式 (D6) を用いて，$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = |A||B|$.

その 2. 列ベクトルをもちいて $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ とおくとき，

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} b_{k1}\boldsymbol{a}_k & \sum_{k=1}^{n} b_{k2}\boldsymbol{a}_k & \cdots & \sum_{k=1}^{n} b_{kn}\boldsymbol{a}_k \end{bmatrix}$$

と表されることに注意する（すなわち，A を $\boxed{1} \times \boxed{n}$ 型のブロック行列，B を $\boxed{n} \times \boxed{n}$ 型のブロック行列とみなし，その積 AB を $\boxed{1} \times \boxed{n}$ 型のブロック行列として表現した）. さて，求めたい行列式は

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{e}_1 & \cdots & -\boldsymbol{e}_n & \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{vmatrix}$$

である. ここで，行列式の右下あたり（$\boxed{2} \times \boxed{2n}$ 型ブロック行列とみなしたときの，$(2, n+j)$ ブロック）にある $\boldsymbol{b}_j$ を消すことを考える. すなわち，

$$\boldsymbol{b}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = b_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + b_{nj}\boldsymbol{e}_n$$

より，列基本変形 (C2) を繰り返し

$$\boxed{n+j} \xrightarrow{\text{(C2)}} \boxed{n+j} + \boxed{1} \times b_{1j} + \cdots + \boxed{n} \times b_{nj}$$

を施すのである. このとき行列式は不変であり，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{e}_1 & \cdots & -\boldsymbol{e}_n & \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n & \boldsymbol{0} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{e}_1 & \cdots & -\boldsymbol{e}_n & \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{vmatrix}$$

となる. この操作をすべての $j = 1, 2, \cdots, n$ について行えば，上の AB の計算から

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix}$$

Email: t.kawahira@r.hit-u.ac.jp

が結論される．さらに，行基本変形 (R3) によって第 i 行と第 $(n+i)$ 行を入れかえるという操作をすべての $i=1,2,\cdots,n$ に対して施せば，もとの行列の上半分と下半分が入れ替わって，

$$\begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix} \overset{\text{公式 (D3)}}{=} (-1)^n \begin{vmatrix} -E & O \\ A & AB \end{vmatrix} \overset{\text{公式 (D6)}}{=} (-1)^n|-E||AB|$$

となる．$-E$ は対角成分がすべて -1 の上三角行列であるから，$|-E|=(-1)^n$ である．したがって，

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = (-1)^{2n}|AB| = |AB|.$$

よって公式が証明された． ■

余因子と余因子展開

与えられた正則行列の逆行列は，行基本変形によって計算できる（そのようなアルゴリズムが存在するので，コンピューターに計算させることができる[1]）ことをすでに学んだ．しかし，理論上は逆行列の明示的な公式があったほうが便利である．以下，そのような公式を与えることを目標にいくつか言葉の定義を行う．

定義（余因子） n 次正方行列 $A=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ に対し，その第 i 行と第 j 列を除いた $(n-1)$ 次正方行列を A_{ij} と表すことにする．すなわち，

$$A_{ij} := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{この赤い部分は取り除く}$$

また，A の (i,j) **余因子** (cofactor) $\widetilde{a}_{ij} \in \mathbb{R}$ を

$$\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

と定める．

例. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ のとき，

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}|A_{11}| = -3,$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12}| = 6,$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{a}_{13} = (-1)^{1+3}|A_{13}| = -3.$$

余因子は次の性質を満たす：

[1]正則ではない場合でも，同じアルゴリズムによってそれが判定できるのであった．

定理 10.1 n 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ に対し，$i,\, j \in \{1,\, 2,\, \cdots,\, n\}$ のとき以下が成り立つ：

(1) 第 i 行に関する**余因子展開**：

$$|A| = a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + a_{i2}\widetilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{in}$$

(2) 第 j 行に関する**余因子展開**：

$$|A| = a_{1j}\widetilde{a}_{1j} + a_{2j}\widetilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a}_{nj}$$

証明. (1) と (2) の証明のアイディアはまったく同じであるから，(1) のみを示す．第 i 行の行ベクトルについて，

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{in} \end{bmatrix}$$

と分解できることから，公式 (D4) を繰り返し適用して

$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{公式 (D3)}}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{公式 (D3)}'}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 \;\cdots\cdots\; 0 \\ \vdots & \\ \vdots & A_{ij} \\ \vdots & \end{vmatrix}$$

