担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

演習について

作成日：April 8, 2005　Version：1.0

担当教官：　川平　友規（かわひら　ともき，助手, kawahira@math.nagoya-u.ac.jp, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses.htm）

担当 TA：　大渓　正浩（おおたに　まさひろ，M1）

演習の進め方：　毎回，問題のプリントを配布します．私（川平）が基本事項を確認したあと，問題を指定し，各自ノートに解いてもらいます．その後，私が黒板で解説する，という流れです．

配布した問題のすべてを演習で扱うとは限りません．扱わなかった問題については，**自分で解いた上で解答が欲しい場合のみ**，下記のオフィスアワーの時間等に私か TA に聞きに来てください．

演習で取り上げるテーマ：　高校数学から大学数学への橋渡しをすることが目標です．具体的には，

(1) 数列・級数	(2) 微分方程式の基礎	(3) １変数の積分計算
(4) 平面の１次変換	(5) 空間図形の方程式	(6) 多項式の計算

を**直感的に理解し，計算ができるようになること**を当面の目標とします．さらに，自分の行った計算過程を**数学的に整備された形で（他人にも分かるように）記述できるようになること**も重要な目標です．

演習と講義は独立したものと考えられています．したがって，講義で扱わない内容を演習で扱うこともありますし，逆もありえます．

単位・成績：　成績に関係のある要素は，**出席回数，小テストの点数，宿題の提出（とその内容），および．レポートの提出**です．成績の優・良・可は以下の基準で定めます．

- 上にあげた 4 つの要素のうち，出席を 60 点満点，小テストを 15 点満点，宿題を 25 点満点として点数化する．自発的なレポートの提出により，最大で 20 点まで加点する．

- 成績は 60 点未満を不可，60 − 74 点を可，75 − 89 点を良，90 点以上を優とする．

したがって，ただ出席するだけでは良い単位が取れません．出席，小テスト，宿題と，バランスよくこなしましょう．

出席：　授業の前半に出席を取ります．遅刻・欠席をする場合，事前に email 等で私に連絡し，かつやむを得ない事情だと判断される場合のみ，加点します．

小テスト：　皆さんの理解度を確認するため，前期の間に 3 回，30 分程度の小テストを行います．出題内容は，演習でやった問題をベースにした基本的な問題です．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題： 宿題はほぼ毎回出題されます．宿題用の問題プリントを配ることもありますし，演習中に黒板で出題することもあります．提出様式は，**A4 レポート用紙を使用し，必ず表紙をつけ，タイトルを『何月何日の宿題』とし，名前，学籍番号を記入**してください．また，**左上をホチキスでとめて**提出してください．

宿題の提出期限は次の演習の開始時間まで，提出場所は教室（理 1-453）です．提出期限に間に合わなかった宿題は後日提出してもかまいませんが，少し減点します．もし何らかの事情で授業時に提出できない場合，事前に email 等で連絡の上．(1) 川平の office(A439) に直接持ってくるか，(2) 事務室に提出してください．

宿題の中に，まれに**発展問題**があります．これはボーナス問題です．解けば加点の対象としますが，解かなくても減点しません．

レポート： 授業で扱えなかった問題や，やや進んだ内容の問題をレポート課題として指定することがあります．レポートの提出は任意ですが，提出されたレポートの質を判断して，成績にボーナス加点していきます．レポートには提出期限を設けません．提出場所は教室です．提出様式は宿題の提出様式に準じます.（A4 レポート用紙使用，タイトルを『何月何日のレポート』とする，etc.）ただし，たとえ同じ日に提出する場合でも，**レポートと宿題は必ず分けて提出してください．**（採点者が異なります.）

授業でやらなかった問題を自発的に解いた場合，その旨を記入し，宿題とは別にしてレポートとして提出してください．

オフィスアワー： 授業に関する質問は授業の直後，教室で受け付けます．私の公式なオフィスアワー（質問受付時間）は**毎週金曜日 11:30-13:00，場所は Cafe David（理学部 1 号館 2 階エレベーター前）**です．私とその他のスタッフも待機しているので，自由に質問してください．金曜日以外の昼休みにも Cafe David は開店しているので，どんどん活用しましょう．有識者への質問は，問題を解決するのにもっとも有効な手段です．自力で解決することにこだわらず，宿題や試験勉強はスマートにこなしましょう．

上記以外の時間に質問したい場合は，必ず事前に email 等で appointment を取るようにしてください．

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体	(2) $\mathbb{R}$: 実数全体	(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体	(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体	(6) $x \in \mathbb{R}$: x は実数

ギリシャ文字

(1) α: アルファ	(2) β: ベータ	(3) γ, Γ: ガンマ	(4) δ, Δ: デルタ	(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ	(7) η: エータ	(8) θ, Θ: シータ	(9) ι: イオタ	(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ	(12) μ: ミュー	(13) ν: ニュー	(14) ξ, Ξ: クシー	(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ	(17) ρ: ロー	(18) σ, Σ: シグマ	(19) τ: タウ	(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ	(22) χ: カイ	(23) ψ, Ψ: プサイ	(24) ω, Ω: オメガ	

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数列と漸化式

作成日：April 11, 2005　Version：1.1

大学での数学では，うまく式で表現できないような，ワイルドな数列を扱います．今日は私の専門分野の紹介もかねて，ワイルドな数列の具体例を見ていきましょう．

漸化式

ある関数 $y = f(x)$ とある実数 $a_1 = p$（複素数でもよい）に対し，数列

$$p = a_1 \ \mapsto \ f(p) = a_2 \ \mapsto \ f(f(p)) = a_3 \ \mapsto \ f(f(f(p))) = a_4 \ \mapsto \ \ldots$$

を考えよう．このように書くと一瞬戸惑うが，実は

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_1 = p$$

という初項 p の 2 項間**漸化式** (reccursive formula) を考えているのである．初項 p は**初期値** (initial value) とも呼ばれる．

問題 1. $f(x)$ と p が下のように与えられているとき，数列 a_n を求めよ．一般項が求まる場合は計算せよ．

(1) $f(x) = 2x,\ p = 0$　(2) $f(x) = 2x,\ p = 1$　(3) $f(x) = 2x + 1,\ p = -1$

(4) $f(x) = 2x + 1,\ p = 0$　(5) $f(x) = \dfrac{x+1}{-x+1},\ p = 2$　(6) $f(x) = x^2 - 1,\ p = 1$

(7) $f(x) = x^2 + i,\ p = 0$

軌道を視覚化する：ウェブ・ダイアグラム

与えられた実数 p と関数 $y = f(x)$ に対し，数列

$$p \ \mapsto \ f(p) \ \mapsto \ f(f(p)) \ \mapsto \ f(f(f(p))) \ \mapsto \ \ldots$$

を視覚化する非常によい方法がある．$y = f(x)$ のグラフを用いて，xy 平面上の点 (p, p) から $(f(p), f(p))$ を作図する方法である：

