担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

演習について

作成日：April 13, 2007　Version：1.0

担当教官： 川平　友規（かわひら　ともき，助教, kawahira@math.nagoya-u.ac.jp, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses.htm）

担当 TA： 堀　智（ほり　さとる，M1，m07048i@math.nagoya-u.ac.jp）

演習の進め方： 毎回，問題のプリントを配布します．私（川平）が基本事項を確認したあと，問題を指定し，各自ノートに解いてもらいます．その後，私が黒板で解説する，という流れです．

配布した問題のすべてを演習で扱うとは限りません．扱わなかった問題については，**自分で解いた上で解答が欲しい場合のみ**，下記のオフィスアワーの時間等に私か TA に聞きに来てください．口頭で解説します．

演習で取り上げるテーマ： 高校数学から大学数学への橋渡しをすることが目標です．具体的には，

(1) 数列・級数	(2) 微分方程式の基礎	(3) １変数の積分計算
(4) 平面の１次変換	(5) 空間図形の方程式	(6) 多項式の計算

を**直感的に理解し，計算ができるようになること**を当面の目標とします．さらに，自分の行った計算過程を**数学的に整備された形で（他人にも分かるように）記述できるようになること**も重要な目標です．

演習と講義は独立したものと考えられています．したがって，講義で扱わない内容を演習で扱うこともありますし，逆もありえます．

単位・成績： 成績に関係のある要素は，**出席回数，小テストの点数，宿題の提出（とその内容），および，レポートの提出**です．成績の優・良・可は以下の基準で定めます．

- 上にあげた 4 つの要素のうち，出席を 60 点満点，小テストを 15 点満点，宿題を 25 点満点として点数化する．自発的なレポートの提出により，最大で 20 点まで加点する．
- 成績は 60 点未満を不可，60 − 74 点を可，75 − 89 点を良，90 点以上を優とする．

したがって，ただ出席するだけでは良い単位が取れません．出席，小テスト，宿題と，バランスよくこなしましょう．

出席： 授業の前半に出席を取ります．3 回までの遅刻・欠席は，事前に email 等で私に連絡し，かつやむを得ない事情だと判断される場合に限り，加点します．

小テスト： 皆さんの理解度を確認するため，前期の間に 3 回，30 分程度の小テストを行います．出題内容は，演習でやった問題をベースにした基本的な問題です．

宿題： 宿題はほぼ毎回出題されます．提出様式は，**A4 レポート用紙を使用し，必ず表紙をつけ，そこに名前，学籍番号，解いた問題の番号（『宿題 x-x』），提出日を記入**してください．また，**左上をホチキスでとめて**提出してください．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題の提出期限は次の演習の開始時間まで，提出場所は教室（理 1-509）とします．提出期限に間に合わなかった宿題は後日提出してもかまいませんが，その分減点されます．もし何らかの事情で授業時に提出できない場合，事前に email 等で連絡の上．(1) 川平の office(A439) に直接持ってくるか，(2) 事務室に提出してください．

レポート： やや進んだ内容の問題をレポート問題として出題します．レポートの提出は任意ですが，提出されたレポートの質を判断して，成績にボーナス加点していきます．レポートには提出期限を設けません．提出場所は教室です．提出様式は宿題の提出様式（A4 レポート用紙使用，必ず表紙をつける，etc.）に準じます．ただし，たとえ同じ日に提出する場合でも，**レポートと宿題は必ず分けて提出してください．**（採点者が異なります.）

授業でやらなかった問題を自発的に解いた場合，レポートとして提出してください．

オフィスアワー： 授業中，授業後のの質問は大歓迎です．それ以外の時間に質問したい場合は，オフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を活用してください．私のオフィスアワーは**毎週木曜日 11:30-13:00，場所は Cafe David（理学部 1 号館 2 階エレベーター前）**です．私とその他のスタッフも待機しているので，自由に質問してください．木曜日以外の昼休みにも Cafe David は開店しているので，どんどん活用しましょう．有識者への質問は，問題を解決するのにもっとも有効な手段です．自力で解決することにこだわらず，宿題や試験勉強はスマートにこなしましょう．

上記以外の時間に質問したい場合は，必ず事前に email 等で appointment を取るようにしてください．

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体　(2) $\mathbb{R}$: 実数全体　(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体　(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体　(6) $x \in \mathbb{R}$: x は実数

ギリシャ文字

(1) α: アルファ　(2) β: ベータ　(3) γ, Γ: ガンマ　(4) δ, Δ: デルタ　(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ　(7) η: エータ　(8) θ, Θ: シータ　(9) ι: イオタ　(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ　(12) μ: ミュー　(13) ν: ニュー　(14) ξ, Ξ: クシー　(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ　(17) ρ: ロー　(18) σ, Σ: シグマ　(19) τ: タウ　(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ　(22) χ: カイ　(23) ψ, Ψ: プサイ　(24) ω, Ω: オメガ

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

複素数と複素平面

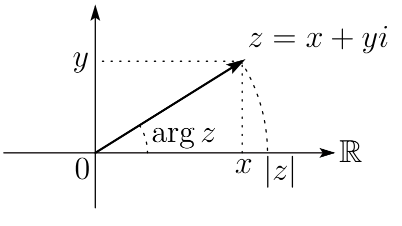
作成日：April 13, 2007　Version：1.1

◎今後の予定．　4/23：休講，4/30：祝日，5/7：数列の極限

複素数と複素平面

- 複素数 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$, i は虚数単位) を xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 (x, y) の別名だと思うと，xy 平面は複素数全体とみなせる．その意味で複素数全体のことを**複素（数）平面** (complex plane) と呼び，$\mathbb{C}$ であらわす．
- したがって，x 軸は実数の全体 $\mathbb{R}$ の別名である．これを，**実軸** (real axis) とも呼ぶ．
- 複素数 z に対し，z と原点 0 を結んだ線分の長さ $\sqrt{x^2+y^2}$ を $|z|$ で表し，複素数の**絶対値** (absolute value) もしくは**長さ** (modulus) とよぶ．
- また，$z \neq 0$ と実軸のなす角を $\arg z$ と表し，z の**偏角** (argument) と呼ぶ．[a]

