漸化式から力学系へ Workbook *

川平 友規

E-mail: kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数学アゴラ 2004 年 8 月 9, 10, 11 日

はじめに

この講演では，高校 1 年生程度の予備知識（2 次方程式，関数，数列の初歩）しか仮定しないつもりです．皆さんにも出来るだけ，計算や作図に参加してもらいたいと思っています．しかし時間も限られていますから，宿題を出すなどして，多少予習をしてもらうことにします．

講演の概要：1 日目　まずは数列と漸化式の復習です．2 項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ を解くとき，方程式 $x = px + q$ を解いてその解を用いるとなぜか式変形がうまく行き，a_n の一般項が求まります．この方程式が何を意味するのか，数直線上の**力学系**という概念を導入することで理解します．時間があれば**ウェブ・ダイアグラム**を使って，力学系を視覚的に解析してみましょう．定規があると better です．

2 日目　次はやや発展して，分数型の漸化式 $a_{n+1} = \frac{aa_n+b}{ca_n+d}$ を考えます．ちなみに 1 日目の漸化式は $(a, b, c, d) = (p, q, 0, 1)$ とした特別な場合です．このタイプの漸化式も必ず一般項が求まるのですが，ここでも力学系という視点から解析してみましょう．鍵を握るのは，数学的なトリックとしての**無限遠点** ∞ です．禁断の秘技 $\frac{1}{0} = \infty$ が威力を発揮します．ちなみに，ここでの目標は一般項を求めることではなく，**力学系を分類すること**です．

3 日目　実数の世界だけでは 2 日目の力学系の分類を完全に理解することはできません．**複素数（平面）**まで数の世界をひろげ，力学系もその上に拡張し，2 日目の分類を再解釈してみます．さらに 2 次関数 $f(z) = z^2 + c$ による力学系（漸化式で言うと $a_{n+1} = a_n^2 + c$）を複素数で考えてみると，実数の上では見えなかったものが，意外な形で現れてきます．コンピューターを使いながら，奇妙なフラクタル（自己相似図形）の世界を探索しましょう．

*ver. 20040818

1　漸化式から力学系へ

1.1　数列とその例

数列 (numerical sequence) とは，数が限りなく並んでいるものである：

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{1000},\ a_{1001},\ \ldots,\ a_{10000},\ a_{10001},\ \ldots$$

とにかく，想像以上に沢山並んでいる．

例　$a_n = n$ で定めると，数列

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 1000,\ 1001,\ \ldots,\ 10000,\ 10001,\ \ldots$$

を得る．また，$a_n =$(n 番目の素数) で定めると，数列

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots$$

を得る．世の中，先がわかるに越したことはない．$a_n =$(n の式) と書けるほうが嬉しい．このような n の式を a_n の**一般項** (の公式，general term formula) と呼ぶ．

クイズ　$a_n = n^3 - 6n^2 + 12n - 6$ と定めると，$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ であるが $a_4 \neq 4$ である．では，$n \leq 1000$ のとき $a_n = n$ であるが $n > 1000$ のとき $a_n \neq n$ となる数列を $a_n = (n$ の式 $)$ の形で作れるか？

1.2　漸化式

（2 項間）**漸化式** (recursive formula) とは，a_{n+1} を a_n から一定のルールで決めていく式である．例えば：

- $a_{n+1} = a_n + 1\ ;\quad a_1 = 0$
- $a_{n+1} = 5a_n\ ;\quad a_1 = \pi$
- $a_{n+1} = 2a_n + 1\ ;\quad a_1 = 1$
- $a_{n+1} = (n+1)a_n\ ;\quad a_1 = 1$
- $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n\ ;\quad a_1 = 1$

1.3　一般項の求め方

2 項間漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q\ ;\quad a_1 = a$$

を考える．$p = 1$ のときはただの等差数列なので，$p \neq 1$ と仮定する．この漸化式の解法は次の通り：

Step 1 方程式 $x = px + q$ を解く．解 $x = \alpha := \dfrac{q}{1-p}$ を得る．

Step 2 漸化式から $\alpha = p\alpha + q$ を辺々引くと

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha).$$

Step 3 $b_n = a_n - \alpha$ とおくと，Step 2 より

$$b_{n+1} = pb_n\ ;\quad b_1 = a_1 - \alpha = a - \alpha.$$

Step 4 したがって数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a - \alpha$，公比 p の等比数列であり，$b_n = (a-\alpha)p^{n-1}$.

Step 5 $a_n = b_n + \alpha = (a - \alpha)p^{n-1} + \alpha$.

練習　次の漸化式を上の方法で解け.

(1) $a_{n+1} = 2a_n + 1\ ;\quad a_1 = 1$

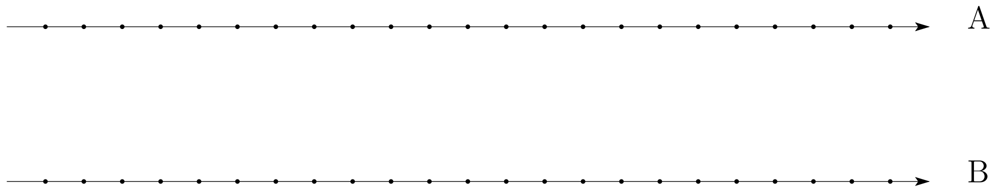
(2) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4} + 3\ ;\quad a_1 = 4$

1.4　漸化式の力学系的解釈

まずは数列 $a_{n+1} = 2a_n + 1\ ;\quad a_1 = 1$ を考えてみる．

準備　漸化式 $b_{n+1}=2b_n$; $b_1=2$ をもとに，$b_0,\ b_{-1},\ b_{-2},\ldots$ を定めよ．また，これを下の数直線 B に図示せよ．

問題　数列 a_n についても，漸化式もしくは $b_n=a_n+1$ をもとに $a_0,\ a_{-1},\ a_{-2},\ldots$ を定めることができる．これを下の数直線 A に図示せよ．



ここで，数直線 B 上の数列 b_n の漸化式「 $b_{n+1}=2b_n$; $b_1=2$ 」に次のような「意味づけ」を与える：

> 点 P は数直線 B 上の動点である．時刻 n における点 P の位置を b_n とする．このとき，点 P は 1 秒後 $b_{n+1}=2b_n$ に移動する．ただし，時刻 1 における点 P の位置は $b_1=2$ である．

より一般に，数直線 B 上に次のような「世界観」を与える：

> 数直線 B という**空間**には，**時間**が $\ldots,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$ と，スライドショーのように点々と流れている．ここには，次のような**運動法則**がある：点 P が X の位置にあるとき，この点は 1 秒後 $g(X)=2X$ の位置に移動する．

このような「世界観」を**数直線 B 上の，関数 $g(X)=2X$ による力学系** (dynamical system) と呼ぶ．もし点 P が時刻 1 で $X=-3$ にあったとすると，点 P は 1 秒すすむごとに

$$-3\ \mapsto\ -3\cdot 2\ \mapsto\ -3\cdot 2^2\ \mapsto\ -3\cdot 2^3\ \mapsto\ \ldots$$

と移動する．このようにして得られた数列を $X=-3$ の（関数 $g(X)$ による）**軌道** (orbit) とぶ.

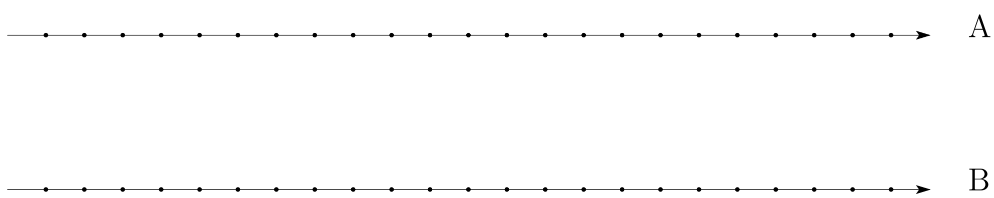
問題　以上を踏まえて，

1. 数列 a_n に b_n と同等の「意味づけ」を与えよ．

2. 数直線 A に数直線 B と同等の「世界観」を与えよ．ただし，数直線 A の座標には x を用いよ．

3. 数直線 A 上の力学系を定める関数 $f(x)$ は何か？

4. 数直線 A 上の力学系と数直線 B 上の力学系の関係を図示してみよう：



考察

- 数直線 A と数直線 B の目盛りを消してしまった．このとき，これらを区別することはできるだろうか？
- 上と同等の考察：動点 P は数字を知らない生物だと仮定する．動点 P は自分のいる世界が A なのか B なのか，区別できるだろうか？

考察　漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$；$a_1 = a$ を，数直線 A 上の力学系による軌道と考える．

- 力学系を定める関数 $f(x)$ は何か？
- このとき，方程式 $x = px + q$ は何を意味するのだろう？

1.5　ウェブ・ダイアグラムによる力学系の解析

より一般的な力学系の定式化

- **空間：**　実数全体（$\mathbb{R}$ で表す．いつもは数直線で表現する.）
- **時間：**　$1,\ 2,\ 3, \ldots$ (0 と負の整数を加えることもある．形式的に「秒」を単位とする.）
- **運動法則：**　関数 $y = f(x)$ が存在して,「点 x は 1 秒後 $f(x)$ に移動する」.

以上の三要素をまとめて，**$\mathbb{R}$ 上の f による力学系** (dynamics) とよぶ．これは，自然界の非常に単純化されたモデルである．この三要素を変化させることで，さまざまな力学系を考えることができる．

ある実数 x に対し，数列

$$x \ \mapsto \ f(x) \ \mapsto \ f(f(x)) \ \mapsto \ f(f(f(x))) \ \mapsto \ \ldots$$

を x の f による**軌道** (orbit) と呼ぶ．$f(f(f(x)))$ は簡単に，$f^3(x)$ と表すこともある．これは $f(x)$ の 3 乗 $\{f(x)\}^3$ と区別される．また，初項 x は**初期値** (initial value) とも呼ばれる．

固定点　f による力学系で，$x = f(x)$ を満たす点を**固定点** (もしくは**不動点**, fixed point) と呼ぶ．固定点は力学系の性質を定める重要な点であることが多い．たとえば，$f(x) = 2x+1$ による力学系では $x = -1$ が固定点であり，それは相似拡大の中心となる点であった．

クイズ　任意の自然数 n に対し，$f^n(x) = \{f(x)\}^n$ となる関数は存在するか？

軌道を視覚化する：ウェブ・ダイアグラム　与えられた実数 p と関数 $y = f(x)$ に対し，軌道

$$p \ \mapsto \ f(p) \ \mapsto \ f(f(p)) \ \mapsto \ f(f(f(p))) \ \mapsto \ \ldots$$

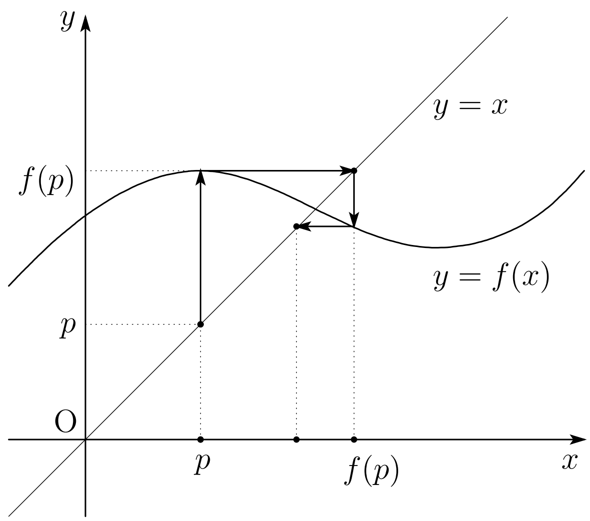
を視覚化する非常によい方法がある．$y = f(x)$ のグラフを用いて，xy 平面上の点 (p, p) から $(f(p), f(p))$ を作図する方法である：

Step 1 点 (p, p) から垂直方向に，$y = f(x)$ のグラフと交わるまで直線を引く．その交点は $(p, f(p))$ である．

Step 2 そこから水平方向に，今度は $y = x$ のグラフと交わるまで直線を引く．その交点が $(f(p), f(p))$ である．

これを続けていき，直線 $y = x$ を数直線だと思えば点 p の軌道が視覚化される．この手続きを**グラフ解析** (graphical analysis) と呼ぶ．また，グラフ解析で得られる図を**ウェブ・ダイアグラム**（web diagram）と呼ぶ．

ちなみに，$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフの交点が固定点である．



問題　付録の関数グラフを用いて，実数上の $y = 2x$, $y = 2x + 1$ などをグラフ解析せよ．特に，初期値 p の値によってウェブ・ダイアグラムはどのように変化するか？

1.6　今日の宿題（とっても簡単）

漸化式

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} \ ; \quad a_1 = 1 \tag{1.0}$$

の定める数列の一般項を求めたい．以下の空白に，最も適当な数字もしくは数式を書き込め．

方程式 $x = \dfrac{3x+2}{x+2}$ を解き，解 $x = -1,\ 2$ を得る．そのうちひとつ，$x = -1$ をとり，与えられた漸化式の辺々から引くと

$$a_{n+1} - (-1) = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} - (-1)$$
$$\iff a_{n+1} + 1 = \boxed{} \cdot \frac{a_n + 1}{a_n + 2} \tag{1.1}$$

同様にして漸化式から $x = 2$ を辺々引くと

$$a_{n+1} - 2 = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} - 2$$
$$\iff a_{n+1} - 2 = \boxed{} \cdot \frac{a_n - 2}{a_n + 2} \tag{1.2}$$

を得る．(1.1) を (1.2) で辺々割ると

$$\frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1} - 2} = \boxed{} \cdot \frac{a_n + 1}{a_n - 2}$$

となる．ここで数列 $b_n = \{(a_n+1)/(a_n-2)\}$ とおくと，これは初項 $b_1 = (a_1+1)/(a_1-2) = -2$，公比 $\boxed{}$ の等比数列である．よって

$$\begin{aligned} & b_n = \frac{a_n+1}{a_n-2} = \boxed{} \\ \iff \quad & a_n = \boxed{}. \end{aligned}$$

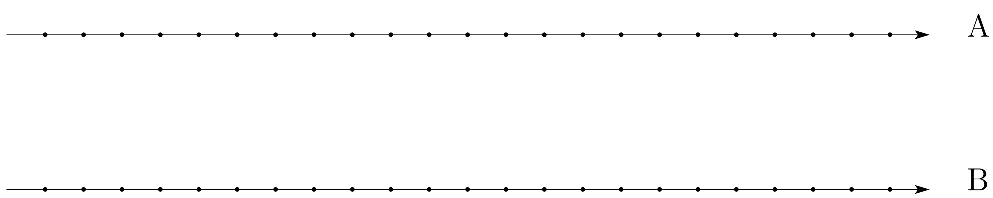
以上の計算には，一箇所だけごまかしている点がある．それはどの部分か？

2　無限遠点と実メビウス変換による力学系

漸化式

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}\ ;\quad a_1 = 1 \tag{1.0}$$

の定める数列が住んでいる数直線 A（座標は x で表す）には，関数 $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+2}$ による力学系がある．一方．この漸化式を解くときに現れた b_n の住む数直線 B（座標は X で表す）には，関数 $g(X) = 4X$ による力学系がある．図示して比べてみよう：



前にやった漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ では，数直線 A と B 上の力学系は本質的に同じものであった．しかし，今回は状況が異なるようである．ところが結論から言うと，