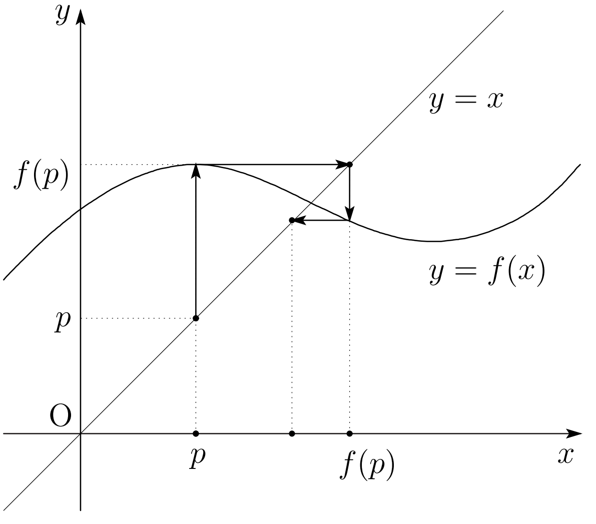
Step 1 点 (p, p) から垂直方向に，$y = f(x)$ のグラフと交わるまで直線を引く．その交点は $(p, f(p))$ である．

Step 2 そこから水平方向に，今度は $y = x$ のグラフと交わるまで直線を引く．その交点が $(f(p), f(p))$ である．

これを続けていき，直線 $y = x$ を数直線だと思えば点 p の軌道が視覚化される．この手続きを**グラフ解析** (graphical analysis) と呼ぶ．また，グラフ解析で得られる図を**ウェブ・ダイアグラム**（web diagram）と呼ぶ．

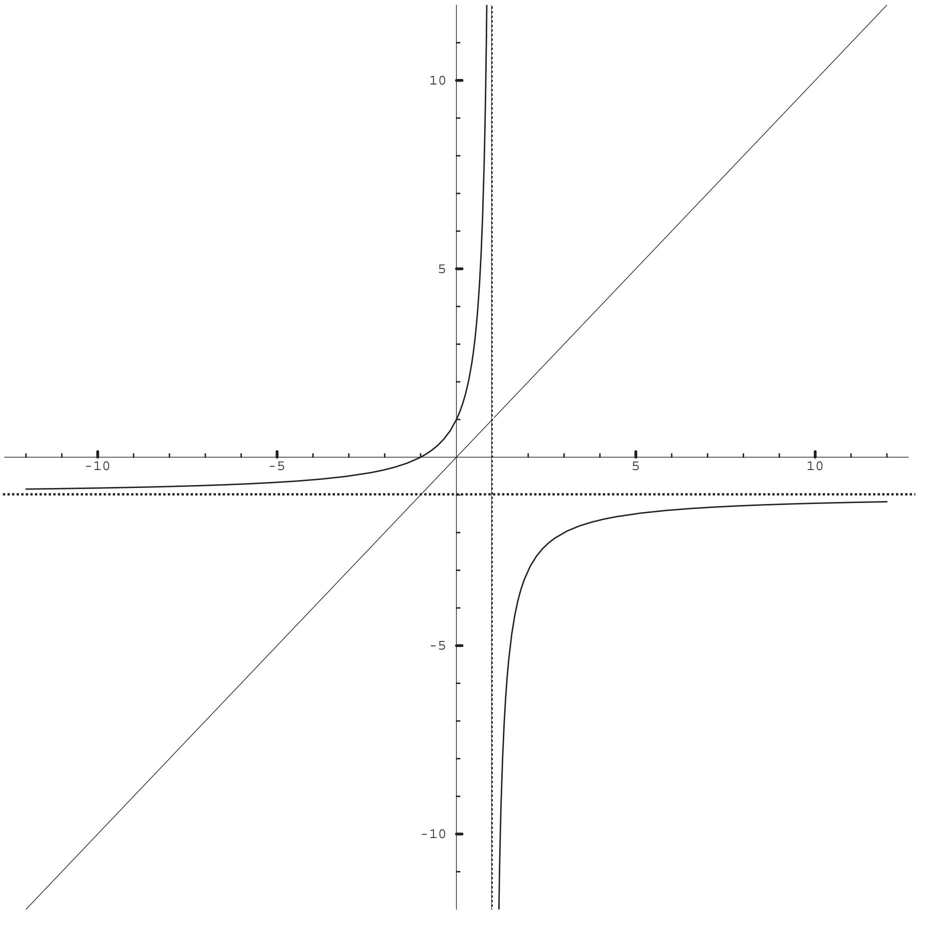
ちなみに，$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフの交点は**固定点** (fixed point) と呼ばれる．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp



問題 2. $y = 2x$, $y = 2x + 1$ をグラフ解析せよ．特に，初期値 p の値によってウェブ・ダイアグラムはどのように変化するか？

問題 3. $y = f(x) = \dfrac{x+1}{-x+1}$ とするとき，漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$,　$a_1 = p$ （ただし，$p \neq 0, \pm 1$）で決まる数列 a_n は p の値によらず周期 4 となることを下のグラフで確かめよ．



担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

問題　漸化式

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \quad a_1 = p$$

を考える．特に，$n \to \infty$ のとき，a_n は収束か，発散かを判定したい．

(1) $y = f(x) = x^2 + 1/4$ をグラフ解析し，

(a) 数列 $a_n \to \infty$ となる初期値 p の範囲

(b) 数列 a_n がある値に収束する初期値 p の範囲

を推測せよ．特に，a_n が収束するとき，その極限は何だと予想されるか？(答えのみでよい.)

(2) 以下，$p = a_1 = 0$ で考える．このとき，数学的帰納法により $a_n < 1/2$ を示せ．

(3) さらに，数学的帰納法により $a_n < a_{n+1}$ を示せ.（すなわち，a_n は単調増加）

(4) 実は，次のことが知られている：

> 単調増加数列 a_n に対しある実数 M が存在して，全て n について $a_n < M$ を満たすと仮定する．このとき，a_n はある値 α $(\leq M)$ に収束する．

我々の a_n は $a_n < a_{n+1} < 1/2$ を満たすから，収束するはずである．その極限を α とすると，その値は何になるか？（Hint: 漸化式で $n \to \infty$ とせよ）