公式 (D5) と公式 (D0) を組み合わせると，上の式に続けて

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widetilde{a}_{ij}.$$

■

余因子行列

与えられた n 次正方行列 A に対し，余因子は「余因子行列」とよばれる行列を定める．この行列は，A が正則でない行列であっても,「逆行列」のように振舞う．

定義（余因子行列） n 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ に対し，$\widetilde{a}_{ij}$ は A の (i, j) 余因子とする．このとき，行列 A の**余因子行列**（adjacent matrix）$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ を

$$b_{ij} := \widetilde{a}_{ji} \quad (i,\, j = 1,\, 2,\, \cdots,\, n)$$

によって定める（添字に注意）．すなわち，

$$\widetilde{A} := {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \widetilde{a}_{ij} \end{bmatrix}.$$

注意！ 転置をとる部分がわかりづらいので，$n=2$ と $n=3$ の場合を書き下しておこう：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \implies \widetilde{A}=\begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix}$$
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \implies \widetilde{A}=\begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{31} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{32} \\ \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{33} \end{bmatrix}$$

余因子行列は，次を満たす（証明は最後に与える）：

定理 10.2 (余因子行列の性質)

$$A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=(\det A)E.$$

この定理から直ちに，以下の公式が得られる：

定理 10.3 (逆行列の公式) 正方行列 A が $\det A \neq 0$ を満たすならば正則，すなわち逆行列 A^{-1} が存在し，

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\widetilde{A}.$$

で与えられる．

また，次もわかる：

定理 10.4 (行列式と正則性) 正方行列 A に対し，次は互いに必要十分条件である：

(1) A は正則行列

(2) $\det A \neq 0$

証明（定理 10.4）． 「(2) $\implies$ (1)」は定理 10.3 よりわかる．次に「(1) $\implies$ (2)」を示そう．もし A^{-1} が存在すれば，$|AA^{-1}|=|E| \iff |A||A^{-1}|=1$ （公式 (D7)）より $|A|\neq 0$ である． ■

第 6 回（定理 6.3）への補足． 定理 6.3 をの証明において，「$AB=E$ ならば $BA=E$」であることの正当化を後回しにしたので，ここで証明を与えておこう．

もし $AB=E$ であれば公式 (D7) より $|A||B|=1$．よって $|A|\neq 0$ であるから，A には逆行列が存在する．このとき，

$$B=EB=(A^{-1}A)B=A^{-1}E=A^{-1}$$

であるから，$B=A^{-1}$．すなわち，$AB=BA=E$ である． ■

定理 10.2 の証明． $A=\left[a_{ij}\right]$，$\widetilde{A}=\left[b_{ij}\right]$ （ただし，$b_{ij}=\widetilde{a}_{ji}$），$A\widetilde{A}=\left[c_{ij}\right]$ とおく．このとき，行列の積の定義より

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} \\ &= a_{i1}\widetilde{a}_{j1}+a_{i2}\widetilde{a}_{j2}+\cdots+a_{in}\widetilde{a}_{jn}. \end{aligned}$$

もし $i=j$ であれば，第 i 行に関する余因子展開（定理 10.1）により

$$c_{ii}=\det A$$

が成り立つ．

次に $i \neq j$ の場合を考える．行列 A の第 i 行と第 j 行に着目する：

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}.$$

新たに行列 $A' = \left[\, a'_{ij} \,\right]$ を，A の第 j 行を第 i 行で置き換えた行列

$$A' = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{j1} & a'_{j2} & \cdots & a'_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

として定義すると，その行列式 $\det A'$ は 2 つの行が一致するので 0 である．一方，第 j 行に関して余因子展開（定理 10.1）してみよう．$k = 1, 2, \cdots, n$ のとき $a'_{jk} = a_{ik}$，余因子の定義より $\widetilde{a}'_{jk} = \widetilde{a}_{jk}$ であるから，

$$\begin{aligned} (0 =)\ \det A' &= a'_{j1}\widetilde{a}'_{j1} + a'_{j2}\widetilde{a}'_{j2} + \cdots + a'_{jn}\widetilde{a}'_{jn} \\ &= a_{i1}\widetilde{a}_{j1} + a_{i2}\widetilde{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{jn} = c_{ij}. \end{aligned}$$

すなわち，$i \neq j$ のとき $c_{ij} = 0$ が成り立つ．

以上をまとめると，$c_{ij} = (\det A)\,\delta_{ij}$ であり，

$$A\widetilde{A} = \left[\,(\det A)\,\delta_{ij}\,\right] = (\det A)E.$$

同様の計算で $\widetilde{A}A = (\det A)E$ も示される． ■

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．

担当教員：川平 友規

第 11 回（6/25）クラメールの公式

配布日：2024 年 7 月 1 日　Version：1.2

前回の復習

- n 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ に対し，$\widetilde{a}_{ij}$ は A の (i,j) 余因子とする．
- 行列 A の**余因子行列**（adjacent matrix）$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ を
$$b_{ij} := \widetilde{a}_{ji} \quad (i,\, j = 1,\, 2,\, \cdots,\, n)$$
で定める．
- $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)E$.
- $\det A \neq 0 \iff A^{-1}$ が存在．このとき，$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}$ が成り立つ．