上の 2 つの力学系は，本質的に同じものである！

2.1　実数 $\mathbb{R}$ ＋ 無限遠点 ∞ ＝ 円 $\hat{\mathbb{R}}$

無限遠点 ∞ の導入　実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は，いつも直線で表現される．でも一体，誰がそんなことを決めたのだろう？常識をいったん捨てて，実数を表現する新しい方法を導入しよう．

- xy 平面を考える．ここで，x 軸 を $\mathbb{R}$ と思う．すなわち，点 $(X, 0)$ を実数 X の別名とみなす．ここまでは，数直線を考えているのと何ら変わらない．
- 中心 $(0, \frac{1}{2})$，半径 $\frac{1}{2}$ の円 C を考える．また，点 $(0, 1)$ を N で表す．
- このとき，N から点 $(X, 0)$ に向かって半直線を引く．すると，C とこの直線は N 以外での交点 P をただ 1 つ持つ．この点を，実数 X を表現する新しい点とする．
- すると，C から N を除いたもの（$C - \mathrm{N}$ と表す）は，実数全体 $\mathbb{R}$ を表す．

X がどんどん大きくなるとき（$X = 100000\cdots 00$ と大きくなる様子を図 1 でイメージせよ），対応する点 P は N に近づく．同様に，X が負の方向で大きくなるとき（$-100000\cdots 00$ って感じ）も，やはり対応する点 P は N に近づく．したがって，N は実数における正の無

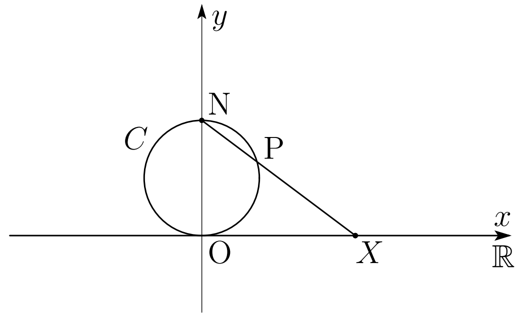


図 1: $\hat{\mathbb{R}}$ の構成

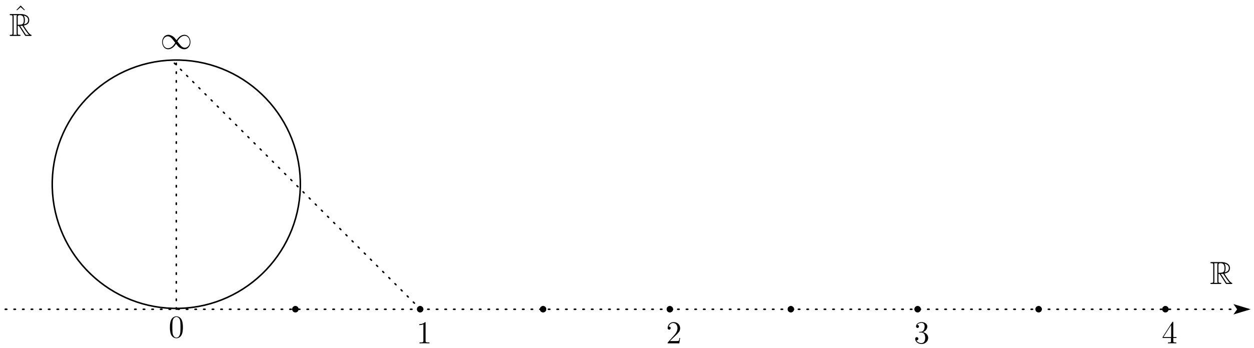
限大と負の無限大をくっつけたような点である．この点 N を**無限遠点** (point at infinity) とよび，∞ で表す．また，C は $C - \mathrm{N} = \mathbb{R}$ に無限遠点 ∞ を加えたものだから，

$$\text{円 } C = \text{実数 } \mathbb{R} + \text{無限遠点 } \infty$$

を記号として $\hat{\mathbb{R}}$ （アール ハット）で表す[1]．

クイズ　実数 X に対応する C 上の点を表す座標 (x, y) を X の式で表せ．逆に，C 上の点 (x, y) から対応する実数 X を求める公式をつくれ．

作業　$C = \hat{\mathbb{R}}$ 上に，できるだけ詳細な目盛りをうってみよう．



$C = \hat{\mathbb{R}}$ **上の四則演算**　$\hat{\mathbb{R}}$ の中の，普通の実数に対応する数にはいつもの四則演算を行えばよい．では，∞ を含む四則演算はできるのだろうか？ ∞ は数ではないが，点としては実数の極限と見なせる．計算上も，ある種の極限計算として ∞ の計算を次のように約束しておく．

- 和（差）: 任意の実数 x に対し，

$$\infty + x = x + \infty = \infty$$

[1] **拡張された実数** (extended reals) などと呼ばれることもあるが，特に決まった呼び名はない．(Cf. リーマン球面) また，上の式は正しくは $C = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ と表記する．

とする．この計算は次のようして正当化される：実数 x を固定する．もし X が正の実数で限りなく大きくなった場合，$X+x,\ x+X, X$ の対応する点は全て C 上の N$=\infty$ に近づく．したがって上の式を認めるのは自然であろう．X が負の実数で限りなく大きくなった場合も同様である．

- 積と商：任意の 0 でない実数 x に対し，

$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty$$
$$\frac{x}{\infty} = 0 \quad \frac{x}{0} = \infty$$

  とする．これらもうまく正当化できるので，考えてみてほしい．

- 次のものはとりあえず考えない．

$$\infty \cdot \infty,\ \infty \pm \infty,\ \infty/\infty,\ 0 \cdot \infty.$$

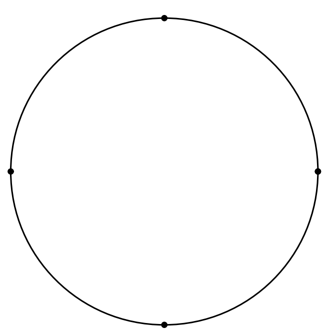
練習　$x = \infty$ に対し次の式の値をもとめよ．

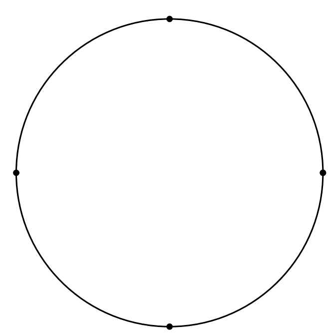
(1) $\dfrac{x+1}{x-2}$　　(2) $3x+1$

(3) $-\dfrac{1}{x}$　　(4) $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

ヒント：$\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}$

考察　関数 $T(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ の xy 平面におけるグラフは付録 1 にあるように，双曲線である．$T(x)$ が $\hat{\mathbb{R}}$ の点を $\hat{\mathbb{R}}$ の点に，どのように対応付けているか考えよ．





実メビウス変換の性質　実は，以下のことが知られている：

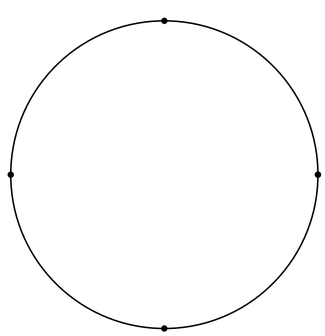
> $a,\ b,\ c,\ d$ を実数とし，$ad-bc \neq 0$ を仮定する．このとき，関数
> $$T(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$
> は $\hat{\mathbb{R}}$ の点を
> - 「ばね」のように伸び縮みさせながら，[2]
> - 穴が開かないように,
> - 重ならないように
>
> ずらす.

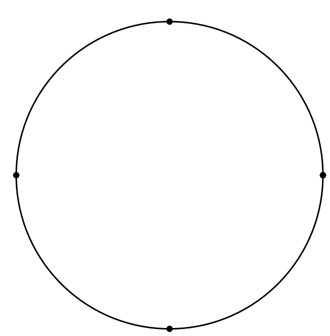
このような T を**実メビウス変換**（もしくは, 実係数一次分数変換, Möbius transformation with real coefficients）と呼ぶ.

注意　T は $\mathbb{R}$ の正負の向きを変えることもある．たとえば,
$$T(x)=-x=\frac{-1\cdot x+0}{0\cdot x+1}$$
を考えてみよ.

クイズ　$ad-bc=0$ だとなぜいけない？

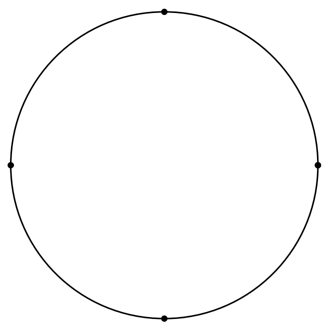
考察　1 日目にやった，数直線 A$=\mathbb{R}$ 上の $f(x)=2x+1$ による力学系と，数直線 B$=\mathbb{R}$ の $g(X)=2X$ による力学系の対応関係を $\hat{\mathbb{R}}$ 上で考えてみよ．$X=T(x)=x+1$ は実メビウス変換であることに注意.

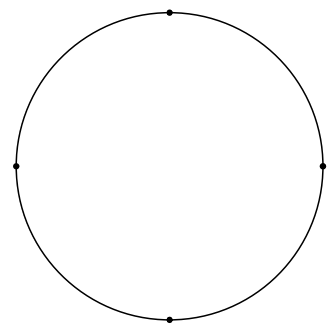




[2]$\hat{\mathbb{R}}$ を「無限に細いばねが円形の芯に一様に巻きついているもの」と考えてみる．ばねの 1 巻きが 1 つの数である．T はその芯を保ったまま，ばねの位置をずらす．もしくは，ずらしたように見せるレンズともいえる.

考察　x を座標とする $\hat{\mathbb{R}}$ のコピーを $\hat{\mathrm{A}}$ とする．同様に，X を座標とする $\hat{\mathbb{R}}$ のコピーを $\hat{\mathrm{B}}$ とする．このとき，$\hat{\mathrm{A}}$ 上の $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+2}$ による力学系と，$\hat{\mathrm{B}}$ 上の $g(X) = 4X$ による力学系の対応関係を考えてみよ．これらを結ぶレンズになっているのは，実メビウス変換 $X = T(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ である．





考察　動点 P は移動距離を覚えられない $\hat{\mathbb{R}}$ 上の生物である．動点 P は好きな点にワープし，さまざまな軌道を体験する．このとき，動点 P は自分のいる世界の運動法則が，f なのか g なのか，区別できるだろうか？

考察　では，動点 P は自分のいる世界の運動法則が，$f(x) = x+1$ なのか $g(x) = 4x$ なのかは区別できるだろうか？区別できるとすると，そのポイントになるのはなんだろうか？

実メビウス変換の固定点

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

にたいし，方程式

$$x = f(x) \iff x = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{*}$$

の解を考える，$(a,b,c,d) = (1,0,0,1)$ の場合は任意の $\hat{\mathbb{R}}$ 上の点が解なので，そのような場合は考えない．

- $c=0$ のとき：$ad-bc=ad\neq 0$ より $d\neq 0$．よって

$$f(x)=\frac{ax+b}{d}=: px+q$$

とおいてよい．すると，上の方程式 (*) は

$$x=f(x)\Longleftrightarrow x=px+q$$

となる．これは 2 つの $\hat{\mathbb{R}}$ 解[3] $x=\infty$ と $x=\dfrac{q}{1-p}$ を持つ．特に，$p=1$ の場合は $x=\infty$ を**重解**にもつ．

- $c\neq 0$ のとき：単純な式変形により

$$x=\frac{ax+b}{cx+d}\Longleftrightarrow cx^2+(d-a)x-b=0$$

となり，これは実数係数の 2 次方程式である．

したがって，方程式 (*) の解として以下の 3 通りが考えられる：

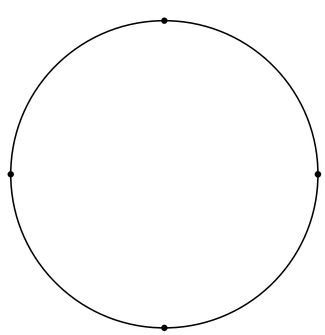
Case 1 相異なる $\hat{\mathbb{R}}$ 解２つ

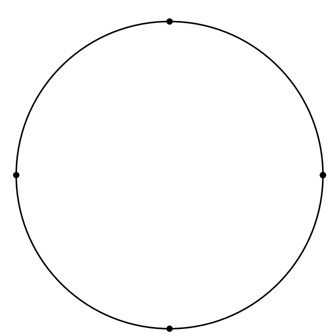
Case 2 $\hat{\mathbb{R}}$ 解１つ（重解）

Case 3 $\hat{\mathbb{R}}$ に解を持たない.（実は，複素数解は存在．付録 2 参照.）

の 3 通りが考えられる．

Case 1 と Case 2 実は，Case 1 は $g(X)=rX$ $(r\neq 0,\ 1)$ による力学系に対応する．数列で言えば，公比 r の等比数列である．例えば，$f(x)=\dfrac{3x+2}{x+2}$ などがこのタイプに属する．

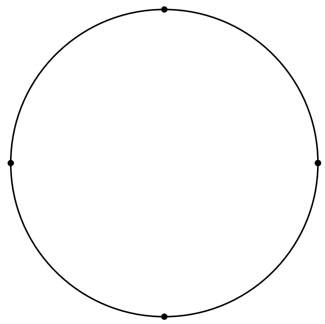


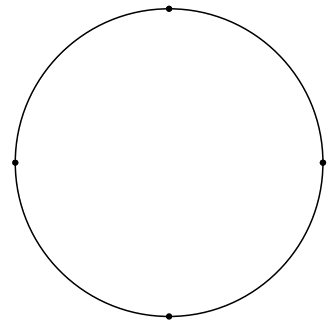


同様に，Case 2 は $g(X)=X+d$ $(d\neq 0)$ による力学系に対応する．数列で言えば，公

[3] 実数解を $\mathbb{R}$ 解と書く気分で．

差 d の等差数列である．例えば，$f(x) = \dfrac{3x+1}{-x+5}$ などがこのタイプに属する．





Case 3　方程式 (*) が $\hat{\mathbb{R}}$ 解を持たない例：

$$f(x) = \frac{x+1}{-x+1}$$

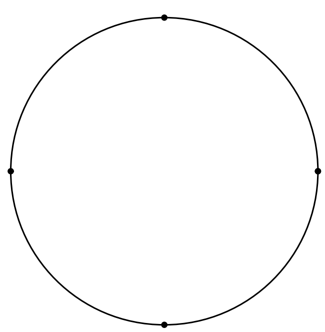
とする．このとき，方程式 (*) は

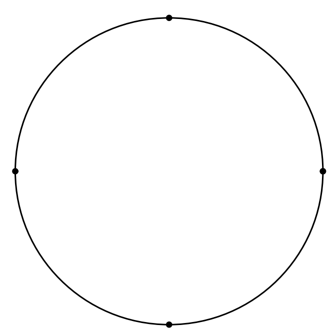
$$x = \frac{x+1}{-x+1} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = -1 \tag{1}$$

であるが，いかなる $\mathbb{R}$ 上の点もこの方程式を満たすことは出来ない．ちなみに，漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n+1}{-a_n+1}\ ; \quad a_1 = a$$

を考えると，これは $\hat{\mathbb{R}}$ 上の点 a によらず周期 4 となる.（付録 1 のグラフ 7 でウェブ・ダイアグラムを作ってみよう！）



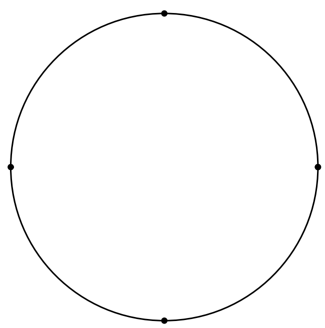


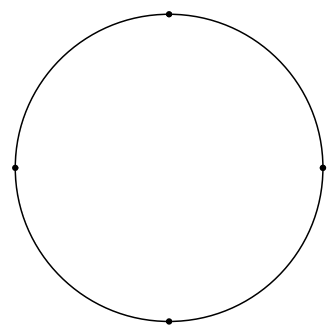
実は，Case 3 の場合, f による力学系で，$\hat{\mathbb{R}}$ 上の点は $\hat{\mathbb{R}}$ 上をひたすら回転し続ける．実は回転の「角度」がちゃんと定まるのだが，これを理解するには複素数の知識が必要である．そこで，宿題：

宿題　複素数をまだ勉強していない人は，付録 2 を見て複素数のことをちょっと勉強してきてください．形式的な計算原理と，複素数全体が平面として表されることが理解できていれば，それで十分です．

オマケ　付録 1 の 8 番目のグラフは関数 $y = \dfrac{x\cos\theta + \sin\theta}{-x\sin\theta + \cos\theta}$ $(\theta = 2\pi/5)$ のものである．($\sin, \cos$ の意味がわからない人は，とにかく，こういうグラフを持つ関数がある，と納得する.)

