第30章　3次元の微分・積分

これまでは2変数関数の微分積分を考えてきたが，一般の n 変数関数についてもまったく同様の定義や定理が成り立つ．

この章では，全体の「おさらい」もかねて，物理学などでの応用も多い3変数関数の微分積分について定義や定理，例題を集めてみた．いずれも2変数の場合から自然に類推できるものばかりであるから，一般の n 変数関数に拡張することも難しくない．

30.1　内積と外積

まず空間ベクトルの内積と，3次元ベクトル特有の積である，「外積」の性質をまとめておく．

定義　(内積と外積) 空間ベクトル

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

に対し，以下のように定める：

- $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**：

$$\boldsymbol{\overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_2} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

- $\vec{a}$ の**長さ**：

$$\boldsymbol{|\vec{a}| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

- $\vec{a}$ の**外積**：

$$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} := \left(\det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right)}$$
$$\boldsymbol{= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

例題 30.1 (内積と外積の性質) $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積と外積について，以下の性質を示せ．ただし，θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度とする．

(1) $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\theta.}$

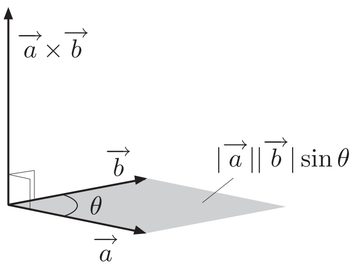
(2) $\boldsymbol{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\theta.}$ とくに，この値は $\vec{0}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a} + \vec{b}$ を頂点に

もつ平行四辺形の面積に等しい．

(3) $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ のとき，外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の両方に垂直．

解答のスケッチ (1) は平面ベクトルと同様．（余弦定理 $|\overrightarrow{a}|$ を用いる．高校の教科書を参照．）(2) は次の式変形による：

$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|^2 \\
=&(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
=&(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
=&|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 \\
=&|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\left(1 - \frac{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2}\right) \\
=&|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
=&|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\sin^2\theta.
\end{aligned}
$$



(3) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ と $\overrightarrow{b} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ を定義どおりに成分の値を用いて計算すると，ともに 0 となることが確認できる． ■

命題 30.1（内積一定の集合） 空間ベクトル $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$ と垂直な平面で $\overrightarrow{a}$ を通るものは

$$\left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{a}\right\}$$

と表される．また，すべての実数 k に対し，集合

$$E_k = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{x} = k\right\}$$

は $\overrightarrow{A}$ に垂直な平面である．

解答． $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{a}$ がそのような平面にあることの必要十分条件は，$\overrightarrow{A} \perp (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$．よって $\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}) = 0$ であればよい．

また，与えられた実数 k に対し，$\overrightarrow{a_k} := k\overrightarrow{A}/|\overrightarrow{A}|^2$ と定めると，$k = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{a_k}$ を満たす．よって $E_k = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{a_k}\right\}$ と表される． ■

30.2　全微分と偏微分

以下，3 変数関数 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ を考える[*1]．以下，表記を簡単にするために，ベクトル変数 $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ を用いて $y = f(\overrightarrow{x})$ とも表すことにする．

連続性．　まずは関数の連続性を定義する．

定義　(関数の極限と連続性) 関数 $y = f(\overrightarrow{x})$ とベクトル $\overrightarrow{a}$ に対し，$|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}| \to 0$ のとき $f(\overrightarrow{x}) \to A$ となる定数 A が存在するとき，

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x}) = A$$

と表す．以後は $|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}| \to 0$ のかわりに $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}$ とも表す．

また，$\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}$ のとき $f(\overrightarrow{x}) \to f(\overrightarrow{a})$ であるとき，関数 $f(\overrightarrow{x})$ は $\overrightarrow{a}$ で**連続**であるという．

全微分可能性．　関数が「全微分可能」であるとは，1 次関数で近似できることであった．$\overrightarrow{A} = (A_1, A_2, A_3)$ をベクトル定数，B を実数の定数とするとき，3 変数関数の 1 次関数は

$$y = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + B = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{x} + B$$