[a] 偏角には 2π の整数倍を自由に足せると約束しておく．



問題 1. 複素数 $z \neq 0$ について，$|z| = r > 0$ かつ $\arg z = \theta \in \mathbb{R}$ が成り立つとき，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と書けることを確かめよ．

問題 2. 方程式 $z^4 - 1 = 0$ および $z^3 - 1 = 0$ のすべての解を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の形で表せ．

複素数の積とド・モアブルの定理

問題 3. $z = 3 + 4i$ に対し，zi, $-z$ $-zi$ をそれぞれ図示せよ．

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = R(\cos\phi + i\sin\phi)$ とするとき，

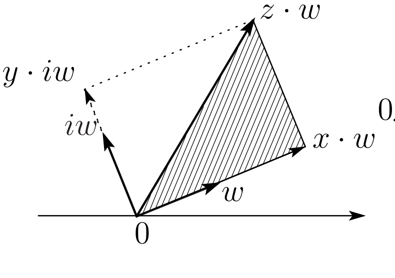
$$z \cdot w \;=\; rR(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)) \tag{1}$$

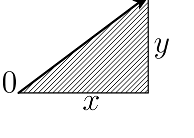
が成り立つ.（すなわち，$|zw| = |z||w|$, $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ である.）また $n = 0, 1, 2, \cdots$ とすると，次の**ド・モアブルの公式**が成り立つ：

$$z^n \;=\; r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

問題 4. 枠内の式 (1) を証明せよ．

$z = x + yi$ に対し，$zw = xw + y(iw)$ と考えてみる．iw が w の 90 度回転であることを思い出すと，(1) 式の図形的な証明も思い浮かぶ.（右図参照）





担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

複素数の列

問題 5. $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，$a_n = \left(\dfrac{i}{2}\right)^n$ と定める．

(1) a_0，$a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$，$a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ を図示せよ．

(2) $S_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ とおく．このとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

ここでは複素数列の図形的な感覚を軽くつかんでもらった．この感覚は後日，次の**オイラーの公式**を証明するときに役に立つ：θ を実数とするとき，

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

今週の宿題・レポート

宿題 1-1. ド・モアブルの公式を数学的帰納法により証明せよ．

宿題 1-2. $z = x + yi$ に対し，$\bar{z} = x - yi$ を z の**共役（きょうやく）複素数**と呼ぶ．このとき．以下の式を示せ：

(1) $|z|^2 = z\bar{z}$

(2) $\arg\bar{z} = -\arg z$

(3) $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ (これを z の**実部**とよび，$\mathrm{Re}\,z$ であらわす．)

(4) $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ (これを z の**虚部**とよび，$\mathrm{Im}\,z$ であらわす．)

レポート問題 1. 複素平面上の 3 点 $0, z, w$ が正三角形をなすための必要十分条件は

$$z^2 - zw + w^2 = 0$$

が成り立つことである．これを証明せよ．(Hint: $0, z, w$ が正三角形のとき，z/w の絶対値と偏角を考えてみよ.)

発展. 余裕があれば，次の問題も考えてみよ：複素平面上の 4 点 $0, z, w, u$ がこの順番である正方形の 4 頂点を左回りもしくは右回りに定めるための必要十分条件を（連立）方程式の形で与えることはできるだろうか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数列の収束

作成日：May 2, 2007　Version：1.1

◎今後の予定．　5/14：級数の収束，5/21: オイラーの公式，小テスト

数列の極限

問題 1. 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$

実数の連続性の公理　「単調増加」で「上に有界」な実数列

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le M$$

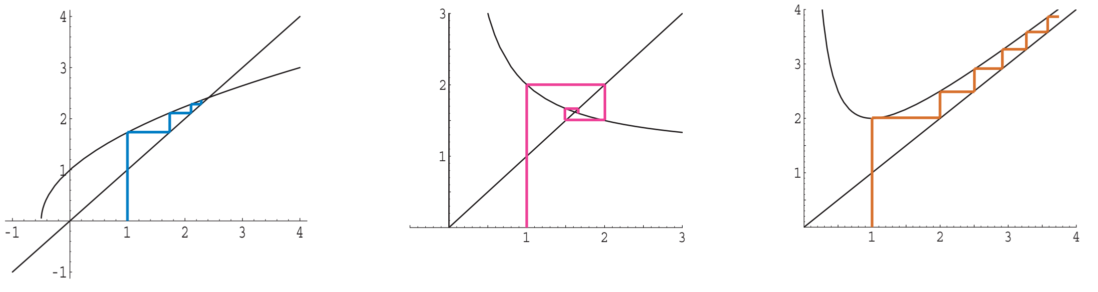
は収束する．すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\,(\le M)$ が存在する．

問題 2. 次の漸化式で定まる数列は収束するか？ 収束するならばその極限を求めよ．

(1) $a_{n+1}=\sqrt{2a_n+1},\ a_1=1$　　(2) $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n},\ a_1=1$

(3) $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n},\ a_1=1$

Hint の図：



問題 3. $k\in\mathbb{N}$ とするとき，$C_k := \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$ を求めたい．

(1) $j\in\mathbb{N}$ のとき，$\displaystyle\int_{j-1}^{j} x^k dx < j^k < \int_{j}^{j+1} x^k dx$ であることを確かめよ．

(2) $\displaystyle\int_0^n x^k dx < \sum_{j=1}^{n} j^k < \int_1^{n+1} x^k dx$ を示せ．

