担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

演習について

作成日：October 6, 2004　Version：1.2

担当教官：　川平　友規（かわひら　ともき，助手, kawahira@math.nagoya-u.ac.jp, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses.htm）

担当 TA：　佐藤　保幸（さとう　やすゆき，M1, m0418c@math.nagoya-u.ac.jp）

演習の進め方：　毎回，問題のプリントを配布します．私（川平）が基本事項を確認したあと，問題を指定し，各自ノートに解いてもらいます．その後，私が黒板で解説する，という流れです．

配布した問題のすべてを演習で扱うとは限りません．扱わなかった問題については，**自分で解いた上で解答が欲しい場合のみ**，下記のオフィスアワーの時間に私か TA に聞きに来てください．

演習で取り上げるテーマ：　演習と講義は独立したものと考えられています．したがって，講義で扱わない内容を演習で扱うこともありますし，逆もありえます．ここでは科学を研究する（より一般に，数や量に関わる現象を系統立てて扱う）のに必要な数学の基礎知識，数学の記述能力を身につけることが目標です．特に，

- Taylor 展開と関数の近似（関数の実用上十分な近似を得るには？）
- ２変数関数の微分，グラフ，極値問題（曲面の形を調べるには？）
- 重積分の計算（体積や質量を計算するには？）
- 変数変換（Jacobian の意味は何か？）
- 線形空間と基底（抽象的な空間に座標を入れるには？）
- 線形写像（そもそも写像とは何ぞや？）
- 固有値と固有ベクトル（線形写像の本質を見極めるには？）
- 行列の対角化（線形写像をうまく表現するには？）

を**直感的に理解し，計算ができるようになること**を当面の目標とします．さらに，自分の行った計算過程を**数学的に整備された形で（他人にも分かるように）記述できるようになること**も重要な目標です．

単位・成績：　成績に関係のある要素は，**出席回数，小テストの点数，宿題の提出（とその内容），および．レポートの提出**です．成績の優・良・可は以下の基準で定めます．

- 上にあげた 4 つの要素のうち，出席を 45 点満点，小テストを 25 点満点，宿題を 30 点満点として点数化する．自発的なレポートの提出により，最大で 20 点まで加点する．

- 成績は 60 点未満を不可，60 − 74 点を可，75 − 89 点を良，90 点以上を優とする．

したがって，ただ出席するだけでは単位は取れません．出席，小テスト，宿題と，バランスよくこなしてください．

出席：　授業の前半に出席を取ります．遅刻・欠席をする場合，事前に email 等で私に連絡し，かつやむを得ない事情だと判断される場合のみ，加点します．

小テスト：　皆さんの理解度を確認するため，後期の間に 3 回，30 分程度の小テストを行います．だいたい月末を予定しています．出題内容は，演習でやった問題をベースにした基本的な問題です．小テスト 3 回の点数配分は 10+8+7=25 とします．

宿題：　宿題は基本的に毎回出題する予定です．宿題用の問題プリントを配ることもありますし，演習中に黒板で出題することもあります．提出様式は，**A4 レポート用紙を使用し，必ず表紙をつけ，名前，学籍番号，何月何日の宿題かを記入**してください．

宿題の提出期限は次の演習の開始時間まで，提出場所は教室（理 1-453）です．提出期限に間に合わなかった宿題は後日提出してもかまいません．ただし，遅れた日数に応じ多少減点するかもしれません．もし何らかの事情で授業時に提出できない場合，事前に email 等で連絡の上．(1) 川平の office(A439) に直接持ってくるか，(2) 事務室に提出してください．

宿題の中に，まれに**発展問題**があります．これはボーナス問題です．解けば加点の対象としますが，解かなくても減点しません．

レポート：　授業で扱えなかった問題や，やや進んだ内容の問題をレポート課題として指定することがあります．レポートの提出は任意ですが，提出されたレポートの質を判断して，成績にボーナス加点していきます．レポートには提出期限を設けません．提出場所は教室です．提出様式（A4 レポート用紙使用，etc.）は宿題と同様ですが，たとえ同じ日に提出する場合でも，**レポートと宿題は必ず分けて提出してください．**（採点者が異なります.）

授業でやらなかった問題を自発的に解いた場合，その旨を記入し，宿題とは別にしてレポートとして提出してください．

オフィスアワー：　私のオフィスアワー（質問受付時間）は**毎週水曜日 12:00-13:30，場所は Cafe David（理学部 1 号館 2 階エレベーター前）**です．私と TA の佐藤さんだけでなく，その他のスタッフも待機しているので，自由に質問してください．有識者への質問は，問題を解決するのにもっとも有効な手段です．宿題や試験勉強をスマートにこなせるよう，できれば各自，一度は質問に来るようにしてください．

基本的に，オフィスアワー以外の時間には質問を受け付けません.（もちろん授業中とその前後は例外です！）ただし，事前に email 等で appointment を取れば質問を受け付けます．水曜日以外の Cafe David もどんどん活用してください．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

Landauの記号とTaylor展開

作成日：October 6, 2004　Version：1.1

無限小と無限大

微積分の基本は**無限小と無限大の取り扱い**です．これらの厳密な取り扱いは授業や自主学習に任せることにして，ここでは

- さまざまな無限大と無限小を比較するセンスを磨き，
- これらを応用するための典型的な手法を学ぶ

ことにしましょう．

無限小の取り扱い

問題 1. 関数 $f(x) = 2x + x^5 + 125x^{20}$ を考える．実用上，$|x| \le 0.1$ の範囲で $f(x)$ の値を知りたい．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $x = 1,\ 0.1,\ 0.01$ のとき，それぞれ $2x,\ x^5,\ 125x^{20}$ の値を求めよ．

(2) $x = 0.1$ のとき，$F(x) = 2x$ は何%程度の誤差で $f(x)$ を近似するか？ $x = 0.01$ のときはどうか？

問題 2. $x \ge 0$ が十分小さい（$x = 0.000000000000000000001$ とか）とき，以下の値を小さい順番に並べよ．

$$x^{10},\ x,\ \sqrt{x},\ x^{\frac{1}{3}},\ x^2,\ x^{\sqrt{2}},\ x^{\frac{1}{\sqrt{2}}},\ x^{\pi},\ \frac{x^2}{100}$$

Landau 記号

上の $f(x)$ で x が十分小さいとき，実用上 x^5 程度の誤差はあまり気にしない場合，

$$f(x) = 2x + O(x^5)$$

と表す．また，x^{20} 程度の誤差は気にする場合，

$$f(x) = 2x + x^5 + O(x^{20})$$

などと表す．これを **Landau の記号**と呼ぶ．厳密には，以下のように定義する：

> $x = 0$ の周りで定義された連続関数 $e(x)$ にたいし，ある定数 $\alpha, M \ge 0$ が存在して，
>
> $$|e(x)| \le |Mx^{\alpha}| \quad \Longleftrightarrow \quad -M|x^{\alpha}| \le e(x) \le M|x^{\alpha}|$$
>
> であるとき，これを
>
> $$e(x) = O(x^{\alpha})$$
>
> と表す．すなわち，$e(x)$ は高々x^{α} 程度の値であることを意味する．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. 上のような $e(x) = O(x^{\alpha})$ $(\alpha > 0)$ について，$x \to 0$ のとき $e(x) \to 0$ を示せ．また，この状況をグラフを書いて直感的に理解せよ．

> Taylor 展開：$x = 0$ の周りで定義された無限回微分可能な関数 $f(x)$ について，x が十分小さいとき
>
> $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

問題 4. 以下の関数を $y = f(x) + O(x^3)$ の形で表せ．

(1) $y = \sin x$　(2) $y = e^x \sin x$　(3) $y = 1 - \cos x$　(4) $y = \sqrt{1 - x^2}$

Hint: $(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3)$.

問題 5. Landau 記号を駆使して，以下の極限を求めよ．

(1) $\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

(2) $\dfrac{(1 - \cos x)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$

今週の宿題コーナー

宿題 1. 同様に，$f(x) = 4\sqrt{x} + x + x^2$ とする．

(1) $x = 1,\ 0.01,\ 0.0001$ のとき，それぞれ $4\sqrt{x}$，x，x^2 の値を求めよ．

(2) $x = 0.01$ のとき，$F(x) = 4\sqrt{x}$ は何%程度の誤差で $f(x)$ を近似するか？ $x = 0.00001$ のときはどうか？

宿題 2. 以下の文章で，間違っているものを探し，反例（間違いを実証する例）を挙げよ．

(1) $e_1(x) = O(x)$, $e_2(x) = O(x^2)$ のとき，$e_1(x) + e_2(x) = O(x^2)$.

(2) $e_1(x) = O(x)$, $e_2(x) = O(x)$ のとき，$e_1(x) + e_2(x) = O(x)$.

(3) $e_1(x) = O(x^3)$ のとき，$e_1(x) = O(x)$.