例． $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が $\det A = ad - bc \neq 0$ を満たすとき，$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ が成り立つのであった．これを余因子行列の計算によって確かめてみよう．

改めて $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_{11} &= (-1)^{1+1}|A_{11}| = 1 \cdot a_{22} \\ \widetilde{a}_{12} &= (-1)^{1+2}|A_{12}| = -1 \cdot a_{21} \\ \widetilde{a}_{21} &= (-1)^{2+1}|A_{21}| = -1 \cdot a_{12} \\ \widetilde{a}_{22} &= (-1)^{2+2}|A_{22}| = 1 \cdot a_{11} \end{aligned}$$

であるから，

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

よって $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ のとき逆行列が存在し，

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

連立 1 次方程式の解の公式

第 6 回と第 10 回の講義内容を組み合わせると，次がわかる：

定理 11.1 (正則行列の特徴づけ) n 次正方行列 A に対し，以下は同値（互いに必要十分条件）：

(1) $\operatorname{rank} A = n$.

(2) A に行基本変形を施して E にできる．

(3) すべての n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解をもつ．

(4) A は正則（すなわち，A は逆行列をもつ.）

(5) $\det A \neq 0$.

とくに，これらのいずれかの条件が成り立つとき，n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$$

となる．これは連立 1 次方程式の解の公式だと言えなくはないが,「A^{-1} をどう計算するか」という部分はブラックボックスである（もちろん，行基本変形をベースにしたアルゴリズムはわかっているが，たとえば A^{-1} の (i,j) 成分だけを決め打ちで計算する，といった方法は明らかでない.）次の公式は，その点を補うものである．

クラメール (Cramer) の公式． A を正則な n 次正方行列とし，列ベクトルを用いて $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$ と表現されるものとする．このとき，任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し，連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は次で与えられる：

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \quad \text{のとき} \quad x_i=\frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}}{|A|} \quad (1\le i\le n)$$

$$\left(=\frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{a}_i & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}}\right)$$

証明． まず，仮定より

$$\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n$$

であることに注意する（A を $\boxed{1}\times\boxed{n}$ 型のブロック行列，$\boldsymbol{x}$ を $\boxed{n}\times\boxed{1}$ 型のブロック行列みなした積）．この等式と公式 (D4) より，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & x_k\boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}\\ &= \sum_{k=1}^{n}x_k\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}\end{aligned}$$

最後の式で $k\neq j$ の項を考えると，行列式の中身の「2 つの列が一致する」場合なので 0 となる．したがって，上の式に続けて

$$=x_i\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{a}_i & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}=x_i\,|A|.$$

A は正則なので $|A|\neq 0$ であるから，求める公式を得る． ■

例． $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$ をクラメールの公式で解いてみよう:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{1}{1}=1, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-1}{1}=-1$$

応用：（余因子を経由しない）逆行列の明示公式 また，A の逆行列を

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}c_{ij}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_j=\begin{bmatrix}c_{1j}\\ \vdots\\ c_{nj}\end{bmatrix}$$

とおくと，

$$AA^{-1} = A\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$$

（ただし，$E_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$）が成り立つのであった．とくに，各列ベクトル $\boldsymbol{c}_j$ $(1 \leq j \leq n)$ は $A\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{e}_j$ を満たす唯一のものである．したがって，クラメールの公式を適用すると次を得る：

逆行列の成分の明示公式． $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ が正則であるとき，その逆行列 $A^{-1} = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}$ は

$$c_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

によって与えられる．

注意！ この公式を用いて逆行列を計算するには，合計 n^2 個の成分に対し行列式を計算しなくてはならない．一方，行列式の計算に必要な手間（行基本変形＋公式 (D0)）とガウスの消去法（行基本変形）で逆行列を計算する手間さほど変わらないので，単に逆行列を計算するだけであれば行基本変形をもちいて直接計算したほうがよい．

注意！ クラメールの公式や逆行列の明示公式を導出する際には．余因子を利用していないことに注意しよう．余因子を用いると，$A^{-1} = \widetilde{A}/|A|$ であったから，

$$c_{ij} = \frac{\widetilde{a}_{ji}}{|A|} \iff \widetilde{a}_{ji} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

がわかる．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．

第 12 回（7/2）行列式の応用

配布日：2024 年 7 月 2 日 Version：1.1

ヴァンデルモンド (Vandelmonde) の行列式

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を n 個の変数（実数が代入できる文字）だとするとき，行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