の形となる．この事実を念頭において，次のように定義する：

定義　(関数の全微分可能性) 関数 $y = f(\overrightarrow{x})$ が $\overrightarrow{a}$ において**全微分可能**であるとは，あるベクトル定数 $\overrightarrow{A}$ が存在して，$|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}| \to 0$ のとき

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}) + o(|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}|) \tag{30.1}$$

と表されることをいう．このとき，ベクトル $\overrightarrow{A}$ を関数 $y = f(\overrightarrow{x})$ の**勾配ベクトル**とよび，$\overrightarrow{A} = \nabla f(\overrightarrow{a})$ とも表す．

例題 30.2 (全微分可能性) 関数 $w = f(x, y, z) = xyz$ は $(1, -1, 2)$ で全微分可能であることを示せ．また，この点での勾配ベクトルを求めよ．

[*1] もちろん $w = f(x, y, z)$ のように表してもよいが，こちらのほうが n 変数の場合を類推しやすい．

解答.　$\varDelta x = x-1$，$\varDelta y = y+1$，$\varDelta z = z-2$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (1+\varDelta x)(-1+\varDelta y)(2+\varDelta z) \\ &= -2 - 2\varDelta x + 2\varDelta y - \varDelta z + \underline{2\varDelta x\varDelta y + \varDelta y\varDelta z - \varDelta z\varDelta x + \varDelta x\varDelta y\varDelta z} \\ &= f(1,-1,2) + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varDelta x \\ \varDelta y \\ \varDelta z \end{pmatrix} + \underline{o(\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2})}. \end{aligned}$$

ただし，下線部の計算では $|\varDelta x|$，$|\varDelta y|$，$|\varDelta z|$ がそれぞれ $\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2}$ よりも小さいことを用いた．これをベクトルの記号に直せば式 (30.1) の形となるので，全微分可能である．とくに，勾配ベクトルは $(-2,2,-1)$．■

定義　（関数の偏微分可能性） 関数 $y = f(\overrightarrow{x}) = f(x_1,x_2,x_3)$ が $\overrightarrow{a} = (a_1,a_2,a_3)$ において**偏微分可能**であるとは，各 $k = 1,2,3$ に対し極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1+h,a_2,a_3) - f(a_1,a_2,a_3)}{h} = A_1,$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,a_2+h,a_3) - f(a_1,a_2,a_3)}{h} = A_2,$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,a_2,a_3+h) - f(a_1,a_2,a_3)}{h} = A_3$$

がそれぞれ存在することをいう．A_k はそれぞれ（x_k に関する）**偏微分係数**とよばれる．

また，関数 $y = f(\overrightarrow{x})$ が定義域上の各点で偏微分可能であるとき，各 $\overrightarrow{x}$ に x_k に関する偏微分係数を対応させる関数を $y = f(\overrightarrow{x})$ の x_k に関する**偏導関数**とよび，$\boldsymbol{\dfrac{\partial y}{\partial x_k}}$，$\boldsymbol{y_{x_k}}$，$\boldsymbol{f_{x_k}(\overrightarrow{x})}$，$\boldsymbol{f_{x_k}(x_1,x_2,x_3)}$，$\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{x})}$，$\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,x_2,x_3)}$ などと表される．

「n 階偏導関数」，「C^n 級関数」も 2 変数関数の場合と同様に定義される．

例題 30.3（全微分可能性と連続性・偏微分可能性） 関数 $y = f(\overrightarrow{x})$ がある点 $\overrightarrow{a}$ で全微分可能であれば，連続であり，偏微分可能でもあることを示せ．とくに，勾配ベクトルは

$$\boldsymbol{\nabla f(\overrightarrow{a}) = (f_{x_1}(\overrightarrow{a}), f_{x_2}(\overrightarrow{a}), f_{x_3}(\overrightarrow{a}))} \tag{30.2}$$

と表されることを示せ．

解答.　式 (30.1) より明らかに $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}$ のとき $f(\overrightarrow{x}) \to f(\overrightarrow{a})$．よって連続である．また，$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + (h,0,0)$ として $h \to 0$ とすれば，$f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) = A_1 h + o(h)$ となる．これは $f_{x_1}(\overrightarrow{a}) = A_1$ を意味する．他の成分も同様である．$\nabla f(\overrightarrow{a}) = (A_1,A_2,A_3)$ より勾配ベクト

