担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

演習について

作成日：October 10, 2006　Version：1.0

担当教官： 川平　友規（かわひら　ともき，助手, kawahira@math.nagoya-u.ac.jp, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses.htm）

担当 TA： 小林　大輔（こばやし　だいすけ，M1）

演習の進め方： 毎回，問題のプリントを配布します．私（川平）が基本事項を確認したあと，問題を指定し，各自ノートに解いてもらいます．その後，私が黒板で解説する，という流れです．配布した問題のすべてを演習で扱うとは限りません．

演習で取り上げるテーマ： 高校数学から大学数学への橋渡しをすることが目標ですが，前期よりはやや進んだ内容を扱います．具体的には，

(1) Taylor 展開と関数の近似　　(2) 2 変数関数のグラフと接平面
(3) 多項式の計算と高次方程式　　(4) 線形写像と行列式
(5) 行列の固有値と対角化　　(6) 固有多項式と Cayley-Hamilton の定理

を**直感的に理解し，計算ができるようになること**を当面の目標とします．さらに，自分の行った計算過程を**数学的に整備された形で（他人にも分かるように）記述できるようになること**も重要な目標です．

演習と講義は独立したものと考えられています．したがって，講義で扱わない内容を演習で扱うこともありますし，逆もありえます．

単位・成績： 成績に関係のある要素は，**出席回数，小テストの点数，宿題の提出（とその内容），および，レポートの提出**です．成績の優・良・可は以下の基準で定めます．

- 上にあげた 4 つの要素のうち，出席を 60 点満点，小テストを 15 点満点，宿題を 25 点満点として点数化する．自発的なレポートの提出により，最大で 20 点まで加点する．
- 成績は 60 点未満を不可，60 − 74 点を可，75 − 89 点を良，90 点以上を優とする．

したがって，ただ出席するだけでは良い単位が取れません．出席，小テスト，宿題と，バランスよくこなしましょう．

出席： 授業の前半に出席を取ります．遅刻・欠席をする場合，事前に email 等で私に連絡し，かつやむを得ない事情だと判断される場合のみ，加点します．

小テスト： 皆さんの理解度を確認するため，後期の間に 3 回，30 分程度の小テストを行います．出題内容は，演習でやった問題をベースにした基本的な問題です．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題：　宿題はほぼ毎回出題されます．提出様式は，**A4 レポート用紙を使用し，必ず表紙をつけ，そこに名前，学籍番号，解いた問題の番号（『宿題 x-x』），提出日を記入**してください．また，**左上をホチキスでとめて**提出してください．

宿題の提出期限は次の演習の開始時間まで，提出場所は教室（理 1-309）です．提出期限に間に合わなかった宿題は後日提出してもかまいませんが，少し減点します．もし何らかの事情で授業時に提出できない場合，事前に email 等で連絡の上．(1) 川平の office(A439) に直接持ってくるか，(2) 事務室に提出してください．

レポート：　授業で扱えなかった問題や，やや進んだ内容の問題をレポート問題として指定することがあります．レポートの提出は任意ですが，提出されたレポートの質を判断して，成績にボーナス加点していきます．レポートには提出期限を設けません．提出場所は教室です．提出様式は宿題の提出様式（A4 レポート用紙使用，必ず表紙をつける，etc.）に準じます．ただし，たとえ同じ日に提出する場合でも，**レポートと宿題は必ず分けて提出してください．**（採点者が異なります.）

授業でやらなかった問題を自発的に解いた場合，レポートとして提出してください．

オフィスアワー：　授業中の質問は大歓迎です．それ以外の時間に質問したい場合は，オフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を活用してください．私のオフィスアワーは**毎週水曜曜日 12:00-13:30，場所は Cafe David（理学部 1 号館 2 階エレベーター前）**です．私とその他のスタッフも待機しているので，自由に質問してください．水曜日以外の昼休みにも Cafe David は開店しているので，どんどん活用しましょう．有識者への質問は，問題を解決するのにもっとも有効な手段です．自力で解決することにこだわらず，宿題や試験勉強はスマートにこなしましょう．

