

『微分積分 — 1 変数と 2 変数』に関する雑記

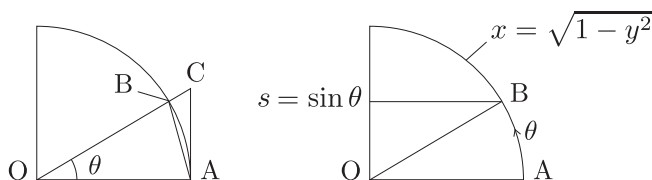
このノートは川平友規著『微分積分 — 1 変数と 2 変数』（日本評論社，2015 年 7 月刊）へのコメントをまとめたものです（ver.20200115）*1.

◎ $\frac{\sin x}{x}$ の極限計算は循環論法？—平面図形の面積に関する注意

本書では有名な極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(23 ページ，下から 3 行目．3 章の公式 3.2(4) の証明を書かなかった．高校数学でも学ぶ有名な事実であり，証明は高校の教科書なんかにもよく載っているから，ひとまずそちらをご参照ください，というつもりなのだが，じつはもうひとつ理由がある．高校で教えられる証明（大学の微積の教科書も同様の証明を採用することが多い）にはやや不明瞭な部分があり，「図形的な説明」に近いのである．また，しばしば「証明が循環論法になっている」と言われている．どこが「おかしい」のか，ちょっと確認してみよう．



よくある証明. $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$ （偶関数）より， $0 < x \rightarrow +0$ の場合を考えれば十分．まず図の左側のような状況を考える．ただし， $O = (0, 0)$ ， $A = (1, 0)$ ， $B = (\cos \theta, \sin \theta)$ ， $C = (1, \tan \theta)$ である．このとき

$$\begin{aligned} & \text{三角形 OAB} \subset \text{扇形 OAB} \subset \text{三角形 OAC} \\ \Rightarrow & [\text{三角形 OAB の面積}] < [\text{扇形 OAB の面積}] < [\text{三角形 OAC の面積}] \end{aligned}$$

*1 謝辞．ご質問等いただいたみなさま，ありがとうございました．

であるから、

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$x \rightarrow +0$ のとき $\cos x \rightarrow 1 - 0$ であるから、「はさみうちの原理」より $(\sin x)/x \rightarrow 1$.

■

どこが問題なのか？ 一見何の問題もないように見えるが、

- (a) 平面図形の「面積」の定義が明確に定義できているか？
- (b) その上で、「三角形の面積」、「扇型の面積」が正しく計算できているか？

という 2 つの段階に曖昧な部分がある。

もちろん、面積をつかわない証明も複数あるし、避けて通れる程度の問題である。本書の範囲でも、面積を使わずに、弧長を用いた議論により $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を証明できるので、それはあとで解説したいと思う。

(a) : 面積の概念について。 そもそも平面図形の「面積」をどう定義すればよいのだろうか。高校までの数学では直観的な説明のみで、きちんとした定義は与えられていないから、その時点で「面積」を用いた証明は適切ではない、という意見もある。

平面図形の「面積」は、厳密には「2次元ジョルダン測度」や「2次元ルベグ測度」といった概念を用いて定義される*2。実質的には、与えられた図形(集合)に長方形(その面積は「底辺×高さ」として定義される)を細かくしながらタイルのように敷き詰めていき、長方形たちの面積和の極限として得られる値である*3。ちなみに本書では、件の極限よりずいぶん後の 213 ページにおいて、平面集合の面積の定義を「定数関数 1 の重積分」として与えた。これは「2次元ジョルダン測度」に相当する。2次元の重積分は「関数分の重みつき面積」なので、その定義には自然と面積の定義が内包されるのである。

*2 志賀浩二「ルベグ積分 30 講」(朝倉書店)などを参照。「面積の測れない集合」も存在するが、三角形や扇型はまったく問題なく、公式どりの面積値となる。

*3 このとき、長方形の各辺は縦軸か横軸に平行でなくてはならない。

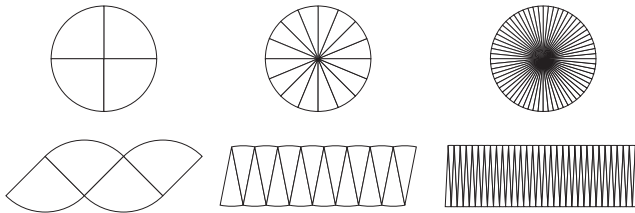
いやまて、扇形の面積は「半径×弧長÷2」、三角形の面積は「底辺×高さ÷2」、といった具合に、個別に公式で定義できるのだから、それでいいんじゃないか、という意見もあるだろう。結果的にはそれでもいいのだが、先ほどの「よくある証明」では

$$A \subset B \text{ ならば } [A \text{ の面積}] \leq [B \text{ の面積}].$$

(ただし、 A と B は一方が三角形で、もう一方が扇型.)