1. テキトーに初期値を選びウェブ・ダイアグラムを作ると，初期値によらず 5 ステップ目で必ず初期値に戻ってくることをチェックせよ．
2. 軌道として現れた 5 つの点が，$\hat{\mathbb{R}}$ 上でどう見えるか調べてみよ．特に，それらを矢印で結ぶと，どのような図形になるか？





3　リーマン球面と複素力学系

ここでは複素数の知識をある程度仮定して話を進めます．あしからず.（付録 2 で軽く予習しておけば十分です.）

3.1　リーマン球面

無限遠点の導入：複素数平面編　実数のときと同様に，複素数平面に無限遠点を導入する．

まず，xyz 空間内の xy 平面を複素数全体（複素数平面）$\mathbb{C}$ と同一視する．すなわち，点 $(X, Y, 0)$ は複素数 $Z = X + Yi$ の別名だと思うことにする．このとき，$(0, 0, \frac{1}{2})$ 中心，半径 $\frac{1}{2}$ の球面 S を考える．その「北極」N : $(0, 0, 1)$ から複素数平面上の点 Z へ半直線をおろすと，半直線は球 S と一度だけ交わるので，その点を P とおく．これにより，点 P と複素数 Z の対応づけが得られ，$S - \mathrm{N}$ と複素数全体 $\mathbb{C}$ との対応がつく．すなわち，$S - \mathrm{N} = \mathbb{C}$ と思ってよい（図 2）.

次に，Z の絶対値をものすごく大きくすると，実数のときと同様，対応する点 P は北極 N に限りなく近づく．このとき N を**無限遠点**と呼び，∞ で表す．ここでも ∞ は数ではなく，あくまで「点」であることに注意してほしい．

また，$S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を**リーマン球面** (Riemann sphere) と呼び，$\hat{\mathbb{C}}$（シー ハット）と表す．∞ と複素数の計算も，実数のときと同様に定める．

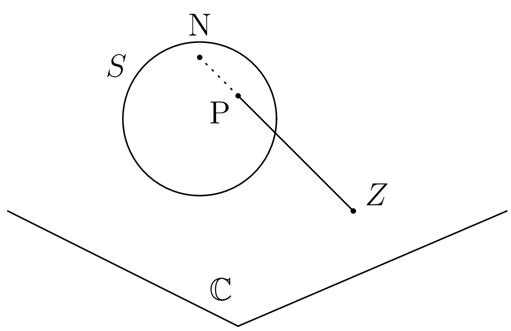


図 2: リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の構成

リーマン球面上の数列　例えば，複素数列 $a_n = (2i)^n$ を考えてみる．すなわち，$n = 0, 1, 2, \ldots$ のとき

$$\{a_n\} = \{1,\ 2i,\ -4,\ -8i,\ 16,\ 32i, \ldots\}.$$

このとき，$Z = a_n$ に対応する $S = \hat{\mathbb{C}}$ 上の点 P を追っていくと，この複素数列が N へまきつくように近づくことがわかるだろう.（図 3 を用いて考えてみよ．数列 $a_n = (-i/2)^n$ の場合も考え，比較してほしい.）

クイズ　S 上の点 (x, y, z) に対応する複素数 Z を x, y, z で表せ．逆に，複素数 $Z = X+Yi$ に対応する S 上の点を Z で表せ．

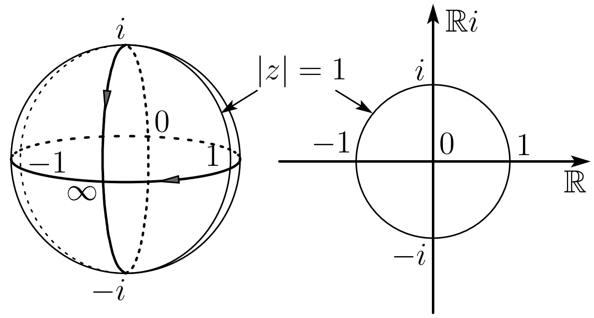


図 3: 実軸，虚軸，単位円は，リーマン球面上ではそれぞれ直交する大円となる．

（答：$Z=(x+yi)/(1-z), x=X/(1+|Z|^2)$,
$y=Y/(1+|Z|^2), z=|Z|^2/(1+|Z|^2)$）

3.2　実メビウス変換再論

メビウス変換のリーマン球面での性質　実メビウス変換は，そのままの式でリーマン球面からリーマン球面への関数を与える．さらに拡張して，係数を複素数にしても，以下のような性質をもつことが知られている：

> $a,\ b,\ c,\ d$ を複素数とし，$ad-bc\neq 0$ を仮定する．このとき，関数
>
> $$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$
>
> は $\hat{\mathbb{C}}$ の点を
>
> - ゴムのように伸び縮みさせながら，
> - 穴が開かないように，
> - 重ならないように
>
> ずらす．また，この「ずらし」によって
>
> - $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円に移る．特に，
> - $a,\ b,\ c,\ d$ が実数の場合，円 $\hat{\mathbb{R}}$ を円 $\hat{\mathbb{R}}$ に写す．

全ての円を円に写すというのは非常に強い性質である．メビウス変換の「ずらし」は，あたかも丸い「ちょうちん」のように，円という骨組みは保ちながら球面上の点をずらすのである．

実メビウス変換の固定点による分類：再論　実メビウス変換

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\ (ad-bc\neq 0)$$

にたいし，方程式

$$z = f(z) \Longleftrightarrow z = \frac{az+b}{cz+d} \tag{*}$$

の解を考える．ただし，$(a,b,c,d) \neq (1,0,0,1)$ とする．このとき，方程式 (*) の解として以下の 3 通りが考えられる：

Case 1 相異なる $\hat{\mathbb{R}}$ 解２つ

Case 2 $\hat{\mathbb{R}}$ 解１つ（重解）

Case 3 $\hat{\mathbb{R}}$ 解ではない複素数解 2 つ．

リーマン球面上の f による力学系はそれぞれ次のようになる：

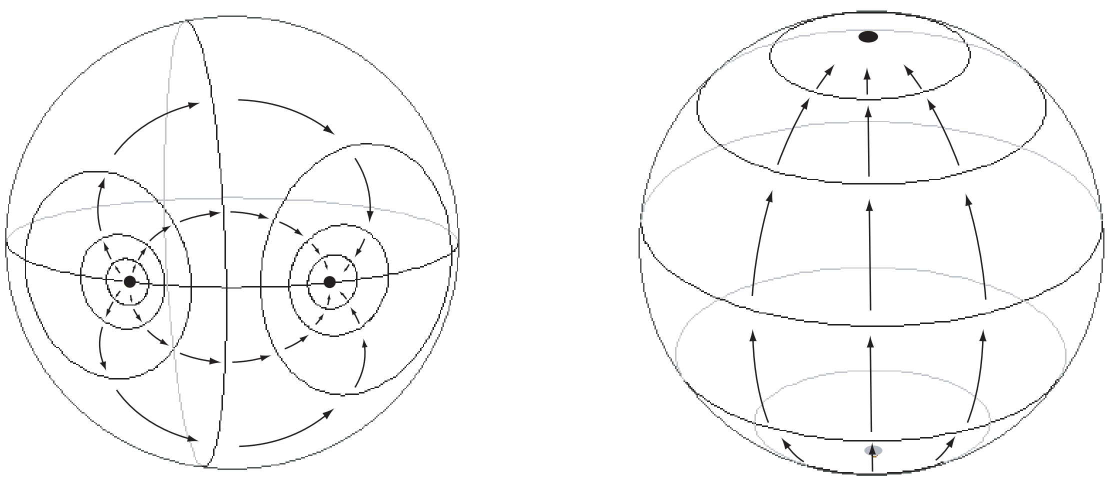


図 4: Case 1：等比数列を与える．

Case 3 について　方程式 (*) が $\hat{\mathbb{R}}$ でない複素数解を持つ場合をもう少し詳しく考えてみよう．

$$f(z) = \frac{z+1}{-z+1}$$

とする．このとき，方程式 (*) は

$$z = \frac{z+1}{-z+1} \quad \Longleftrightarrow \quad z^2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \pm i. \tag{2}$$

すなわち，2 点 $\pm i$ は f による作用で固定される．

ここで，f による力学系を複素メビウス変換 $Z = T(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ というレンズを通して眺めてみる．すると，固定点 i，$-i$ はそれぞれ原点と無限遠点に移る．また，f による

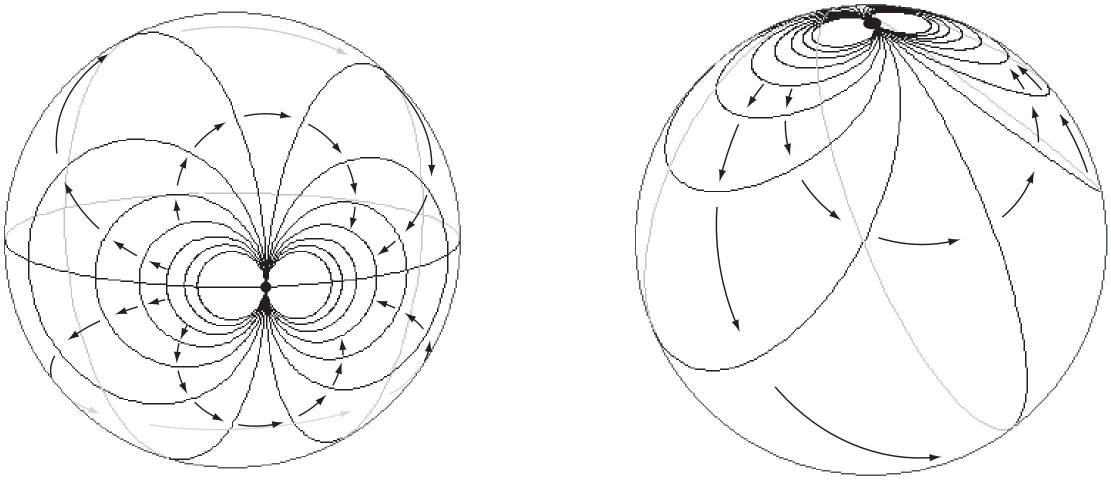


図 5: Case 2：等差数列を与える．

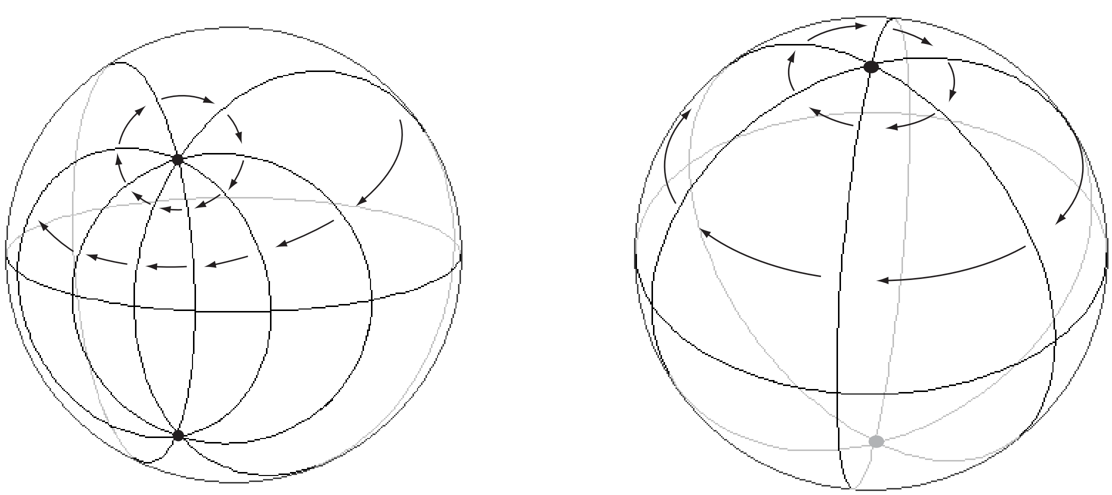
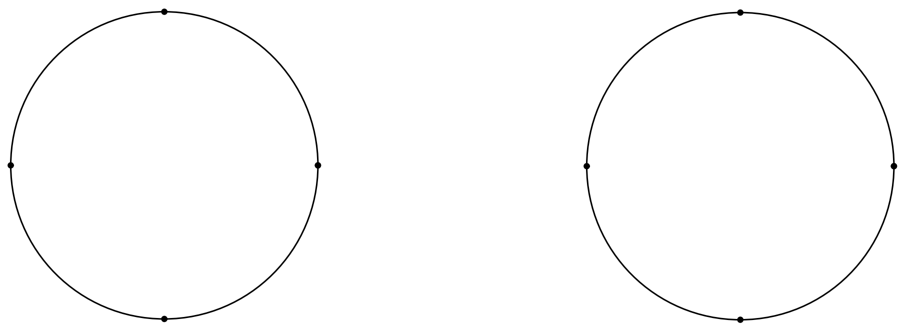


図 6: Case 3：「回転」を与える．左は 45 度回転，右は 60 度回転に対応する．

力学系の周期軌道 $0 \mapsto 1 \mapsto \infty \mapsto -1 \mapsto 0$ は次のように移される：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "T"] & 1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "T"] & \infty \arrow[r, "f"] \arrow[d, "T"] & -1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "T"] & 0 \arrow[d, "T"] \\
-1 \arrow[r, "\times i"] & -i \arrow[r, "\times i"] & 1 \arrow[r, "\times i"] & i \arrow[r, "\times i"] & -1
\end{tikzcd}$$

これより，レンズ越しの力学系は $g(Z) = iZ$ であることが予想される．実際，この g は $T(f(z)) = g(T(z))$ を満たすことから計算できて，$g(Z) = iZ$ である．このとき $g^4(Z) = i^4 Z = Z$ であるから，全ての Z について周期 4 である．したがって，レンズの向こうの f による力学系でも，全ての z について周期 4 であることが正当化されるのである．



クイズ　上の T により，$\hat{\mathbb{R}}$ は単位円に移ることを示せ．(T は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円に写す，という性質を用いれば，計算はほとんどいらない.)