上記以外の時間に質問したい場合は，必ず事前に email 等で appointment を取るようにしてください．

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体　(2) $\mathbb{R}$: 実数全体　(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体　(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体　(6) $x \in \mathbb{R}$: x は実数

ギリシャ文字

(1) α: アルファ　(2) β: ベータ　(3) γ, Γ: ガンマ　(4) δ, Δ: デルタ　(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ　(7) η: エータ　(8) θ, Θ: シータ　(9) ι: イオタ　(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ　(12) μ: ミュー　(13) ν: ニュー　(14) ξ, Ξ: クシー　(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ　(17) ρ: ロー　(18) σ, Σ: シグマ　(19) τ: タウ　(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ　(22) χ: カイ　(23) ψ, Ψ: プサイ　(24) ω, Ω: オメガ

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

Taylor 展開の復習

作成日：October 10, 2006　Version：1.0

平均値の定理

平均値の定理（by コーシー）　関数 $f(x), g(x)$ が $[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能とする．任意の $x \in (a,b)$ に関して $g'(x) \neq 0$ ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす $c \in (a,b)$ が存在する.（通常は $g(x)=x$ として，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ の形で十分.）

問題 1. 上の $f(x)$，$g(x)$ に対し曲線 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ $(a<t<b)$ で表される xy 平面上の曲線 C を考える．

(1) 曲線 C 上の $t=c$ における速度ベクトル（方向ベクトル）を求めよ．

(2) 上の平均値定理に対し，幾何学的な意味づけを与えよ．

「展開」の意味

問題 2. $f(x)=x^3$ を考える．

(1) $f(x)=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3$ となるよう各 a_i の値を定めよ．

(2) $x=1$ における $f(x)$ の接線の方程式 $y=g_1(x)$ を求めよ．このとき，$g_1(1)=f(1)$ かつ $g_1'(1)=f'(1)$ を確かめよ．

(3) $g_2(1)=f(1)$, $g_2'(1)=f'(1)$ かつ $g_2''(1)=f''(1)$ となる 2 次関数 $g_2(x)$ を求めよ．

(4) $(1.02)^3$ と，近似値 $g_1(1.02)$, $g_2(1.02)$ を比較せよ．また，その相対誤差をもとめよ．

Taylor 展開

テイラーの定理　点 a を含む区間 $I \subset \mathbb{R}$ において関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとする．このとき，$x=a$ において $f(x)$ は $(n-1)$ 次多項式

$$F_n(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

で近似される（「近似多項式」）．特に各 $x \in I$ に対して，誤差 $R_n := f(x)-F_n(x)$ は x と a の間にある正体不明の数 c を用いて

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

と書ける．$f(x)=F_n(x)+R_n$ の形の表記を **$f(x)$ の $x=a$ における n 次のテイラー展開**という．

問題 3. 上の定理において，$f(x)$ と $F_n(x)$ とは $x = a$ における 0 階から $n-1$ 階までの微分が全て一致することを確認せよ

問題 4. 上の定理を $f(x) = e^x$ に適用し，$x = 0$ における n 次のテイラー展開を求めよ．また，$e^{0.1} = 1.1051709\cdots$ に関する $F_n(0.1)$ $(n = 1,\ 2,\ 3)$ の およその相対誤差を求めよ．

今週の宿題

宿題 1-1　$n = 3$ とおいてテイラーの定理を証明しよう．

(1) $F(x) := f(x) - \left\{ f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \right\}$ とおく．(すなわち，$F(x) = f(x) - F_3(x) = R_n$.) このとき，以下を示せ：

(ア) $F(a) = F'(a) = F''(a) = 0$.

(イ) $F^{(3)}(x) = f^{(3)}(x)$.