を**ヴァンデルモンドの行列式**という．

定理 12.1

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

注意！ 右辺の積は置換の符号を定義するときに用いた差積 $\Delta = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)$ とよく似ているが，一般には n に応じて符号が異なる場合がある．実際，次が成り立つ：

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

例.

$$\begin{aligned} n = 2 \text{ のとき右辺} &= x_2 - x_1 \\ n = 3 \text{ のとき右辺} &= (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \\ n = 4 \text{ のとき右辺} &= (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

証明. $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し行基本変形 (R2) を ⓘ $\longrightarrow$ ⓘ + ① × (−1) の形で施すと，公式 (D2) より

$$\text{左辺} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

となる．さらに，列基本変形 (C2) $\boxed{j+1} \longrightarrow \boxed{j+1} + \boxed{1} \times (-x_1)$ を $j = n-1, n-2, \cdots, 1$ の順で施すと，$(i, j+1)$ 成分は

$$(x_i^{j+1} - x_1^{j+1}) + (x_i^j - x_1^j) \times (-x_1) = x_i^{j+1} - x_i^j x_1 = (x_i - x_1)x_i^j$$

となる（とくに，$i = 1$ のときは 0）ので，公式 (D2)’ より

$$\text{左辺} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix} \overset{\text{公式 (D0)}}{=} (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

この変形を繰り返せば，右辺の積を得る． ■

応用. ヴァンデルモンドの行列式を用いて，次を証明しよう：

定理 12.2 与えられた相異なる n 個の実数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ と n 個の実数 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$（重複も許す）に対し，$f(a_i)=b_i\ (0\le i\le n-1)$ を満たす $(n-1)$ 次多項式

$$f(x)=c_0+c_1x+\cdots c_{n-1}x^{n-1}$$

がただ 1 つ存在する．

つまり，xy 平面に n 個の点を x 座標が異なるように自由に選ぶとき，そのグラフがこれらの点をすべて通過するような $(n-1)$ 次関数が存在する，というのである．

証明. $f(x)=c_0+c_1x+\cdots c_{n-1}x^{n-1}$ とおくと，条件 $f(a_i)=b_i\ (0\le i\le n-1)$ は連立方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

と表される．係数行列の部分を A とすると，その行列式はヴァンデルモンドの行列式の形だから，

$$\det A=\prod_{0\le i<j\le n-1}(a_j-a_i).$$

仮定よりこの式は 0 とならないので，A は正則．したがってこの連立方程式はただ 1 つの解をもつ．すなわち，$f(x)$ はただ 1 つに定まる． ■

行列式と 1 次変換

以下，$\mathbb{R}^2$ で xy 平面（座標平面）を表す．より正確には，

$$\mathbb{R}^2 := \{(x,\ y) \mid x,\ y \text{ は実数}\}$$

と定める[1]．x と y の，考えられるすべてのペアを考えているのである．以下では，$(x,\ y)$ と 2 次元列ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は同じもの（の別名）だとみなすことにする．

定義（1 次変換）. 実数の定数 $a,\ b,\ c,\ d$ が与えられているとき，$\mathbb{R}^2$ の元 $(x,\ y)$ に別の元 $(ax+by,\ cx+dy)$ を対応させる規則を **1 次変換** (linear transform) という．

この 1 次変換を f と表すとき，

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

のように書いたり，

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

[1] **2 次元数空間**，**2 次元数ベクトル空間**，**2 次元ユークリッド空間**など様々な呼び方がある．

とおくとき，あたかも1変数の関数のように

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と書いたりする．これは比例関数（実数をある比例定数 a 倍する関数 $y = ax$）を2次元化したものだと考えられる（比例定数は行列！）

$f(\boldsymbol{x})$ のことを $\boldsymbol{x}$ の**像** (image) ということもある．

例. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ のとき，

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}.$$

これは x 軸方向に2倍，y 軸方向に3倍に拡大する作用をもつ．

命題 12.3 (線形性) 1次変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$，$\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき，

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \qquad f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}).$$

この性質を1次変換の**線形性** (linearity) という．

注意！ ．線形性は標語的に「和の像は像の和」,「定数倍の像は像の定数倍」ということができる．これらはすべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\, f(\boldsymbol{x}) + \beta\, f(\boldsymbol{y})$$

が成り立つことだといえる．

証明（命題 12.3） $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, $f(\alpha\boldsymbol{x}) = A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A\boldsymbol{x} = \alpha f(\boldsymbol{x})$. ■

次回はつぎの定理を示そう：

定理 12.4 (1次変換と行列式) 1次変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ によって，図形の面積は $|\det A|$ 倍される．