(4) $e_1(x) = O(x)$, $e_2(x) = O(x)$ のとき，$e_1(x) - e_2(x) = O(x^2)$.

(5) $e_1(x) = O(x^2)$, $e_2(x) = O(x^{1/2})$ のとき，$e_1(x)e_2(x) = O(x^{5/2})$.

宿題 3. Landau 記号を駆使して，以下の極限を求めよ．

(1) $\dfrac{e^x \sin x - (x + x^2)}{x^3}$

(2) $\dfrac{\tan x - x}{x^3}$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

1 変数と 2 変数の Taylor 展開

作成日：October 13, 2004　Version：1.2

おしらせ

今日の昼休みからオフィスアワー (Cafe David) が始まります．まあ，コーヒーでも飲みに来てくださいよ．茶菓子歓迎．ちなみにこのおっさん ($\times 4$) は David Hilbert という偉いおっさんです．

無限大の取り扱い

先週やんなかったけど，これは宿題にまわします．

Taylor 展開その 2

以下出てくる関数は何度でも微分できるものとします．

Taylor 展開：$x=a$ の周りで定義された関数 $y=f(x)$ について，x が a に十分近いとき，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+O((x-a)^{n+1})$$

問題 1.

(1) 変数変換 $X=x-a$，$Y=y-f(a)$ を施し，上の式を $Y=F(X)$ の形に書き直せ．

(2) f の 1 階から n 階までの $x=a$ における x 微分は，F の 1 階から n 階までの $X=0$ における X 微分と**当然のごとく**一致する．なぜか？

(3) $Y=F(X)$ は原点を通る．一方，

$$G(X)=f'(a)X+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}X^n$$

とおくと，G と F は 0 階から n 階までの X による原点における微分が全て一致することを示せ．

原点を通る多項式は，全ての（滑らかな）関数の局所的な「模型」(モデル) である．1 次式 $Y=cX$ はもっとも基本的な「模型」を与え，次によいのは $Y=cX+c'X^2$ である．

この基本原理は多変数でも当てはまる．この場合，1 次式は「線形写像」と読み替える．2 次の項まで近似すると，「曲率」がわかるようになる．(車で言うと，カーブに対しハンドルの切り具合が大体分かる．)

問題 2. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \le x \le 1)$ とする．

(1) 上の公式を用いて，$x=0$ における 2 次まで Taylor 展開（すなわち，$f(x)=\cdots+O(x^3)$ の形に）せよ．

(2) 有名な公式

$$(1+X)^\alpha = 1+\alpha X + O(X^2)$$

を用いて，$x=0$ における 2 次まで Taylor 展開を求めよ．

(3) (1) と (2) の結果が一致することは，あたりまえなのだろうか?? (→レポート問題 1)

2 変数の Taylor 展開

$z=f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における Taylor 展開：

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b) \quad \text{（ここまでで 1 次近似）}$$
$$+\frac{1}{2!}\big(f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\big)+\cdots$$

問題 3.

(1) 変数変換 $X=x-a$，$Y=y-b$, $Z=z-f(a,b)$ を施し，上の式を $Z=F(X,Y)$ の形に書き直せ．

(2) f の $(x,y)=(a,b)$ における x，y による n 階偏微分は，F の $(X,Y)=(0,0)$ における X, Y による n 階偏微分と**当然のごとく**一致する．この理由を説明せよ．

(3)

$$G(X)=F_X(0,0)X+F_Y(0,0)Y+\frac{1}{2!}\big(F_{XX}(0,0)X^2+2F_{XY}(0,0)XY+F_{YY}(0,0)Y^2\big)$$

とおくと，G と F は 0 階から 2 階までの X, Y による原点における微分が全て一致することを示せ．

問題 4. $\sin t = t - t^3/6 + O(t^5)$ $(t\to 0)$ を用いて，以下の Taylor 展開を求めよ．

(1) $f(x,y)=\sin(2x+y)$ の $(x,y)=(0,0)$ における 2 次までの Taylor 展開．

(2) $g(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ の $(x,y)=(0,0)$ における 2 次までの Taylor 展開．

(3) xyz-空間の単位を 1km とする．$z=f(x,y)$，$z=g(x,y)$ のそれぞれが定める曲面の原点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ に人が立った場合，その人はまっすぐ立っていられるか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

宿題 1. $f(x) = 35x + 2x^2 + x^4$ とする．

(1) $x = 1,\ 10,\ 100$ のとき，それぞれ $35x, 2x^2, x^4$ の値を求めよ．

(2) $x = 10$ のとき，$F(x) = x^4$ は何%程度の誤差で $f(x)$ を近似するか？ $x = 100$ のときはどうか？(例：理論値が 10 のとき近似値が 9.967 だったら，$(10-9.967)/10 = 0.0033$，すなわち 0.33 パーセント程度の誤差，といえる.)

注意：$x \to \infty$ のとき $f(x)/F(x) \to 1$ となる様子を直感的にイメージせよ．

宿題 2. $x > 0$ が十分大きいとき（$x = 1000000000000000$ とか），以下の値を <u>大きい</u> 順番に並べよ．

$$x^{10}, x,\ \sqrt{x},\ \frac{1}{\sqrt{x}},\ x^2,\ x^{\sqrt{2}},\ x^{\frac{1}{\sqrt{2}}},\ x^{\pi},\ \frac{x^2}{100},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2}$$

宿題 3. $(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + O(t^2)\ (t \to 0)$ を用いて，以下の Taylor 展開を求めよ．

(1) $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ の $(x, y) = (0, 0)$ における 2 次までの Taylor 展開.

(2) $g(x, y) = \sqrt{1 + x + y^2}$ の $(x, y) = (0, 0)$ における 2 次までの Taylor 展開.

(3) xyz-空間の単位を 1km とする．$z = f(x, y)$，$z = g(x, y)$ のそれぞれが定める曲面上の点 $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ に人が立った場合，その人はまっすぐ立っていられるか？

レポート問題 1 A さんが無限回微分可能な関数 $f(x)$ を $x = c$ で 2 次まで Taylor 展開をしたら，

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + e(x)$$

となった．ただし，$e(x) = O((x-c)^3)$ である．また，B さんが全く別の公式を用いて $f(x)$ を $x = c$ で 2 次まで展開したら，

$$f(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + E(x)$$

となった．ただし，$E(x) = O((x-c)^3)$ である．このとき，$a_i = b_i$ が $i = 0, 1, 2$ で成り立つのだろうか？答えは yes である．それを証明せよ．

Hint：$E(x) - e(x) = O((x-c)^3)$ を示す．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

2変数関数の極大と極小の判定

作成日：October 20, 2004　Version：1.2

おしらせ

来週（10/27）は授業のはじめに30分の小テストをやります．それまでに授業でやった問題の類題を出します.（台風による休講の影響で11/10に延期）

極大と極小の復習（1変数）

$y = f(x)$ に対し，$x = p$ において

- $f'(p) = 0$ かつ $f''(p) < 0$ ならば f は $x = p$ で極大
- $f'(p) = 0$ かつ $f''(p) > 0$ ならば f は $x = p$ で極小

このとき Taylor 展開は $f(x) = f(p) + f''(p)(x-p)^2/2! + \cdots$ となる．すなわち，グラフは $y = C + a(x-p)^2$ の形の放物線で近似できる．

問題 1. $f(x) = x^3(x-1)$ とする．このとき，極大もしくは極小となる点を求めよ．

オマケ問題　上の $f(x)$ を $x = 0,\ 1$ で Taylor 展開せよ．

注意　$f'(p) = f''(p) = 0$ となる点は極大とも極小とも判定しかねるので，注意が必要である．

2変数の極大と極小

2変数の場合も，1階微分と2階微分を用いて極大･極小の判定ができる．いま，$z = f(x,y)$ の $(x,y) = (p,q)$ における Taylor 展開が

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(p,q) + A(x-p) + B(y-q) \quad \text{（ここまでで1次近似，平面の式）} \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left(a(x-p)^2 + 2b(x-p)(y-q) + c(y-q)^2\right) + \cdots \end{aligned}$$

で与えられたとする．ただし，

$$\begin{aligned} &A = f_x(p,q), \quad B = f_y(p,q), \\ &a = f_{xx}(p,q), \quad b = f_{xy}(p,q), \quad c = f_{yy}(p,q) \end{aligned}$$

である．もし $A = B = 0$ ならば $f(x,y)$ は定数関数 $z = f(p,q)$（水平な平面）で1次近似されるので，極値となりうるであろう．実は，次が成り立つ：