ルの表現を得る．■

次の事実も 2 変数の場合と同様である（証明略）

定理 30.2 (C^1 級関数と全微分可能性，偏微分の順序交換) 関数 $y = f(\overrightarrow{x})$ が定義域上で C^1 級であれば，全微分可能である．また，C^2 級であれば 2 階偏導関数について偏微分の順序を交換してよい．すなわち，$f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1}$ 等が成り立つ．

以下では話を簡単にするため，扱う関数は C^∞ 級であり，すべて好きなだけ微分（偏微分）できるものとしよう．

例題 30.4 (合成関数の微分) 曲線 $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(t)$ に対し，関数 $y = f(\overrightarrow{x})$ との合成関数 $F(t) = f(\overrightarrow{x}(t))$ の微分は勾配ベクトルと速度ベクトルの内積

$$\boldsymbol{F'(t) = \nabla f(\overrightarrow{x}(t)) \cdot \overrightarrow{x}'(t)}$$

で与えられることを示せ：ただしダッシュ（$'$）は t による微分 $\dfrac{d}{dt}$ を表す．

解答のスケッチ． $t \to t_0$ のとき $\overrightarrow{x}(t) = \overrightarrow{x}(t_0) + \overrightarrow{x}'(t_0)(t - t_0) + \overrightarrow{E}(t)$（ただし $\overrightarrow{E}(t)$ の各成分は $o(|t - t_0|)$）と表される．式 (30.1) より $\overrightarrow{x}(t) \to \overrightarrow{x}(t_0)$ のとき

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x}(t)) - f(\overrightarrow{x}(t_0)) &= \nabla f(\overrightarrow{x}(t_0)) \cdot (\overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{x}(t_0)) + o(|\overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{x}(t_0)|) \\ &= \nabla f \cdot (\overrightarrow{x}(t_0)) \cdot \overrightarrow{x}'(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|). \end{aligned}$$

これは題意の等式を意味する．■

30.3　テイラー展開

3 変数関数のテイラー展開を記述するために，新しい記号を導入しよう．

$y = f(\overrightarrow{x})$ に対し，2 階の偏導関数 $f_{x_ix_j}(\overrightarrow{x})$ を $f_{ij}(\overrightarrow{x})$ あるいは f_{ij} と略記する．このとき，行列

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$$

を**ヘッセ行列**とよび，$Hf(\overrightarrow{x})$ と表す[*2]．また，ベクトル $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ および

[*2] 定理 30.2 より，実際は $f_{12} = f_{21}$，$f_{23} = f_{32}$，$f_{31} = f_{13}$，が成り立つ．すなわちヘッセ行列は，線形代数の言葉でいうところの「対称行列」になっている．

$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ に対し，行列としての積

$$(u_1\ \ u_2\ \ u_3)\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

で定まる実数を $Hf(\overrightarrow{x})[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ と表すことにする[*3].

定理 30.3 (3 変数のテイラー展開) $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ のまわりで定義された関数 $f(\overrightarrow{x})$ に対し，$\overrightarrow{x}$ が $\overrightarrow{a}$ に十分近いとき，これら 2 つのベクトルを内分するベクトル $\overrightarrow{a'}$ が存在し，$\overrightarrow{\Delta x} := \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$ と表すとき，2 次**テイラー展開**

$$\boldsymbol{f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{\Delta x}) = f(\overrightarrow{a}) + \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{\Delta x} + \frac{1}{2}Hf(\overrightarrow{a'})[\overrightarrow{\Delta x}, \overrightarrow{\Delta x}]}$$

が成り立つ．また，$\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}$ のとき 2 次**漸近展開**

$$\boldsymbol{f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{\Delta x}) = f(\overrightarrow{a}) + \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{\Delta x} + \frac{1}{2}Hf(\overrightarrow{a})[\overrightarrow{\Delta x}, \overrightarrow{\Delta x}] + o(|\Delta x|^2)}$$

が成り立つ．

このままではわかり辛いから，具体例を見てみよう．

例題 30.5 (多項式のテイラー展開) $w = f(x, y, z) = xyz$ の点 $(1, -1, 2)$ における 2 次のテイラー展開と漸近展開を計算せよ．

解答 勾配ベクトルは $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (yz, zx, xy)$，ヘッセ行列は $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$ である．$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x - 1, y + 1, z - 2)$ とおくとき，ある $c \in (0, 1)$ が存

[*3] 1 行 3 列× 3 行 3 列× 3 行 1 列は 1 行 1 列.