注意　上の四角で囲った事実を用いずに，式の形から直接 $a_n \to 1/2$ を証明するのは非常に難しい．

レポート問題１　漸化式

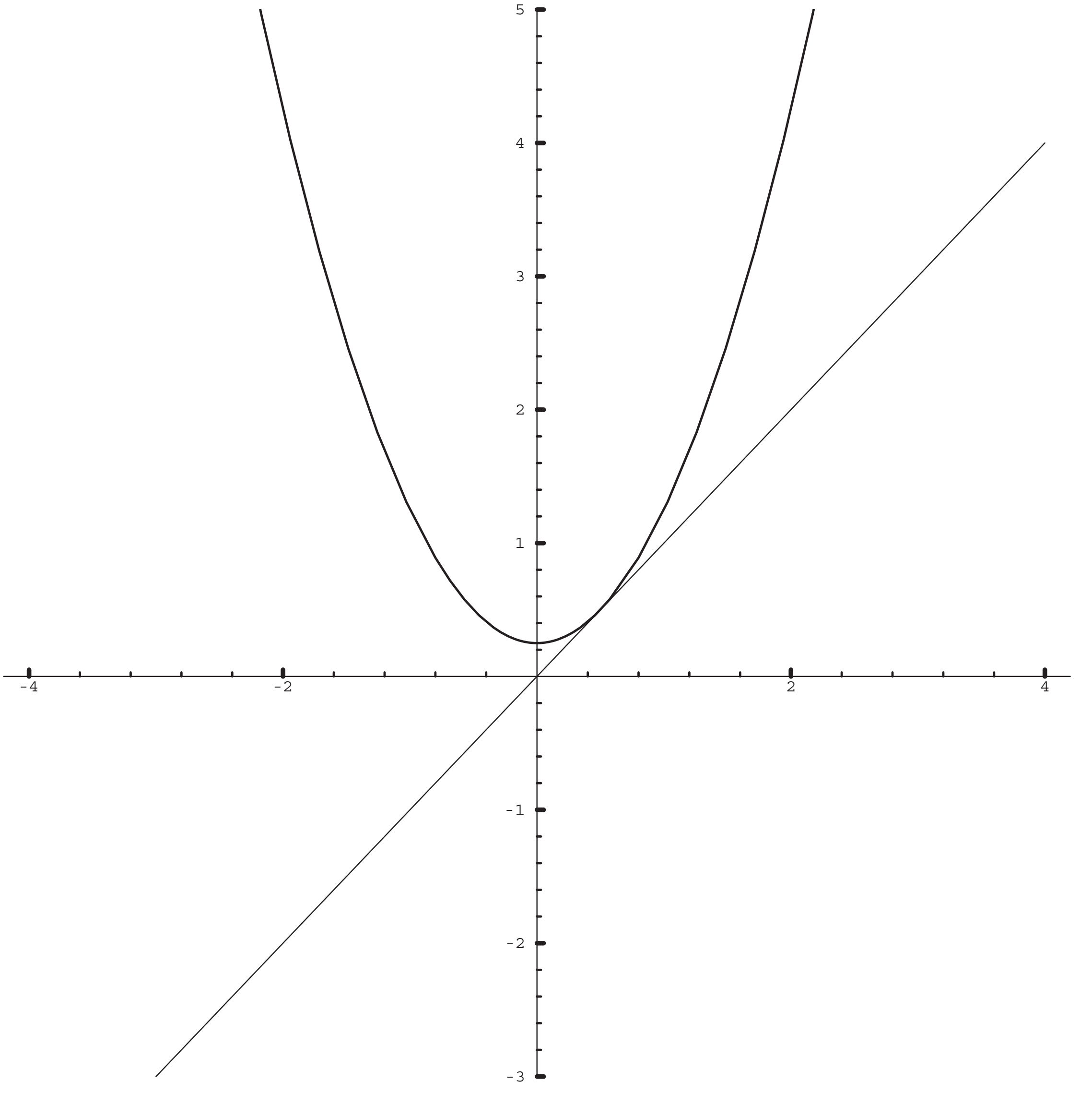
$$a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n, \quad a_1 = 1$$

の一般項をもとめよ．さらに余力があれば，

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n, \quad a_1 = 1$$

の一般項をもとめよ.（←かなり難しい.）

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp



$y = x^2 + 1/4$ のグラフ

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数列の収束

作成日：April 17, 2005　Version：1.0

今日は数列の極限を求める練習です.

数列の極限

問題 1. 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$

実数の連続性の公理　「単調増加」で「上に有界」な実数列

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le M$$

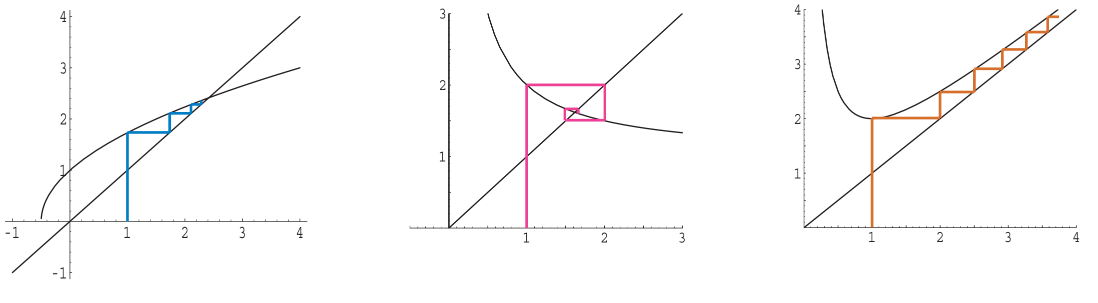
は収束する．すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\,(\le M)$ が存在する.

問題 2. 次の漸化式で定まる数列は収束するか？ 収束するならばその極限を求めよ.

(1) $a_{n+1}=\sqrt{2a_n+1},\ a_1=1$　　(2) $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n},\ a_1=1$

(3) $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n},\ a_1=1$

Hint の図：



問題 3. $k\in\mathbb{N}$ とするとき，$\displaystyle C_k := \lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$ を求めたい.

(1) $j\in\mathbb{N}$ のとき，$\displaystyle\int_{j-1}^{j} x^k dx < j^k < \int_{j}^{j+1} x^k dx$ であることを確かめよ.

(2) $\displaystyle\int_0^n x^k dx < \sum_{j=1}^{n} j^k < \int_1^{n+1} x^k dx$ を示せ.

(3) C_k を求めよ.

注意：　実は $k\in\mathbb{N}$ であることは本質的でなく，$k\ge 0$ であればよい.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

問題 1　$\alpha \geq 1$ に対し，$a_n = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + \cdots + \dfrac{1}{n^\alpha}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = 1$ のとき，$y = \dfrac{1}{x}$ のグラフを利用することで，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty \quad \text{（発散）}$$

を示せ．

(2) $\alpha > 1$ のとき，$y = \dfrac{1}{x^\alpha}$ のグラフを利用することで極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

が存在することを示せ．(Hint: a_n が「単調増加」かつ「上に有界」であることを示せばよい．)

問題 2　$a_1 = 1$, $a_2 = 4$ とする．このとき，a_1 と a_2 の数直線上での中点を a_3 とおく．以下同様に，a_n, a_{n+1} の中点を a_{n+2} と置くとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在するか？存在するならばその極限を求めよ．(Hint：$b_n := a_{n+1}/a_n$ の漸化式に帰着させる．もしくは，$b_n := a_{n+1} - a_n$ の漸化式に帰着させる．)

レポート問題 2　上の問題 1 の a_n について，$\alpha = 1$ のとき

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ とおく．$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) = 0$ を示せ．

(2) $c_n = a_n - \log n$ とおく．このとき極限 $\lim_{n\to\infty} c_n$ が存在することを示せ．

Hint: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$.

まめちしき： ちなみに c_n の極限 $\lim_{n\to\infty} c_n$ はオイラー定数と呼ばれ，値はおよそ 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576723488485... である．この数が有理数か無理数か，いまだに知られていない．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

級数の収束

作成日：April 23, 2005　Version：1.0

今日は級数の収束を考えます．特に，絶対収束に関するセンスを磨きましょう．ここでは複素数の数列を扱います．そのまえに...