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

上の $f(x,y)$ が $A=B=0$ ($\Longleftrightarrow f_x(p,q)=f_y(p,q)=0$) を満たすとする．すなわち

$$f(x,y)=f(p,q)+\frac{1}{2!}\left(a(x-p)^2+2b(x-p)(y-q)+c(y-q)^2\right)+\cdots$$

のとき，

- $ac-b^2>0$ かつ $a<0$ ならば f は $(x,y)=(p,q)$ で極大
- $ac-b^2>0$ かつ $a>0$ ならば f は $(x,y)=(p,q)$ で極小
- $ac-b^2<0$ のときは極値にならない（鞍点）
- $ac-b^2=0$ のときは，さらに調べないと分からない．

参考　ちなみに $ac-b^2$ は行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{xx}(p,q) & f_{xy}(p,q) \\ f_{yx}(p,q) & f_{yy}(p,q) \end{pmatrix}$$

の行列式である．これをヘッシアンと呼ぶ．3 変数の場合もこれに対応する行列の行列式の符号を計算することで，極値を探すことができる．

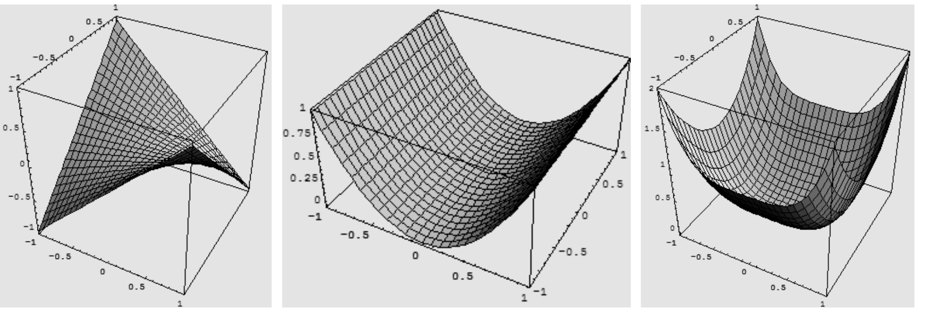
問題 2. 上の $A=B=0$ を満たす式について，以下の問いに答えよ．

(1) 変数変換 $X=x-p$，$Y=y-q$, $Z=z-f(p,q)$ を施し，上の式を $Z=F(X,Y)$ の形に書き直せ．

(2) 2 次式 $G(X,Y)=aX^2+2bXY+cY^2 (a\neq 0)$ を考える．$(X,Y)\neq(0,0)$ のとき，常に $G(X,Y)>0$ となるための a, b, c の十分条件を求めよ.「常に $G(X,Y)<0$」の場合はどうか」

微妙な例　$ac-b^2\leq 0$ となると，極値かどうかの判定は微妙である．

(1) $z=-xy$　　(2) $z=x^2$　　(3) $z=y^2+x^4$



問題 3. 次の関数が $(0,0)$ において極値かどうか判定せよ．

(1) $z=f(x,y)=-xy$　　(2) $z=f(x,y)=x^2-xy+y^2$

(3) $z=f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$　　(4) $z=f(x,y)=\cos(x+y^2)$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. 関数 $z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y + 1$ の極値を全て求めよ．

今週の宿題コーナー

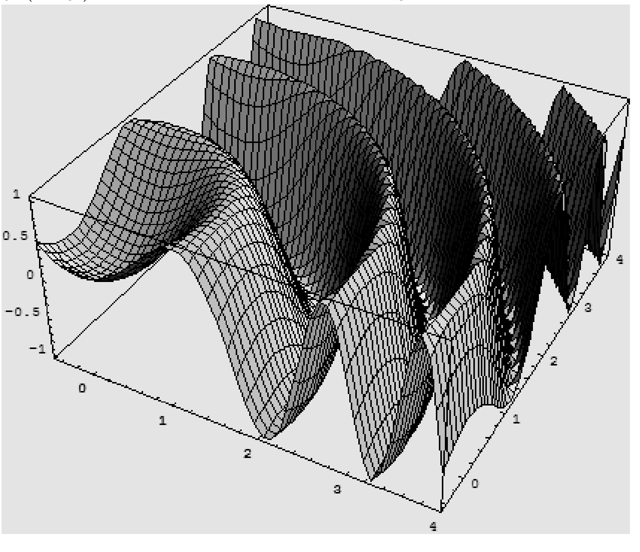
宿題 1.　関数 $z = f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x + 12y$ の極大値，極小値を全て求めよ．

宿題 2.　$x + y + z = 1$ のとき，$xy + yz + zx$ の極値を求めよ．

レポート問題 2　2 次式 $G(X,Y) = aX^2 + 2bXY + cY^2$ を考える．ただし，上の問題のように $a \neq 0$ とは限らない．このとき，$(X,Y) \neq (0,0)$ ならば常に $G(X,Y) > 0$ となるための a, b, c の必要十分条件を求めよ．さらに余力がある人は.「常に $G(X,Y) < 0$」の場合はどうか考えよ．さらにさらに余力がある人は，それ以外の場合，原点の周りで $G(X,Y)$ に何が起きるうるか考察（分類）せよ．

レポート問題 3　関数 $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ が $(x,y) = (0,0)$ 以外で極値にならないことを証明せよ．

$f(x,y)$ のグラフ（$-0.5 \leq x, y \leq 4$）



担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

『行列式と体積』の略解

作成日：November 10, 2004　Version：1.2

前回の授業はやや急ぎ足になって中途半端に終わったので，特別に補足プリントを作りました．宿題とレポートを解くときの参考にしてください．前回配布したプリントはミスがあまりにも多いので，**廃棄して未来永劫に隠滅**してください．前回の宿題およびレポート問題は，今回配布するプリントのものに置き換えます．

問題 1 の略解

(1)： A に B を左から掛けると，

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$$

となり，**3 行目が 3 倍される．**
(2)： A に B を右から掛けると，

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{pmatrix}$$

となり，**3 列目が 3 倍される．**

注意　これはタイプ I の例である．同様に，もし A の 2 **列目**を 100 倍したかったら行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を**右から**かければよく，1 **行目**を $-\sqrt{2}$ 倍したかったら行列

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を**左から**かければよい．(作用の方向は，(行)A(列) と覚えるとよい．)
(3)：一方，線形写像としての B の作用を見てみよう．任意の点 (x, y, z) について

$$G : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3z \end{pmatrix}$$

であるから，B は任意の点の z 座標を 3 倍する．したがって，Q の高さだけが 3 倍されることになり，$\mathrm{vol}\, G(Q) = 3 \cdot \mathrm{vol}\, Q = 3$ を得る．
(4)：$\det B = 3$ であることは一瞬でわかる．よって，

$$\mathrm{vol}\, G(Q) = |\det B| \cdot \mathrm{vol}\, Q$$

はすぐにわかる．

問題 2 の略解

(1)： A に B を左から掛けると，

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

となり，**1 行目と 2 行目が交換される．**
(2)： A に B を右から掛けると，

$$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & b & c \\ \boldsymbol{d} & e & f \\ \boldsymbol{g} & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \boldsymbol{a} & c \\ e & \boldsymbol{d} & f \\ h & \boldsymbol{g} & i \end{pmatrix}$$

となり，**1 列目と 2 列目が交換される．**

注意　これはタイプ II の例である．他の 2 つのタイプ II の行列についても，同様の現象を各自チェックしてみよう．
(3)：任意の点 (x, y, z) について

$$G : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

であるから，B は任意の点の x 座標と y 座標を交換する．これは，平面 $y = x$ に鏡を置いて写った像だと思えばよい．このとき，**向きが変わる**という現象は起きる（右手が左手に写る，など）が，**体積は変化しない**．すなわち，$\mathrm{vol}\, G(Q) = \mathrm{vol}\, Q = 1$ を得る．
(4)：$\det B = -1$ であることはすぐに計算できる．よって，

$$\mathrm{vol}\, G(Q) = |\det B| \cdot \mathrm{vol}\, Q$$

が成立する．

注意　行列のある行とある行を入れ替えると，その行列式は (-1) 倍されるのであった.「行の入れ替え」を「タイプ II の行列を左から掛ける」と読み替えると，この事実は $\det BA = \det B \det A = -\det A$ という計算により説明がつく．

問題 3 の略解

(1)： A に B を左から掛けると，

$$BA = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2g & b + 2h & c + 2i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

となり，**1 行目に 3 行目 × 2 が加えられる．**

(2)： A に B を右から掛けると，

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c+2a \\ d & e & f+2d \\ g & h & i+2g \end{pmatrix}$$

となり，**3 列目に 1 列目 × 2 が加えられる．**

注意　これはタイプ III の例である．同様に，もし A の 2 **列目**に 1 列目 × 10 を加えたかったら，行列

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{10} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

を**右から**かければよく，2 **行目**に 1 列目 × $(-\frac{1}{2})$ を加えたかったら，行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1/2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を**左から**かければよい．