在して[*4]

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= f(1,-1,2) + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Delta x \ \ \Delta y \ \ \Delta z) \begin{pmatrix} 0 & 2 + c\Delta z & -1 + c\Delta y \\ 2 + c\Delta z & 0 & 1 + c\Delta x \\ -1 + c\Delta y & 1 + c\Delta x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\
&= -2 - 2\Delta x + 2\Delta y - \Delta z + 2\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta z - \Delta z\Delta x + 3c\Delta x\Delta y\Delta z.
\end{aligned}
$$

同様に漸近展開は

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= f(1,-1,2) + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Delta x \ \ \Delta y \ \ \Delta z) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + o(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \\
&= -2 - 2\Delta x + 2\Delta y - \Delta z + 2\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta z - \Delta z\Delta x + o(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

30.4 極値問題

条件付極値問題を解いてみよう．縦・横・高さの長さの和が一定の箱の体積を最大化する問題（第 24 章）を解いてみる：

例題 30.6（箱の大きさの最大化） $x,y,z \geqq 0$，$x+y+z=1$ という条件下で関数 $V(x,y,z) = xyz$ を最大にする (x,y,z) を求めよ．

解答その 1． 相加・相乗平均の不等式より，$1 = x+y+z \geqq 3\sqrt[3]{xyz}$．よって $xyz \leqq 1/27$．等号が成立するのは $x=y=z=1/3$ のときのみである．これは問題の条件を満たしているので，求める (x,y,z) は $(1/3,1/3,1/3)$． ■

解答その 2． 条件 $x,y,z \geqq 0$，$x+y+z=1$ を満たす集合は有界閉集合であるから，その上での連続関数 $V = xyz$ は最大値と最小値をもつ[*5]．明らかに $V \geqq 0$ だが，最小値 0 は $x=0$，$y=0$，$z=0$ のいずれかが成り立つときに限る．x,y,z がいずれも正の値のとき $V>0$ であるから，このときに最大値が実現される．

$z = 1-(x+y)$ より，$V = xy(1-x-y) = xy - x^2y - xy^2$．偏導関数は $V_x = y(1-2x-y), V_y = x(1-2y-x)$ なので，これらが同時に 0 となる (x,y) は $(0,0)$，$(0,1)$，

[*4] 例題 30.2 での計算より，この場合，$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ に依存せず $c = 1/3$ だとわかる．

[*5] 「有界閉集合」の定義も 2 次元の場合と同様である．その上の連続関数が最大値と最小値を持つことも知られている．

$(1,0)$, $(1/3,1/3)$. $V>0$ となるのは $(1/3,1/3)$ のときだけである．判別式を確認すると，$V_{xx}V_{yy}-(V_{xy})^2=(-2y)(-2x)-(1-2x-2y)^2=1/3>0$, $V_{xx}=-2/3<0$ となるので，極大値をとる．ゆえに最大値を与える (x,y,z) は $(1/3,1/3,1/3)$. ■

解答その３. 解答その２と同様の議論により，$x,y,z>0$ の場合を考えればよい．$F(x,y,z)=x+y+z-1$ とおく．最大値を与える点 (a,b,c) では関数 $F(x,y,z)$ の高さ 0 の等高線と $V(x,y,z)$ のある高さの等高線が接することになる．そこでは勾配ベクトルが平行となるので，ある定数 λ が存在して，

$$\nabla V(a,b,c)=\lambda\nabla F(a,b,c) \iff (bc,ca,ab)=\lambda(1,1,1)$$

が成り立つ．条件 $a+b+c=1$ とあわせて方程式を解くと，
(1) $\lambda=1/9$ かつ $(a,b,c)=(1/3,1/3,1/3)$
(2) $\lambda=0$ かつ $(a,b,c)=(1,0,0)$
(3) $\lambda=0$ かつ $(a,b,c)=(0,1,0)$
(4) $\lambda=0$ かつ $(a,b,c)=(0,0,1)$
となるが，$V(a,b,c)>0$ となるのは (1) のみである．よって $(x,y,z)=(1/3,1/3,1/3)$. ■