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．

担当教員：川平 友規

第 13 回（7/9）1 次変換と行列式

配布日：2024 年 7 月 9 日　Version：1.1

1 次変換と斜交座標系

$\mathbb{R}^2$ を xy 平面（座標平面）とし，

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}$$

とおく．このとき，1 次変換は次を満たすのであった：

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$,　$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ のとき，

$$f(\alpha\,\boldsymbol{x}+\beta\,\boldsymbol{y})=\alpha\,f(\boldsymbol{x})+\beta\,f(\boldsymbol{y})$$

この性質を 1 次変換の**線形性** (linearity) というのであった．

さて $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ とおく[1]．このとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ は

$$\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=x\,\boldsymbol{e}_1+y\,\boldsymbol{e}_2$$

と表すことができる．したがって，線形性より

$$f(\boldsymbol{x})=f(x\,\boldsymbol{e}_1+y\,\boldsymbol{e}_2)=xf(\boldsymbol{e}_1)+yf(\boldsymbol{e}_2).$$

いま

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}=\boldsymbol{a}_1$$
$$f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}=\boldsymbol{a}_2$$

が成り立つから，

$$f(x\,\boldsymbol{e}_1+y\,\boldsymbol{e}_2)=x\,\boldsymbol{a}_1+y\,\boldsymbol{a}_2$$

を得る．この式を用いて，1 次変換がベクトルをどのように「変換」しているかを調べてみよう．

つぶれるケース．　まずは，あまり面白くないケースを簡単に確認してみよう．

- そもそも $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$（ゼロベクトル）であれば，すべての $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ に対して $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ となるので，全平面が 1 点に「変換」されてしまう．

- $\boldsymbol{a}_1$ か $\boldsymbol{a}_2$ のいずれかはゼロベクトルでないと仮定しよう．もし $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0}$，または $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$ であれば，

  $$f(x\,\boldsymbol{e}_1+y\,\boldsymbol{e}_2)=y\,\boldsymbol{a}_2\ \text{または}\ x\,\boldsymbol{a}_1$$

  である．これは，全平面が $\boldsymbol{a}_2$ または $\boldsymbol{a}_1$ を方向ベクトルとする直線に「変換」されてしまう．

[1] これらの $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ を $\mathbb{R}^2$ の**標準基底**という．

- $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ がともにゼロベクトルではないが，平行であると仮定しよう．このとき $\boldsymbol{a}_2 = K\boldsymbol{a}_1$ となる定数 $K \neq 0$ が存在するから，

$$f(x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2) = (x + Ky)\,\boldsymbol{a}_1.$$

したがって，この場合も全平面が $\boldsymbol{a}_1$ を方向ベクトルとする直線に「変換」されてしまう．

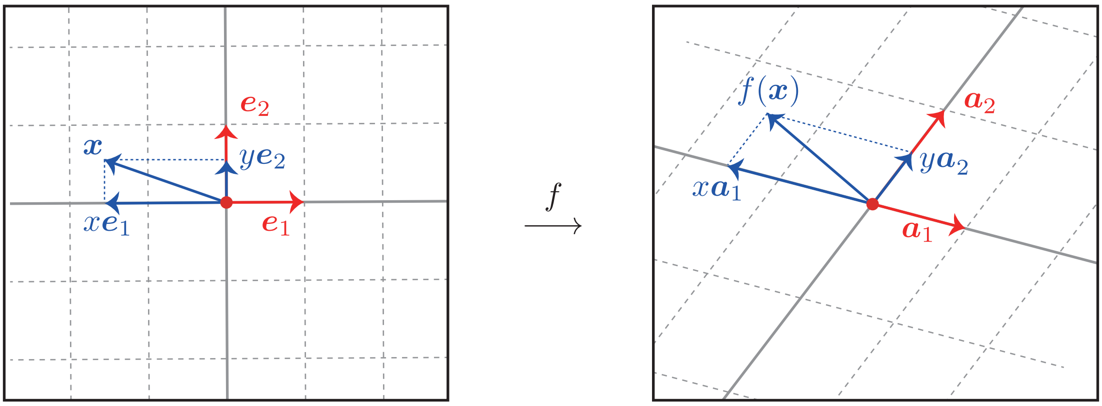
以上のケースをまとまると,「$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{a}_1 /\!/ \boldsymbol{a}_2$」のとき，全平面が 1 点またはある直線に「つぶれて」しまうのである．

つぶれないケース． つぎに,「$\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{a}_2 \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{a}_1 \not\parallel \boldsymbol{a}_2$」の場合を考えよう．このとき，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形を考えることに注意する．

まず $\boldsymbol{x} = x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2$ について考える．これは

「原点 $\boldsymbol{0}$ から $x\,\boldsymbol{e}_1$ 進み，さらに $y\,\boldsymbol{e}_2$ 進めば $\boldsymbol{x}$ になる」