一般に f による力学系が Case 3 のタイプであるとき，ある絶対値 1 の複素数 $\lambda \neq 1$ が存在して，適当なレンズ越しに $g(Z) = \lambda Z$ による力学系として見ることが出来る．すなわち，g による軌道

$$Z \;\mapsto\; Z \cdot \lambda \;\mapsto\; Z \cdot \lambda^2 \;\mapsto\; Z \cdot \lambda^3 \;\mapsto\; \ldots$$

は絶対値を変えることなく，1 秒あたり $\arg \lambda$ の回転を行う．これを再び，レンズを通して f の力学系でみると，$\hat{\mathbb{R}}$ 上をぐるぐる廻る軌道として観測されるわけである．

3.3　2 次多項式 $f(z) = z^2 + c$ による力学系

標準形　複素数 $A \neq 0,\ B,\ C$ に対し，2 次多項式

$$f(z) = Az^2 + Bz + C$$

によるリーマン球面上の力学系を考えよう．ただし，$f(\infty) = \infty$ と約束する．

いま係数は3つあるが，これらは本質的に係数1つ分の自由度しかない．それを示そう．天下り的だが，A を両辺に掛けて，

$$\begin{aligned} Af(z) &= A^2z^2 + ABz + Ac \\ &= (Az + \frac{B}{2})^2 - \frac{B^2}{4} + AC \\ \iff \quad Af(z) + \frac{B}{2} &= (Az + \frac{B}{2})^2 - \frac{B^2}{4} + \frac{B}{2} + AC. \end{aligned}$$

したがって $T(z) = Az + \dfrac{B}{2}$ とおくと，これはメビウス変換であり，

$$T(f(z)) = \{T(z)\}^2 - \frac{B^2}{4} + \frac{B}{2} + AC$$

となる．さらに $c = -\dfrac{B^2}{4} + \dfrac{B}{2} + AC$ とおくと，これは次のようにまとめることが出来る．

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, "T"] \arrow[d, "f"] & T(z) \arrow[d] \\ f(z) \arrow[r, "T"] & \{T(z)\}^2 + c \end{tikzcd}$$

したがって，T というレンズで見れば，f による力学系は $T(z)$ を $\{T(z)\}^2 + c$ に移す力学系とみなすことが出来る．よって $Z = T(z)$ とおくと，f による力学系は

$$g(Z) = Z^2 + c$$

と本質的に同じものであることがわかる．これを2次多項式の標準形と呼ぶ．2次多項式による力学系は，本質的にはたった1文字，c 分の自由度しかないのである．今 c は複素数であり，複素平面上の点として表すことが出来る．したがって「2次多項式のカタログ」を複素平面上に作ることが出来る．

考察　手始めに $c = 0$ の場合の力学系を，ウェブ・ダイアグラムを使ってみてみよう．次に，c を実数で変化させて，$z^2 + c$ による力学系が $\mathbb{R}$ 上でどのように変化するのか調べよ．

考察　上で考察した力学系たちが複素平面上でどう見えるか，Java プログラム *OTIS*

`http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/programs/otis.html`

を使って調べよ．

ジュリア集合　複素数 c を固定する．このとき，$f_c(z) = z^2 + c$ によって定まるリーマン球面上の力学系を考えよう．特に初期値 z によって，軌道

$$z \xmapsto{f_c} z^2 + c \xmapsto{f_c} (z^2+c)^2 + c \xmapsto{f_c} \cdots \qquad (**)$$

の挙動がどう変化するのかを調べたい．まず，z が無限遠点に近い場合を考えよう．もし，z の絶対値がものすごく大きいと，リーマン球面上でそれらは無限遠点に近い．たとえば，$|z| > 100$ としよう．このとき，

$$|f_c(z)| = \left|z^2(1 + \frac{c}{z^2})\right| = |z^2| \cdot \left|1 + \frac{c}{z^2}\right| > 10000 \cdot \left|1 + \frac{c}{z^2}\right|.$$

さらに，$|c| < 10$ と仮定しよう．すると $|\frac{c}{z^2}| = \frac{|c|}{|z|^2} < 0.001$ であるから，上式の右端にある項は 0.1 パーセント程度の誤差で 10000 に近い．したがって $f(z)$ は z より，もっともっと無限遠点に近い．**無限遠点は，周囲の点を極めて強い力で引き寄せる**のである．

では，どのくらいたくさんの点が無限遠点に引き寄せられるのであろうか？逆に，どのくらいたくさんの点が無限遠点に引き寄せられず，我慢していられるのだろうか？

$$K_c = (\text{軌道 } (**) \text{ が無限遠点に引き寄せられ}\underline{\text{ない}}\text{ ような初期値 } z \text{ 全体})$$

という複素数 z の集まり（集合）考える．無限遠点は固定点なので，K_c は 無限遠点を含まない．したがって，K_c は複素数平面上の図形となる．K_c は f_c の **充填ジュリア集合** (filled Julia set) とも呼ばれる．また，無限遠点に引き寄せられる点と K_c の境界，すなわち，ちょっとでも気を抜くと無限遠点に行ってしまうかもしれない，ギリギリの点全体を f_c の**ジュリア集合** (Julia set) と呼ぶ.

考察　$c = 0$ のとき，すなわち $f_c(z) = f_0(z) = z^2$ のとき，K_0 は単位円とその中身，ジュリア集合は単位円である．理由を考えてみよう．

K_c のカタログ：マンデルブロー集合　c を変化させると，当然 K_c の形も変化する．K_c は「ひとつながり」（連結）の図形だったり，粉々になって「ひとつながり」の図形にならないこともある．このとき，

$$M := (K_c \text{ が「ひとつながり」となるような } c \text{ の全体})$$

を**マンデルブロー集合** (Mandelbrot set) とよぶ．これは複素数 c の集まり（集合）であるから，やはり複素数平面上に描くことが出来る．図 7 中央の図形がそれである（黒と灰色の部分を合わせたもの）．対応する c における充填ジュリア集合 K_c もいくつか描いてある．ジュリア集合は K_c を取り巻く黒く塗られた部分であり，その外側の点の軌道は全て無限遠点に引き寄せられる．ジュリア集合やマンデルブロー集合の形は非常に複雑で，自己相似性（どんなに小さな部分をとっても，全体と同じ構造を持つ，という性質．いわゆる**フラクタル** (fractal) 性）を持つことが知られている．

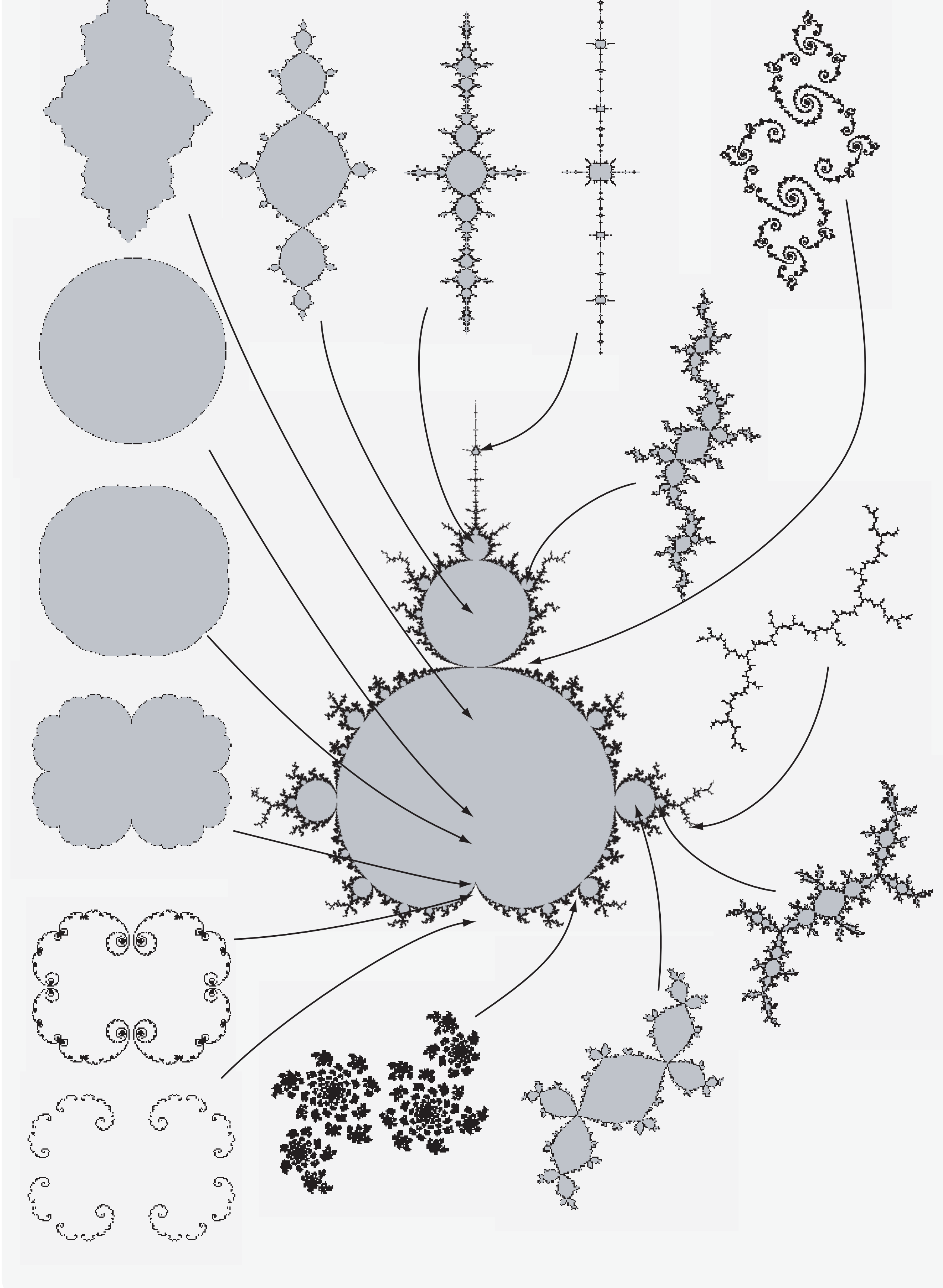
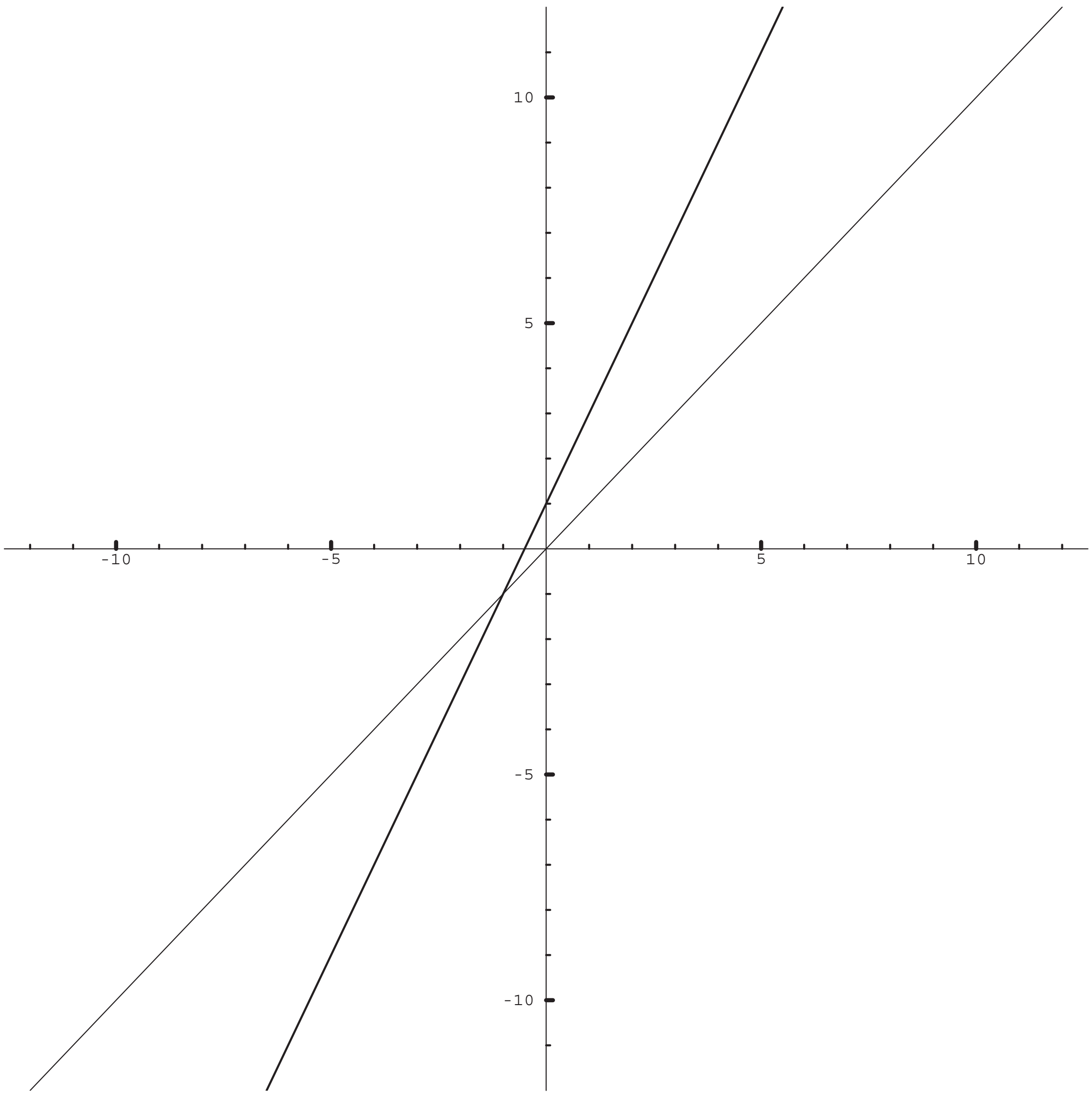


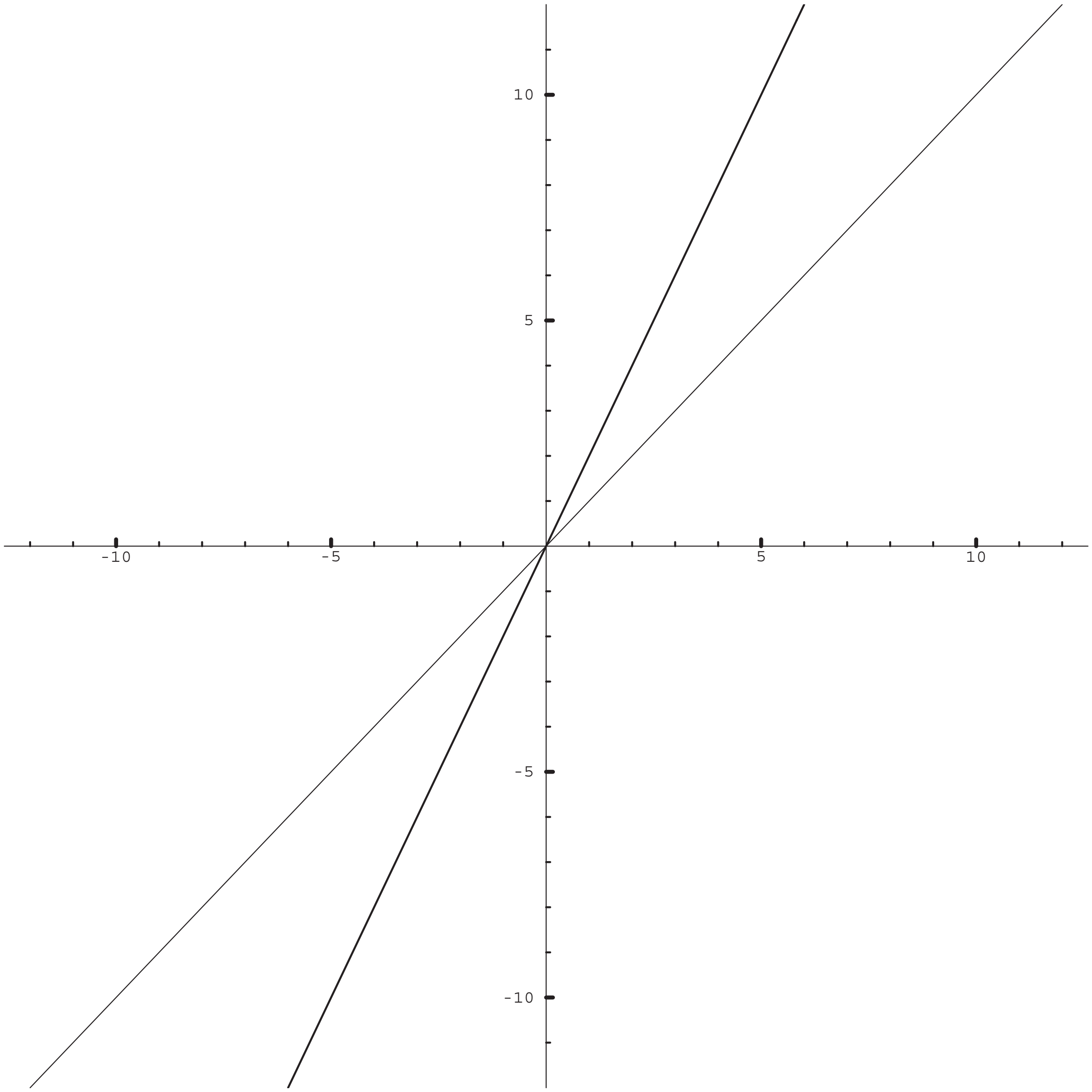
図 7: 左に 90 度回転させたものがオリジナルのマンデルブロー集合とジュリア集合