(3)：この部分は授業でもすっと飛ばして説明して，かつ計算ミスをしていたような気がするので，かなり難しかったかもしれない．詳しく説明しよう．任意の点 (x, y, z) について

$$G : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

であるから，B は

(1) x 座標に z 座標の 2 倍を加え，

(2) y 座標と z 座標を保つ

ということがわかる．これは何を意味しているのだろうか？結論から言うと，

立方体 Q の体積は変化しない．すなわち，$\mathrm{vol}\, G(Q) = \mathrm{vol}\, Q = 1$ である．

理由を考える前に，次のように考えてみよう：単位正方形のカードを大量に用意し，それを xy 平面（$z = 0$）上の正方形 $0 \le x, y \le 1$ 上に重ねる．今，立方体 Q はそのようなカードの山だと仮定しよう．このとき，一番下のカードを固定させたまま，y 方向と z 方向には動かさないようにカードをずらしていく．カードの体積の総和は当然のように変化しない．実はこれが，B の作用なのである．丹念に調べるには，次のように調べればよい．Q の各頂点

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

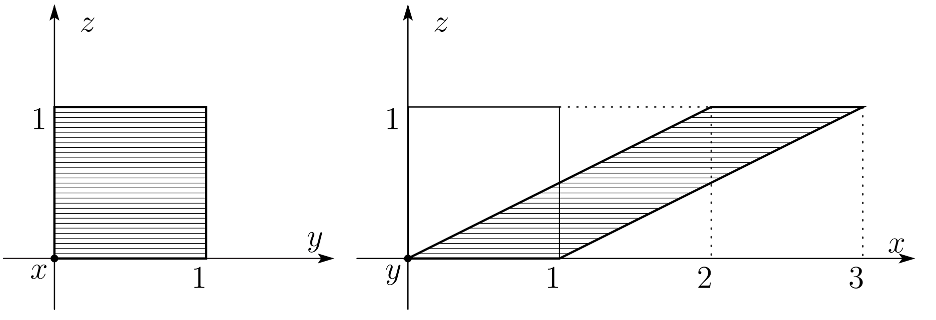


図 1: 断面図

の行き先は，それぞれ

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

となる．これらを辺で結べば，$G(Q)$ の形が特定でき，体積が 1 であることが計算できる．

注意　同様に，タイプ III の行列では $G(Q)$ は「カードのずらし」で表現でき，体積の変化はない．
(4)：$\det B = 1$ であることはすぐに計算できる．よって，

$$\mathrm{vol}\, G(Q) = |\det B| \cdot \mathrm{vol}\, Q$$

が成立する．

注意　行列のある行にある行の定数倍を加えても，その行列式の値は変わらなかった．この操作を「タイプ III の行列を左から掛ける」と読み替えると，この事実は $\det BA = \det B \det A = \det A$ という計算により説明がつく．

問題 4 の略解

(1)：たとえば，次のような基本変形が考えられる．

$$A = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&2\\0&0&3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = I$$

この変形は次のような操作によって得られる：

- 1 行目と 2 行目を入れ替え
- 3 列目に 1 列目× (-2) を加える
- 3 行目を 1/3 倍する．

(2)：上の操作をタイプ I, II, III の行列の積に読み替えると，

- 左から $L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を掛ける．
- 右から $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{-2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ を掛ける．
- 左から $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ を掛ける．

となる．したがって，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

(3)：まず，対応する基本変形の意味を考えると

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

となることがわかる．したがって，

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

(4)：$A = L_1^{-1} L_2^{-1} R_1^{-1}$ であるから，写像としては

$$\boldsymbol{x} \quad \longmapsto \quad R_1^{-1}\boldsymbol{x} \quad \longmapsto \quad L_2^{-1}(R_1^{-1}\boldsymbol{x}) \quad \longmapsto \quad L_1^{-1}(L_2^{-1}R_1^{-1}\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

という操作である．まず，最初の矢印で Q の体積は $|\det R_1^{-1}| = 1$ 倍され，次の矢印で $|\det L_2^{-1}| = 3$ 倍され，最後の矢印で $|\det L_1^{-1}| = 1$ 倍される．したがって，

$$\mathrm{vol}\, F(Q) = 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \mathrm{vol}\, Q = 3$$

である．一方，普通に計算すれば $\det A = -3$ であるから，

$$\mathrm{vol}\, F(Q) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}\, Q$$

が成立する．■

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

チャレンジ問題　（解いた人はレポートとして提出してください）

$\mathbb{R}^3$ 内に，時計を置いた．ある正則行列 A をとり，これの定める線形写像 $f: \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ を考えよう．もとの $\mathbb{R}^3$ を A というレンズを通して見ていると思えばよい．このとき，時計はグニャっとひしゃげて見えるだろう．しかし，それはレンズの向こうの姿を写しているだけで，時計は依然として時を刻んでいる．このとき，

- $\det A > 0$ のとき，ひしゃげた時計版の文字は普通に読めて，針は時計回りに進み，
- $\det A < 0$ のとき，ひしゃげた時計版の文字は逆向き（"鏡文字"）で，針は反時計回りに進む

ことを説明せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

行列式と体積（改訂版）

作成日：November 10, 2004　Version：1.1

今日は

行列式のもっとも重要な性質のひとつを調べます．多変数の微積分には欠かせない，重要な性質です：以下，

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

を正則行列とし，$\det A$ でその行列式を表すことにする．また，

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x, y, z \le 1\right\}$$

なる単位立方体を考える．このとき，次が成り立つことを調べたい．

定理：　写像 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．E を $\mathbb{R}^3$ の部分集合とするとき，その体積を $\mathrm{vol}\, E$ と表す．このとき，

$$\mathrm{vol}\, F(E) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}\, E$$

となる．特に，

$$\mathrm{vol}\, F(Q) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}\, Q \tag{1}$$

すなわち，**行列式の絶対値は線形写像における体積の拡大率を表す**．特に，E を細かい立方体で近似することを考えれば，この定理では (1) 式が本質的といえるだろう．この重要な性質は，多変数の微積分で **Jacobian** という形で現れる．

補足 1.　上の E に関して，その体積を測ることができるか，という問題は自明ではない．ここでは暗にそれを仮定した．詳しくは Lebesgue 積分論で学習する．ちなみに，直方体の体積を図ることができることは知られている．また，もし E の体積を図ることが出来れば，$f(E)$ の体積も測ることができることは知られている．

具体例から

問題 1. 次の (1)(2) と (3)(4) はそれぞれ独立した問題である：

(1) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を A の左から掛ける．このとき，B の A に対しどのような操作を行っていることに対応するか？

(2) 右から掛けた場合はどうか？

(3) $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} \mapsto B\boldsymbol{x}$ で定める．このとき，$\mathrm{vol}\, Q$ を求めよ．

(4) $\mathrm{vol}\, G(Q) = |\det B| \cdot \mathrm{vol}\, Q$ を確かめよ．

問題 2. 上と同様の問題を，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に変えて解け．

問題 3. 上と同様の問題を，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に変えて解け．

基本変形に対応する行列

次のような 3 種類の行列を考える：

(1) タイプ I：

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$ ただし，$*$ のうち 1 つは定数 $k \neq 0$，残りは 1

(2) タイプ II ：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) タイプ III：

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$ ただし，$*$ のうち 1 つは定数 $k \neq 0$，残りは 0

これらについて，次が成り立つ：

- 行列 A にタイプ I の行列を左から掛けると，ある行が k 倍され，右から掛けるとある列が k 倍される．特に，行列式は k 倍される．
- 行列 A にタイプ II の行列を左から掛けると，ある 2 つの行が交換される．右から掛けるとある 2 つの列が交換される．特に，行列式は -1 倍される．
- 行列 A にタイプ III の行列を左から掛けると，ある行にある行を k 倍したものが加えられる．右から掛けるとある列にある列を k したものを加えられる．特に，行列式，は 1 倍される（変化しない）．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

すなわち，行列の基本変形はタイプ I, II, III の行列との積を取ることに対応している．また，簡単な事実だが，

> タイプ I, II, III の行列の逆行列もまた，それぞれタイプ I, II, III である．

ということも確認しておこう．たとえば，
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．これは対応する基本変形の意味から明らかであろう．

問題 4. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) 行と列の基本変形により，A を単位行列 I にせよ．

(2) 上の基本変形をもとに適当なタイプ I, II, III の行列 $L_1, L_2, \ldots, L_m, R_1, R_2, \ldots, R_n$ を見つけ，

$$L_1 L_2 \cdots L_m A R_1 R_2 \cdots R_n = I$$

とせよ．

(3) A を $L_1, L_2, \ldots, L_m, R_1, R_2, \ldots, R_n$ の逆行列で表せ．

(4) 写像 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．このとき，

$$\mathrm{vol}\, F(Q) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}\, Q$$