宿題について

TA の大渓さんから，宿題の採点基準が発表されました：

- 毎週 50 点満点で採点する．
- ただし，期日までに提出された宿題には一律 20 点を与える．(解けなかった問題は，そのことを正直に書くこと)
- 無印（丸や三角がついてない）の問題は**再提出が望ましい**．それ以外の問題でも，再提出により**最大 45 点まで**点数が伸びる可能性がある．
- (各回の宿題の平均点) ÷ 2 を宿題の得点とする．

連絡先は数理学科学部学生控室 A343,「大渓だけでなく，多くの先輩達がいますので，興味があれば来てみて下さい」とのことでした．遊びに行ってみよう！

級数＝折れ線

ある数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$（実数列 or 複素数列）があるとき，**（無限）級数** (series) を，式として以下のように定める：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n).$$

このとき，**右の極限が存在するとは限らない**のは $a_n = n$ などとおけば明らかであろう．極限が存在するとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する**といい，存在しないとき**発散する**と言う．

これから実数の級数と複素数の級数を同時に扱うが，実数は複素数なので**複素数の級数で成り立つことは実数の級数でもなりたつ**ことに注意しよう．

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とは，複素平面で考えると 0 から $+a_1$ 進み，さらに $+a_2$ 進み，さらに $+a_3$ 進み…と無限に繰り返していったものだと考えられる．これらを矢印で結び折れ線を描けば，その様子が幾何学的に見て取れるようになる：

問題 1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を以下のように定める．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散を直感的に判定せよ．

(1) $a_n = (-1)^{n+1}$　(2) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$　(3) $a_n = \dfrac{i^n}{n}$　(4) $a_n = \dfrac{i^n}{2^n}$

ちなみに $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty$（発散），$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}$ である．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 2. 上の問題の各 a_n で，級数に対応する折れ線のトータルの長さはどうなるか？(Hint: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$)

級数に対応する折れ線のトータルの長さが有限ならば，その級数は収束するに違いない（というか，発散のしようがない）ことは直感的に明らかであろう．すなわち，

定理　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束すれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する．

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するとき，級数 a_n は**絶対収束する**と呼ばれる．

注意　この定理の逆は成立しない．すなわち，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **が収束するからと言って，** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **が絶対収束するとはかぎらない**．例えば，

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2$$

であるが，これは絶対収束していない．すなわち，長さの無限大の折れ線が $\log 2$ に向かって折りたたまれていく感じである．

問題 3. 上の定理を用いて，問題 1 の (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}$ が収束することを示せ．

問題 4. 任意の複素数 z を固定する．このとき，上の定理を用いて，

$$C(z):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$$

が収束することを示したい．明らかに，$z\neq 0$ のとき証明すれば十分である．$n=0,1,2,\ldots$ に対し，$c_n:=(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$ と定める．

(1) $\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ を求めよ．

(2) 自然数 N を十分大きくとると，$n\geq N$ ならば $|c_{n+1}|<\dfrac{|c_n|}{4}$ と出来ることを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ は収束することを示せ．したがって $C(z)$ は収束する．

まめちしき　x が実数のとき，$C(x)=\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots$ である．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

宿題 3-1.　級数

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots$$

は $\alpha>1$ のとき収束し，$\alpha\le 1$ のとき発散する．これを利用して，以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束するが $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないような例を作れ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(2n)^3}$ は収束することを示せ．

宿題 3-2.　任意の複素数 z を固定する．このとき，

$$S(z):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$

が収束することを示せ．

まめしちき　x が実数のとき，$S(x)=\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots$ である．

レポート問題 3（リーマンのゼータ関数）　n を自然数，$s=\sigma+ti$ を複素数（σ, t は実数）とする．このとき，

$$n^s:=n^\sigma(\cos(\log n^t)+i\sin(\log n^t))$$

と定義する．さらに，複素数 s に依存する級数

$$\zeta(s):=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$$

を考える．このとき，$\sigma>1$ ならば $\zeta(s)$ は級数 σ は収束することを示せ．

まめしちき　上の関数を**リーマン** (Riemann) **のゼータ関数**と呼ぶ．この関数は上の式のままでは $\sigma>1$ のときしか定義できないが，**解析接続**とよばれる方法で複素平面全体に拡張することができる．(上の級数表示が意味を持たないかわりに，$\zeta(s)$ はある複素積分で表示できるようになる．)「$\zeta(s)=0$ ならば $s=0,-2,-4,\ldots$ もしくは $\mathrm{Re}\, s=\sigma=1/2$ であろう」というのが有名な**リーマン予想** (Riemann hypothesis) である．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

オイラーの公式

作成日：May 9, 2005　Version：1.0

今日はオイラーの公式を（形式的に）チェックしてみましょう．

オイラーの公式　実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し，$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が成り立つ．

いままで扱ってきたように，任意の複素数 z に対し，級数

$$
\begin{aligned}
C(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \\
S(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \\
E(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots
\end{aligned}
$$

は収束する．よって，z を決めると $C(z)$，$S(z), E(z)$ という値がそれぞれ決まるから，これらは関数だと思うことができる．以下では次の事実を用いてオイラーの公式を示そう：

事実１：級数 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ が任意の実数 x で収束するとき，

- $f(x)$ は x の関数として連続かつ微分可能
- 級数 $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$ も収束し，その極限値は $f'(x)$ である．(**項別微分可能**)

問題 1. 任意の実数 x について，級数 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ は収束すると仮定する．このとき，$f(0) = 1$ かつ $f'(x) = f(x)$ ならば，$f(x) = E(x)$ であることを示せ．

まめしちき　$f(0) = 1$ かつ $f'(x) = f(x)$ となる関数は，$f(x) = e^x$ しかない．

このことから，今後は級数 $E(z)$ を形式的に e^z と書くことにする．これは $z = x \in \mathbb{R}$ ならば普通の e^x と同じである．

問題 2. 任意の実数 x を固定する．このとき，$e^{ix} = C(x) + iS(x)$ となることを示せ．

$C(x)$，$S(x)$ の正体はわからない，ということにして，続きは宿題で：

今週の宿題コーナー

今実数 x に対し，$e^{ix} = C(x) + iS(x)$ はある複素数である．まずは e^{ix} の絶対値をもとめよう．

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 4-1. x を実数とする．級数 $C(x)$, $S(x)$ を項ごとに x で微分し，$C'(x) = -S(x)$, $S'(x) = C(x)$ を示せ．

宿題 4-2. 関数 $L(x) = |e^{ix}|^2$ を x で微分することで，$|e^{ix}| = 1$ を示せ．

つぎに，e^{ix} の偏角をもとめよう．まず，$\arg e^{ix} = \Theta(x)$ とおく．いま実部と虚部の関係から，

$$\tan\Theta(x) = \frac{S(x)}{C(x)}$$

は明らかである．

宿題 4-3 上の式の左辺について，

$$\frac{d}{dx}\tan\Theta(x) = \frac{\Theta'(x)}{C(x)^2}$$

を示せ．また，右辺について，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{S(x)}{C(x)}\right) = \frac{1}{C(x)^2}$$

を示せ．(Hint: 宿題 4-2 の結果より，$C(x)^2 + S(x)^2 = 1$.)