(3) C_k を求めよ．

注意：　実は $k\in\mathbb{N}$ であることは本質的でなく，$k\ge 0$ であればよい．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題

宿題 2-1　$\alpha \geq 1$ に対し，$a_n = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + \cdots + \dfrac{1}{n^\alpha}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = 1$ のとき，$y = \dfrac{1}{x}$ のグラフを利用することで，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty \text{（発散）}$$

を示せ．

(2) $\alpha > 1$ のとき，$y = \dfrac{1}{x^\alpha}$ のグラフを利用することで極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

が存在することを示せ.（Hint: a_n が「単調増加」かつ「上に有界」であることを示せばよい.）

宿題 2-2　$a_1 = 1$，$a_2 = 4$ とする．このとき，a_1 と a_2 の数直線上での中点を a_3 とおく．以下同様に，a_n，a_{n+1} の中点を a_{n+2} と置くとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在するか？存在するならばその極限を求めよ．

レポート問題 2　上の問題 1 の a_n について，$\alpha = 1$ のとき

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ とおく．$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) = 0$ を示せ．

(2) $c_n = a_n - \log n$ とおく．このとき極限 $\lim_{n\to\infty} c_n$ が存在することを示せ．

Hint: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$.

まめちしき：ちなみに c_n の極限 $\lim_{n\to\infty} c_n$ はオイラー定数と呼ばれ，値はおよそ
0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576723488485...
である．この数が有理数か無理数か，いまだに知られていない．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

級数の収束

作成日：May 12, 2007　Version：1.1

今後の予定

- 5/21：オイラーの公式，小テスト
- 5/28：空間内の平面と直線

今日は級数の収束を考えます．特に，絶対収束に関するセンスを磨きましょう．ここでは複素数の数列を扱います．そのまえに...

TA の堀さんから，**宿題の採点基準**が発表されました：

- 毎週 50 点満点で採点する．
- 各問の配点は問題の難易度等を考慮して決める．
- 締め切りを過ぎて提出された宿題は点数を半減する．(小数点以下切り捨て)

級数＝折れ線

ある数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$（実数列 or 複素数列）があるとき，**（無限）級数** (series) を，式として以下のように定める：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n).$$

このとき，**右の極限が存在するとは限らない**のは $a_n = n$ などとおけば明らかであろう．極限が存在するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する**といい，存在しないとき**発散する**と言う．

これから実数の級数と複素数の級数を同時に扱うが，実数は複素数なので**複素数の級数で成り立つことは実数の級数でもなりたつ**ことに注意しよう．

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とは，複素平面で考えると 0 から $+a_1$ 進み，さらに $+a_2$ 進み，さらに $+a_3$ 進み$\cdots$ と無限に繰り返していったものだと考えられる．これらを矢印で結び折れ線を描けば，その様子が幾何学的に見て取れるようになる：

問題 1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を以下のように定める．このとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散を直感的に判定せよ．

(1) $a_n = (-1)^{n+1}$　(2) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$　(3) $a_n = \dfrac{i^n}{n}$　(4) $a_n = \dfrac{i^n}{2^n}$

ちなみに $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots = \frac{\pi}{4}$ であることが知られている．

問題 2. 上の問題の各 a_n で，級数に対応する折れ線のトータルの長さはどうなるか？(Hint: (2) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} > \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$)

級数に対応する折れ線のトータルの長さが有限ならば，その級数は収束するに違いない（というか，発散のしようがない）ことは直感的に明らかであろう．すなわち，

定理　$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき，級数 a_n は**絶対収束する**と呼ばれる．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

注意. この定理の逆は成立しない．すなわち，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **が収束するからと言って，**$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **が絶対収束するとはかぎらない．** 例えば，$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2$ であるが，これは絶対収束していない．すなわち，長さの無限大の折れ線が $\log 2$ に向かって折りたたまれていく感じである．

問題 3. 上の定理を用いて，問題 1 の (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n}$ が収束することを示せ．

問題 4. 任意の複素数 z を固定する．このとき，上の定理を用いて，

$$C(z) \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ = \ 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$$

が収束することを示したい．明らかに，$z \neq 0$ のとき証明すれば十分である．$n=0,1,2,\ldots$ に対し，$c_n := (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ と定める．

(1) $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ を求めよ．

(2) $n \geq |z|$ ならば $|c_{n+1}| < \frac{|c_n|}{4}$ と出来ることを示せ．

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ は収束することを示せ．したがって $C(z)$ は収束する．

> **まめしちき**　x が実数のとき，$C(x) \ = \ \cos x \ = \ 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$ である．

今週の宿題・レポート

宿題. 来週（5/21）は授業のはじめに 30 分の小テストをやるので，テスト勉強を今週の宿題とします．自筆ノート（コピー不可）に限り参照を許可するので，要点をまとめた手書きノートを作ってくると良いでしょう.（ノートの提出，採点はしません.）

レポート問題 3. 級数

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots$$

は $\alpha>1$ のとき収束し，$\alpha \leq 1$ のとき発散する．これを利用して，以下の問に答えよ．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束するが $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないような例を作れ.（理由を説明すること.）

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するが $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束しないような例を作れ.（理由を説明すること.）

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

作成日：May 12, 2007　Version : 1.1

今日はオイラーの公式を（形式的に）チェックしてみましょう.

今後の予定

- 5/28：空間内の平面と直線
- 6/4: 行列とベクトルの計算

オイラーの公式　実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し，$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が成り立つ.