となることを説明せよ．

実は，次が成り立つ（レポートの 4）：

> 任意の正方行列について，適当なタイプ I, II, III の行列 $L_1, L_2, \ldots, L_m, R_1, R_2, \ldots, R_n$ が存在し，見つけ，
>
> $$\begin{aligned} & L_1 L_2 \cdots L_m A R_1 R_2 \cdots R_n = I \\ \iff \quad & A = L_m^{-1} \cdots L_2^{-1} L_1^{-1} R_n^{-1} \cdots R_2^{-1} R_1^{-1} \end{aligned}$$
>
> とできる．

したがって，A の定める線形写像による体積の拡大率は，これらタイプ I, II, III の行列式の積の絶対値によって与えられる．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

宿題 1.　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) 行と列の基本変形により，A を単位行列 I にせよ．

(2) 上の基本変形をもとに適当なタイプ I, II，III の行列 $L_1, L_2, \ldots, L_m, R_1, R_2, \ldots, R_n$ を見つけ，

$$L_1 L_2 \cdots L_m A R_1 R_2 \cdots R_n = I$$

とせよ．

(3) A を $L_1, L_2, \ldots, L_m, R_1, R_2, \ldots, R_n$ の逆行列で表せ．

(4) 写像 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．このとき，

$$\operatorname{vol} F(Q) = |\det A| \cdot \operatorname{vol} Q$$

となることを示せ．

レポート問題 4　任意の 3 次正則行列はタイプ I, II, III の行列の有限個の積で表されることを示せ.（すなわち，任意の 3 次正則行列は行と列の基本変形により単位行列に変形できることを示せ.）さらに意欲的な人は，この結果を正則ではない 3 次正方行列に拡張せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

連立方程式と部分空間

作成日：November 17, 2004　Version：1.1

これからしばらく

線形空間の演習に入ります．線形代数は意味がわかると計算も楽しくなる，かも．

問題 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 12 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく．連立 1 次方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解け.（すなわち，解 (x, y, z, w) の集合を $\mathbb{R}^4$ の部分集合として特定せよ.）また，行列 A の階数（$\operatorname{rank} A$）を求めよ.

> ある $\mathbb{R}$ 上の線形空間 V に対し，その部分集合 W が
>
> - $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in W$ ならば $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$
> - $\boldsymbol{a} \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ならば $\alpha\boldsymbol{a} \in W$
>
> の 2 条件を満たすとき，W を V の**部分（線形）空間**と呼ぶ．部分空間はそれ自体，独立した線形空間をなす.

問題 2. 上の連立 1 次方程式の解全体の集合 W は，$\mathbb{R}^4$ の部分空間となることを示せ.

ある連立 1 次方程式の解全体が部分空間となるとき，これを**解空間**と呼ぶ.

問題 3. 次の連立方程式を解け．また，それぞれの解の集合は，$\mathbb{R}^4$ の部分空間となるか？

(1) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$　　(2) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

問題 4. 上の (1) の連立方程式の解集合 W' について，ある $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^4$ が存在して

$$W' = W + \boldsymbol{c} := \left\{ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^4 : \boldsymbol{a} \in W \right\}$$

と書けることを示せ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

U を $\mathbb{R}$ 上の線形空間とする．$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \in U$ が以下を満たすとする：任意の $\boldsymbol{a} \in U$ に対し実数の組 $(a_1, \dots, a_n)$ が**ただ一組**存在して，

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書ける．
このとき，$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ を V の**基底**であるという．さらに，このような基底が存在する U を n **次元線形空間**と呼ぶ．

真っ白な線形空間に与えられた「ものさし」が基底であり，我々はそれを基準にして，U の各点に座標を入れるのである．また，この座標によって我々は U を $\mathbb{R}^n$ とみなすレンズを得たことになる：

$$U \ni \boldsymbol{a} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

問題 5.

(1) $\mathbb{R}^4$ の基底を 1 つ以上与えよ．また，その次元を求めよ．

(2) W の基底を 1 つ以上与えよ．また，その次元を求めよ．

今週の宿題コーナー

宿題 1　次の連立 1 次方程式の解空間が $\mathbb{R}^5$ の部分空間となっていることを部分空間の定義通りに確かめよ．また，解空間の基底をひと組求め，解空間の次元を決定せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -9 & -5 \\ 3 & 9 & 1 & -5 & 7 \\ 2 & 6 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

レポート問題 5　$\mathbb{R}$ 上の線形空間 U について，A さんは基底 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ を見つけた．一方，B さんは別の基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ を見つけた．このとき，$m = n$ であることを示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

基底の変換と座標の変換

作成日：November 24, 2004　Version：1.2

今日は

基底の意味を理解しよう．特に以下の 2 点が重要：

- 基底とは**線形空間に座標を入れるとき基準となる「ものさし」のセット**である．
- 基底のとり方には自由度があるので，問題に応じて「うまい基底」と「うまい座標」を探すほうがよい．

基底の定義は前回のプリントを参照のこと．基底には他にも同値な定義があるが，前回のプリントで与えた定義がもっともその本質を捉えている．

二つの座標系

甲さん（35 歳独身）と乙さん（42 歳既婚）は，ある真っ白な平面の上に立っている．そこには，おっきな輪のような曲線が描かれていた．二人はこの曲線を C と名づけ，その形状を数学的に解析しようと思い立った．

ある日，甲さんはひとり C の中に入り，ある点を原点 O に定めた．次に O から，長さの等しい直交する矢印を 2 本書いた．この矢印（平面ベクトル）を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ とする．

問題 1.（基底の決定）：平面上の任意の点 Q に対し，ある実数の組 (x, y) が存在して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2$ と書けることを納得せよ．

問題 2. この平面を V とおく．$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle = \{\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2\}$ と表すとき，$V = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ であることを納得せよ．

甲さんは $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2$ は行列の記法を応用して

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書けることに気づいた．さらに，**この位置ベクトルの表す点 Q の座標を** (x, y) **とした**．こうして甲さんは，中学高校でならった通りの xy 座標を真っ白な平面上に書きあげたのである．これを便宜的に，**甲さんの** xy **（直交）座標系**と呼ぼう．

さて甲さんはまず，C が 2 次式で表されると予想した．すなわち，C は

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

という式で**表現される**と予想した．甲さんは C 上の適当な 6 点を選び xy 座標を計測し，上の式に代入した．これにより $a, b, \ldots, f$ に関する連立方程式が得られる．頑張って解くと，上の関係式は

$$2x^2 - 2xy + 5y^2 - 9 = 0$$

でなくてはならないことが分かった．実際に他の C 上の点の xy 座標を調べてみると，すべてこの関係式をみたすではないか．甲さんはこれはすごい発見だと思ったが，よくよく考えてみると式の形がただ分かっただけで，それ以上の性質は何も分からないことに気がついた．悔しかったので，甲さんは自分の書いた座標系を消してしまった．

問題 3. C を $V = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ の部分集合として表せ．

乙さん

甲さんがいろいろ努力した次の日，乙さんはひとり C の中に立った．実は乙さんも昨夜，甲さんと同じようなことを考えていたのである．足元を見ると，甲さんが書いたと思われる O という文字がうっすら見えるではないか．乙さんもやはりその点を原点 O と定め，そこから同一直線上にない 2 本の矢印 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を書いた．(これらの矢印は直交してるとは限らない．また，長さが同じとも限らない.)

問題 4. (基底の決定その２)：平面上の任意の点 Q に対し，ある実数の組 (s, t) が存在して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2$ と書けることを納得せよ．

問題 5. $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \{\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2\}$ と表すとき，$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であることを納得せよ．

乙さんは $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2$ は行列の記号を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

と書けることに気づいた．さらに，**この位置ベクトルの表す点 Q の座標を** (s, t) **とした**．これを便宜的に，**乙さんの** st **(斜交) 座標系**と呼ぼう．

さて乙さんも C が s, t **の 2 次式で表現される**と予想し，

$$as^2 + bst + ct^2 + ds + et + f = 0$$

という式を立て，C 上の適当な 6 点を選び st 斜交座標を計測し，上の式に代入した．これにより $a, b, \ldots, f$ に関する連立方程式が得られる．頑張って解くと，上の関係式は，なんと，

$$s^2 + t^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 + t^2 = 1$$

であることが分かった．

問題 6. C を $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ の部分集合として表せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ちょっと練習

問題 7. まず，自分のノートの上に適当に原点を定め，同一直線上にないベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を書け．このとき，ノート上の点 Q に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ なる実数 s, t がただひと組定まるはずである．以下のノート上の部分集合を図示せよ．

(1) $S_1 = \{s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 : s = 2\}$

(2) $S_2 = \{s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 : s \geq 0,\ t \geq 0,\ s + t \leq 1\}$

(3) $S_3 = \{s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 : 2s + 2t = 1\}$

(4) $S_4 = \{s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 : s^2 + t^2 = 1\}$

(5) $S_5 = \{s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 : |s| + |t| = 2\}$