(2) $F(x)$ と $G(x) = (x-a)^3$ に平均値の定理を適用して，

$$\frac{F(x)}{(x-a)^3} = \frac{F'(x_1)}{3(x_1-a)^2} = \frac{F''(x_2)}{3\cdot 2(x_2-a)} = \frac{F^{(3)}(x_3)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

となる $a \le x_3 \le x_2 \le x_1 \le x$ もしくは $x \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le a$ が存在することを示せ．

(3) （イ）を用いて，$f(x)$ の 3 次テイラー展開を求めよ．

宿題 1-2　$f(x) = x^3 - 3x$ にテイラーの定理を適用しよう．

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け．(出来るだけ丁寧に，正確に.)

(2) $x = -1$ における近似多項式 $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ とそのグラフを（ちゃんと近似の度合いが良くなっていくことがわかるように）描け．

(3) $x = 0$ における近似多項式 $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ とそのグラフを描け．

今週のレポート問題

レポート問題 1　$f(x)$ を 2 階微分可能な関数とする．このとき $f''(a) \neq 0$ であれば，1 次テーラー展開

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

において，$x \to a$ のとき $\dfrac{c-a}{x-a} \to \dfrac{1}{2}$ を示せ．(Hint. $f(x)$ の 2 次テーラー展開と $f'(x)$ の 1 次テーラー展開を比較する.)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ランダウ記号とテーラーの定理

作成日：October 18, 2006　Version：1.1

ランダウの記号

問題 1. $x \geq 0$ が十分小さい（$x = 0.000000000000000000001$ とか）とき，以下の値を小さい順番に並べよ．

$$x^{10}, x, \sqrt{x}, x^{\frac{1}{3}}, x^2, x^{\sqrt{2}}, x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, x^{\pi}, \frac{x^2}{100}$$

Landau's o： $x = a$ の周りで定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ に対し，

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \quad (x \to a)$$

が成り立つとき，$f(x) = o(g(x))\ (x \to a)$ と表す．すなわち，$f(x)$ のほうが $g(x)$ より**速く 0 に近づく．**

問題 2. $x \to +0$ のとき，以下を示せ．

(1) $x = o(1)$　(2) $x + x^{\sqrt{2}} = x + o(x)$　(3) $0 < p < q \implies x^q = o(x^p)$

Landau's O： $x = a$ の周りで定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ に対し，ある $M > 0$ が存在して

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \iff -M|g(x)| \leq f(x) \leq M|g(x)|$$

であるとき，これを $f(x) = O(g(x))\ (x \to a)$ と表す．特に $g(x) \to 0\ (x \to a)$ ならば，$f(x)$ は $g(x)$ より**速く，もしくは同程度の速さで 0 に近づく．**

問題 3. $x \to 0$ のとき以下を示せ．

(1) $2006 = O(1)$　(2) $x + x^5 = x + O(x^2)$　(3) $0 < p \leq q \implies x^q = O(x^p)$

Taylor 展開（再）：2 変数に向けて

テイラーの定理　点 a を含む区間 $I \subset \mathbb{R}$ において関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとする．このとき，$x \to a$ ならば

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + o(|x-a|^{n-1}). \end{aligned}$$

問題 4. 前回のプリントにおいて，各 $x \in I$ に対して，誤差関数を $R_n(x) := f(x) - F_n(x)$ と定める．このとき，$R_n(x) = o(|x-a|^{n-1})\ (x \to a)$ を示せ．(実は $R_n(x) = O((x-a)^n)\ (x \to a)$ が成り立つ．→**レポート問題**)

問題 5. $f(x, y) := e^{x^2+y^2}$ とおく．

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(1) $x,\ y \to 0$ のとき，$X := x^2 + y^2 \to 0$ である．このとき，テーラー展開 $e^X = 1 + X + O(X^2)\ (X \to 0)$ を用いて,

$$f(x,y) \ = \ 1 + x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2)$$

を示せ.