4 付録1：関数のグラフ

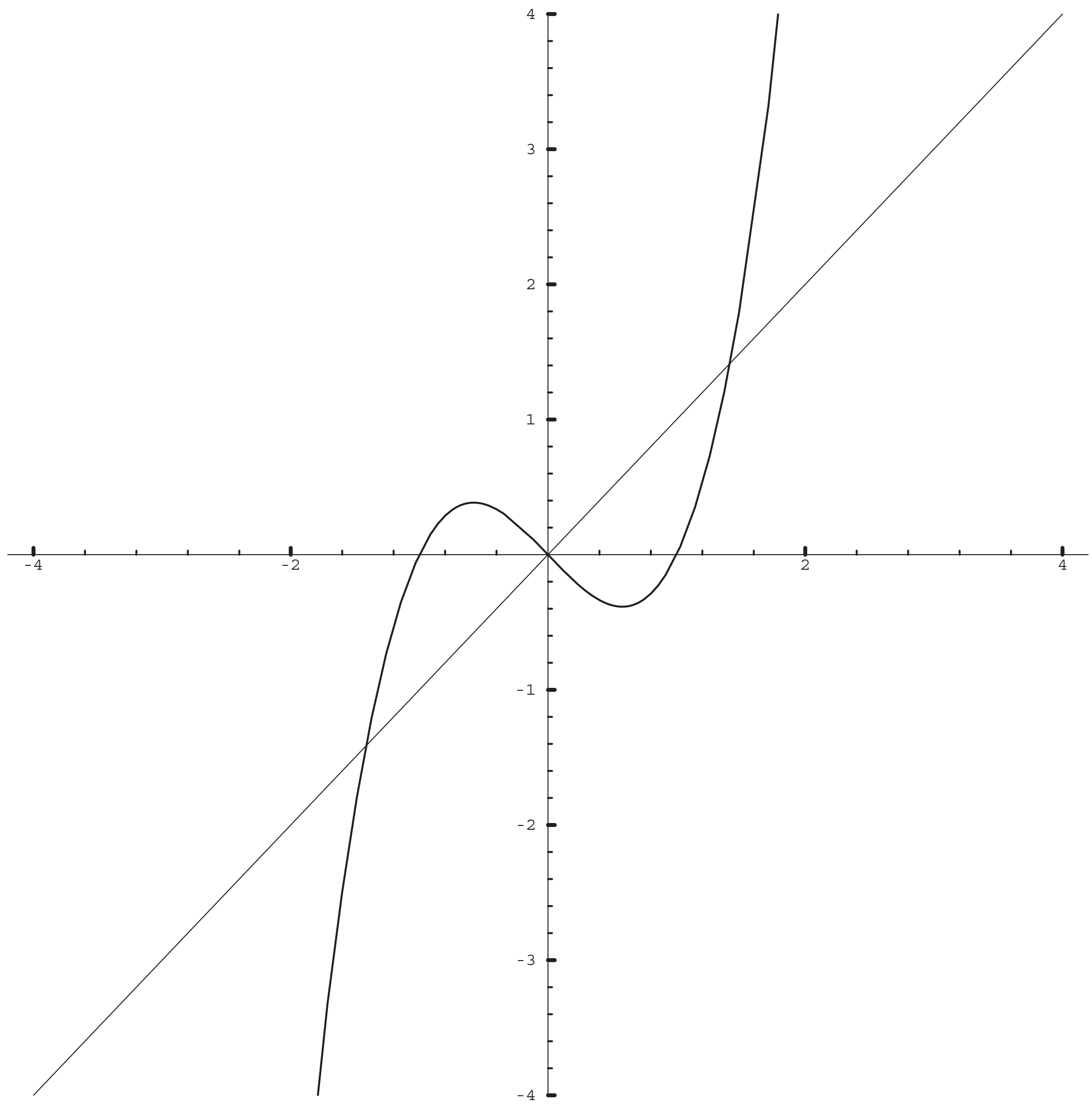
1. $y = 2x + 1$ のグラフ



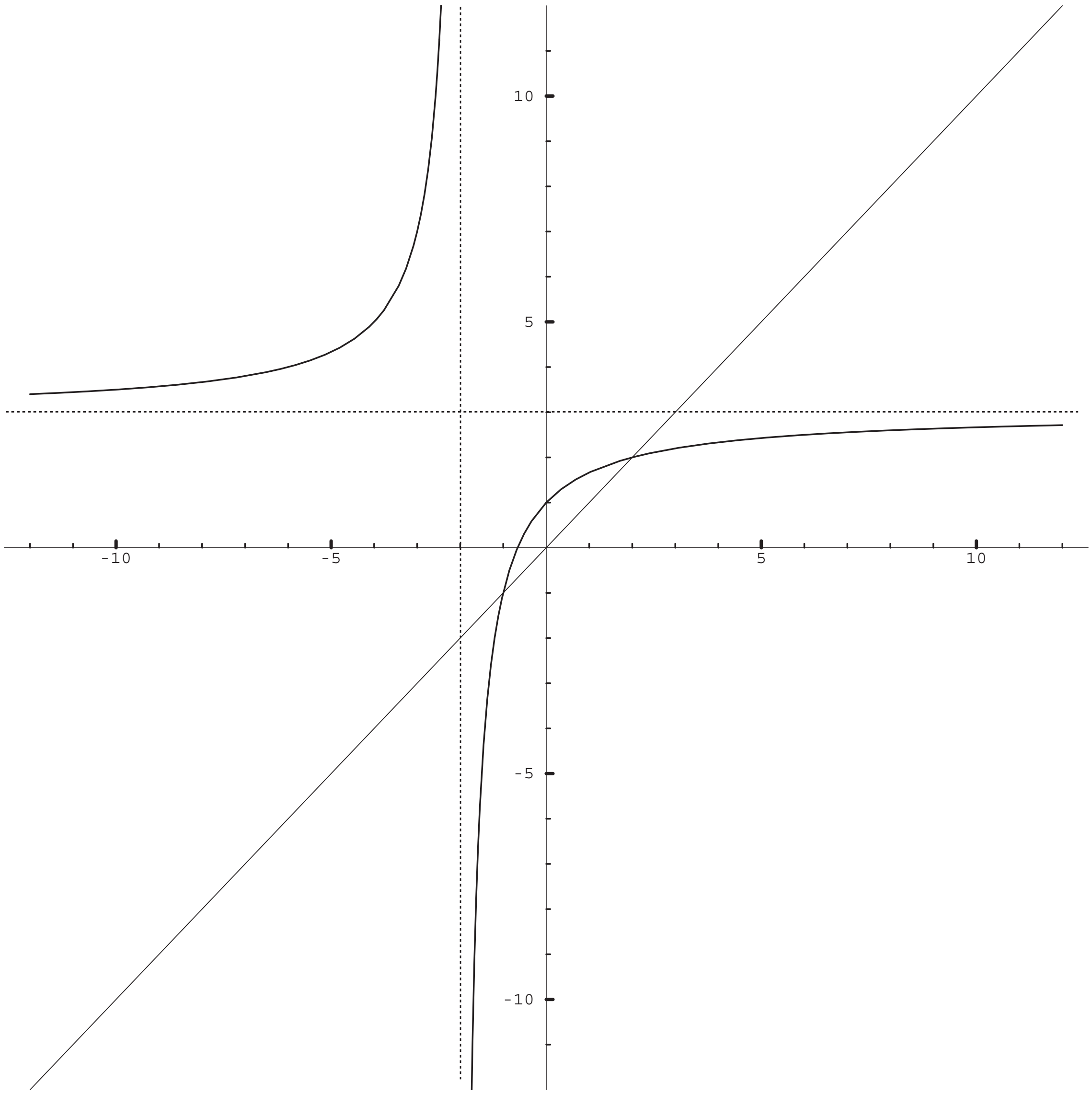
2. $y = 2x$ のグラフ



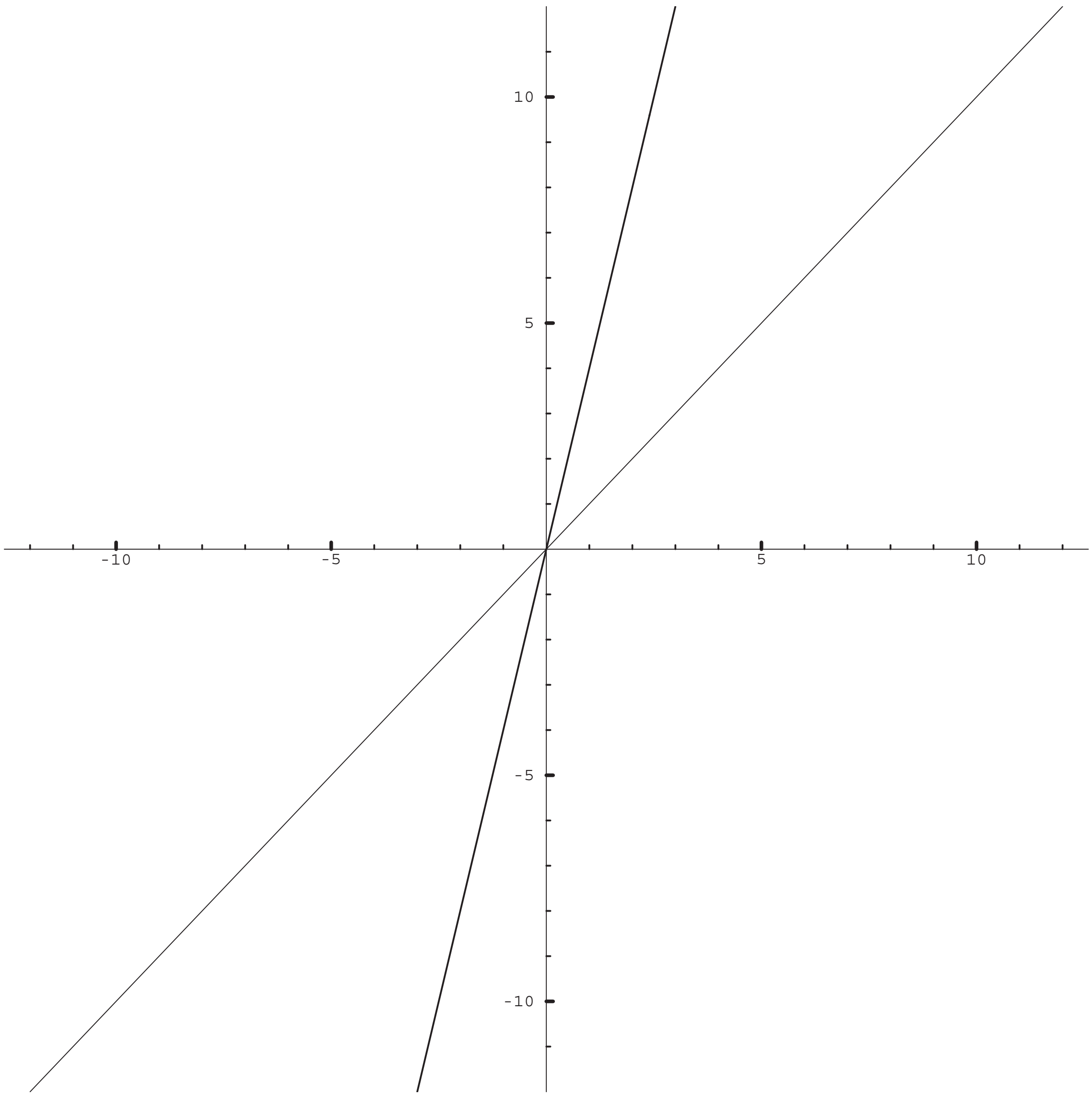
3. $y = x^3 - 2x$ のグラフ



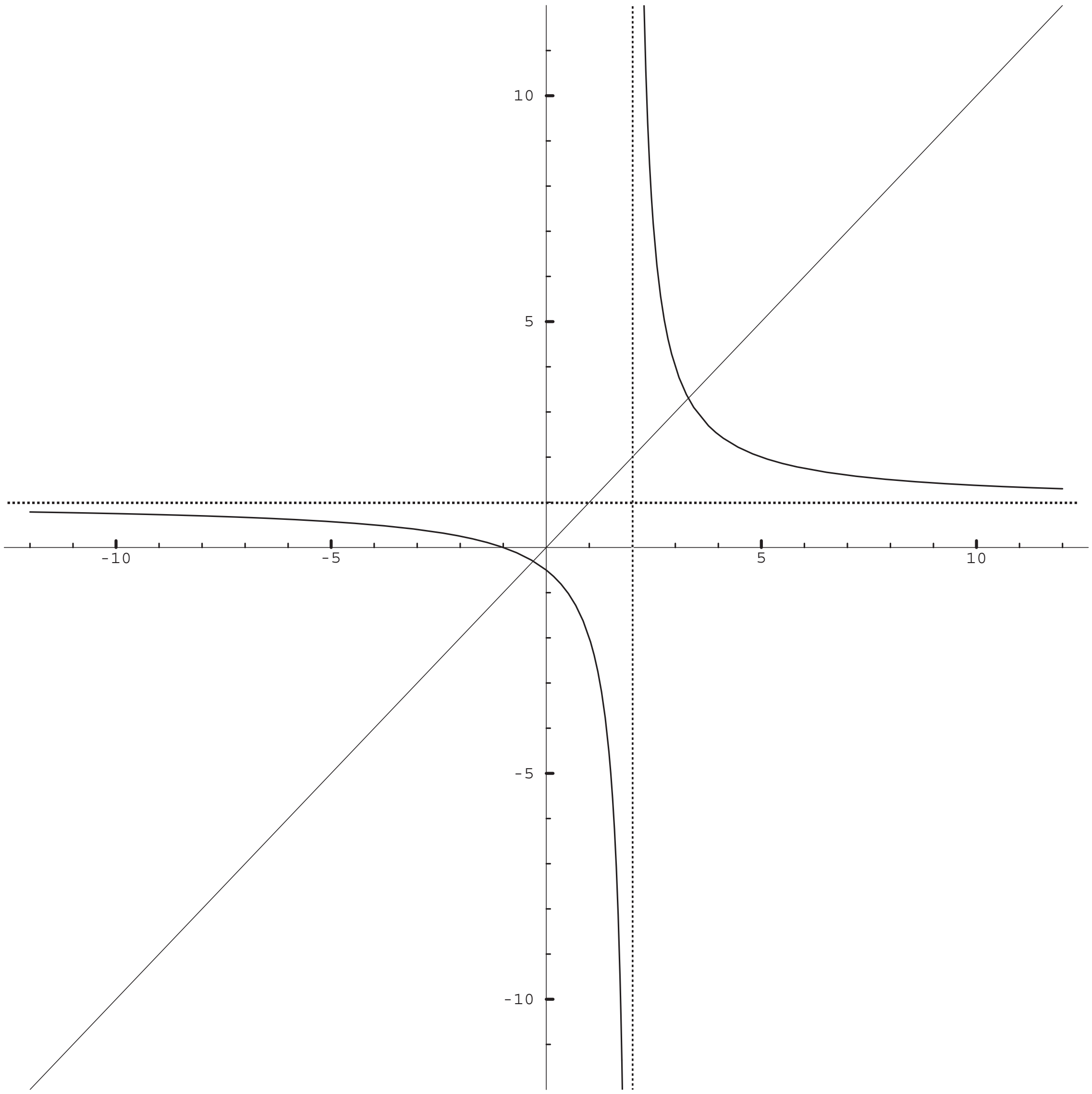
4. $y = \dfrac{3x+2}{x+2}$ のグラフ



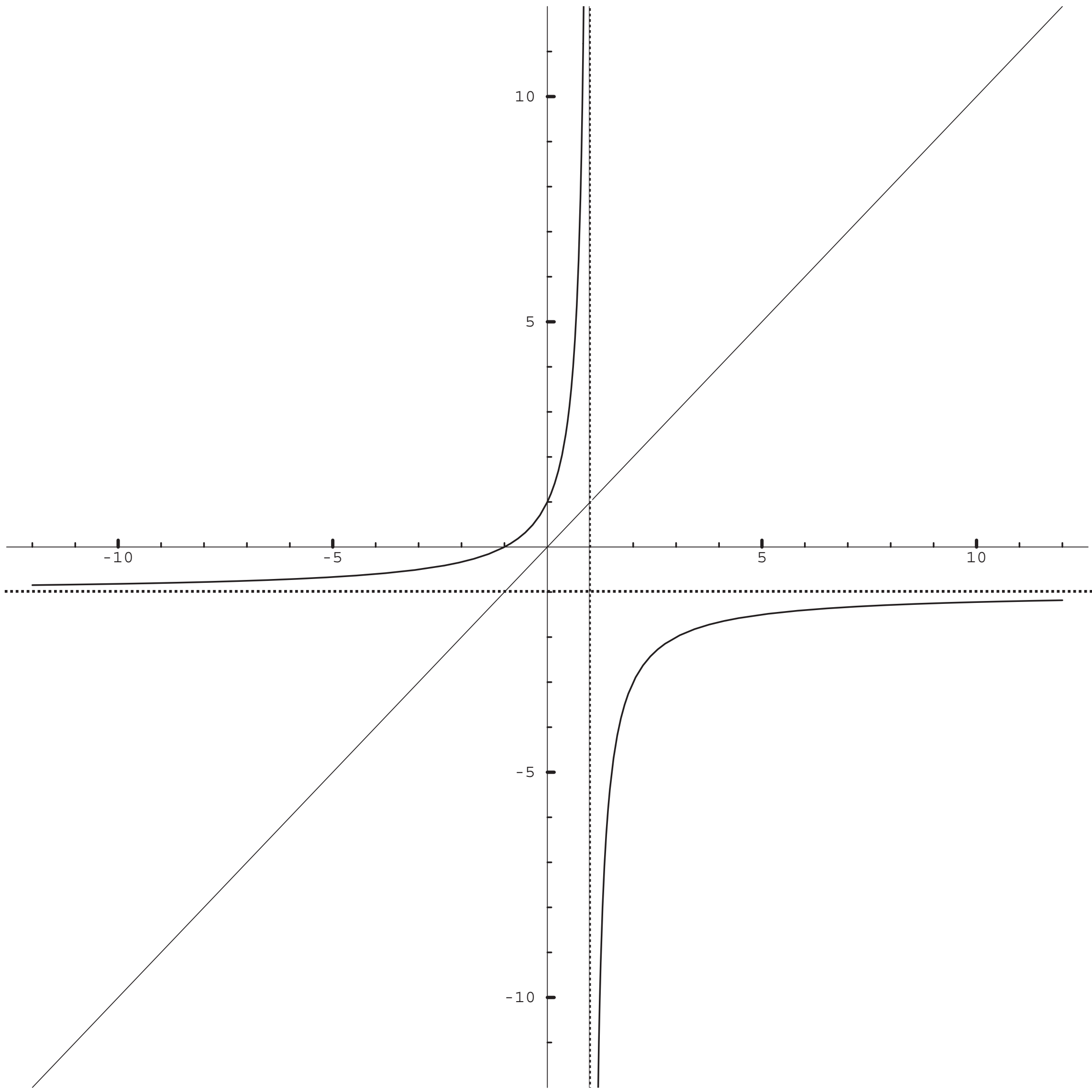