ことを意味している．とくに x または y が整数となる場合を考えると，そのような $\boldsymbol{x}$ は下図の左側のような格子模様（点線）をなすわけである．



次に，1 次変換後の $f(\boldsymbol{x}) = x\,\boldsymbol{a}_1 + y\,\boldsymbol{a}_2$ について考える．これは

「原点 $\boldsymbol{0}$ から $x\,\boldsymbol{a}_1$ 進み，さらに $y\,\boldsymbol{a}_2$ 進めば $f(\boldsymbol{x})$ になる」

ことを意味している．とくに x または y が整数となる場合を考えると，そのような $f(\boldsymbol{x})$ は上の図の右側のような「傾いた」格子模様（点線）をなす．左側の正方形で敷き詰められた格子模様と右側の平行四辺形で敷き詰められた「傾いた」格子模様の対応関係は一目瞭然であり，この場合は平面が平面へ，一様な歪みかたで「変換」されていることがわかるであろう．

面白いのは，右のような「傾いた」格子模様であっても，平面上の各点にきちんと「座標」を与えることができる，ということである．すなわち，$\mathbb{R}^2$ の座標軸をすべて消し去り白紙の状態にし，改めて原点を定め，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ のペアをそれらが平行四辺形をなす（つぶれていない）ように選ぶとき，すべての点に一斉な「座標値」が割り振られる．このようにして得られた座標系は「斜交座標系」とよばれ，通常の「直交座標系」の一般化と考えることができる．

1 次変換と行列式

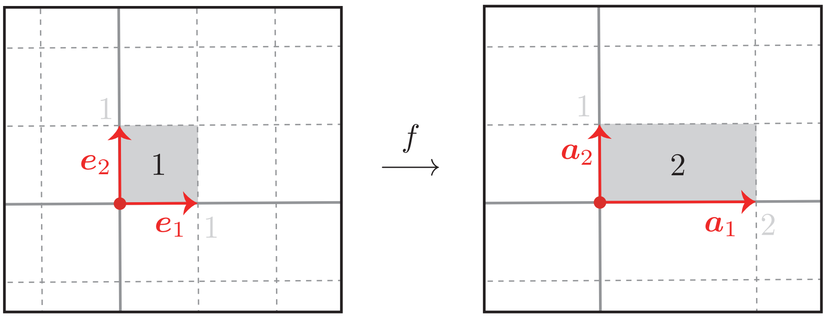
前回の最後に，次の定理を紹介した：

定理 12.1 (1 次変換と行列式) 1 次変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ によって，図形の面積は $|\det A|$ 倍される．

注意！ この定理の主張は,「図形」とは何か,「面積」とは何か明確にされていないあいまいなものである．したがって，あとで述べる「証明」も，気分を伝えるだけの「説明」だと解釈してもらうとよい[2].

まずは具体例を見ていこう．

例． $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ のとき，$\det A = 2$ である．このとき，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ を辺とする正方形は $\boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_2$ を辺とする長方形に変換されるから，図形は横に 2 倍に拡大され，面積も 2 倍となることが理解できる．

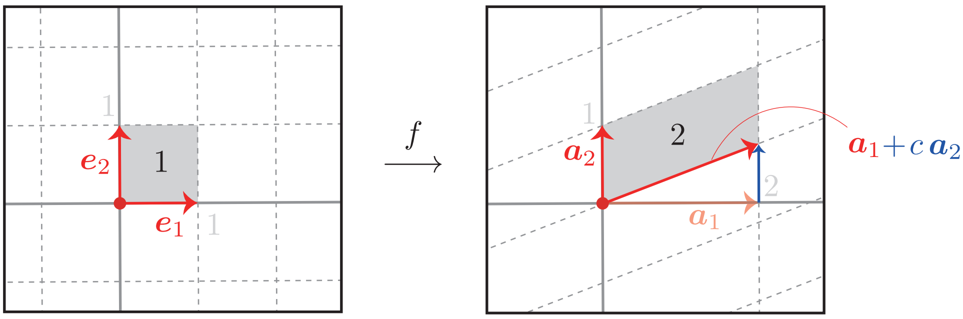


例． 上の $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$ に列基本変形 (C2) : $\boxed{1} \longrightarrow \boxed{1} + \boxed{2} \times c$ （c は実数）を施すと，

$$A_c := \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 + c\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