上の結果より，$\Theta'(x) = 1$ を得る．$\Theta(0) = \arg e^{i0} = 0$ と仮定してよいので，$\Theta(x) = x$ を得る．以上より，e^{ix} は絶対値 1，偏角 x の複素数であるから，$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ がなりたつ．特に，$C(x) = \cos x$ および $S(x) = \sin x$ も導かれる．

レポート問題 4（微分方程式） $f(x)$ を微分可能な連続関数とする．このとき，$f(x) = f'(x)$ ならば $f(x) = Ke^x$ （ただし，K は定数）となることを示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

写像

作成日：May 16, 2005　Version：1.0

今日は数学の基本的な道具である，**写像** (mapping) の概念を練習します．

> X, Y を集合とする．任意の $x \in X$ に対して，唯１つの $y \in Y$ が対応するとき，この対応を**写像**といい，
>
> $$f : X \to Y, \quad f(x) = y$$
>
> のように書く．また，$f : x \mapsto y$ と書き,「x は y に写る」などという．

X, Y はスクリーンであり，f という光源によって X の中のものが Y に投影されている感じ．一般に，投影すると情報量は減少する．ちなみに，ある「集合」に入るか入らないかは,「万人に共通の基準」によって判定されなければならない．

問題 1. $X = \{$ 日本人全体 $\}$ とする．次の対応で，写像になりうるものはどれか？その場合，Y としてどのような集合を選ぶのが適当か？

(1) $x \in X$ から，その父親への対応付け

(2) $x \in X$ から，その両親への対応付け

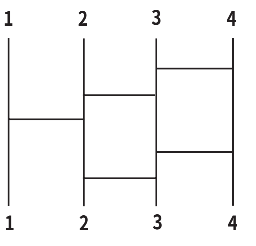
(3) $x \in X$ から，その人の年齢への対応付け

(4) $x \in X$ から，その人の email アドレスへの対応付け

(5) $x \in X$ から，その人の「心の友」への対応付け

> $A \subset X$ とする．このとき，
>
> $$f(A) := \{f(x) \in Y : x \in A\} \subset Y$$
>
> を A の f による**像**という．また，$B \subset Y$ に対し，
>
> $$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subset X$$
>
> を B の f による**逆像**とよぶ．

問題 2. n 個の元から成る有限集合 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ を考える．このとき「あみだくじ」は X から X への写像を定めることを説明せよ．また，下の絵のような「あみだくじ」が与えられたとき，$A = \{1, 2\}$ の像と逆像を求めよ．



担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

写像 $f : X \to Y$ について,「$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$」が常に成り立つとき**単射**であるという．すなわち,「異なる 2 点は異なる 2 点に写る」．また，これは「$f(x_1) = f(x_2)$ ならば，実は $x_1 = x_2$」と同じ意味である．

「異なる 2 点が 1 点につぶれて投影されることはない」と行っている.「識別可能性が保存されている写像は単射」とも解釈できる．

問題 3. 上の「あみだくじ」写像 $f : X \to X$ は単射である．それはなぜか？

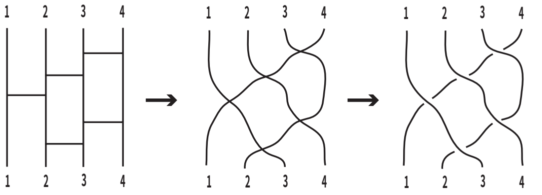
写像 $f : X \to Y$ は $f(X) = Y$ であるとき，**全射**であるという．

すなわち,「f によるスクリーン X 全体の像がスクリーン Y 全体を覆う」ときが全射となる．感覚的には「X 全体の情報量」>「Y 全体の情報量」

問題 4. 上の「あみだくじ」写像 $f : X \to X$ は全射でもある．それはなぜか？

写像 $f : X \to Y$ は全射かつ単射のとき**全単射**であるという．このとき，任意の $x \in X$ に対して $g(f(x)) = x$ をみたす写像 $g : Y \to X$ が存在する．この写像 g を f の**逆写像**といい $g = f^{-1}$ と書く．

例えば,「あみだくじ」は全単射である．上の絵の場合，次のような見方をすれば全単射が分かる：



上のような写像は**置換**と呼ばれ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とも書かれる．特に，X の元のうち，i と j だけを入れ替える写像を (i, j) と書く．すると，上の置換は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2,3) \circ (3,4) \circ (1,2) \circ (2,3) \circ (3,4)$$

と互換の積として書ける.（互換は右から順に作用させる．また，上の $\circ$ は省略されることが多い）．

問題 5. 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を次のように定めるとき，この写像の全射性，単射性を調べよ．もし逆写像がある場合は，それを求めよ．

(1) $f(n) = n + 3$　(2) $f(n) = 2n$　(3) $f(n) = n^2$　(4) $f(n) = n^3 - 3n$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

宿題 5-1. 2つの実数のペア全体の集合を $\mathbb{R}^2$ とおく.（ようするに，縦軸・横軸の数直線が引かれた平面をイメージすれば良い.）このとき，写像 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f:(u,v) \mapsto (x,y) = f(u,v) = (u+v, uv)$$

と定める.

(1) $(x,y) = (4,3), (2,1), (1,3) \in \mathbb{R}^2$ に対して，それぞれの逆像 $f^{-1}(\{(x,y)\})$ を求めよ.

(2) f の像 $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ を求め，図示せよ.

宿題 5-2 数の集合 $\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$（意味はプリント K200 を参照）をうまく用いて，次のような写像の例を作れ.

(1) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{N}$ への，全射であるが単射でない写像

(2) $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Z}$ への全射（やや難？）

(3) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への単射であるが全射でない写像

(4) 単射でも全射でもない写像

宿題 5-3 次の置換を実現するあみだくじを描き，互換の積で書き表せ．積の数（あみだの横棒の数）が少ないほど，よい解答とみなす.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 2 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

今週のレポート

レポート問題 5-1 (難) 上の宿題 5-3 においてあみだくじの棒の最小数を求め，それが本当に最小であることを証明せよ.

レポート問題 5-2 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への全射をつくれ．また，$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ への全射を作れ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

空間内の平面と直線

作成日：May 23, 2005　Version：1.0

お知らせ

来週 (5/30) は私が出張のため休講にします．また，次回小テストは 6/13 の予定です．

問題 1. (ウォーミングアップ) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の互いに平行でないベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2 \neq \boldsymbol{0}$ を考える．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対しある実数の組 (s,t) が存在して，$\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2$ と表されることを確認せよ．さらに，(s,t) が以下の関係式を満たすときの $\boldsymbol{x}$ の軌跡を求めよ．

(1) $t = 2s$　　(2) $t = 2s+1$　　(3) $t = s^2$　　(4) $s^2 + t^2 = 1$

復習 $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ に対して：

(内積)　$\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

(ベクトルの長さ)　$|\boldsymbol{x}_1| = \sqrt{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$

(２点の距離)　$|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$

(角度)　$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_1|\,|\boldsymbol{x}_2|}$

(直交)　$\boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{x}_2 \iff \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0.$

平面 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中の平面 H と，その上の点 $\boldsymbol{x} = (x,y,z) \in H$ を考える．

- **(方程式)** 平面 H が $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り，その法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = (a,b,c)$ であるとき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \quad &\iff \quad a(x-x_0) + b(y-y_0) + z(z-z_0) = 0 \\ &\iff \quad ax + by + cz + d = 0 \quad (d = -ax_0 - by_0 - cz_0) \end{aligned}$$

- **(パラメータ表示)** 平面 H が $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り，２つの平行でないベクトル $\boldsymbol{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$ を含むとき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_0 + s\,\boldsymbol{u}_1 + t\,\boldsymbol{u}_2 \quad (s,t \in \mathbb{R}) \\ \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (s,t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