以上を踏まえて，

問題 8. 乙さんの考察から，C の形を推測せよ．

今週の宿題コーナー

実はある 2 次正則行列 $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して，

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)P = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a\boldsymbol{u}_1 + c\boldsymbol{u}_2, b\boldsymbol{u}_1 + d\boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$$

が成り立つ．さらに，V 上の任意の点 Q について，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)PP^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を得る．以上を一般化すると，

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

n 次元線形空間 V の任意の基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対し，

- （基底の変換）ある n 次正則行列 P が存在して，$(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)P = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.
- （座標の変換）$\boldsymbol{x} \in V$ に対し，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ で測った（斜交）座標を $(a_1, \ldots, a_n)$，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ で測った（斜交）座標を $(b_1, \ldots, b_n)$ とする．すなわち，

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

このとき，

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

注意　先に座標の変換行列 $P' = P^{-1}$ を定めてから，基底の変換行列 $(P')^{-1} = P$ を決めることも出来る．

宿題 1　甲さん乙さんの座標系の関係を理解しよう．まずは $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ となる $P = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ を求めたい．しかし実は，**上の文章だけでは** a，b，c，d **を定めることはできない（無限通りの可能性がある）．** そこで，以下の問題では $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$，すなわち $a = 1$，$c = -1$ という条件を加えることにする．

(1) 曲線 C を表現する 2 次式をもとに，$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, b\boldsymbol{u}_1 + d\boldsymbol{u}_2)$ となる b，d の組を全て求めよ．さらに，上で言う行列 P の候補を求めよ．また，これらが正則であることを確かめよ．

(2) 上で求めた P のうち，$b \geq 0$ である方を採用する．このとき，甲さんの xy（直交）座標系で考える．乙さんの矢印 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の終点の xy（直交）座標はなにか？

(3) 乙さんの st（斜交）座標系で考える．甲さんの矢印 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の終点の st（斜交）座標はなにか？

(4) 甲さんの xy（直交）座標系と曲線 C を図示せよ．

(5) 乙さんの st（斜交）座標系と曲線 C を図示せよ．

(6) 甲さんの xy（直交）座標系で

$$\left\{x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 : x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x - 3y = 0\right\}$$

と表される図形を図示せよ.（Hint：st（斜交）座標系で見てみる.）

レポート問題 5　**宿題 1** にあるように，最初の文章だけでは $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の関係を結ぶ正則行列 P を確定することができない．その理由を考察せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

基底と一次独立性

作成日：December 1, 2004　Version：1.2

まずは

前回のプリントの内容と宿題を軽く復習しよう．キーポイントは

- ひとつの空間に，異なる基底をいれて，異なる座標系を考えることが出来る．
- 異なる 2 組の基底（もしくは座標系）は，正則行列によって関係付けられている．
- 基底の変換（入れ替え）と座標の変換（入れ替え）はペアになっている．

ということである．

ちょっとたとえ話を．われわれは長さを測るとき，必要に応じて mm, cm, m, km などを使いわける．例えば一円玉の直径 L は $L = 2\text{cm} = 20\text{mm}$ と，**単位によって異なる表現を持つ**．同じ長さでも，異なる単位 (cm もしくは mm) に応じて異なる数値 (2 もしくは 20) をとるのである．このとき，$\text{cm} \times \frac{1}{10} = \text{mm}$ であり，$2 \times 10 = 20$ であるから，単位が $\frac{1}{10}$ 倍されると，数値は 10 倍されることが分かる．

基底の変換も，考え方はまったく同じである．たとえば，n 次元線形空間 V に異なる基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在したとする．(n 次元が苦手な人は，$n = 3$ ぐらいで具体的にイメージせよ.) これらは V 上の異なる単位系のようなものである．すなわち，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し，ある数字の組 $(a_1, \ldots, a_n)$ が**ただひと組**存在して，

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

とかけ，さらにある数字の組 $(b_1, \ldots, b_n)$ が**ただひと組**存在して，

$$\boldsymbol{x} = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とも書ける．単位を変えれば数値が変わるように，基底を変えれば座標値も変わる．上はともに同じベクトル $\boldsymbol{x}$ を表すが，基底によって

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\text{基}, \ldots, \text{底})\begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix}.$$

のような異なる表現を持つのである．さらに，これらの間には次のようような関係が成立する：ある n 次正則行列 P が存在して，

$$(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)P = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n), \qquad P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

「同じ空間を，異なるモノサシで図る」．これが基底の真髄である．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

基底になる，ならないの判定

問題 1. $\mathbb{R}^3$ 上のベクトルを以下のように定める：

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

(1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix}12\\9\\5\end{pmatrix}$ について，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ および $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4\}$ のそれぞれを用いた 1 次結合の形で表せ．例えば，適当な数字の組 (d_1, d_2, d_3, d_4) を見つけて，

$$\begin{pmatrix}12\\9\\5\end{pmatrix} = d_1\boldsymbol{w}_1 + d_2\boldsymbol{w}_2 + d_3\boldsymbol{w}_3 + d_4\boldsymbol{w}_4$$

の形で書き表せ．

(2) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ および $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4\}$ の中で，$\mathbb{R}^3$ の基底になっているものを選べ．基底とならないものについては，その理由を考えよ．

一次独立性

N を自然数とする.（$N = 2$ かもしれないし，$N = 65535$ かもしれない．具体的な数を頭の中でイメージするのが理解を早めるコツである.）V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N$ に対し，ある実数 $a_1, \dots, a_N$ が存在して

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_N\boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{0}$$

と書けたと仮定する．これら係数 $a_1, \dots, a_N$ が $a_1 = \cdots = a_N = 0$ と**ただ一組に**決まるとき，$a_1, \dots, a_N$ は**一次独立（線形独立）**であると呼ばれる．

問題 2.

(1) 線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ が基底ならば，これらは一次独立であることを示せ．

(2) あるベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ について，A さんが基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を用いて座標値を求めたところ，$(a_1, \ldots, a_n)$ となった．一方，B さんが同じく基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を用いて，別の方法を用いて座標値を求めたところ，$(b_1, \ldots, b_n)$ となった．このとき，実は $a_i = b_i$ が全ての $i = 1, \ldots n$ で成り立つことを，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の一次独立性を用いて証明せよ．

ベクトルの組の一次独立性は，座標値がただ1つに定まるための必要条件である．すなわち，基底となるための必要条件である．

張る空間

V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ に対し，ある実数の組 $a_1, \ldots, a_N$ が存在して（**←ただ1組とは限らない**）

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_N\boldsymbol{v}_N$$

と書けるベクトルの全体を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ **の張る（部分）空間**と呼び，

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N \rangle \quad \text{もしくは} \quad \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$$

などと表す．

問題 3.

(1) 線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が基底ならば，$V = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ であることを示せ．

(2) 一般に，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N \in V$ が一次独立でも，$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N \rangle$ でなければ基底とはなり得ないことを示せ．

$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N \rangle$ であることは，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ が V の座標系を与えるための必要条件である．したがって，基底となるための必要条件である．

問題 4.

(1) $V = \mathbb{R}^3$ を考える．上の問題で定義した $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は一次独立だが $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ と**ならない**ことを確認せよ．（したがって，基底となり得ない．）

(2) $V = \mathbb{R}^3$ を考える．上の問題で定義した $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4$ は，$V = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4 \rangle$ だが一次独立ではないことを確認せよ．（したがって，基底となり得ない．）

基底の特徴づけ

問題 5. 次の枠内の命題を証明せよ．

> V のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ について，
>
> - $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が一次独立であり，かつ
> - $V = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$
>
> であるとき，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は V の基底となる．逆に，基底ならば上の 2 条件を満たす．

すなわち,「上の 2 条件が満たされること」と「基底であること」は同値（たがいに必要十分条件）である．

今週の宿題コーナー

来週は私が出張中なので TA の佐藤さんにお願いして，中テスト（＝小テスト＋ボーナス問題，1 時間程度）をやってもらいます．その際，**自筆ノートに限り持込と参照を許可します**．今週は宿題として具体的な問題は出しませんが，テスト対策に，要点を上手にまとめたノートを作ってきましょう.（ノートの提出・採点はしません.）

なお，来週は宿題プリントを配布する予定です．

レポート問題 7　以下，考える数は全て実数とする．条件式「$x = 0$ または $y = 0$」は「$xy = 0$」と 1 つの等式でまとめて表現することができる．同様に,「$x = 0$ かつ $y = 0$」は「$x^2 + y^2 = 0$」と 1 つの等式でまとめて表現することができる．以上を踏まえて，次の問いに答えよ．

(1) 条件式「$x = a$ または $y = b$ 」を 1 つの等式で表せ

(2) 条件式「$x = a$ かつ $y = b$ 」を 1 つの等式で表せ．

(3) 条件式「$x \leq 0$」を 1 つの等式で表せ.（Hint: 絶対値記号を使う）

(4) 条件式「$x \geq 0$」を 1 つの等式で表せ．

(5) 条件式「$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$」を 1 つの等式で表せ．

(6) 条件式「$x \geq 0$ または $y \geq 0$」を 1 つの等式で表せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像（その１）