という性質が本質的に使われている。より一般に、「集合の包含関係が面積の大小関係に正しく反映している」ことが用いられているわけだが、図形ごとに面積を定義していると、この点が処理できない（できないことはないかもしれないが、少なくとも自明ではない）。結局は、面積（測度）の一般論を援用することになるのである。

(b) : 「三角形の面積」・「扇型の面積」について。 では、仮に面積の定義が適切になされたとして、三角形や扇形の面積をどう定義すればよいのだろうか。「循環論法(?)」という懸念は扇型の面積を計算するときが発生するので、ここでは扇型の面積について考えてみよう。中学で学ぶ公式「半径×弧長÷2」は、円（中身を含む）の面積を求める「アルキメデスの方法」に基づいて説明される（下の図、扇型についてもまったく同じアイデアが適用できる）。



しかし、以下のような問題がある。

- 弧長の定義は極限（より一般には、積分）を用いないと定義できない。
- 図では円を複数の扇型に分割し、回転させ、平行移動させているが、
 - － 平行移動しても図形の面積は変わらない。
 - － 回転させても図形の面積は変わらない

という性質は自明ではなく、証明が必要である*4.

- それを認めたとしても、「図形の極限」のような概念が必要であり、何かしらの厳密な定式化を要する.

これらの問題を理論的に克服することはできるが、高校や大学初年級の教科書でそこまでこだわるのは適切ではないだろう.

一方、高校の「数 III」までに学ぶ微分積分学の枠内では「関数のグラフで囲まれた部分の面積」(本書 220 ページ, 命題 26.2 参照) が計算できるので, これを用いて [扇形 OAB の面積] の値を計算することができる (ただし, 高校数学では「関数のグラフで囲まれた部分の面積」の定義と存在を暗黙のうちに認めている).

たとえば, この場合は線分 OB をグラフにもつ 1 次関数 $y = (\tan \theta)x$ の断片と $y = 0$ のグラフが囲む直角三角形と, 弧 BA をグラフにもつ関数 $y = \sqrt{1-x^2}$ の断片と $y = 0$ のグラフが囲む部分の面積和として計算する. 具体的には, 次のような積分となる:

$$\begin{aligned} \text{[扇形 OAB の面積]} &= \int_0^{\cos \theta} (\tan \theta)x \, dx + \int_{\cos \theta}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \\ &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} + \int_{\theta}^0 \sin t(-\sin t) \, dt \\ &= \frac{\sin 2\theta}{4} + \int_0^{\theta} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt \end{aligned}$$

あとの計算は省略するが, この積分の計算を遂行するには $(\sin x)' = \cos x$ という微分公式を用いることになる (本書 53 ページ, 公式 6.5). では, この微分はどう計算するのか. じつは本書ではあえて書かなかったのだが, 多くの教科書では加法定理を

*4 平行移動の場合は「敷き詰める長方形」をそのまま平行移動させればいいので面積の不変性は自明だが, 回転の場合は長方形も回転してしまうので自明とはいえない. 「2次元ジョルダン測度」や「2次元ルベーグ測度」の理論においては, これらの性質も厳密に証明される

用いて

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \sin x \frac{-2 \sin^2(h/2)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \\ &= -\sin x \left(\frac{\sin(h/2)}{h/2} \right)^2 \cdot \frac{h}{2} + \cos x \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

と変形できることから、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$ を用いて (!)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

と結論する。したがって、[扇形 OAB の面積] を計算する過程で証明したかった極限が暗に使われているのではないか、「循環論法ではないのか」という懸念が生じるわけである。

「循環論法」としないために：本書の立場での解答。 上の計算ではわざと「循環論法」の落とし穴に落ちてみせたが、ちゃんとした筋道をたどればこの計算も正当化でき、「循環論法」にはならない。じつは、件の極限を用いずに、微分の公式 $(\sin x)' = \cos x$ が証明できるのである。