問題 2. 次の方程式で定まる平面のパラメータ表示を求めよ．

(1) $3x - 2y + z = 0$　　(2) $3x - 2y + z - 4 = 0$

(3) $x = 0$　　(4) $x + y - 1 = 0$

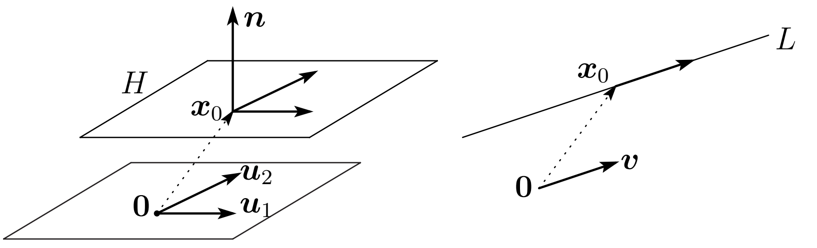


図 1: 平面 H と直線 L

問題 3. 次のパラメータ表示で定まる平面の方程式を求めよ．

(1)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (s,\ t \in \mathbb{R})$$

(2)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (s,\ t \in \mathbb{R})$$

直線　3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中の直線 L と，その上の点 $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in L$ を考える．

- **（パラメータ表示）**　直線 L が $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ に平行であるとき

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\,\boldsymbol{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

- **（方程式）**　上のパラメータ表示からパラメータ t を消去すると，方程式

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{2}$$

を得る．(直線は「2 平面の交わり」とみなされる．)

問題 4. 次の各直線について他の表示を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$　　(2) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+3}{5}$

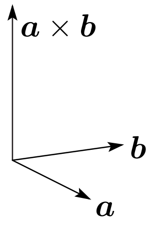
担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

（外積）　2 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し，外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を次のように定義する：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \ := \ (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

このとき，以下が成り立つ：

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも直行する.
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向きは $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ に重ねる回転に関して「右ねじ的」に定まり，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ を満たす.
- $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき，$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta =$（$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で貼られる平行四辺形の面積）



問題 5. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を確かめよ.

問題 6. 以下の外積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

今週の宿題コーナー

問題 6-1　以下の性質を満たす平面または直線の方程式を求めよ.

(1) 3 点 A:$(1, 0, 1)$, B:$(-1, 1, 1)$, C:$(0, 1, -1)$ を通る平面

(2) 点 A:$(-2, 1, 2)$ を通り，ベクトル $(1, 3, 1)$ に垂直な平面

(3) 2 点 A:$(1, 2, 3)$, B:$(4, 4, 4)$ の垂直二等分面

(4) 2 点 A:$(1, 2, 3)$, B:$(4, 4, 4)$ を通る直線の方程式

(5) 点 A:$(-2, 1, 2)$ を通り，ベクトル $(1, 3, 1)$ に平行な直線

問題 6-2　$\mathbb{R}^3$ の 4 点 $(-2, 0, 3)$, $(3, 3, -1)$, $(5, 3, 2)$, $(0, 2, -3)$ が同一平面上にあるかどうかを判定せよ.

今週のレポート問題

レポート 6-1　平面 $H : ax + by + cz + d = 0$ と点 $P : (x_0, y_0, z_0)$ の距離 d は

$$d \ = \ \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

で与えられる．これを証明せよ.

レポート 6-2　空間内の互いに平行でない 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ によって貼られる平行 6 面体の体積をこれらのベクトルの内積，外積を駆使して表せ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

行列とベクトルの計算

作成日：June 6, 2005　Version：1.1

お知らせ

次回（6/13）は第 2 回小テストです.

問題 1. (ウォーミングアップ) 次の行列とベクトルの計算をせよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

問題 2. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ.

(2) このとき，積 $A\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ をどのように変形したものか？

(3) A の逆行列 A^{-1} が存在するための条件は？存在する場合，A^{-1} を求めよ.

問題 3. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) このとき，積 $B\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の x 座標と y 座標を入れ替えることを示せ.

(2) $B^{-1} = B$ であることを説明せよ.

(3) $\boldsymbol{x}$ の y 座標と z 座標を入れ替える行列，z 座標と x 座標を入れ替える行列は何か？

問題 4. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) このとき，積 $C\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の x 座標に z 座標の k 倍を加えたものになることを示せ.

(2) C^{-1} を求めよ.

(3) $\boldsymbol{x}$ の y 座標に x 座標の k 倍を加える行列を求めよ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

連立方程式

問題 5. 連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) これを代入法を使わずに解け．

(2) これを行列をかける操作に対応付けよ．

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

一次変換・線形写像にむけて

$\mathbb{R}^n$ 内のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，n 次正方行列 A との積 $A\boldsymbol{x}$ を対応させると，写像

$$\begin{aligned} f_A : & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

が定まる．このような写像を**一次変換**もしくは**線形写像**と呼ぶ．

問題 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ による次の図形の像をもとめよ．

(1) 線分 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (-1 \leq t \leq 1)$

(2) 円 $x^2 + y^2 = 4$

今週の宿題コーナー

来週は第 2 回小テストなので，テスト勉強を宿題とします．テストでは手書きノートに限り参照を許可するので，自分なりに要点をまとめたノートを作ってきましょう．(ノートの提出・採点はしません．)

今週のレポート問題

レポート 7　xy 平面内の正三角形 △ABC を考える．△ABC 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ から，各辺におろした垂線の長さの和は一定であることを示せ．これを用いて，

$$\mathrm{P}\ が正三角形\ \triangle\mathrm{ABC}\ 上にある \iff f(x, y) = 0$$

となるような x と y の式 $f(x, y)$ を求めよ．さらに余力があれば，この結果を xyz 空間内の正四面体に拡張せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

一次変換と線形写像

作成日：June 13, 2005　Version：1.0

一次変換（線形写像）

$\mathbb{R}^n$ 内のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，n 次正方行列 A との積 $A\boldsymbol{x}$ を対応させると，写像

$$\begin{aligned} f_A :& \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

が定まる．このような写像を**一次変換**と呼ぶ．f_A は次のような性質をもつ．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ および任意の実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，

(L1)　$f_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f_A(\boldsymbol{x}) + f_A(\boldsymbol{y})$　:「和の像は像の和」

(L2)　$f_A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\, f_A(\boldsymbol{x})$　:「定数倍の像は像の定数倍」

問題 1. 任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$，および以下の 2 次正方行列 A に対し，$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が (L1) と (L2) を満たすことを確かめよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 2. 逆に，ある写像 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が (L1)，(L2) を（f_A を F に置き換えた上で）満たしたとする．さらに，

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

であるとき，行列 $A_F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $F(\boldsymbol{x}) = A_F\boldsymbol{x}$ が成り立つことを示せ．

ある写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が (L1)，(L2) を（f_A を F に置き換えた上で）満たすとき，一般に**線形写像**と呼ぶ．$m = n$ のときが，正方行列による一次変換である．

格子で視ると..