30.5　3 重積分

xyz 空間の直方体

$$D:=\{(x,y,z)\mid a_1\leqq x\leqq b_1,\ a_2\leqq y\leqq b_2,\ a_3\leqq z\leqq b_3\}$$

を 3 次元の**区画**とよび，記号 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ で表すことにする．このような区画上の関数 $w=f(x,y,z)$ について，積分を考えよう．

アイディアは 2 変数の場合と同様である．

- 区間 $[a_1,b_1]$ を l 分割する点 $a_1=x_0<x_1<\cdots<x_l=b_1$,
- 区間 $[a_2,b_2]$ を m 分割する点 $a_2=y_0<y_1<\cdots<y_m=b_2$,
- 区間 $[a_3,b_3]$ を n 分割する点 $a_3=z_0<z_1<\cdots<z_n=b_3$,

を選び，計 lmn 個の小区画

$$D_{ijk}:=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]\times[z_k,z_{k+1}]$$

から代表点 $(x^*_{ijk},y^*_{ijk},z^*_{ijk})$ を選び，**リーマン和**

$$\sum_{i,j,k} f(x^*_{ijk},y^*_{ijk},z^*_{ijk})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})(z_k-z_{k-1})$$

（ただし $1\leqq i\leqq l-1$, $1\leqq j\leqq m-1$, $1\leqq k\leqq n-1$）を考える．各区間の分割の最大幅が 0 に近づくように分割点を増やしていくとき，（分割点の取り方に依存せず）

ある実数 I が存在してリーマン和が I に近づくならば，関数 $f(x,y,z)$ は区画 D 上で**積分可能**であるといい，

$$I = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

と表す．

実際の計算には，たとえば次の公式が使える：

定理 30.4 (3 変数の累次積分) 関数 $f(x,y,z)$ が区画 $D = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ 上で連続であれば積分可能であり，次の等式が成り立つ：

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

右辺を**累次積分**とよぶ．この定理の条件下では，積分の順序を交換してもよい．

例題 30.7 (3 重積分の計算) $D = [0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ とするとき，$\iiint_D (x+y+z)\,dxdydz$ を求めよ．

解答． 定理 30.4 より，

$$\begin{aligned}
\iiint_D (x+y+z)\,dxdydz &= \int_0^a\left(\int_0^b\left(\int_0^c (x+y+z)\,dz\right)dy\right)dx \\
&= \int_0^a\left(\int_0^b\left[(x+y)z+\frac{z^2}{2}\right]_0^c dy\right)dx \\
&= \int_0^a\left(\int_0^b\left(cx+cy+\frac{c^2}{2}\right)dy\right)dx \\
&= \int_0^a\left[cxy+\frac{cy^2}{2}+\frac{c^2y}{2}\right]_0^b dx \\
&= \int_0^a\left(bcx+\frac{b^2c}{2}+\frac{bc^2}{2}\right)dx \\
&= \left[\frac{bcx^2}{2}+\frac{bc(b+c)x}{2}\right]_0^a \\
&= \frac{abc}{2}(a+b+c).
\end{aligned}$$

■

区画以外の積分． 関数 $f(x,y,z)$ の定義域 D が区画でない有界閉領域であるとき，D を含む区画 $\tilde{D}$ をとり，D の外側では関数 $f(x,y,z)=0$ とおくことで，関数 $f(x,y,z)$

を区画 $\tilde{D}$ 上の関数と思うことができる．そのような関数が区画 $\tilde{D}$ 上で積分可能であるとき，$f(x,y,z)$ は D 上の積分可能であるとみなし，$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz :=$ $\iiint_{\tilde{D}} f(x,y,z)\,dxdydz$ として定義する．

