

# はじめに

**本書について.** 本書は大学初年級の、おもに理工系の学生のみなさんを対象として書かれた「微分積分」のテキストです. 前半 (第 I 部: 第 1 章~14 章) は 1 変数の微分積分, 後半 (第 II 部: 第 15 章~29 章) は多変数 (おもに 2 変数) の微分積分にあてられています.

前半は高校で学んだ微分積分と重複する部分も多いのですが, 新しい内容も豊富にあります. たとえば,

- 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  (自然対数の底) が存在することを厳密に証明する.
- 微分概念を「関数の 1 次近似」という視点から捉え直す.
- 「テイラー展開」(関数の  $n$  次多項式近似) の導入.
- 「広義積分」(積分区間が無限に長くてもよい) の導入.

また, 時間に余裕があるときのオプションとして, 応用上重要な

- 数値計算・微分方程式の基礎

についても解説してあります.

後半は 1 変数の微分積分のアイデアを踏まえつつ, 多変数関数の微分, 変数変換, 重積分といった新しい概念を学びます. とくに微分 (全微分, 偏微分) を導入するにあたっては, 「等高線グラフ」や「勾配ベクトル」をもちいた直観的かつ定量的な意味づけを徹底しました. これは本書が他の教科書と一線を画する部分でしょう.

**執筆にあたって.** 本書は, 私の講義ノート (約 30 回分) に加筆し, 教科書風の体裁に整え直したものです. 定義・定理・証明といった伝統的な数学のスタイルは踏襲しつつ, 限られた時間で効率よく微分積分のエッセンスを習得してもらうために, 次の 3 点に注意しました:

- 厳密な「証明」よりも, 理解を促し記憶の助けになる「説明」を優先する. (いわゆる  $\epsilon$  論法を用いた証明は他書に譲る.)

- とりあげる例や例題は一般的であり、汎用性の高いものであること.
- 数値計算を視野にいれて、「近似」や「誤差」のセンスが自然に磨かれるようなものであること.

<sup>なま</sup>生の数値に触れずに微分積分を学んでも、その真価を実感すること難しいでしょう。私たちは $\pi$ といった記号にではなく、3.141...といった数値に「長さ」や「広さ」を感じ取るのです。本書の例題や演習問題にも、いろいろな数値計算の問題が含まれています。電卓や Excel などの表計算ソフトがあれば簡単に計算できるので、ぜひ省略せずに取り組んでいただきたいと思います。

**謝辞.** 李正勲氏、石谷常彦氏には本書の原稿を通読していただき、さまざまな有益な助言をいただきました。日本評論社の佐藤大器氏には本書の企画段階からお世話になり、わがままな著者の要求にも辛抱強く対応してくださいました。この場を借りて、お礼申し上げます。

2015年6月 著者記

## 本書で用いる数学の記号

### ギリシャ文字

$\alpha$	アルファ	alpha	$\beta$	ベータ	beta
$\gamma, \Gamma$	ガンマ	gamma	$\delta, \Delta$	デルタ	delta
$\epsilon$	イプシロン	epsilon	$\zeta$	ゼータ	zeta
$\eta$	エータ	eta	$\theta, \Theta$	シータ	theta
$\iota$	イオタ	iota	$\kappa$	カッパ	kappa
$\lambda, \Lambda$	ラムダ	lambda	$\mu$	ミュー	mu
$\nu$	ニュー	nu	$\xi, \Xi$	クシー	xi
$o$	オミクロン	omicron	$\pi, \Pi$	パイ	pi
$\rho$	ロー	rho	$\sigma, \Sigma$	シグマ	sigma
$\tau$	タウ	tau	$\upsilon, \Upsilon$	ウプシロン	upsilon
$\phi, \Phi$	ファイ	phi	$\chi$	カイ	chi
$\psi, \Psi$	プサイ	psi	$\omega, \Omega$	オメガ	omega

### 数の集合

$\mathbb{C}$ 複素数全体	$\mathbb{R}$ 実数全体	$\mathbb{Q}$ 有理数全体
$\mathbb{Z}$ 整数全体	$\mathbb{N}$ 自然数全体	$\emptyset$ 空集合

## その他

- (1)  $x \in X$  と書いたら, 「 $x$  は集合  $X$  に属する」すなわち「 $x$  は  $X$  の元」という意味.
- (2) 「条件...を満たす  $X$  の元全体の集合」を  $\{x \in X \mid (\text{条件...})\}$  の形で表す. たとえば自然数は「正の整数」のことなので,  $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$  と表される.
- (3)  $X \subset Y$  は  $X \subseteq Y$  と同じで, 「集合  $X$  は集合  $Y$  に含まれる」という意味.
- (4)  $A := B$  は「 $A$  を  $B$  で定義する」, という意味. たとえば  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .
- (5)  $P \iff Q$  は「 $P$  ならば  $Q$ 」かつ「 $Q$  ならば  $P$ 」という意味. すなわち  $P$  と  $Q$  は互いに必要十分条件 (同値).
- (6) 有限個の数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  に対し, その最大値を

$$\max_{1 \leq k \leq n} a_k, \quad \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad \max\{a_k \mid 1 \leq k \leq n\}$$

のように表し, 最小値も

$$\min_{1 \leq k \leq n} a_k, \quad \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad \min\{a_k \mid 1 \leq k \leq n\}$$

のように表す.