任意の複素数 z に対し，級数

$$\begin{aligned} C(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \\ S(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \\ E(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

は収束する. (証明するには，絶対収束性をチェックすればよい.) よって，z を決めると $C(z)$, $S(z), E(z)$ という値がそれぞれ決まるから，これらは関数だと思うことができる．以下では次の事実を用いてオイラーの公式を示そう：

事実 1：級数 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ が任意の実数 x で収束するとき，

- $f(x)$ は x の関数として連続かつ微分可能
- 級数 $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$ も収束し，その極限値は $f'(x)$ である. (**項別微分可能**)

問題 1. 任意の実数 x について，級数 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ は収束すると仮定する．このとき，$f(0) = 1$ かつ $f'(x) = f(x)$ ならば，$f(x) = E(x)$ であることを示せ.

事実 2　$f(0) = 1$ かつ $f'(x) = f(x)$ となる関数は，$f(x) = e^x$ しかない.

このことから，今後は級数 $E(z)$ を形式的に e^z と書くことにする．これは $z = x \in \mathbb{R}$ ならば普通の e^x と同じである.

問題 2. 任意の実数 x を固定する．このとき，$e^{ix} = E(ix) = C(x) + iS(x)$ となることを示せ.

$C(x)$, $S(x)$ の正体はわからない，ということにして，続きは宿題で：

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

宿題 4-1. 今実数 x に対し，$e^{ix} = C(x) + iS(x)$ はある複素数である．まずは e^{ix} の絶対値をもとめよう．

(1) x を実数とする．級数 $C(x)$, $S(x)$ を項ごとに x で微分し，$C'(x) = -S(x)$, $S'(x) = C(x)$ を示せ．

(2) 関数 $L(x) = |e^{ix}|^2 = C(x)^2 + S(x)^2$ を x で微分することで，$|e^{ix}| = 1$ を示せ．

(3) つぎに，e^{ix} の偏角をもとめよう．まず，$\arg e^{ix} = \Theta(x)$ とおく．いま実部と虚部の関係から，

$$\tan\Theta(x) \;=\; \frac{S(x)}{C(x)} \tag{a}$$

は明らかである．式 (a) の左辺について，

$$\frac{d}{dx}\tan\Theta(x) \;=\; \frac{\Theta'(x)}{C(x)^2}$$

を示せ．また，式 (a) の右辺について，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{S(x)}{C(x)}\right) \;=\; \frac{1}{C(x)^2}$$

を示せ．(Hint: (2) の結果より，$C(x)^2 + S(x)^2 = 1$.)

上の結果より，$\Theta'(x) = 1$ を得る．$\Theta(0) = \arg e^{i0} = 0$ と仮定してよいので，$\Theta(x) = x$ を得る．以上より，e^{ix} は絶対値 1 ，偏角 x の複素数であるから，$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ がなりたつ．特に，$C(x) = \cos x$ および $S(x) = \sin x$ も導かれる． □

レポート問題 4　任意の複素数 z に対し，級数

$$e^z \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \;=\; 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

は収束することを示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

空間内の平面と直線

作成日：May 27, 2007　Version：1.1

今回は空間図形の方程式を扱います．平面図形の方程式と似ている部分，似てない部分を意識しましょう．

今後の予定

- 6/4: 行列とベクトルの計算
- 6/11: 一次変換と線形写像

問題 1. (ウォーミングアップ) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の互いに平行でないベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \neq \boldsymbol{0}$ を考える．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対しある実数の組 (s,t) が存在して，$\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2$ と表されることを確認せよ．さらに，(s,t) が以下の関係式を満たすときの $\boldsymbol{x}$ の軌跡を求めよ．

(1) $t = 2s$　　(2) $t = 2s+1$　　(3) $t = s^2$　　(4) $s^2 + t^2 = 1$

復習 $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, y_1, z_1),\ \boldsymbol{x}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ に対して：

（内積）　$\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

（ベクトルの長さ）　$|\boldsymbol{x}_1| = \sqrt{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$

（２点の距離）　$|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$

（角度）　$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_1|\,|\boldsymbol{x}_2|}$

（直交）　$\boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{x}_2 \iff \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0.$

平面 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中の平面 H と，その上の点 $\boldsymbol{x} = (x,y,z) \in H$ を考える．

- **（方程式）** 平面 H が $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り，その法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = (a,b,c)$ であるとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \quad &\iff \quad a(x-x_0) + b(y-y_0) + z(z-z_0) = 0\\ &\iff \quad ax + by + cz + d = 0 \quad (d = -ax_0 - by_0 - cz_0)\end{aligned}$$

- **（パラメータ表示）** 平面 H が $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り，２つの平行でないベクトル $\boldsymbol{u}_1 = (u_1, v_1, w_1),\ \boldsymbol{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$ を含むとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_0 + s\,\boldsymbol{u}_1 + t\,\boldsymbol{u}_2 \quad (s,t \in \mathbb{R})\\ \iff \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (s,t \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

問題 2. 次の方程式で定まる平面のパラメータ表示を求めよ．

(1) $3x - 2y + z = 0$　　(2) $3x - 2y + z - 4 = 0$

(3) $x = 0$　　(4) $x + y - 1 = 0$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

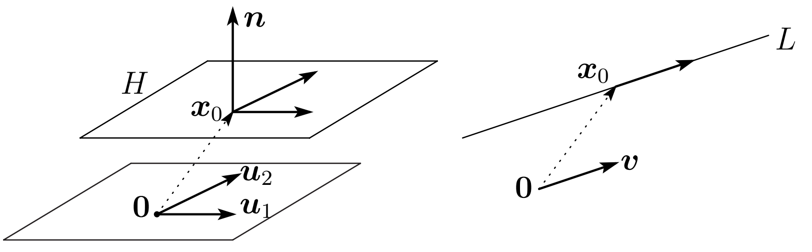


図 1: 平面 H と直線 L

問題 3. 次のパラメータ表示で定まる平面の方程式を求めよ．

(1)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (s,\ t \in \mathbb{R})$$

(2)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (s,\ t \in \mathbb{R})$$

直線　3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中の直線 L と，その上の点 $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in L$ を考える．

- **（パラメータ表示）**　直線 L が $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ に平行であるとき

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\,\boldsymbol{v} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

- **（方程式）**　上のパラメータ表示からパラメータ t を消去すると，方程式

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{2}$$

を得る．(直線は「2 平面の交わり」とみなされる．)

問題 4. 次の各直線について他の表示を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$　　(2) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+3}{5}$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

（外積）　2 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し，外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を次のように定義する：

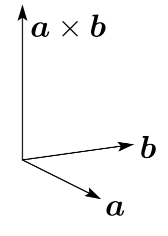
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \ := \ (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

このとき，以下が成り立つ：

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも直行する.