そのためには、まず角度を測る「ラジアン」の定義（弧長の定義が必要）、さらには三角関数の定義にまで立ち帰るしかない。ラジアン角とは、「点 O を中心とする単位円周上の点 A から左回りに円周上を長さ θ 進んだ点を B とするとき、角 AOB を θ ラジアンとよぶ」ものであった。すなわち、「単位円周上の点 A から左回りに円周上を長さ θ 進んだ点を B」が決まらないと話にならない。すなわち、「円弧の長さ」がまず計算できなくてはならないのである。本書では 11 章で、「(滑らかな) 曲線の長さ」を積分の形で定義した。とくに、定理 11.4 (100 ページ) では「グラフの長さ」の計算式を与えている*5。単位円の定義式 $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ (原点との距離は 1) より、 $x \geq 0$ を満たす半円 H は y の関数 $x = f(y) = \sqrt{1 - y^2}$ のグラフとして表現できる。(先ほどの図の右側は、そのさらに上半分を図示したものである) いま、点 O と A の

*5 より一般には、「曲線上の点を順に結んで得られる折れ線の長さの上限」として定義する。

座標がそれぞれ $(0, 0)$, $(1, 0)$ で与えられており, x 軸から高さ $s \in (-1, 1)$ の場所にある半円 H 上の点 $(\sqrt{1-s^2}, s)$ が点 B であったとしよう. このとき, 弧 AB の長さ $L(s)$ は

$$L(s) = \int_0^s \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

である. 被積分関数は $-1 < y < 1$ の範囲でつねに正であるから, $L(s)$ は s の関数として, $L(0) = 0$ かつ $-1 < s < 1$ のとき単調増加な関数である*⁶. とくに $\theta = L(s)$ のとき, 角 AOB にあたる回転量を「 θ ラジアン」と呼び, B の x 座標を $\cos \theta$, B の y 座標を $\sin \theta$ と定義するのであった (本書 40 ページ, 5.2 節)*⁷ *⁸.

さてこの場合, $s = \sin \theta$ (B の y 座標) である. 一方, 関数 $\theta = L(s)$ は $-1 < s < 1$ で単調増加であるから, 単調増加な逆関数 $s = L^{-1}(\theta)$ が存在する (本書 33 ページ, 命題 4.4). すなわち, $L^{-1}(\theta) = \sin \theta$ であり, これは θ の単調増加な関数である. さらに, 微積分の基本定理 (本書 87 ページ, 定理 10.2) より, $\theta = L(s)$ は微分可能であり, $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} > 0$ を満たす*⁹. よって定理 6.3 (逆関数の微分, 本書 52 ページ) より逆関数 $s = L^{-1}(\theta) = \sin \theta$ も微分可能であり,

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{1-s^2} \iff \frac{d}{d\theta} \sin \theta = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta$$

が成り立つ. すなわち $(\sin x)' = \cos x$ が示された. これで, 積分による扇型の面積の計算が正当化されたわけである.

それだけではない. 微分係数の定義から,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(0+h) - \sin 0}{h} = \cos 0 = 1$$

が成り立つ. 最初から, 面積など計算しなくてもよかったのである.

*⁶ $-1 < s < t < 1$ のとき $L(t) - L(s) = \int_s^t (1-y^2)^{-1/2} dy > 0$. ちなみに, 関数 $L(s)$ の $s \rightarrow 1-0$ としたときの極限の 4 倍が円周率 π の定義である.

*⁷ すなわち, 三角関数の定義には弧長の定義が必要であり, その計算には連続関数 (この場合は無理関数) の積分が必要なのである. だからといって三角関数の前に積分を定義するのは教科書として無理がある. ちなみに, 三角関数をマクローリン級数で定義する流儀もあるが, これだと周期性や $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ すら自明でない.

*⁸ とくに, B の座標が $(\sqrt{1-s^2}, s)$ であったことから, $\cos \theta = \sqrt{1-\sin^2}$ が成り立つ.

*⁹ L は \arcsin にほかならない.