作成日：December 15, 2004　Version：1.2

線形写像

$\mathbb{R}$ 上の線形空間 U, V に対し，写像 $f : U \to V$ が次の性質をみたすとき**線形写像**とよぶ：

- 任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in U$ に対し，$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$ （和の像は像の和）
- 任意の $\boldsymbol{a} \in U$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha f(\boldsymbol{a})$ （定数倍の像は像の定数倍）

これは当たり前の性質ではない．線形写像とは，**非常に特別な写像**である：

問題 1. 以下の写像が線形写像かどうか判定せよ．

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$　(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x+y$

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \sqrt{2}\,x$　(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \sin x$

(5) $f : \mathbb{R}^{2004} \to \mathbb{R}$, $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2004} \end{pmatrix} \mapsto x_{32}$　(6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

しかし，線形写像は**局所的には**頻繁に現れる：

問題 2. $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への関数 $f_1(x,y) = \sin(3x+2y)$, $f_2(x,y) = \sin(x+4y)$ を考える．さらに，写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ で定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f は線形写像でないことを示せ．

(2) $(x,y) = (0,0)$ のまわりで f_1，f_2 の 3 次の Taylor 展開をせよ．

(3) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の十分近くに限ると，ある 2 次正方行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ が存在して，$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は $F : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に非常に近い．このような行列 A を求めよ．

(4) $0 \le |x|,\ |y| \le 0.01$ とする．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ にたいし，絶対誤差 $|f(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x})|$ の値がどの程度か推定せよ．

このような A を $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の **Jacobi 行列**と呼ぶ．重積分の変数変換を考えるときにまた登場するので，要注意．

基底の変換と線形変換の表現

どこかで見たような問題をひとつ：

問題 3. 線形空間 $\mathbb{R}^2$ 上の標準基底を $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ で表す．すなわち，点 Q (x,y) に対応する位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

と表される．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 別の $\mathbb{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ を用いたところ，

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

が成立した．$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ の終点を定める点の xy 座標を求めよ．

(2) 線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が

$$f:\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}2&98\\0&100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

で与えられている．すなわち，

$$f:(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}2&98\\0&100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

である．このとき，

$$f:(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\longmapsto(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$$

となるような行列 $B=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ を求めよ．

このような B を，$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ **の基底 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ に関する表現行列**と呼ぶ．

教訓：線形写像は基底によって異なる表現行列をもつ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

問題 1　$z = x + yi$ とする．$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ に写す写像

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Im}\, z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z^2 \\ \mathrm{Im}\, z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

において，局所的に現れる線形写像をみつけよう．

(1) u, v を x, y で表せ．また，$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもとめよ．

(2) この写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線形写像では**ない**ことを示せ．

(3) $X := x - 1$, $Y := y - 1$, $U := u$, $V := v - 2$ とおく．このとき，U, V を X, Y で表せ．

(4) X, Y の絶対値がものすごく小さい状況を（たとえば絶対値が 0.0001 以下とか）考える．このとき，ある 2 次正方行列 A が存在して $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ は $A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に極めて近い．この行列 A は何か？

(5) **チャレンジ問題**：実際に $|X|$, $|Y| \leq 0.0001$ のとき，$\left|\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right|$ の最大値を求めよ．

レポート問題 8　実数の集合 $\mathbb{R}$ は，それ自体が $\mathbb{R}$ 上の線形空間となっている．このとき，単に「写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$」と言った場合これはただの関数であり，その種類は計り知れないぐらいに多い．しかし，「線形写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$」と言った場合，$f$ の種類はただ一通り，$f(x) = Kx$（ただし K は実数の定数）という形に定まってしまう．これを証明せよ．(Hint: 線形写像の定める関数のグラフが原点を通る直線になることを証明せよ．逆に，関数のグラフが原点を通る直線ならば線形写像であることは簡単にわかる．）また，この性質を 2 次元の写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の場合に拡張せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像（その２）

作成日：December 22, 2004　Version：1.1

線形写像の像

2 つの線形空間 U, V に対し，線形写像 $f : U \to V$ を考える．このとき，$f(U)$ を $\mathrm{Im}\, f$ で表し，U **の** f **による像** (image) と呼ぶ．$\mathrm{Im}\, f$ は V の部分線形空間である．また，$\mathrm{Im}\, f$ の次元を f の**階数**とよび，$\mathrm{rank}\, f$ で表す．すなわち，$\mathrm{rank}\, f := \dim(\mathrm{Im}\, f)$.

次元に関する注意　ゼロベクトルだけからなる集合 $\{\mathbf{0}\}$ も線形空間であるが，$\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$ と約束しておく．逆に，(部分）線形空間 V で $\dim V = 0$ となるのは $V = \{\mathbf{0}_V\}$ の形のときのみである．

問題 1. 上の $f : U \to V$ について，$\mathrm{Im}\, f$ は V の部分線形空間となることを示せ．

問題 2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \\ x+y \end{pmatrix}$ で定める．このとき，$\mathrm{Im}\, f$ の基底をひと組さがし，次元を求めよ．すなわち，$\mathrm{rank}\, f = \dim(\mathrm{Im}\, f)$ をもとめよ．

問題 3. 上の $f : U \to V$ について，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を U の基底とする．(すなわち，U は n 個の「ものさし」のセットで座標付けできる，n 次元線形空間である.）このとき，以下の問いに答えよ：

(1) $\langle f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n) \rangle = \mathrm{Im}\, f$ を示せ.

(2) $f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ が $\mathrm{Im}\, f$ の基底になるための条件は？

(3) $f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ が V の基底になるための条件は？

線形写像の核と次元定理

線形写像 $f : U \to V$ において，U 上の全ての情報が V に伝達されるとは限らない．では一体，どのような情報を失っているのだろう？それを明確にするのが，次の**核**の概念である．

線形写像 $f : U \to V$ において，$f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ $(= \mathbf{0}_V \in V)$ となる $\boldsymbol{a} \in U$ の全体を**核** (kernel) とよび，$\mathrm{Ker}\, f$ であらわす．すなわち，

$$\mathrm{Ker}\, f := \{\boldsymbol{a} \in U : f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}\} = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}).$$

特に，$\mathrm{Ker}\, f$ は U の部分線形空間である．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. 上の $f : U \to V$ に対し，$\mathrm{Ker}\, f$ は $\underline{U\text{ の}}$ 部分線形空間になることを示せ．

問題 5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で定める．このとき，$\mathrm{Im}\, f \subset \mathbb{R}^3$ の基底をひと組さがし，次元を求めよ．また，$\mathrm{Ker}\, f \subset \mathbb{R}^2$ の基底をひと組さがし，次元を求めよ．

線形写像において,「伝達された情報量＋失われた情報量＝オリジナルの情報量」という解釈は当然であろう．これを定式化すると，次の定理（公式）となる．

次元定理　線形写像 $f : U \to V$ において，以下が f, V によらず常に成り立つ：

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim U.$$

問題 6. 次のような線形写像 $f : U \to V$ の例を作れ．

(1) $\dim U = 3$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2$.

(2) $\dim U = 3$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

(3) $\dim U = 5$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 5$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$.

(4) $\dim U = 2004$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 0$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2004$.

(5) $\dim U = 2005$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2004$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

宿題 1　授業であげた例以外で，次のような線形写像 $f: U \to V$ の例をひとつ以上あげ，それが本当に以下の性質を満たしていることを証明せよ．

(1) $\dim U = 3$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2$.

(2) $\dim U = 3$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

(3) $\dim U = 5$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 5$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$.

(4) $\dim U = 5$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 0$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 5$.

宿題 2　線形空間 $\mathbb{R}^3$ 上の標準基底を $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表す．すなわち，点 Q (x, y, z) に対応する位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表される．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1$ とおくと，これらも $\mathbb{R}^3$ の基底となることを示せ．

(2) 線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が

$$f: \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{a})$$

で与えられている．すなわち，

$$f: \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{a})$$

である．このとき，基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ に関する f の表現行列をもとめよ．すなわち，

$$f: \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} \longmapsto (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)\ B\ \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{a})$$

となるような 3 次正方行列 B を求めよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

冬休みのレポート課題：単射と全射

上の次元定理より，線形写像において情報が失われないためには $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$，すなわち $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\}$ が必要であることがわかる．

レポート問題 9-1　線形写像 $f : U \to V$ について，以下は全て同値であることを示せ．

(1) $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\}$

(2) f は単射．すなわち，$f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}') \in V \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \in U$.