(2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向きは $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ に重ねる回転に関して「右ねじ的」に定まり，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ を満たす.

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき，$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta =$（$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で貼られる平行四辺形の面積）



問題 5. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を確かめよ.

問題 6. 以下の外積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

今週の宿題・レポート

宿題 5　以下の性質を満たす平面または直線の方程式を求めよ.

(1) 3 点 A:$(1, 0, 1)$, B:$(-1, 1, 1)$, C:$(0, 1, -1)$ を通る平面

(2) 点 A:$(-2, 1, 2)$ を通り，ベクトル $(1, 3, 1)$ に垂直な平面

(3) 2 点 A:$(1, 2, 3)$, B:$(4, 4, 4)$ の垂直二等分面

(4) 2 点 A:$(1, 2, 3)$, B:$(4, 4, 4)$ を通る直線の方程式

(5) 点 A:$(-2, 1, 2)$ を通り，ベクトル $(1, 3, 1)$ に平行な直線

レポート問題 5　平面 $H : ax + by + cz + d = 0$ と点 $P : (x_0, y_0, z_0)$ の距離 δ は

$$\delta \ = \ \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

で与えられる．これを証明せよ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

行列とベクトルの計算

作成日：June 1, 2007　Version：1.2

今回は簡単な行列の積により「行列の基本変形」が実現されることをチェックします.

今後の予定

- 6/11: 一次変換と線形写像（宿題なし）
- 6/18: 小テスト，関数の連続性と微分

問題 1. (ウォーミングアップ) 次の行列とベクトルの計算をせよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

問題 2. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ.

(2) このとき，積 $A\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ をどのように変形したものか？

(3) A の逆行列 A^{-1} が存在するための条件は？存在する場合，A^{-1} を求めよ.

問題 3. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) このとき，積 $B\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の x 座標と y 座標を入れ替えることを示せ.

(2) $B^{-1} = B$ であることを説明せよ.

(3) $\boldsymbol{x}$ の y 座標と z 座標を入れ替える行列，z 座標と x 座標を入れ替える行列は何か？

問題 4. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) このとき，積 $C\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の x 座標に z 座標の k 倍を加えたものになることを示せ.

(2) C^{-1} を求めよ.

(3) $\boldsymbol{x}$ の y 座標に x 座標の k 倍を加える行列を求めよ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

次のような 3 タイプの行列を，**基本行列**と呼ぶ．

(1) タイプ I：左から掛けると，ある行が k 倍される．

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

(2) タイプ II：左から掛けると，ある 2 つの行が交換される．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) タイプ III：左から掛けると，ある行にある行の k 倍が加わる．

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$ ただし，$*$ のうち 1 つは定数 $k \neq 0$，残りは 0

連立方程式

問題 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とし，次の連立方程式を考える：

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ 2x-y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) これを代入法を使わずに解け．　(2) これを行列をかける操作に対応付けよ．
(3) A を基本行列の積で表せ．　(4) A の逆行列を求めよ．

今週の宿題・レポート

宿題 6-1. 行列 A を基本変形し，逆行列をもとめよ．また，A を基本行列の積で表せ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

レポート問題 6　xy 平面内の正三角形 $\triangle$ABC を考える．$\triangle$ABC 上の点 P(x, y) から，各辺におろした垂線の長さの和は一定であることを示せ．これを用いて，

$$\text{P が正三角形 } \triangle\text{ABC 上にある} \iff f(x,y) = 0$$

となるような x と y の式 $f(x, y)$ を求めよ．さらに余力があれば，この結果を xyz 空間内の正四面体に拡張せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

一次変換と線形写像

作成日：June 11, 2007　Version：1.1

線形写像の性質を理解しましょう．一般に写像が与えられたとき，それがどんな性質（量）を保存する（しない）のか，注意することが重要です．

今後の予定

- 6/18: 小テスト，関数の連続性と微分
- 6/25：平均値の定理と Taylor 展開

一次変換（線形写像）

$\mathbb{R}^n$ 内のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，n 次正方行列 A との積 $A\boldsymbol{x}$ を対応させると，写像

$$\begin{array}{rccc} f_A : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & \boldsymbol{x} & \mapsto & A\boldsymbol{x} \end{array}$$

が定まる．このような写像を**一次変換**と呼ぶ．f_A は次のような性質をもつ．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ および任意の実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，

(L1)　$f_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f_A(\boldsymbol{x}) + f_A(\boldsymbol{y})$　：「和の像は像の和」

(L2)　$f_A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f_A(\boldsymbol{x})$　：「定数倍の像は像の定数倍」

問題 1. 任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$，および以下の 2 次正方行列 A に対し，$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が (L1) と (L2) を満たすことを確かめよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 2. 逆に，ある写像 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が (L1)，(L2) を（f_A を F に置き換えた上で）満たしたとする．このとき，ある行列 $A_F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して，$F(\boldsymbol{x}) = A_F\boldsymbol{x}$ と書けることを示せ．(Hint: $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおいてみよ.)