例題 30.8 (区画以外での 3 重積分) $D = \{(x,y,z) \mid x,y,z \geqq 0, x+y+z \leqq \pi\}$ とするとき，$\iiint_D \sin(x+y+z)\,dxdydz$ を求めよ．

解答. 2 変数の場合と同様に，累次積分に置き換えて計算する．

$$\begin{aligned}
\iiint_D (x+y+z)\,dxdydz &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi-x} \left(\int_0^{\pi-x-y} \sin(x+y+z)\,dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi-x} \Big[-\cos(x+y+z) \Big]_0^{\pi-x-y} dy \right) dx \\
&= \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi-x} (1-\cos(x+y))\,dy \right) dx \\
&= \int_0^\pi \Big[1+-\cos(x+y) \Big]_0^{\pi-x} dx \\
&= \int_0^\pi (\pi - x - \sin x)\,dx = \frac{\pi^2}{2} - 2
\end{aligned}$$
■

体積の定式化.　「面積」の概念と同様に，「体積」も重積分を用いることで定式化できる．

定義　(空間内の集合の体積) $\mathbb{R}^3$ 内の集合 D に対し定数関数 $f(x,y,z)=1$ が D 上で積分可能であるときその**体積**を $\mathrm{Vol}(D) := \iiint_D dxdydz$ で定める．

第 28 章で 2 変数関数の「グラフに囲まれる部分の体積」を重積分で定義した．次の公式は，それを正当化するものである（証明略）：

定理 30.5 (曲面ではさまれた部分の体積) xy 平面上の領域 D 上の連続関数 $\phi_1(x,y)$ と $\phi_2(x,y)$ が $\phi_1(x,y) \geqq \phi_2(x,y)$ を満たすとき，それらの 3 次元グラフで囲まれる部分

$$K = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, \phi_1(x,y) \leqq z \leqq \phi_2(x,y)\}$$

の体積は

$$\mathbf{Vol}(\boldsymbol{K}) = \iint_{\boldsymbol{D}} \{\boldsymbol{\phi_2(x,y) - \phi_1(x,y)}\}\,\boldsymbol{dxdy}$$

で与えられる．

30.6　変数変換とヤコビ行列

変数 x, y, z がそれぞれ変数 u, v, w の C^1 級関数であるとき，変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$ を考えることができる．このとき，

$$\boldsymbol{D\Phi = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}}$$

を**ヤコビ行列**とよぶ．また，その行列式

$$\boldsymbol{\det D\Phi = x_u y_v z_w + x_v y_w z_u + x_w z_v y_u - x_w y_v z_u - x_v y_u z_w - x_u y_w z_v}$$

を**ヤコビアン**とよぶ．2 変数の場合と同様に，変数変換は局所的に「ヤコビ行列による 1 次変換」によって近似される．また，ヤコビアンの絶対値はその 1 次変換による「局所的な体積の拡大率」となる．

積分に関しては，次の公式が成り立つ（証明略）：

定理 30.6 (3 変数関数の積分の変数変換) 変数変換 $(x, y, z) = \Phi(u, v, w)$ によって領域 E が領域 D に対応するとき，

$$\boldsymbol{\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydy = \iiint_E f(\Phi(u, v, w))|\det D\Phi|\, dudvdw.}$$

例題 30.9 (1 次変換) $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leqq x + y + z \leqq 1, 0 \leqq y + z \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1\}$ で表される平行 6 面体の体積を求めよ．

解答． $\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dxdydz$ を計算すればよい．$u = x + y + z$, $v = y + z$, $w = z$ とおくと，変数変換 $(x, y, z) = \Phi(u, v, w) = (u - v, v - w, w)$ が定まる．このときヤコビ行列は

$$D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

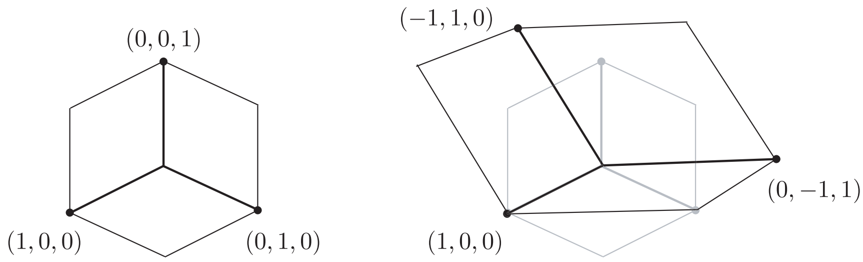
である．また，ヤコビアンは $\det D\Phi = 1$.