問題 3. m, $n \in \mathbb{Z}$ に対し，$\mathbb{R}^2$ 上の直線群

$$\ell_1^m : x = m, \quad \ell_2^n : y = n$$

を考え，これらの全体を $\mathbb{R}^2$ の基本格子 Λ と呼ぶことにする．このとき，**問題 1** の三つの行列 A に対し，線形写像 f_A による Λ の像 $f_A(\Lambda)$ を求め，図示せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ による次の図形の像を図示せよ．

(1) 線分 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (-1 \le t \le 1)$

(2) 円 $x^2 + y^2 = 4$

今週の宿題コーナー

問題 8-1　任意の 2 次正方行列 A で定まる一次変換（線形写像）$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対し $f_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ を示せ．ただし，$\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^2$ のゼロベクトルである．

問題 8-2　写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を以下のように定めるとき，それが線形写像かどうか判定せよ．すなわち，(L1) と (L2) が両方成り立つかどうかチェックせよ．

(1) $f : \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$

(2) $f : \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$

(3) $f : \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + z - 1 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$

今週のレポート問題

レポート問題 8-1　xy 平面 $\mathbb{R}^2_{xy}$ をある線形写像 f で XY 平面 $\mathbb{R}^2_{XY}$ に写したら，$\mathbb{R}^2_{xy}$ 全体が直線 $Y = 2X$ に写ってしまった．このとき，$f = f_A$ となる 2 次正方行列 A を少なくとも 1 つ見つけよ．可能ならば，全て見つけよ．

レポート問題 8-2　$\mathbb{R}^2$ 内で $(0,0)$ と $(1,1)$ を結ぶ線分を対角線とする正方形 S を考える．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で定まる一次変換を $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とするとき，$f_A(S)$ の面積は $|\det A|$ ($= A$ の行列式の絶対値）となることを示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

関数の連続性と微分

作成日：June 20, 2005　Version：1.1

連続関数

- ある区間 $I=(a,b)$ で定義された関数 $f:I\to\mathbb{R}$ がある点 $x_0\in I$ で**連続**であるとは $x\to x_0$ のとき，$f(x)\to f(x_0)$ が成り立つときを言う．すなわち，

$$f(\lim_{x\to x_0} x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

：「極限の像は像の極限」

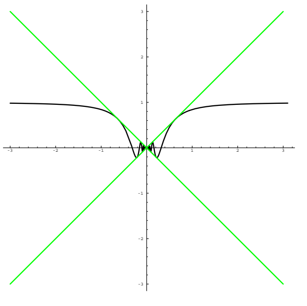
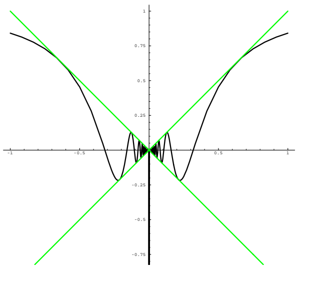
- 任意の $x_0\in I$ で $f(x)$ が連続であるとき，$f(x)$ は I 上連続であるという．

問題 1. 関数 $y=f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ （ただし $f(0)=0$ ）を考える．

(1) $x\to\pm\infty$ のとき，$f(x)\to 1$ を示せ．

(2) $f(x)=0$ となる x を全て求めよ．

(3) $f(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ．

問題 2. (線形写像) 連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が任意の x，y，$\alpha\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

を満たしたと仮定する．

- $f(0)=0$ を証明せよ．
- ある定数 K が存在して，$f(x)=Kx$ と書けることを証明せよ．

微分

- ある区間 $I=(a,b)$ で定義された関数 $f:I\to\mathbb{R}$ がある点 $x_0\in I$ で**微分可能**であるとは $x\to x_0$ のとき，次の極限が存在するときをいう：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- 任意の $x_0\in I$ で $f(x)$ が微分可能であるとき，$f(x)$ は I 上微分可能であるという．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. $f(x) = x^3 - 2x - 3$ とする．このとき，次の極限をもとめよ．

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$

今週の宿題コーナー

問題 9-1　一次変換 $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が原点中心角度 θ radian の回転を定めるように，2 次正方行列 A を定めよう．

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を複素数 $x + yi$ の別名だと思うことで，$\mathbb{R}^2$ と複素平面 $\mathbb{C}$ を同一視する．このとき，複素数 $x + yi$ を複素平面上で原点中心に θ 回転して得られる複素数 $X + Yi$ を求めよ．

(2) $f_A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を用いて，行列 A を求めよ．

(3) A は θ にイゾンするので，この行列を $A[\theta]$ と書くことにする．このとき，$A[\theta]^{-1} = A[-\theta]$ を証明せよ．

問題 9-2　$f(x)$ を微分可能な関数とする．このとき，次の極限をもとめよ．

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h))^2 - (f(x))^2}{h}$　　(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}}{h}$　$(f(x) > 0)$

今週のレポート問題

レポート問題 9-1（上の宿題 9-1 の関連問題）　以下の複素平面上の関数 $F(z)$ で定まる写像 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ はある一次変換 $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の「別名」になっている．この行列 A を定めよ．

(1) $F(z) = 2z$　　(2) $F(z) = (1+i)z$

(3) $F(z) = \bar{z}$　　(4) $F(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

レポート問題 9-2(線形写像)　写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が任意の $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \;=\; f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \qquad f(\alpha \boldsymbol{x}) \;=\; \alpha f(\boldsymbol{x})$$

を満たしたと仮定する．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とするとき，ある定数 a, b が存在して $f(\boldsymbol{x}) = ax_1 + bx_2$ と書けることを証明せよ．同様に，写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が上の性質を満たすとき，ある 2 次正方行列 A が存在して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書けること証明せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

平均値の定理と Taylor 展開

作成日：June 27, 2005　Version：1.2

今後の予定

- 7/4(月): 微分と積分の計算．宿題なし（テスト勉強）．レポート問題あり．
- 7/11(月): 授業最終日．微分方程式，第三回小テスト．宿題再提出，レポート締め切り日．
- 7/15, 22, 29(金) 11:30-13:00: オフィスアワー（Cafe David），小テスト等返却．これらの日に取りに来なかった場合はこちらで処分します．

平均値の定理

平均値の定理（by コーシー）　関数 $f(x), g(x)$ が $[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能とする．任意の $x \in (a,b)$ に関して $g'(x) \neq 0$ ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす $c \in (a,b)$ が存在する.（通常は $g(x)=x$ として，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ の形で十分.）

問題 1. 上の $f(x)$，$g(x)$ に対し曲線 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ $(a<t<b)$ で表される xy 平面上の曲線 C を考える．

(1) 曲線 C 上の $t=c$ における速度ベクトル（方向ベクトル）を求めよ．

(2) 上の平均値の定理の幾何学的な意味づけを与えよ．

問題 2. $\lim_{x\to\infty} f'(x) = a$ のとき

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x+1)-f(x)\} = a$$

が成り立つことを示せ．

展開の意味

問題 3. $f(x) = x^3$ を考える．

(1) $f(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$ となるよう各 a_i の値を定めよ．

(2) $x=1$ における $f(x)$ の接線の方程式 $y = g_1(x)$ を求めよ．このとき，$g_1(1) = f(1)$ かつ $g_1'(1) = f'(1)$ を確かめよ．

(3) $g_2(1) = f(1)$, $g_2'(1) = f'(1)$ かつ $g_2''(1) = f''(1)$ となる 2 次関数 $g_2(x)$ を求めよ．

(4) $(1.02)^3$ と，近似値 $g_1(1.02)$, $g_2(1.02)$ を比較せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

Taylor 展開

テイラーの定理 点 a を含む区間 $I \subset \mathbb{R}$ において関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとする．このとき，$x = a$ において $f(x)$ は $(n-1)$ 次多項式

$$F_n(x) \; = \; f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

で近似される．特に各 $x \in I$ に対して，誤差 $R_n := f(x) - F_n(x)$ は x と a の間にある正体不明の数 c を用いて

$$R_n \; = \; \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

と書ける．$f(x) = F_n(x) + R_n$ の形の表記を **$f(x)$ の $x = a$ における n 次のテイラー展開**という．

問題 4. 上の定理において，$f(x)$ と $F_n(x)$ とは $x = a$ における 0 階から $n-1$ 階までの微分が全て一致することを確認せよ

問題 5. 上の定理において，$f^{(n)}(x)$ が I 上で連続と仮定する．このとき，

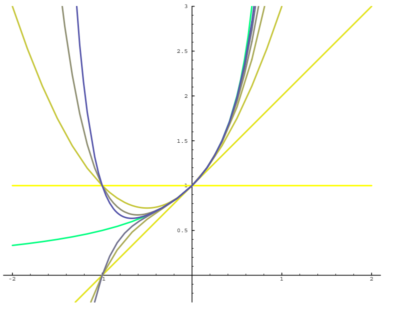
$$R_n \Big/ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \to 0 \ (x \to a)$$

を示せ．

問題 6.