ある写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が (L1)，(L2) を（f_A を F に置き換えた上で）満たすとき，一般に**線形写像**と呼ぶ．$m = n$ のときが，正方行列による一次変換である．

問題 3. 任意の線形写像 $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$（$m$, n は自然数）に対し，$F(\mathbf{0}_m) = \mathbf{0}_n$ を示せ．ただし，$\mathbf{0}_n$ は $\mathbb{R}^n$ のゼロベクトルである．

問題 4.

写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を以下のように定めるとき，それが線形写像かどうか判定せよ．すなわち，(L1) と (L2) が両方成り立つかどうかチェックせよ．

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{3}\,x$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \overset{f}{\longmapsto} \sin x$

(3) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

(4) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix}x-y\\y-z\end{pmatrix}$

(5) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix}x+1\\y-1\\x+y\end{pmatrix}$

格子で視ると..

問題 5. $m,\ n\in\mathbb{Z}$ に対し，$\mathbb{R}^2$ 上の直線群

$$\ell_1^m : x = m,\quad \ell_2^n : y = n$$

を考え，これらの全体を $\mathbb{R}^2$ の基本格子 Λ と呼ぶことにする．このとき，**問題 1** の三つの行列 A に対し，線形写像 f_A による Λ の像 $f_A(\Lambda)$ を求め，図示せよ．

問題 6. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ とするとき，$f_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ による次の図形の像を図示せよ．

(1) 線分 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad(-1\le t\le 1)$

(2) 円 $x^2+y^2=4$

今週の宿題・レポート

宿題． 来週は第 2 回小テストなので，テスト勉強を宿題とします．テストでは手書きノートに限り参照を許可するので，自分なりに要点をまとめたノートを作ってきましょう.（ノートの提出・採点はしません.）

レポート問題 7-1. xy 平面 $\mathbb{R}^2_{xy}$ をある線形写像 f で XY 平面 $\mathbb{R}^2_{XY}$ に写したら，$\mathbb{R}^2_{xy}$ 全体が直線 $Y=2X$ に写ってしまった．このとき，$f=f_A$ となる 2 次正方行列 A として考えられるものを全て見つけよ．

レポート問題 7-2. 複素平面 $\mathbb{C}$ は $z=x+yi$ を (x,y) の別名と思うことで $\mathbb{R}^2$ と同一視できるのであった．任意に 0 でない複素数 $\alpha=re^{i\theta}$ を固定するとき，写像

$$F_\alpha : \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,z\\\mathrm{Im}\,z\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\alpha z\\\mathrm{Im}\,\alpha z\end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^2$ から自身への線形写像となることを示せ．また，$F_\alpha=f_A$ となる 2 次正方行列 A を与えよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

関数の連続性と微分

作成日：June 18, 2007　Version：1.1

連続であることも微分可能であることも直感的に理解できる性質ですが，数学的な定義を理解することで，視野と応用の幅が断然広がります．

今後の予定

- 6/25：平均値の定理と Taylor 展開
- 7/2: 微分と積分の計算

連続関数

- ある区間 $I=(a,b)$ で定義された関数 $f:I\to\mathbb{R}$ がある点 $x_0\in I$ で**連続**であるとは $x\to x_0$ のとき，$f(x)\to f(x_0)$ が成り立つときを言う．すなわち，

$$f(\lim_{x\to x_0} x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad ：「極限の像は像の極限」$$

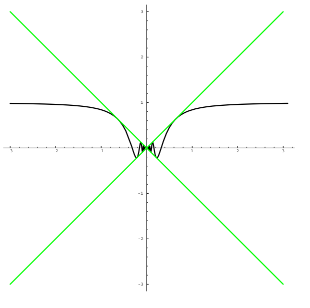
- 任意の $x_0\in I$ で $f(x)$ が連続であるとき，$f(x)$ は I 上連続であるという．

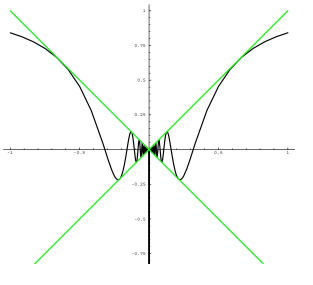
問題 1. 関数 $y=f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ （ただし $f(0)=0$ ）を考える．

(1) $x\to\pm\infty$ のとき，$f(x)\to 1$ を示せ．

(2) $f(x)=0$ となる x を全て求めよ．

(3) $f(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ．





微分

- ある区間 $I=(a,b)$ で定義された関数 $f:I\to\mathbb{R}$ がある点 $x_0\in I$ で**微分可能**であるとは $x\to x_0$ のとき，次の極限が存在するときをいう：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- 任意の $x_0\in I$ で $f(x)$ が微分可能であるとき，$f(x)$ は I 上微分可能であるという．

問題 2. $f(x)=x^3-2x-3$ とする．このとき，次の極限をもとめよ．

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. (線形写像) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を線形写像とする．すなわち，任意の $x,\ y,\ \alpha\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x) \tag{L}$$

を満たしたと仮定する．

(1) 式 (L) のみを用いて，f が任意の $x_0\in\mathbb{R}$ において連続となることを証明せよ．(Hint: $h\to 0$ のとき $f(x_0+h)\to f(x_0)$ を示す．)

(2) 式 (L) のみを用いて，f が任意の $x_0\in\mathbb{R}$ において微分可能となることを証明せよ．

(3) 実はある定数 K が存在して，$f(x)=Kx$ と書けることを証明せよ．

今週の宿題・レポート

問題 8-1

(1) $f(x)$ が偶関数，すなわち $f(x)=f(-x)$ が成り立つとき，$f'(x)=-f'(-x)$ を示せ．

(2) $f(x)$ が奇関数，すなわち $f(x)=-f(-x)$ が成り立つとき，$f'(x)=f'(-x)$ を示せ．

問題 8-2 $f(x)$ を微分可能な関数とする．このとき，次の極限をもとめよ．

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h))^2-(f(x))^2}{h}$　　(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(x+h)}-\sqrt{f(x)}}{h}$ $\quad(f(x)>0)$