となる（とくに，$A_0 = A$）．公式 (D2)' より，この変形は行列式の値を変えないから，

$$\det A_c = \det A = 2.$$



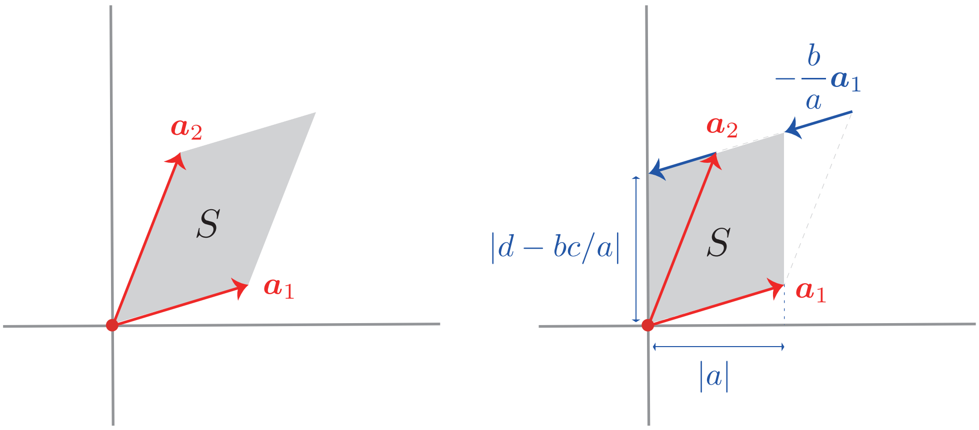
一方，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ を辺とする面積 1 の正方形は $\boldsymbol{a}_1 + c\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_2$ を辺とする平行四辺形に変換されるが，y 軸に沿った底辺と x 軸方向の高さは $c = 0$ の場合と同じなのでこの平行四辺形の面積は 2 である．このことから，図形はこの 1 次変換によって面積が 2 倍されることが理解できる．

定理の（幾何学的）証明のアイディア． 上の「注意」で述べた通り,「面積」を正確に定義することと容易でないので，ここでは

> 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$ が定める 1 次変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ は，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ を 2 辺とする面積 1 の正方形を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする面積 $|\det A|$ の平行四辺形に変換する

ことを説明しよう．

[2]専門的な数学に興味がある人向けのコメント：たとえば「面積」を「2 次元ジョルダン測度」と定義し,「図形」を「面積が定義できる集合」あるいは「2 次元ジョルダン可測集合」と定義すれば定理は正確な主張となる．



話を簡単にするために，$a \neq 0$ の場合のみ考える．また，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を S とする．これは，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形を $\boldsymbol{a}_1$ 方向に図のようにスライドさせて $\boldsymbol{a}_2 + (-b/a)\boldsymbol{a}_1$ が y 軸上に乗るように変形させると，変形後の平行四辺形は底面が $|d - bc/a|$，高さが $|a|$ であるから，

$$S = |d - bc/a||a| = |ad - bc| = |\det A|.$$

■

注意！ スライドさせる操作は，列基本変形 (C2)：$\boxed{2} \longrightarrow \boxed{2} + \boxed{1} \times (-b/a)$ を施すと，

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 + (-b/a)\boldsymbol{a}_1 \end{bmatrix}.$$

となり，行列式の値が不変であることに対応する．

行列式と 1 次変換：3 次元の場合

以下，$\mathbb{R}^3$ で xyz 平面（座標空間）を表す．より正確には，

$$\mathbb{R}^2 := \{(x,\, y,\, z) \mid x,\, y\, z \text{ は実数}\}$$

と定める[3]．以下では，$(x,\, y,\, z)$ と 3 次元列ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は同じもの（の別名）だとみなすことにする．

> **定義（1 次変換）．** 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$ が与えられているとき，$\mathbb{R}^3$ の元 $\boldsymbol{x}$ に別の元 $A\boldsymbol{x}$ を対応させる規則を 3 次元の **1 次変換** (linear transform) という．

1 次変換は 2 次元と同じく線形性をもつ．とくに，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とするとき，

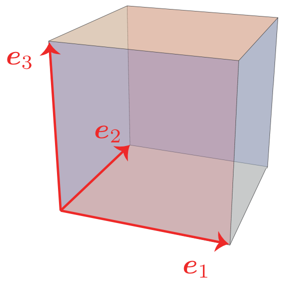
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{e}_3$$

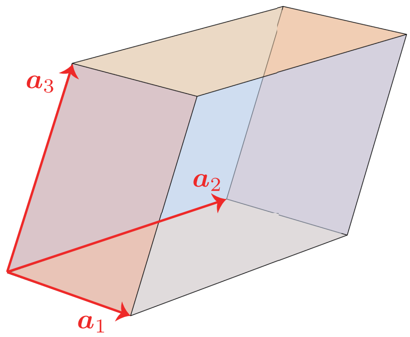
と表されるから，2 次元の場合と同様に

$$f(x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{e}_3) = x\,\boldsymbol{a}_1 + y\,\boldsymbol{a}_2 + z\,\boldsymbol{a}_3$$