このとき，Φ は区画 $E=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ を D に写すので，求める体積は

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(K) = \iiint_D 1\cdot dxdydz &= \iiint_E 1\cdot|D\Phi|\,dudvdw \\ &= \int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^1 1\cdot dw\right)dv\right)du \\ &= 1.\end{aligned}$$

■

注意（D の形）．　この平行 6 面体 D が実際にどのような形をしているのか，式から想像するのは意外と難しい．線形代数で学ぶ「1 次変換」の考え方に慣れていれば，E のヤコビ行列 $D\Phi$ による像としてある程度の形がわかる．具体的にいえば，D とはベクトル $(1,0,0),(-1,1,0),(0,-1,1)$ によって張られる平行 6 面体である．



例題 30.10 (空間の極座標変換) 空間の座標変換

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix}r\\\theta\\\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\sin\theta\cos\phi\\ r\sin\theta\sin\phi\\ r\cos\theta\end{pmatrix}$$

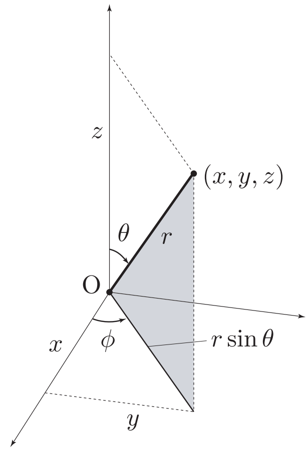
を用いて，半径 $R>0$ の球体の体積を求めよ．

解答．　$D=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqq R^2\right\}$ の体積は $\mathrm{Vol}(D)=\iiint_D dxdydz$ で与えられる．空間の極座標変換により，$r\theta\phi$ 空間の区画 $E=[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ が D に写る．ヤコビ行列は

$$D\Phi = \begin{pmatrix}x_r & x_\theta & x_\phi\\ y_r & y_\theta & y_\phi\\ z_r & z_\theta & z_\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\sin\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

であり，ヤコビアンは $\det D\Phi = r^2\sin\theta$．よって求める体積は

$$\begin{aligned}
\iiint_D 1 \cdot dxdydz &= \iiint_E 1 \cdot |r^2 \sin\theta|\, drd\theta d\phi \\
&= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta d\phi \right) d\theta \right) dr \\
&= \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{R^2}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$



別解（変数変換を用いない）.　累次積分を用いて，

$$\begin{aligned}
\iiint_D 1 \cdot dxdydz &= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dy \right) dx
\end{aligned}$$

ここで括弧の中の積分は半径 $\sqrt{R^2-x^2}$ の円板の面積なので，上の式に続けて

$$= \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad \blacksquare$$

30.7　演習問題

問 30.1 (外積) 空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ に対し，以下を示せ.

(1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
(2) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{b}$
(3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
(4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

問 30.2 (テイラー展開) 関数 $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ の原点における 2 次のテイラー展開を求めよ.

問 30.3 (極値問題：点と平面の距離) 条件 $ax + by + cz + d = 0$ のもと，関数 $f(x, y, z) = (x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2$ の最小値を求めよ.

問 30.4 (極値問題) 条件 $xy + yz + zx = 3$ のもと，関数 $f(x, y, z) = xyz$ の極値を求めよ.

問 30.5 (3 重積分) $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geqq 0,\ x + y + z \leqq 1\}$ のとき，積分 $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{(x + y + z + 1)^2}\,dxdydz$ の値を求めよ．（答． $(\log 2)/2 - 5/16$）

問 30.6 (3 重積分，極座標変換) $D = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2\right\}$ のとき，積分 $\displaystyle\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$ の値を求めよ．（答．πR^4）