レポート問題 8(線形写像) 写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \alpha\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \qquad f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$$

を満たしたと仮定する．$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ とするとき，ある定数 a,b が存在して $f(\boldsymbol{x})=ax_1+bx_2$ と書けることを証明せよ．同様に，写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が上の性質を満たすとき，ある 2 次正方行列 A が存在して $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ と書けること証明せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

平均値の定理とテイラー展開

作成日：June 18, 2007　Version：1.1

今後の予定

- 7/2: 微分と積分の計算
- 7/9: 微分方程式
- 7/16: 祝日，7/23: 最終日，小テスト $+\alpha$

テイラー展開は解析学のもっとも重要な結果のひとつ．まずはその意味を完全に理解しましょう．頑張りどころです．

平均値の定理

平均値の定理（by コーシー）　関数 $f(x), g(x)$ が $[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能とする．任意の $x \in (a,b)$ に関して $g'(x) \neq 0$ ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす $c \in (a,b)$ が存在する.（通常は $g(x)=x$ として，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ の形で十分.）

問題 1. 上の $f(x)$，$g(x)$ に対し曲線 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ $(a<t<b)$ で表される xy 平面上の曲線 C を考える．

(1) 曲線 C 上の $t=c$ における速度ベクトル（方向ベクトル）を求めよ．

(2) 上の平均値の定理の幾何学的な意味づけを与えよ．

問題 2. $\lim_{x\to\infty} f'(x) = a$ のとき

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x+1)-f(x)\} = a$$

が成り立つことを示せ．

展開の意味

問題 3. $f(x)=x^3$ を考える．

(1) $f(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$ となるよう各 a_i の値を定めよ．

(2) $x=1$ における $f(x)$ の接線の方程式 $y=g_1(x)$ を求めよ．このとき，$g_1(1)=f(1)$ かつ $g_1'(1)=f'(1)$ を確かめよ．

(3) $g_2(1)=f(1)$, $g_2'(1)=f'(1)$ かつ $g_2''(1)=f''(1)$ となる 2 次関数 $g_2(x)$ を求めよ．

(4) $(1.02)^3$ と，近似値 $g_1(1.02)$, $g_2(1.02)$ を比較せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

Taylor 展開

テイラーの定理　点 a を含む区間 $I \subset \mathbb{R}$ において関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとする．このとき，$x=a$ において $f(x)$ は $(n-1)$ 次多項式

$$F_n(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

で近似される（**近似多項式**）．特に各 $x \in I$ に対して，誤差 $R_n := f(x)-F_n(x)$ は x と a の間にある正体不明の数 c を用いて

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

と書ける．$f(x)=F_n(x)+R_n$ の形の表記を $f(x)$ **の** $x=a$ **における** n **次のテイラー展開**という．

問題 4. 上の定理において，$f(x)$ と $F_n(x)$ とは $x=a$ における 0 階から $n-1$ 階までの微分が全て一致することを確認せよ

問題 5. 上の定理を $f(x)=e^x$ に適用し，$x=0$ における n 次のテイラー展開を求めよ．また，$e^{0.1}=1.1051709\cdots$ に関する $F_n(0.1)$ $(n=1,\ 2,\ 3)$ の およその相対誤差を求めよ．

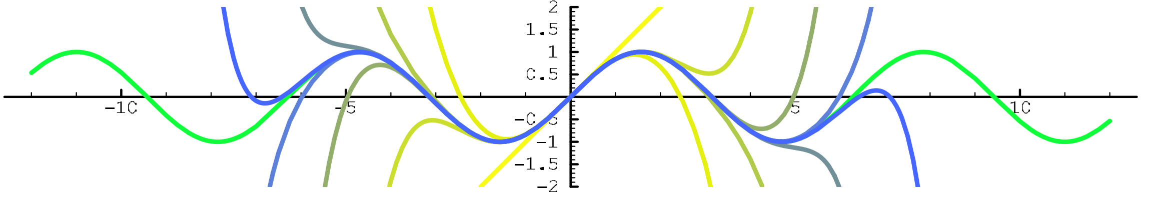


図 1: $f(x)=\sin x$ の近似多項式 $F_2(x), F_3(x), \ldots, F_{16}(x)$ のグラフ．$f^{(2k)}(0)=0$ より $F_{2k}(x)=F_{2k+1}(x)$ となることに注意．

今週の宿題・レポート

問題 9-1　$n=3$ とおいてテーラーの定理を証明しよう．

(1) $F(x) := f(x)-\left\{f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\right\}$ とおく.（すなわち，$F(x)=f(x)-F_3(x)=R_n$.）このとき，以下を示せ：

（ア）$F(a)=F'(a)=F''(a)=0$.

（イ）$F^{(3)}(x)=f^{(3)}(x)$.