(1) $f(x) = x^3$ の $x = 1$ における 1 次から 4 次までのテーラー展開をもとめよ．

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ の $x = 0$ における n 次テーラー展開をもとめよ．



今週の宿題コーナー

問題 10-1　$n = 3$ とおいてテーラーの定理を証明しよう．

(1) $F(x) := f(x) - \left\{ f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \right\}$ とおく．(すなわち，$F(x) = f(x) - F_3(x) = R_n$.) このとき，以下を示せ：

(ア) $F(a) = F'(a) = F''(a) = 0$.

(イ) $F^{(3)}(x) = f^{(3)}(x)$.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(2) $F(x)$ と $G(x) = (x-a)^3$ に平均値の定理を適用して，

$$\frac{F(x)}{(x-a)^3} = \frac{F'(x_1)}{3(x_1-a)^2} = \frac{F''(x_2)}{3\cdot 2(x_2-a)} = \frac{F^{(3)}(x_3)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

となる $a \le x_3 \le x_2 \le x_1 \le x$ もしくは $x \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le a$ が存在することを示せ．

(3) （イ）を用いて，$f(x)$ の 3 次テーラー展開を求めよ．

問題 10-2　$f(x) = x^3 - 3x$ にテーラーの定理を適用しよう．

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け．(出来るだけ丁寧に，正確に．)

(2) $x = -1$ における近似多項式 $F_1(x)$，$F_2(x)$，$F_3(x)$ とそのグラフを描け．

(3) $x = 0$ における近似多項式 $F_1(x)$，$F_2(x)$，$F_3(x)$ とそのグラフを描け．

今週のレポート問題

レポート問題 10-1　先週のプリント（K209）の問題 1 を解け．さらに，$x = 0$ において $f(x)$ は微分可能でないことを示せ．

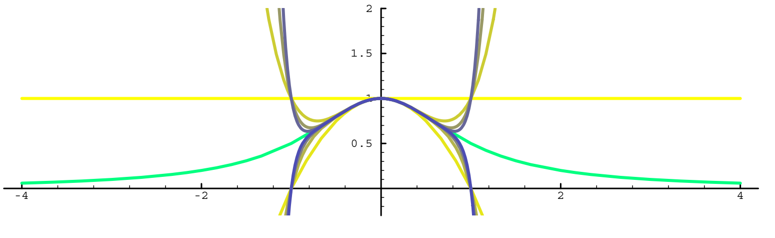
レポート問題 10-2

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ の $x = 0$ における $2n$ 次テーラー展開をもとめよ．

(2) 上のテーラー展開から剰余項を除いた部分を $P_n(x)$ とおく．このとき，

- $-1 < x_0 < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} P_n(x_0) \to f(x_0)$
- $|x_0| > 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} P_n(x_0)$ は存在しない（発散）

を示せ．



レポート問題 10-3　$f(x)$ を 2 階微分可能な関数とする．このとき $f''(a) \neq 0$ であれば，1 次テーラー展開

$$f(x) = f(a) + f'(a)(c)$$

において，$x \to a$ のとき $\dfrac{c}{a+x} \to \dfrac{1}{2}$ を示せ．すなわち，$x \approx a$ のとき，$c \approx \dfrac{a+x}{2}$ が成り立つ．(Hint. $f(x)$ の 2 次テーラー展開と $f'(x)$ の 1 次テーラー展開を比較する．)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

微分と積分の計算

作成日：July 4, 2005　Version：1.0

今後の予定

- 7/11(月): 授業最終日．微分方程式，第三回小テスト．宿題再提出，レポート締め切り日．
- 7/15, 22, 29(金) 11:30-13:00: オフィスアワー（Cafe David），小テスト等返却．これらの日に取りに来なかった場合はこちらで処分します．

逆三角関数

問題 1. 次の関数のグラフを描け．(以下，逆三角関数の値域はこのように取る．)

(1) $\sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

(2) $\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$

(3) $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

また，これらの関数を微分せよ．

問題 2. 次の関数を微分せよ．

(1) x^α　(2) α^x　(3) $x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x$

(4) x^{x^x}　(5) $\tan^{-1} \dfrac{x-1}{x+1}$　(6) $x\sqrt{x^2+1} + \log|x + \sqrt{x^2+1}|$

積分の計算

問題 3. (部分分数展開)

(1) $\dfrac{t^2 - t + 2}{t\,(t+1)^2} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t+1} + \dfrac{C}{(t+1)^2}$ となるような A, B, C を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{t^2 - t + 2}{t\,(t+1)^2}\,dt$ を求めよ．

問題 4. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\,\cos^3 x}$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx$　(4) $\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$　(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

今週の宿題コーナー

来週 (7/11) は第 3 回小テストなので，テスト勉強を宿題とします．テストでは手書きノートに限り参照を許可するので，自分なりに要点をまとめたノートを作ってきましょう．(ノートの提出・採点はしません．)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週のレポート問題

レポート問題 11-0　今日の授業でやらなかった問題を全て解け.

レポート問題 11-1　定積分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 + 5\sin x}$$

を計算せよ．(Hint: $t = \tan \dfrac{x}{2}$ とおく．)

レポート問題 11-2　連続関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_0^x (x - t) f(t)\, dt$$

を微分せよ．(Hint: 次の定理を用いる．)

> **微分積分学の基本定理**　ある区間 I で連続な関数 $f(x)$ に対して
>
> $$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$
>
> が成り立つ．ここで $a \in I$ は定数.

レポート問題 11-3（ケーリー・ハミルトンの定理）

(1) 任意の 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E \;=\; O$$

が成り立つことを示せ．ただし E, O はそれぞれ単位行列，零行列である．

(2) 以下 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とする．<u>上の式を用いて</u> A^2, A^4, A^8 を求めよ．

(3) （発展） A^n を求めよ．(Hint: t^n を $t^2 - 7t + 10$ で割ったあまりを考える．)

（問題２・３・４の答え）

問題 2

(1) $\alpha\, x^{\alpha - 1}$　(2) $\alpha^x \log \alpha$　(3) $2\sqrt{1 - x^2}$

(4) $x^{x^x}\, x^x \left\{\log x(\log x + 1) + \frac{1}{x}\right\}$　(5) $\dfrac{1}{1 + x^2}$　(6) $2\sqrt{1 + x^2}$

問題 3

$\log \dfrac{t^2}{|t + 1|} + \dfrac{4}{t + 1}.$

問題 4

(1) $2\sqrt{1 + x} + \log \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{1 + x} + 1}$　(2) $\dfrac{1}{2} \tan^2 x + \log|\tan x|.$　(3) $\log x\,(\log(\log x) - 1)$

(4) $\dfrac{x}{2}(\sin(\log x) - \cos(\log x))$　(5) $x - \log(1 + e^x)$　(6) $-\sin^{-1} \frac{1}{x}$