5. $y = 4x$ のグラフ



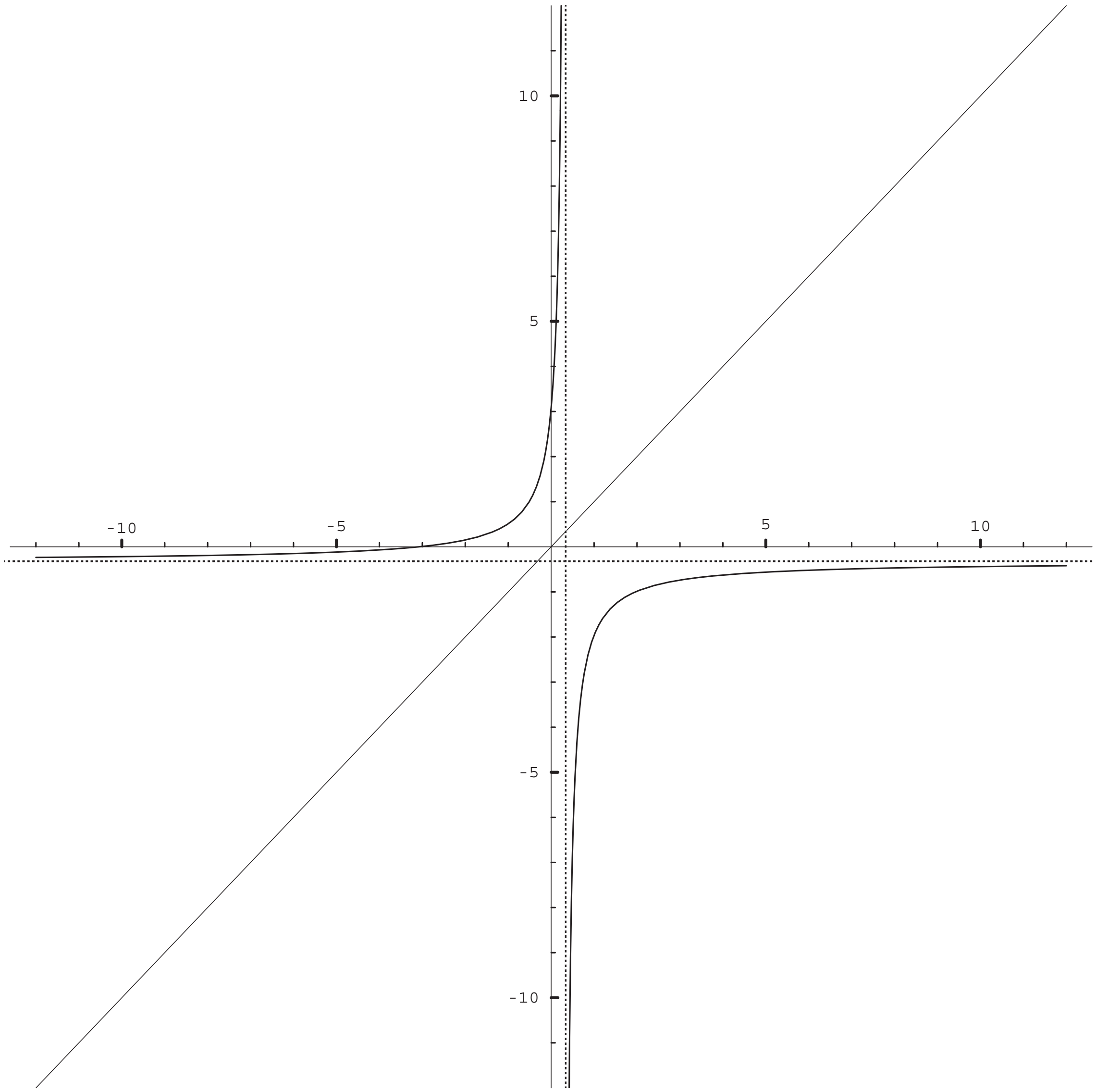
6. $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ のグラフ



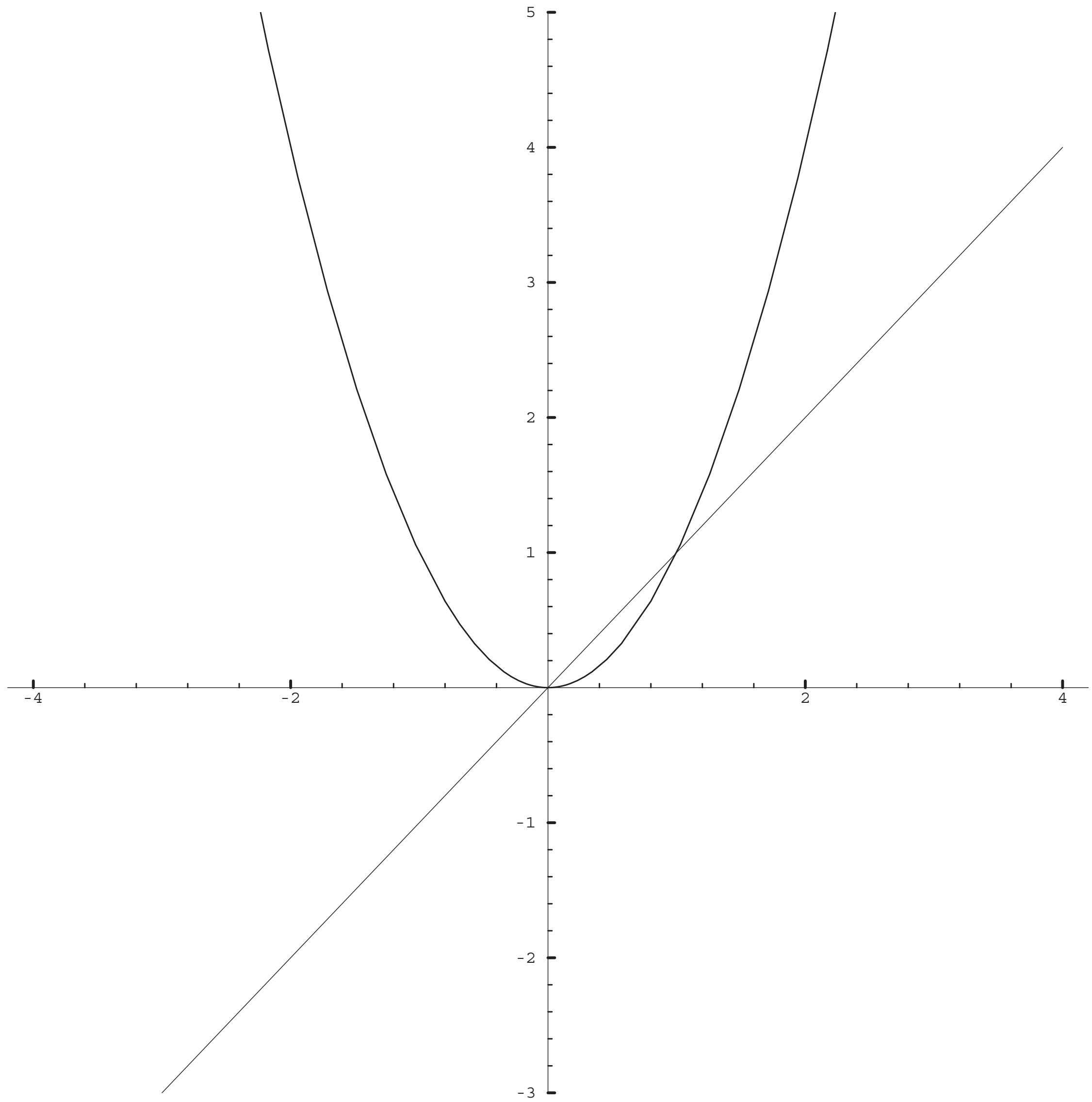
7. $y = \dfrac{x+1}{-x+1}$ のグラフ



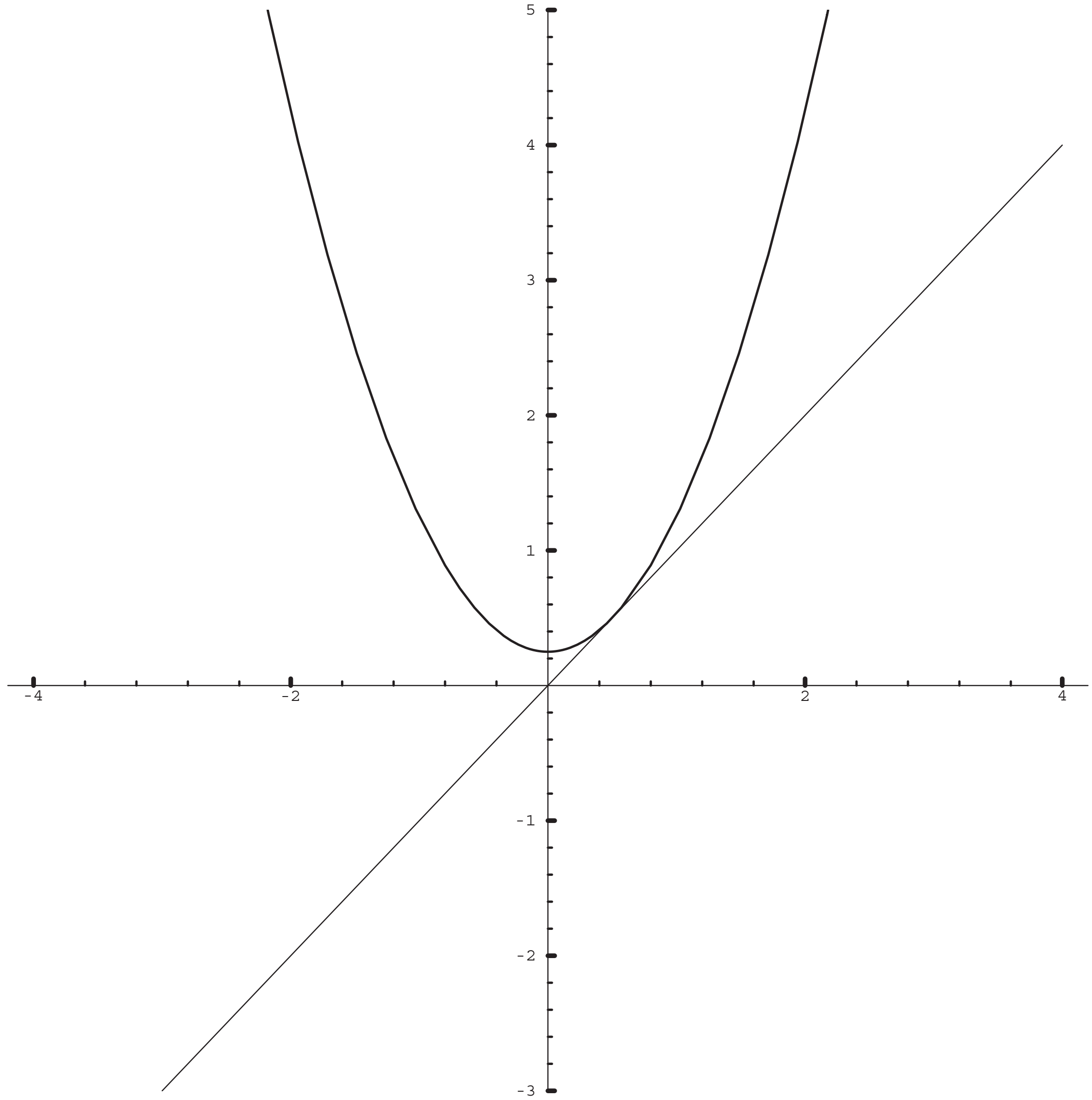
8. $y = \dfrac{x\cos\theta + \sin\theta}{-x\sin\theta + \cos\theta}$ $(\theta = 2\pi/5)$ のグラフ