# 目次

はじめに . . . . .	i
本書で用いる数学の記号 . . . . .	ii
<b>第 I 部 1 変数関数の微分積分</b>	<b>2</b>
<b>第 1 章 数と極限</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1 「1 変数微分積分学」の目標 . . . . .	4
1.2 誤差と精度, 小数のはなし . . . . .	5
1.3 数列の収束 . . . . .	7
1.4 実数の連続性 . . . . .	9
<b>第 2 章 実数の連続性と <math>e</math></b> . . . . .	<b>14</b>
2.1 極限の存在 . . . . .	14
2.2 自然対数の底 . . . . .	15
2.3 その他の極限と三角不等式 . . . . .	17
<b>第 3 章 関数の極限と連続性</b> . . . . .	<b>20</b>
3.1 区間と関数 . . . . .	20
3.2 関数の極限 . . . . .	21
3.3 関数の連続性 . . . . .	24
<b>第 4 章 中間値の定理と逆関数</b> . . . . .	<b>27</b>
4.1 中間値の定理と二分法 . . . . .	27
4.2 閉区間における最大・最小値の存在 . . . . .	29
4.3 1 対 1 関数と逆関数 . . . . .	30
4.4 正の数の有理数乗・無理数乗 . . . . .	32

---

<b>第 5 章</b>	<b>指数・対数関数と三角・逆三角関数</b> . . . . .	36
5.1	指数関数と対数関数 . . . . .	36
5.2	三角・逆三角関数 . . . . .	38
<b>第 6 章</b>	<b>微分と 1 次近似</b> . . . . .	43
6.1	微分可能性 . . . . .	43
6.2	ランダウの記号と 1 次近似 . . . . .	44
6.3	1 次近似の応用 . . . . .	46
6.4	導関数と微分の公式いろいろ . . . . .	47
<b>第 7 章</b>	<b>平均値の定理</b> . . . . .	52
7.1	ロルの定理と平均値の定理 . . . . .	52
7.2	関数の増減への応用 . . . . .	53
7.3	ロピタルの定理 . . . . .	55
<b>第 8 章</b>	<b>テイラー展開</b> . . . . .	60
8.1	$n$ 階導関数と $C^n$ 級関数 . . . . .	60
8.2	テイラー展開 . . . . .	62
8.3	マクローリン級数 . . . . .	65
8.4	テイラー展開の証明 . . . . .	67
8.5	コラム：べき級数の微分積分 . . . . .	69
<b>第 9 章</b>	<b>テイラー展開の応用</b> . . . . .	71
9.1	$e$ の計算 . . . . .	71
9.2	極限の計算 . . . . .	72
9.3	二項級数 . . . . .	72
9.4	グラフの凹凸と極大・極小の判定 . . . . .	73
9.5	漸近展開とその応用 . . . . .	75
9.6	コラム：関数の凸性と 2 階微分 . . . . .	77
<b>第 10 章</b>	<b>微積分の基本定理</b> . . . . .	79
10.1	定積分 . . . . .	79
10.2	不定積分と微積分の基本定理 . . . . .	82

---

10.3	原始関数と微積分の基本定理 2 . . . . .	83
10.4	置換積分と部分積分 . . . . .	84
<b>第 11 章</b>	<b>定積分の計算と応用 . . . . .</b>	<b>89</b>
11.1	有理式の積分 . . . . .	89
11.2	無理関数・三角関数の積分 . . . . .	91
11.3	曲線の長さ . . . . .	92
<b>第 12 章</b>	<b>広義積分 . . . . .</b>	<b>96</b>
12.1	広義積分 . . . . .	96
12.2	開区間での広義積分 . . . . .	98
12.3	広義積分の収束・発散 . . . . .	99
12.4	ガンマ関数 . . . . .	100
12.5	ベータ関数 . . . . .	102
<b>第 13 章</b>	<b>数値解析 . . . . .</b>	<b>104</b>
13.1	ニュートン法 . . . . .	104
13.2	数値積分とリーマン和 . . . . .	108
13.3	シンプソン則 . . . . .	109
<b>第 14 章</b>	<b>微分方程式 . . . . .</b>	<b>114</b>
14.1	微分方程式 . . . . .	114
14.2	ウサギの数を予測する . . . . .	116
14.3	方向場 . . . . .	118
14.4	1 階線形微分方程式 . . . . .	120
<b>第 II 部</b>	<b>2 変数関数の微分積分</b>	<b>122</b>
<b>第 15 章</b>	<b>多変数の 1 次関数 . . . . .</b>	<b>124</b>
15.1	多変数関数の例 . . . . .	124
15.2	多変数関数のグラフ . . . . .	124
15.3	1 次関数とベクトルの内積 . . . . .	126
15.4	1 次関数の等高線グラフ . . . . .	129