[3] **3 次元数空間**，**3 次元数ベクトル空間**，**3 次元ユークリッド空間**など様々な呼び方がある．

が成り立つ．2 次元の「つぶれないケース」に対応する条件を書き下すのはやや面倒だが，幾何学的には「$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を辺とする立方体が $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を辺とする平行 6 面体（一様に歪んだ直方体)」であることが容易に類推できるであろう．





このとき，以下が成り立つ：

> **定理 12.2 (1 次変換と行列式（3 次元版）)** 3 次元の 1 次変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ によって，図形の体積は $|\det A|$ 倍される．

この定理も 2 次元同様のあいまいさがあるので，以下では「$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を辺とする体積 1 の立方体は，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を辺とする体積 $|\det A|$ の平行 6 面体に変換される」ことを確認（証明）しよう．

外積. ここでは，3 次元ベクトル特有の積である「外積」（あるいは「ベクトル積」）によって計算をしてみよう[4]：

> **定義 （外積）** $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，3 次元ベクトル
>
> $$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$
>
> を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積** (outer product) という．

外積は次のような性質をもつ演算である：

[4]**覚え方.** 外積は高校時代に学んだ人も多いだろう．いろいろと覚え方があるが，ここでは行列式を用いた次の式を紹介する：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{“}=\text{”} \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

最後の式は行列式の成分に強引にベクトルを入れこんだものだが，余因子展開の式とちゃんとつじつまが合っていて面白い．

命題 12.3 (外積の性質) k を実数，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ とするとき，以下が成り立つ：

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$，とくに $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

(2) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$.

(3) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

(4) $(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b})$.

(5) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0 = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

証明は各自の練習問題としよう．さらに，次のような幾何学的な性質ももつ：

命題 12.4 (外積の幾何学的性質) $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角度を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．このとき，以下が成り立つ：

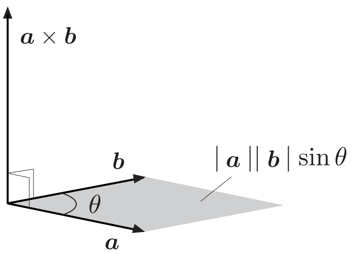
(1) $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$. とくに，この値は $\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を頂点にもつ平行四辺形の面積に等しい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行 $\iff$ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行でないとき，すなわち $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき，外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直.

証明. (1)：

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 \\
=&(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
=&(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
=&|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \\
=&|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\left(1 - \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2}\right) \\
=&|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
=&|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta.
\end{aligned}
$$



(2) (1) より明らか.

(3) 命題 12.3 の (5) より明らか. ■

注意！ 外積は結合法則 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を満たさない（反例をあげてみよ.）

命題 12.5 (外積・内積と行列式) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}.$$

すなわち，左辺の行列式は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の内積に等しい.

証明.

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \left(\boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) \cdot \boldsymbol{c}.$$

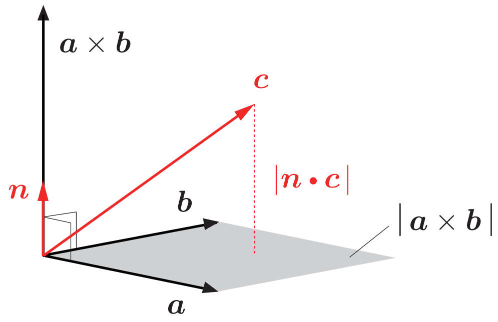
$\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{c} = c_k$ $(k = 1, 2, 3)$ であるから，

$$\text{上の式の右辺} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

最後の等式は余因子展開を用いた． ■

平行 6 面体の体積． もとの 1 次変換の話に戻る．これまでの記号を活用したいので，$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ としよう．また，話を簡単にするために，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がある（つぶれていない）平行四辺形の 2 辺であり，その平行四辺形を含む平面には $\boldsymbol{c}$ がないものとする．このとき，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ は（つぶれていない）平行 6 面体を定める．その平行 6 面体の体積 V が $|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ であることを示せば，命題 12.5 よりそれが $|\det A|$ となることが結論される．

いま $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が 2 辺となる平行四辺形の面積 S であったから，$\boldsymbol{c}$ からその平行四辺形を含む平面 Π に垂線を下ろしたときの，その長さを h とすれば $V = Sh$ と計算できる．



$\boldsymbol{n} := \dfrac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}$ とすれば，外積の性質よりこれは Π の単位法線ベクトルである．したがって，$h = |\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{c}|$ であり，

$$V = Sh = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{c}| = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| = \det A.$$

■

ボーナス問題（+1 point）． このプリントに誤植・計算ミス・論理的な間違い・分かりづらい点があればメールにてご指摘ください．