◎ 「定理 24.1 (陰関数の定理) の証明がわかりづらい！」というみなさんへ (読者からの質問より)

ご質問ありがとうございました。たしかに、定理 24.1 は本書のなかで最も証明が難しい定理です。ここは本質的に「 ϵ - δ 論法」を用いており、その部分がとくに難しく感じられることかと思えます。

本書では、関数 $f(x)$ が点 a において**連続**であることは、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことと定義しました (25 ページ)。これは、正確には次のように定義されます。

(*) 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し、

$$|x - a| < \delta \text{ ならば } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

これはいわゆる「 ϵ - δ 式」の表現で、数学の厳密な定式化には欠かせません。高木貞治の『解析概論』など、本格的な解析学の教科書には必ず書いてあります。私の講義ノート

<http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/17S-kaiseki.pdf>

もご参照ください。

関数 $f(x)$ と実数 a に対し、(*) が成り立つと仮定してみましょう。もし $\epsilon = 0.1$ としたとき、ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - a| < \delta \text{ ならば } |f(x) - f(a)| < 0.1$$

が成り立ちます。これは、「 x と a の誤差が δ 未満であれば、 $f(x)$ と $f(a)$ の誤差は $\epsilon = 0.1$ 未満に収まる」ということです。この δ の値がどのぐらいの大きさかは、関数 $f(x)$ や a に依存するので、わかりません。(*) という条件は、「とにかく、値はわからないけども、そのような δ が存在する」ことだけは保証してくれるのです。ということは、 x が a に限りなく近づくと、いつかは $|x - a| < \delta$ が成立して、 $|f(x) - f(a)| < 0.1$ が成立することになります。

同様に $\epsilon' = 0.00000001 = 10^{-8}$ としてみましょう. (*) より, ある (おそらくは δ よりも小さな) $\delta' > 0$ が存在して,

$$|x - a| < \delta' \text{ ならば } |f(x) - f(a)| < 0.00000001$$

が成立します. したがって, x が a に限りなく近づくとき, いつかは $|x - a| < \delta'$ が成立して, $|f(x) - f(a)| < 0.00000001$ が成立するということです.

もし $\epsilon'' = 10^{-8000}$ ぐらいにしても, (*) より, 上とまったく同様の議論ができます. (*) の $\epsilon > 0$ というのは, 本当に, すきなだけ 0 に近い, 小さな数を選んでよいのです. x が a に限りなく近づくとき, $f(x)$ と $f(a)$ の誤差はいくらでも小さくできる, という様子が感じ取れるでしょうか. このことから, 「 x が a に限りなく近づくとき, $f(x)$ は $f(a)$ に限りなく近づく」, すなわち $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ という状況を (*) のように表現するようになったのです.

以上を踏まえて, もう一度定理 24.1 の証明を見返してみましょう. まず最初の方で ϵ と δ を「十分に小さく」取っていますが, その「小ささ」には制限がありません. 「小さすぎる分には構わない」わけです. たとえば $\epsilon = 0.1$ とか 10^{-8} とか 10^{-800} とか, 好きなだけ小さな数を選んでおいて, 203 ページ 11 行目のような条件を満たすように δ を選ぶと, 区間 $I = [a - \delta, a + \delta]$ 上の x に対し $|\phi(x) - \phi(a)| \leq 2\epsilon$ が成立します. すなわち, x が a に限りなく近づくとき, x はいつかは区間 I に入り (よって $|x - a| \leq 2\delta$ を満たし), $\phi(x)$ と $\phi(a)$ の誤差は 2ϵ 以下になる, ということです. あとは (*) のような解釈を思い出せば, $\phi(x) \rightarrow \phi(a)$ ($x \rightarrow a$) と結論できるかと思えます.

◎ 問 4.5, 問 4.6 の解答について (読者からの質問より)

240 ページの問 4.5, 問 4.6 の解答が, 一瞬何をしているのかわかりづらいようです. まず, 「正の数 x と自然数 n, m に対し, 指数法則

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}$$

が成り立つ」ことを使っています. これは掛け合わされている x を数え上げているだけなのですが, 34 ページで「正の数の整数乗」を定義する際に述べておくべきだった

かもしれません。(さらに、その一般化として命題 4.6 や命題 4.8 を位置付けるべきでした。) その上で、たとえば問 4.5 の解答の場合、 $A = x^{P/Q} := (x^{1/Q})^P$ に対し、

$$A^{qQ} = ((x^{1/Q})^P)^{qQ} = (x^{1/Q})^{PqQ} = ((x^{1/Q})^Q)^{Pq} = x^{Pq}$$

といった計算をしているわけです。問 4.6 でも同様の計算をしています。