---

15.5	1 次関数の 3 次元グラフ . . . . .	131
<b>第 16 章</b>	<b>多変数関数の極限と連続性 . . . . .</b>	<b>133</b>
16.1	言葉の準備 . . . . .	133
16.2	2 変数関数の極限 . . . . .	135
16.3	関数の連続性 . . . . .	138
<b>第 17 章</b>	<b>全微分と接平面 . . . . .</b>	<b>140</b>
17.1	1 次近似と全微分 . . . . .	140
17.2	接平面 . . . . .	143
17.3	勾配ベクトル . . . . .	143
17.4	コラム：点と直線の距離の公式 . . . . .	145
<b>第 18 章</b>	<b>偏微分 . . . . .</b>	<b>147</b>
18.1	全微分の係数の意味 . . . . .	147
18.2	偏微分 . . . . .	148
18.3	全微分 vs. 偏微分 . . . . .	150
<b>第 19 章</b>	<b>合成関数と微分 . . . . .</b>	<b>153</b>
19.1	合成関数の微分 . . . . .	153
<b>第 20 章</b>	<b>変数変換とヤコビ行列 . . . . .</b>	<b>159</b>
20.1	2 変数関数の変数変換 . . . . .	159
20.2	変数変換の微分とヤコビ行列 . . . . .	161
20.3	変数変換の合成と逆変換 . . . . .	165
<b>第 21 章</b>	<b>変数変換と勾配ベクトル . . . . .</b>	<b>168</b>
21.1	変数変換と偏微分 . . . . .	168
21.2	合成関数の偏微分の公式 . . . . .	168
21.3	勾配ベクトルの変換公式 . . . . .	170
<b>第 22 章</b>	<b>2 変数のテイラー展開 . . . . .</b>	<b>174</b>
22.1	高階の偏導関数 . . . . .	174

---

22.2	2 次のテイラー展開 . . . . .	177
22.3	一般次数のテイラー展開 . . . . .	181
<b>第 23 章</b>	<b>極大・極小と判別式 . . . . .</b>	<b>183</b>
23.1	2 変数関数の極大と極小 . . . . .	183
23.2	判別式による極値の判定法 . . . . .	185
<b>第 24 章</b>	<b>陰関数定理と条件付き極値問題 . . . . .</b>	<b>191</b>
24.1	条件付き極値問題 . . . . .	191
24.2	陰関数定理 . . . . .	191
24.3	ラグランジュの未定乗数法 . . . . .	195
<b>第 25 章</b>	<b>重積分 . . . . .</b>	<b>199</b>
25.1	多変数の積分の目的 . . . . .	199
25.2	重積分の定義 . . . . .	200
25.3	面積の定義と重積分の性質 . . . . .	202
<b>第 26 章</b>	<b>累次積分と積分の順序交換 . . . . .</b>	<b>207</b>
26.1	タテ線領域・ヨコ線領域と累次積分 . . . . .	207
26.2	積分の順序交換 . . . . .	210
<b>第 27 章</b>	<b>重積分の変数変換 . . . . .</b>	<b>213</b>
27.1	重積分の変数変換 . . . . .	213
27.2	1 次変換と極座標変換 . . . . .	216
27.3	ガウス積分 . . . . .	218
<b>第 28 章</b>	<b>体積と曲面積 . . . . .</b>	<b>220</b>
28.1	グラフで囲まれた部分の体積 . . . . .	220
28.2	曲面積の定義 . . . . .	222
28.3	体積と曲面積 . . . . .	224
<b>第 29 章</b>	<b>線積分とグリーンの定理 . . . . .</b>	<b>228</b>
29.1	勾配ベクトル場の線積分 . . . . .	228



---

29.2	一般のベクトル場の線積分 . . . . .	231
29.3	グリーンの定理 . . . . .	233
演習問題の略解・ヒント . . . . .		237
索引 . . . . .		140