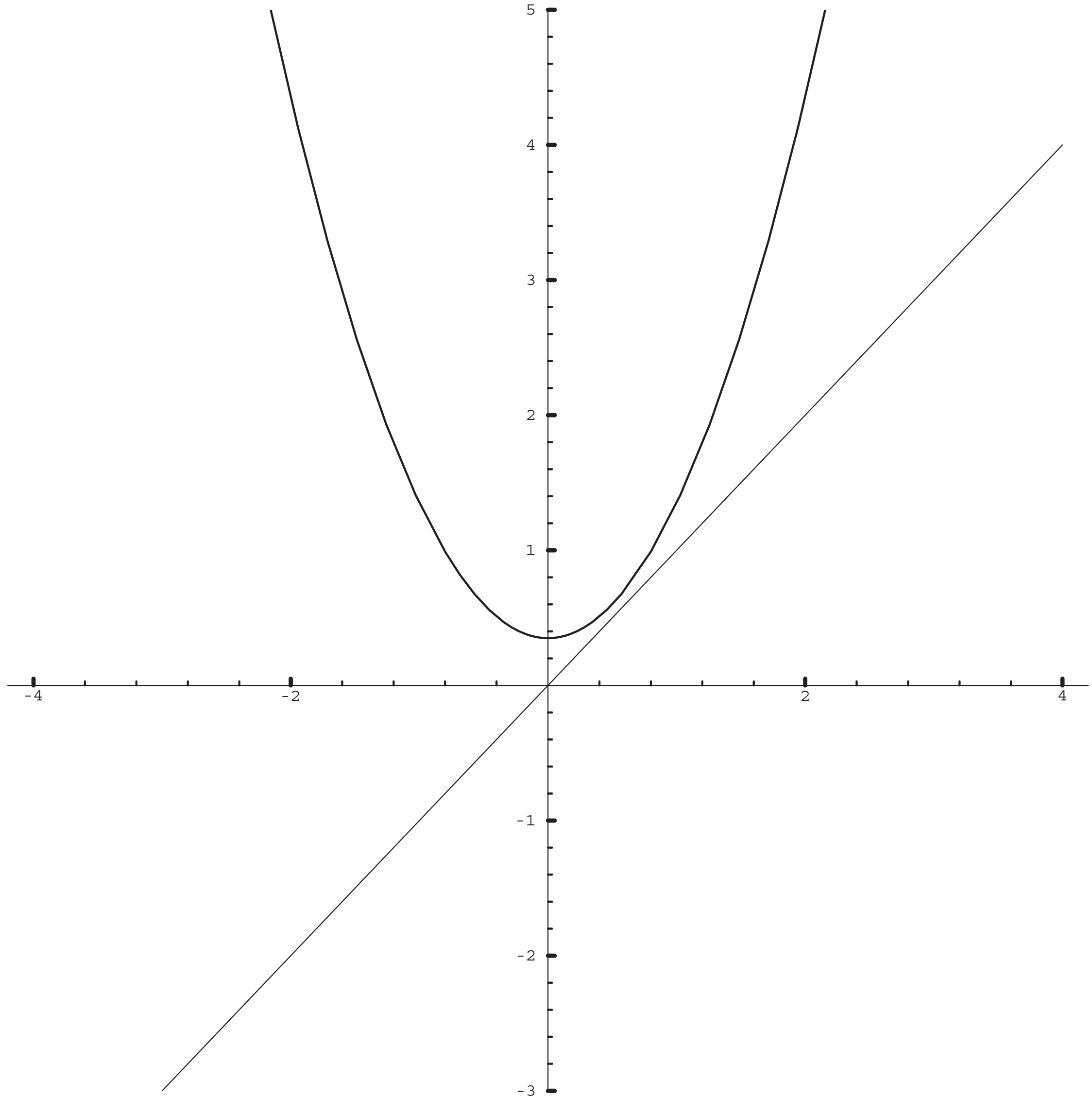
9. $y = x^2$ のグラフ



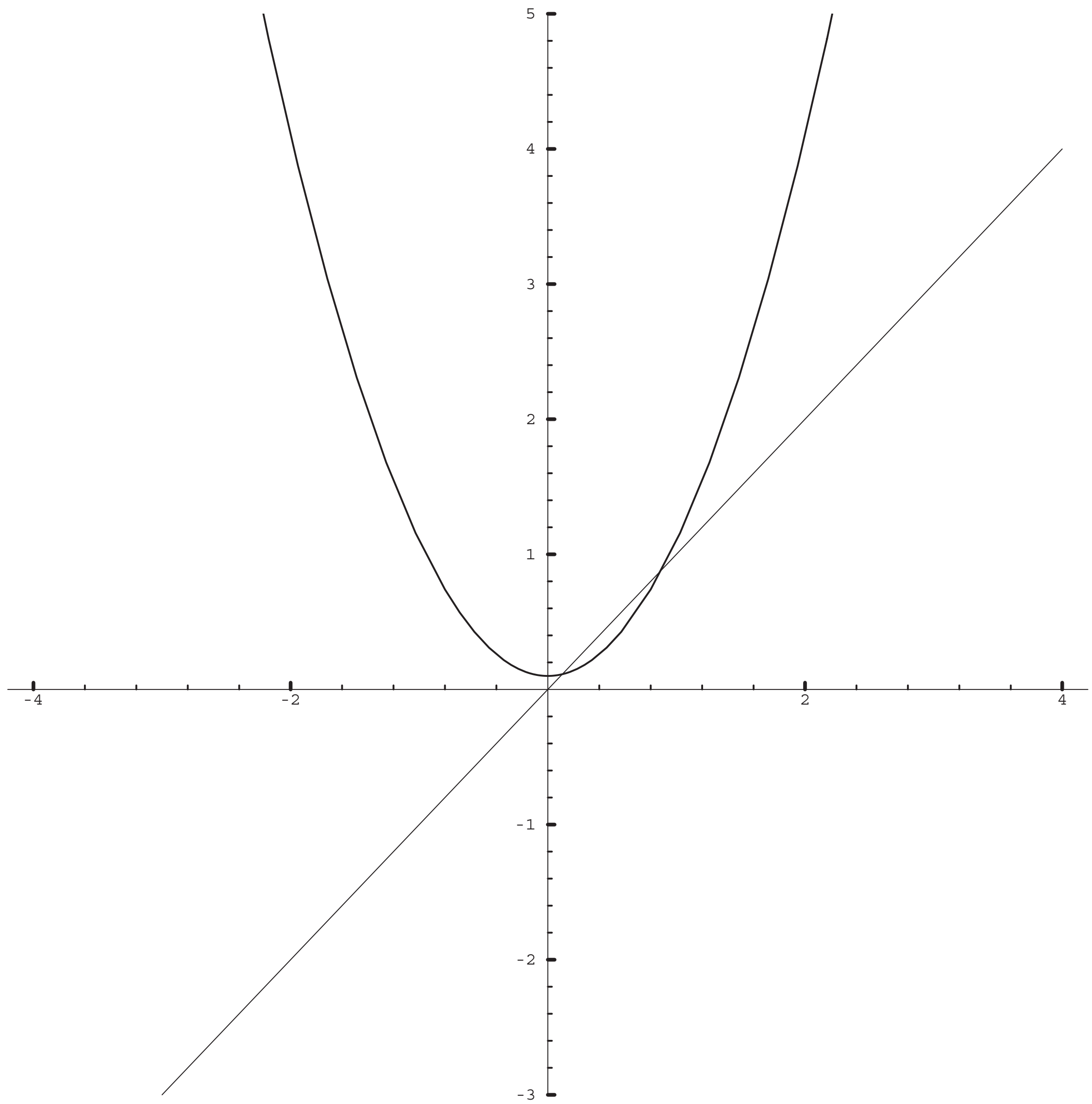
10. $y = x^2 + 0.25$ のグラフ



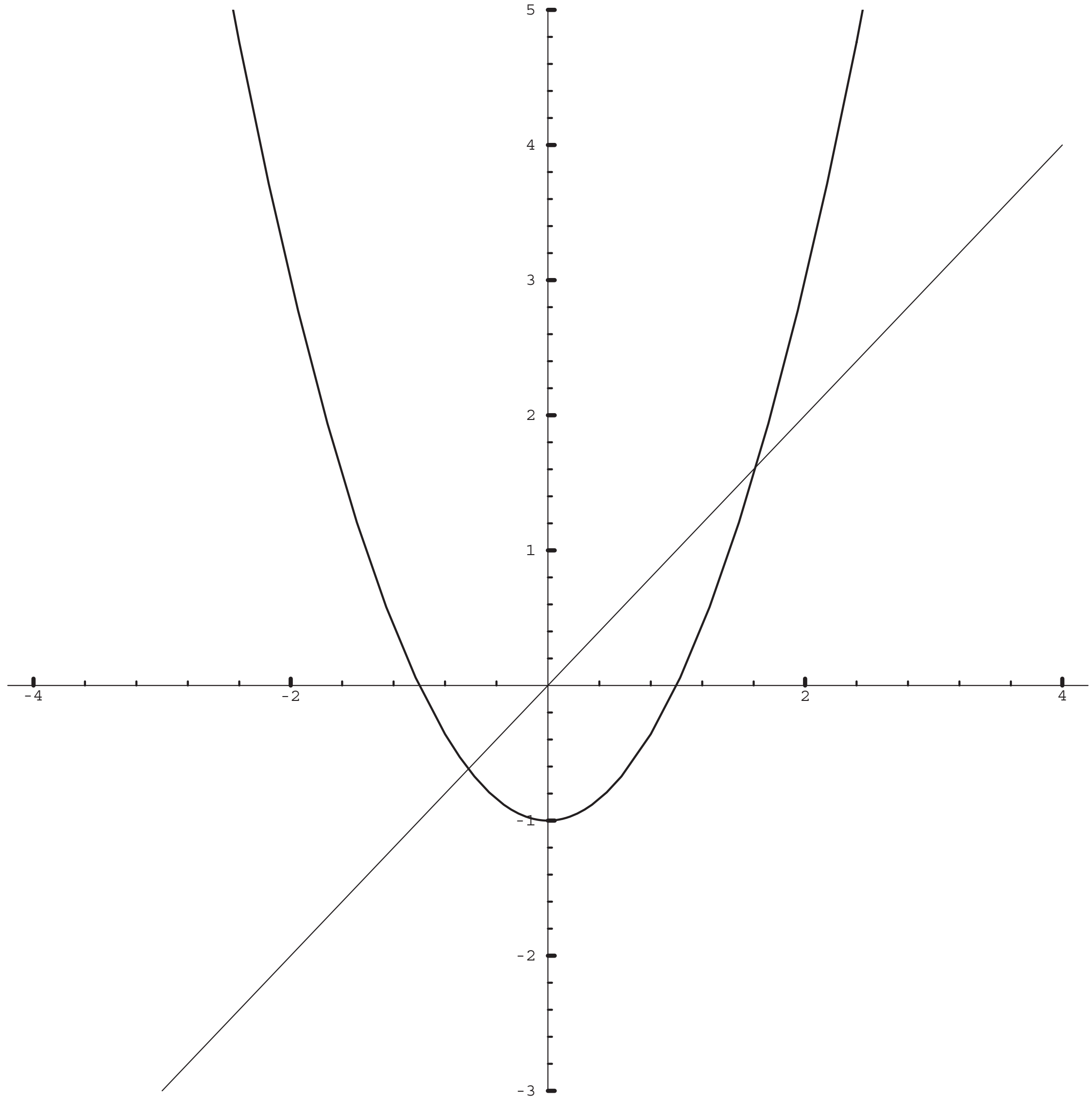
11. $y = x^2 + 0.35$ のグラフ



12. $y = x^2 + 0.10$ のグラフ



13. $y = x^2 - 1$ のグラフ



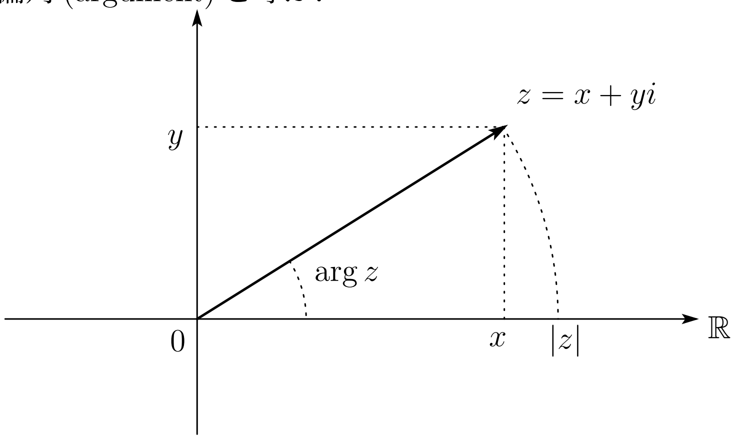
5　付録2：複素数について

複素数とは？　**複素数** (complex number)z とは，2 つの実数 $x,\ y$ を $i^2=-1$ を満たす「数」i で結んだ，

$$z = x + yi$$

という形のモノをいう．$y=0$ のときこれはタダの実数 x であるから，複素数全体は実数全体を含む大きな集合（数の集まり）である．複素数全体を記号 $\mathbb{C}$ で表す．

複素数 $z=x+yi$ は xy **平面上の点** (x,y) **の別名だと思うことにする．**その意味で，複素数全体のことを**複素（数）平面** (complex plane) と呼ぶ．したがって，x 軸は実数の全体 $\mathbb{R}$ の別名である．これをさらに，**実軸** (real axis) とも呼ぶ．複素数 z に対し，z と原点 0 を結んだ線分の長さ $\sqrt{x^2+y^2}$ を $|z|$ で表し，複素数の**絶対値** (absolute value) もしくは**長さ** (modulus) とよぶ．また，z と実軸のなす角を，やや仰々しいが $\arg z$ と表し，z の偏角 (argument) と呼ぶ．