(3) f は異なる点を異なる点に移す.（＝2点を1点につぶさない＝情報をつぶさない）

レポート問題 9-2　$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を U の基底とする．$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\}$ を仮定すると，$f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ は $\mathrm{Im}\, f = \langle f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\rangle$ の基底になることを示せ．

- 線形写像 $f : U \to V$ に対し，$\mathrm{Im}\, f = f(U) = V$ であるとき f **は全射である** (surjective) という．言い換えると,「**任意の** $\boldsymbol{b} \in V$ **に対しある** $\boldsymbol{a} \in U$ **が存在して** $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ **となる**」ということである．写像の全射性を証明したいときには，この形を用いる．
- 線形写像 $f : U \to V$ が全射かつ単射であるとき，**全単射** (bijective) または**同型写像** (isomorphism) とよぶ．写像が全単射であることを証明するには，全射性と単射性をそれぞれ示す，2手詰めとなる．

レポート問題 9-3　線形写像 $f : U \to V$ に対し，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim V$ ならば全射であることを示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像と対角化

作成日：January 12, 2005　Version：1.1

今日の目標は

「対角化，固有値，固有ベクトル」の意味を理解することです．線形代数の理論におけるこれらの役割を考えつつ，計算方法を身に付けよう.（そうしないとすぐに計算の仕方を忘れてしまうので.）

問題 1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2x\\y/2\end{pmatrix}$ で定める．このとき，

(1) f による単位円 $x^2+y^2=1$ の像は何か？ より一般に，f は $\mathbb{R}^2$ の各点をどのように移動させる写像か，言葉で説明せよ．

(2) f の標準基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ に関する表現行列 A を求めよ．

(3) 別の基底 $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

このように，線形写像 f は基底によって異なる表現を持つのであった．特に，A のように，f の作用を明解に反映した「きれいな表現行列」もあれば，B のように「きたない表現行列」も存在する．この場合は「きれいな表現」から「きたない表現」への変換であったが，一般には逆の方向,「きたない表現」から「きれいな表現」を考えるほうが有用であろう．

行列の対角化

問題 2. $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $F:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3x+2y\\x+4y\end{pmatrix}$ で定める．このとき，うまい基底 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を見つけ，F の $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ に関する表現行列 B が $\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ の形，すなわち

$$F:\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\longmapsto(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=f(\boldsymbol{x})$$

となるようにしたい．

(1) F の標準基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ に関する表現行列を A とする．このとき，$A\boldsymbol{u}_1=\lambda_1\boldsymbol{u}_1$，$A\boldsymbol{u}_2=\lambda_2\boldsymbol{u}_2$ が成り立つことを示せ．

(2) 一般に，正則行列 A に対し $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ を満たす $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ および $\lambda\neq 0$ が存在したと仮定する．このとき，$\det(\lambda E-A)=0$（E は単位行列）となることを示せ．

(3) 上の A に対し，方程式 $\det(\lambda E-A)=0$ を解け．

(4) 上の方程式のそれぞれの解 λ に対し，$A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ を満たす $\boldsymbol{u}$ を1つずつ求めよ．

(5) F の「うまい基底」と「きれいな表現行列」を求めよ．

前回配ったプリントの図を参照せよ．「うまい基底」と「きれいな表現行列」が見えるだろうか？

問題 3. $\mathbb{R}^2$ 上には次のような「運動法則」がある：

点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は，1 秒後に $\begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+4y \end{pmatrix}$ に移動する

時刻 0 において，点 P を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に置いた．n 秒後の点 P の位置をもとめよ

n 次正方行列 A に対し，

- 方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ の解 λ を A の**固有値**と呼び，
- $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ となる $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ を λ に対する**固有ベクトル**と呼ぶ．

問題 4. 複素係数の n 次正方行列において，その固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とし，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ とする．$P = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ とすると，

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を満たすことを示せ．

一般に，固有ベクトルからなる行列 $P = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ は正則とはかぎらない．もし正則で，したがって P^{-1} が存在する場合，

- $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の基底であり，
- $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ が成り立つ．

このとき，A は**対角化可能**と呼ばれる．まとめると，

線形写像 f の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に関する表現行列を A とする．A が上のように対角化可能であるとき，基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ に関する f の表現行列は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

である．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

問題１：固有値が複素数に… !!　$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$ で定める．このとき，

(1) 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の f による像を求めよ.（「うまい基底」は存在するか，ちょっと考えてみよう.）

(2) 方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ の解 λ を全てもとめよ.

(3) 上の各 λ に対し，$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ となる縦ベクトル $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ を1つずつ見つけよ.

(4) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を $f : \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2z - 2w \\ 2z + 2w \end{pmatrix}$ で定める．このとき,「うまい $\mathbb{C}^2$ の基底」を見つけ，その基底による f の「きれいな表現行列」をもとめよ.

問題２　以下の行列の固有値，固有ベクトルを（複素数の範囲で）求め，可能ならば対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

レポート問題１０　$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への関数 $f_1(x, y) = \sin(3x + 2y)$, $f_2(x, y) = \sin(x + 4y)$ を考える．さらに,（線形でない）写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$ で定める．すなわち，標準基底に関しては

$$f : \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x})$$

という関係がある．さて，授業でやった問題２のように，行列 $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ を対角化する基底を $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ としよう．このとき，この基底において

$$f : \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \longmapsto (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2) \begin{pmatrix} F_1(s, t) \\ F_2(s, t) \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x})$$

となる $F_1(s, t)$, $F_2(s, t)$ を具体的に書き下せ.（これはオリジナルのものより「きれいな表現」となるだろうか？）

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

変数変換と積分

作成日：January 12, 2005　Version：1.1

今日は

変数変換に関する感覚を磨こう．ある関数に対し，うまく変数変換すると，

- 式の形が変わって簡単になり，
- グラフを描いたり極値を求めるのが簡単になったり，
- 積分を求めるのが簡単になる

というご利益がある．重要なのは「式の形が変わる」という部分，すなわち式の「表現上の変化」だ，と思われるかもしれない．応用上はそれで十分だが，理論として重要なのは，式の**量的な変化**である．ひとつ具体例を：

1 変数関数 $y = f(x)$ において変数変換 $x = x(t)$ を行うと，

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

と変化する．$\frac{df}{dx}$ は変数 x が x 軸を動き回っているときの，$f(x)$ の y 軸上の速度といえる．上の式は，変数変換して速度を t の t 軸上での動きをもとに計った場合，その速度が $\frac{dx}{dt}$ 倍されることを意味している．確かに，x は t に比べて $\frac{dx}{dt}$ 倍早く動くから，これは当たり前である．

数学を本当に理解したかったら，2 次元以上の場合でも，変数変換によりどんな量がどのように変化しているのか，考える習慣をつけよう．

Jacobian

問題 1. x, y が u, v の関数として $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ と書けたとする．このとき関数 $f(x, y)$ に対して

$$(f_u, f_v) = (f_x, f_y)\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

が成り立つことを納得せよ．

問題 2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ と定めるとき，

(1) 行列 $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ を求めよ．また $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ も求めよ．

(2) 動点 Q が u 軸上を秒速 1 で動いている．xy 平面上で対応する動点 P はどのような動きをするか？

(3) 動点 P が x 軸上を秒速 1 で動いている．uv 平面上で対応する動点 Q はどのような動きをするか？

(4) 動点 Q が uv 平面上の面積 1 の領域 D を動き回る．このとき，xy 平面上で対応する動点 P は面積いくつの領域を動き回るか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

変数変換 x, y が u, v の関数として $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ と書けたとする．このとき，関数 $f(x, y)$ に対して，合成関数の微分の公式より

$$(f_u, f_v) = (f_x, f_y)\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ここに現れる行列を **Jacobi 行列**といい，この行列が逆行列を持つならば，逆に $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ の形に表せて

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1}$$

が成り立つ．(従って $u_x = 1/x_u$ などとするのは間違い.) また，uv 平面上の図形の面積は局所的には $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ 倍される．この値を **Jacobian（Jacobi 行列式）**と呼ぶ．

問題 3. 極座標表示 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を考える．

(1) Jacobi 行列 $\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) (1) の結果を用いて $\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix}$ を求めよ．またこれを直接求めてみよ．

(3) $r\theta$ 平面にヨコ Δr, タテ $\Delta\theta$ の長方形 R を，辺は軸に平行に，かつ左下の点が (r_0, θ_0)) になるように配置する．このとき，対応する xy 平面上の図形 D を図示せよ．また，その面積 $\mathrm{Area}(D)$ をもとめよ．

(4) Δr, $\Delta\theta$ がものすごく小さいとき，Jacobi 行列から予想される $\mathrm{Area}(D)$ の近似値を求めよ．

問題 4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ とするとき，積分 $\displaystyle\int_D \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ の値を求めよ．

今週の宿題コーナー

来週は授業の始めに第 3 回小テストをやりますが，前回同様**自筆ノートに限り持込と参照を許可します**．今週は宿題として具体的な問題は出しませんが，テスト対策に，要点を上手にまとめたノートを作ってきましょう．(ノートの提出・採点はしません.)