(2) $F(x)$ と $G(x)=(x-a)^3$ に平均値の定理を適用して，

$$\frac{F(x)}{(x-a)^3} = \frac{F'(x_1)}{3(x_1-a)^2} = \frac{F''(x_2)}{3\cdot 2(x_2-a)} = \frac{F^{(3)}(x_3)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

となる $a \le x_3 \le x_2 \le x_1 \le x$ もしくは $x \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le a$ が存在することを示せ．

(3) （イ）を用いて，$f(x)$ の 3 次テーラー展開を求めよ．

問題 9-2 $f(x) = x^3 - 3x$ にテーラーの定理を適用しよう．

(1) $x = -1$ における $f(x)$ の近似多項式 $F_1(x)$，$F_2(x)$，$F_3(x)$ を求め，それぞれのグラフと $f(x)$ のグラフを重ねて描け．(計算とは別に，グラフだけに A4 用紙一枚を用いること．グラフはできるだけ大きく，正確に，丁寧に描くこと．ちゃんと近似の度合いが良くなっていくことがわかるように，グラフの色を変えて描くこと．)

(2) (1) の $x = -1$ を $x = 0$ に変えて解け．

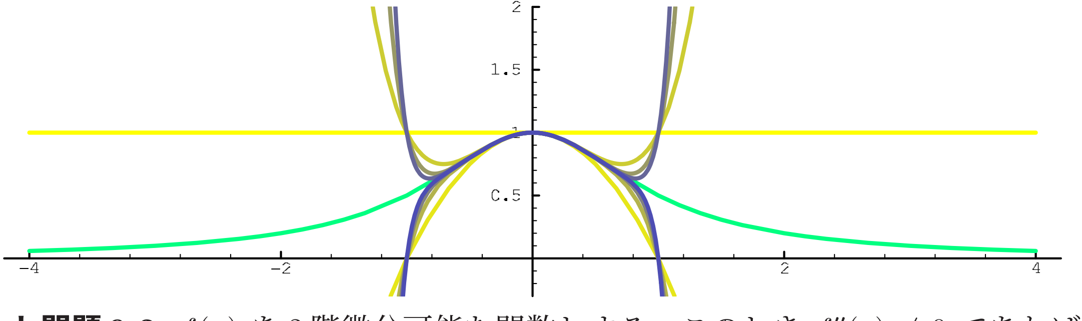
レポート問題 9-1

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ の $x = 0$ における $2n$ 次テーラー展開をもとめよ．

(2) 上のテーラー展開から剰余項を除いた部分を $P_n(x)$ とおく．このとき，

- $-1 < x_0 < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} P_n(x_0) \to f(x_0)$
- $|x_0| > 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} P_n(x_0)$ は存在しない（発散）

を示せ．



レポート問題 9-2 $f(x)$ を 2 階微分可能な関数とする．このとき $f''(a) \neq 0$ であれば，1 次テーラー展開

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

において，$x \to a$ のとき $\dfrac{c}{a+x} \to \dfrac{1}{2}$ を示せ．(Hint. $f(x)$ の 2 次テーラー展開と $f'(x)$ の 1 次テーラー展開を比較する．)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

微分と積分の計算

作成日：July 2, 2007　Version：1.1

微分と積分です．何の研究をするにも，これができないと話になりません．ちなみに，宿題とレポートは今回のものが最後です．また，宿題・レポートの最終締切日は来週 7 月 12 日木曜日 13 時まで（Cafe David に持参）とします．それ以降に提出された宿題・レポートは原則として受け取りませんので注意してください．

今後の予定

- 7/9: 微分方程式，7/12: 宿題・レポート最終締切日
- 7/16: 祝日
- 7/23: 最終日，小テスト $+\alpha$，講義アンケート

逆三角関数

問題 1. 次の関数のグラフを描け．(以下，逆三角関数の値域はこのように取る.)

(1) $\sin^{-1}: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

(2) $\cos^{-1}: [-1,1] \to [0, \pi]$

(3) $\tan^{-1}: \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

また，これらの関数を微分せよ．

問題 2. 次の関数を微分せよ．

(1) x^α　(2) α^x　(3) $x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x$

(4) x^{x^x}　(5) $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$　(6) $x\sqrt{x^2+1} + \log|x + \sqrt{x^2+1}|$

積分の計算

問題 3. (部分分数展開)

(1) $\dfrac{t^2-t+2}{t\,(t+1)^2} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t+1} + \dfrac{C}{(t+1)^2}$ となるような A, B, C を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{t^2-t+2}{t\,(t+1)^2}\,dt$ を求めよ．

問題 4. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\,\cos^3 x}$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx$　(4) $\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$　(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題・レポート

宿題 10-1　今日の授業でやらなかった問題を全て解け.

宿題 10-2

(1) 点 $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ と点 $A = (-1, 0)$ を結ぶ直線 ℓ の傾きを t とすると，$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ と表されることを示せ.

(2) P_θ と A が直線 ℓ と単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点であることを用いて，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ を t で表せ.（答：$\sin\theta = 2t/(1+t^2)$，$\cos\theta = (1-t^2)/(1+t^2)$）

(3) 定積分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{4 + 5\sin\theta}$$

を計算せよ.

レポート 10-a[1]　連続関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_0^x (x-t) f(t)\, dt$$

を微分せよ.（Hint: 次の定理を用いる.）

> **微分積分学の基本定理**　ある区間 I で連続な関数 $f(x)$ に対して
>
> $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$
>
> が成り立つ．ここで $a \in I$ は定数.

（問題２・３・４の答え）

問題 2

(1) $\alpha\, x^{\alpha-1}$　(2) $\alpha^x \log\alpha$　(3) $2\sqrt{1-x^2}$

(4) $x^{x^x}\, x^x\, \{\log x(\log x + 1) + \frac{1}{x}\}$　(5) $\dfrac{1}{1+x^2}$　(6) $2\sqrt{1+x^2}$

問題 3

$\log\dfrac{t^2}{|t+1|} + \dfrac{4}{t+1}$.

問題 4

(1) $2\sqrt{1+x} + \log\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}$　(2) $\dfrac{1}{2}\tan^2 x + \log|\tan x|$.　(3) $\log x\,(\log(\log x) - 1)$

(4) $\dfrac{x}{2}(\sin(\log x) - \cos(\log x))$　(5) $x - \log(1 + e^x)$　(6) $-\sin^{-1}\frac{1}{x}$

[1] 前回のプリントで番号を振り間違ったので，念のためこのような番号にしてあります.