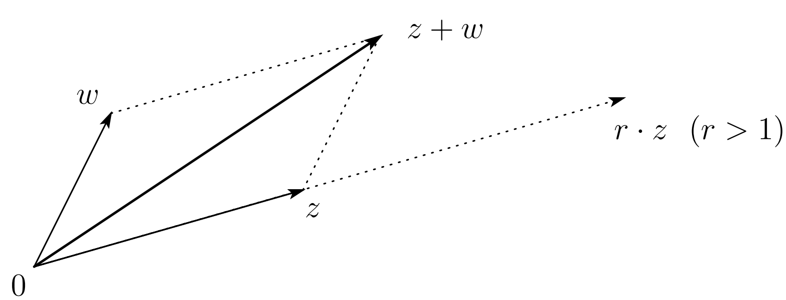


複素数は実数と文字 i の文字式として計算する．もし i^2 が現れたら，それを -1 で置き換えるのである．とにかく，これで全てがうまく行く．

複素数の足し算　2 つの複素数 $z=x+yi,\ w=u+vi$ に対し，

- $z+w=(x+u)+(y+v)i$
- $z-w=(x-u)+(y-v)i$

と定義する．和は次のような平行四辺形の作図により得られる．



複素数 $z=x+yi$ は複素数 x と複素数 yi の和であるから，つじつまが合う．

複素数の掛け算公式　2つの複素数 $z = x + yi,\ w = u + vi$ に対し,

- $zw = (xu - yv) + (xv + yu)i$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}$ (ただし $z \neq 0$)
- $\dfrac{z}{w} = z \cdot \dfrac{1}{w} = \dfrac{(xu + yv) + (-xv + yu)i}{u^2 + v^2}$ (ただし $w \neq 0$)

と定義する．とくに，積 zw の図形的意味は以下のよう与えられる：

複素数の実数倍　複素数 $z = x + yi$ と実数 r に対し,

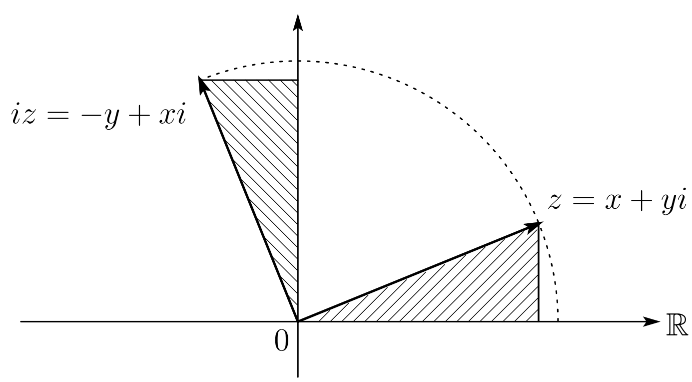
$$r \cdot z = r(x + yi) = rx + ryi$$

と定める．平面上で言うと，原点中心に r 倍の拡大をしていることになる．もちろん，r が負の場合は「矢印」は逆向きになる.（上の図参照）

複素数の i 倍　まず，i を普通の数のように思って $z = x + yi$ にかけると,

$$i \cdot z = i(x + yi) = xi + yi^2 = -y + xi$$

となる．これは平面でいうと，90 度の回転である.



思えば

実数の -1 倍＝数直線上で 180 度回転

であったから，$i \cdot i = -1$ とは

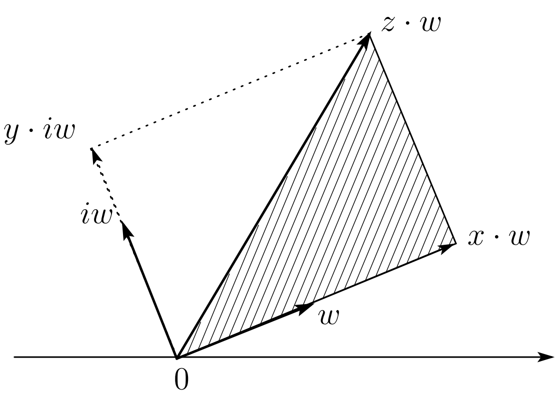
-1 倍＝ i 倍× i 倍＝ 90 度回転＋ 90 度回転=180 度回転

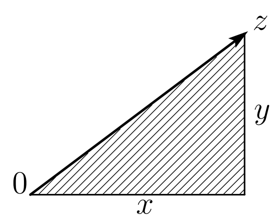
となって，つじつまが合う.

複素数の複素数倍　2 つの複素数 $z=x+yi,\ w=u+vi$ に対し，

$$z\cdot w=(x+yi)w=xw+y(iw).$$

これより，以下のような図を得る．





ぢっと眺めると，次のような性質を得る．

- $|zw|=|z||w|$．すなわち，積の長さ＝長さの積．
- zw は w の長さ $|w|$ を $|z|$ 倍し，さらに $\arg z$ 分回転させた点．記号で書くと，

$$\arg zw=\arg z+\arg w.$$

すなわち，積の偏角＝偏角の和．ただし，この等式は 360 度×整数回転分のズレを許す．

2 次方程式の解　実数係数の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を考える．このとき，$D=b^2-4ac\geq 0$ ならば解は実数

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

であり，$D<0$ ならば

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{|D|}}{2a}i$$

である．したがって，方程式は複素数の範囲で常に（重複もこめて）2 つの解をもつ．

練習 A　次の複素数を $z=x+yi$ の形になるまで計算し，図示せよ．

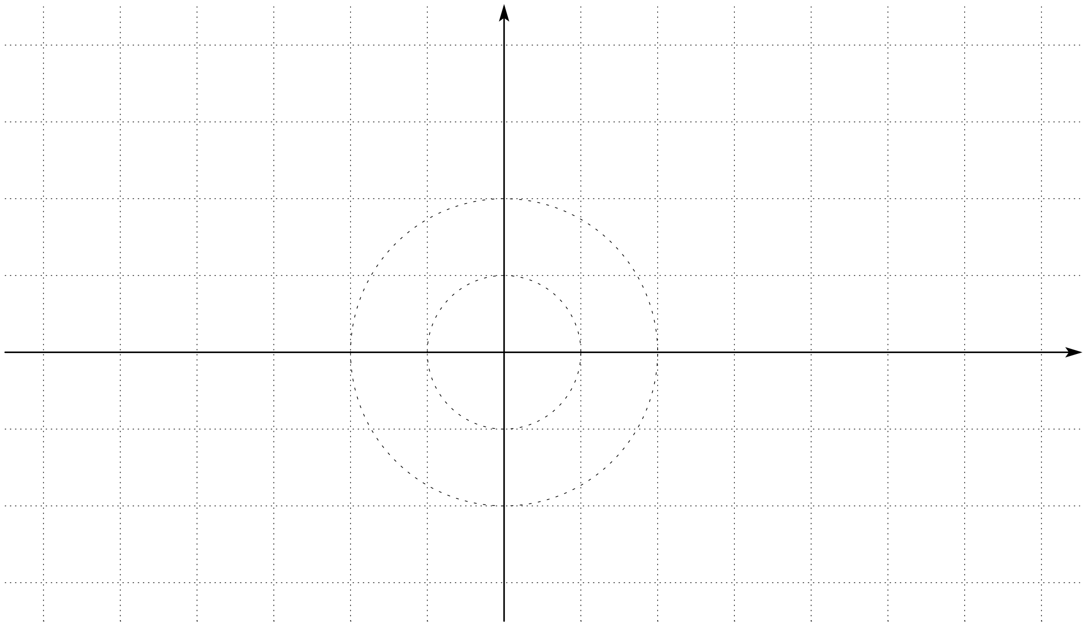
(1) i^3

(2) $(2+i)(2-i)$

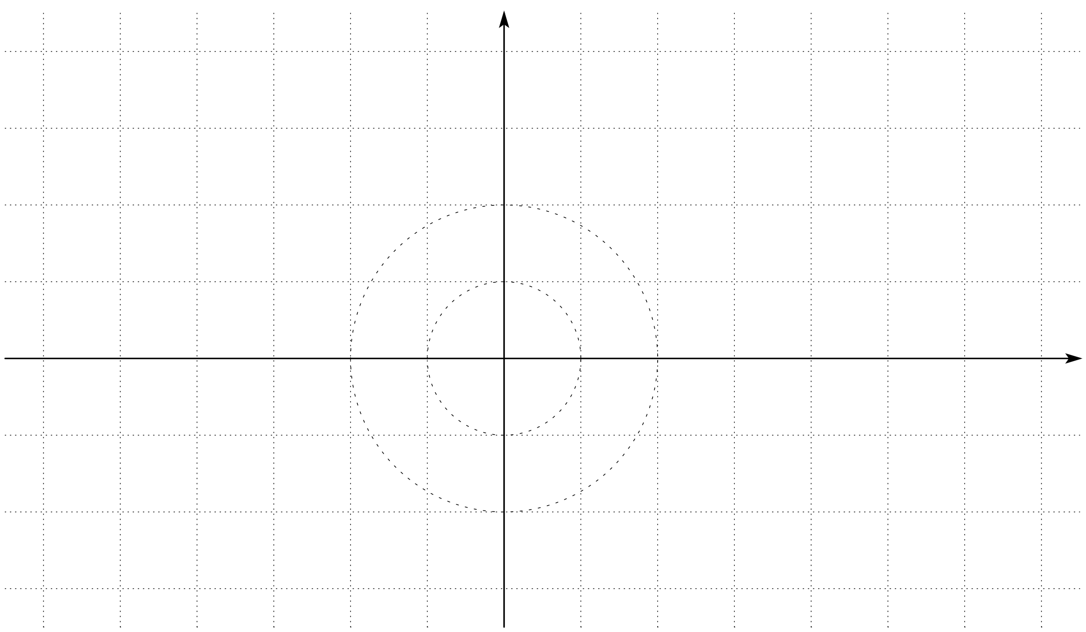
(3) $\left(\dfrac{i}{2}\right)^2$

(4) $\dfrac{1}{1+i}$

(5) $(-1+\sqrt{3}i)^3$



練習 B　$z = x+yi$ に対し，z^2 を図示せよ．また，z が原点の周りを一周した場合，$w = z^2$ は原点の周りを何周するか？



練習 C　以下の方程式を複素数の範囲で解け．もしくは図形的な考察により，解の複素平面上における位置を説明せよ．

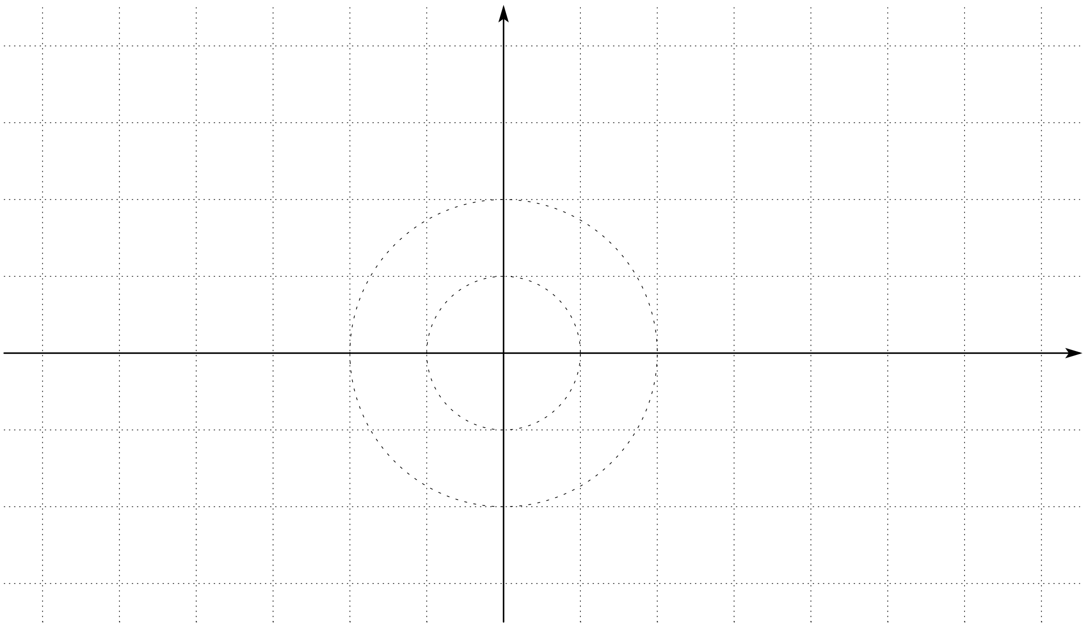
(1) $x^2 + 1 = 0$

(2) $z^2 + z + 1 = 0$

(3) $z^3 = 1$

(4) $z^4 = 1$

(5) $z^5 = 1$



練習問題の略解・ヒント　A: (1) $-i$ (2) 5 (3) $-\dfrac{1}{4}$ (4) $\dfrac{1-i}{2}$ (5) 8.

B: 積の定義より，$z^2 = z \cdot z$ は長さが $|z|^2$，実軸とのなす角が z のそれのちょうど 2 倍となる．したがって，z が原点の周りを 1 周する間に，$w = z^2$ は原点の周りを 2 周する．

C：(1) $\pm i$ (2) $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (3)$\Longleftrightarrow$ $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1) = 0$, 解は複素平面上の単位円上，1 を頂点のひとつに持つ正三角形の頂点たちである．同様に，(4), (5) の解は単位円上の正方形，5 角形の頂点たちである．

6 おわりに

この内容についてさらに学習したい人のために，いくつか参考文献等をあげておきます．
まず複素数，さらにすすんで複素関数の世界の入門書として，

(1) 志賀浩二『複素数 30 講』朝倉書店（1989）

(2) アールフォルス『複素解析』現代数学社（1982）

(3) 志賀啓成『複素解析学 I，II』培風館 (1998?)

(4) 谷口雅彦『もう一つの函数論入門』京都大学学術出版会 (2002)

などがあります．複素解析の教科書は数え切れないほどありますが，(2) は標準的な教科書です．(3) は II 巻の後半に複素力学系についての解説があります．(4) は複素関数論の教科書の体裁をとりながら複素力学系の入門的な解説をする，ユニークな本です．ちなみに「函数」というのは「関数」の古い書き方で，意味は同じです．

メビウス変換やそれに関連する非ユークリッド幾何（双曲幾何など）の入門書も数多くありますが，

(5) 谷口雅彦，奥村善英『双曲幾何学への招待』培風館（1996）

は複素数との関連が明確です．ただし，後半は研究者レベルの内容なので難しいと思います．他はこの本の巻末にある参考文献を参照すると良いでしょう．

複素力学系に関しては，

(6) 上田哲生，谷口雅彦，諸澤俊介『複素力学系序説』培風館（1995）

(7) 宇敷重広『フラクタルの世界–入門・複素力学系』日本評論社（1987）

(8) R.L.Devaney『カオス力学系入門・第 2 版（新訂版）』共立出版 (2003)

(9) デヴァニー『カオス力学系の基礎』アジソン・ウェスレイ (1997)

等があります．(6) はかなり専門向けです．(7) はＣＧが多く，見るだけでも楽しめる本です．(8) は力学系理論の入門書として，広く読まれている本です．(9) は，(8) の内容を数値実験の例とともに易しく解説した本です．(8)，(9) とも，後半が複素力学系にあてられています．

プログラムや CG について　講演で使用したプログラムは Web 上で公開しています．私のホームページ：

`http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/`

からリンクをたどってください．このテキスト自身もここからダウンロードできるようにする予定です．