(2) 以下の式を確かめよ：

$$1+x^2+y^2 \ = \ f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2!}\left\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right\}$$

今週の宿題

宿題 2-1　以下を証明せよ.（直接証明してもよいし，テーラー展開をちゃんと公式どおり計算してから導いても良い.）

(1) $e^x = 1 + x + o(x)\ (x \to 0)$　(2) $\sin x = O(x)\ (x \to 0)$

(3) $1 - \cos x = O(x^2)\ (x \to 0)$　(4) $x = o(x \log x)\ (x \to 0)$

宿題 2-2　Landau 記号を駆使して，以下の極限を求めよ.

(1) $\dfrac{e^x \sin x - (x + x^2)}{x^3}$　(2) $\dfrac{\tan x - x}{x^3}$

宿題 2-3.　以下の文章は $x \to +0$ に関するものである．この中で間違っているものを探し，反例（間違いを実証する例）を挙げよ.（余裕のある人は，正しいものに対し厳密な証明をつけよ.）

(1) $e_1(x) = o(x),\ e_2(x) = O(x^2)$ のとき，$e_1(x) + e_2(x) = O(x^2)$.

(2) $e_1(x) = O(x),\ e_2(x) = O(x)$ のとき，$e_1(x) + e_2(x) = O(x)$.

(3) $e_1(x) = O(x^3)$ のとき，$e_1(x) = O(x)$.

(4) $e_1(x) = O(x),\ e_2(x) = O(x)$ のとき，$e_1(x) - e_2(x) = O(x^2)$.

(5) $e_1(x) = O(x^2),\ e_2(x) = O(x^{1/2})$ のとき，$e_1(x)e_2(x) = O(x^{5/2})$.

(6) $e_1(x) = o(x^2),\ e_2(x) = O(x^{1/2})$ のとき，$e_1(x)e_2(x) = o(x^{5/2})$.

今週のレポート問題

レポート問題 2　前回のプリントにあるテーラーの定理において，各 $x \in I$ に対し誤差関数を $R_n(x) := f(x) - F_n(x)$ と定める．このとき，$R_n(x) = O((x-a)^n)\ (x \to 0)$ を示せ.（Hint: $f^{(n)}(x)$ の連続性を使う.）

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

2 変数関数の接平面と Taylor 展開

作成日：October 18, 2006　Version：1.0

2 変数の Taylor 展開

問題 1. (復習：平面の方程式)

(1) xyz 空間において，$\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面の方程式 $F(x, y, z) = 0$ を求めよ．

(2) 球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 上の点 $(1, 1, 1)$ で S に接する平面の方程式を求めよ．

(3) $z = P(x, y) = C + Ax + By$ は平面の方程式となることを示せ．このとき，$P_x(x, y)$ と $P_y(x, y)$ は何か？

2 変数関数のテイラー展開　3 階以上偏微分可能な関数 $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ における（2 次の項までの）Taylor 展開：

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \quad \text{（ここまでで 1 次近似：接平面）} \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left\{ f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2 \right\} + \cdots \end{aligned}$$

注：実は上の "$\cdots$" の部分は $o((x-a)^2 + (y-b)^2)$ である（→**レポート**）

問題 2. 上の公式で $z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ が $(x, y) = (a, b)$ における $f(x, y)$ の接平面になっていることを（たとえば幾何学的に）納得せよ．

問題 3. 以下の関数の (a, b) における 2 次の項までの Taylor 展開を求めよ．

(1) $z = f(x, y) = e^{x+y}$,　$(a, b) = (1, 1)$

(2) $z = f(x, y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$,　$(a, b) = (1, 1)$

問題 4. $\sin t = t - t^3/6 + O(t^5)$ $(t \to 0)$ を用いて，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y) = \sin(2x + y)$ の $(x, y) = (0, 0)$ における 2 次の項までの Taylor 展開と接平面の方程式を求めよ．

(2) $g(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ の $(x, y) = (0, 0)$ における 2 次の項までの Taylor 展開と接平面の方程式を求めよ．

(3) xyz-空間の単位を 1km とする．$z = f(x, y)$，$z = g(x, y)$ のそれぞれが定める曲面の原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ に人が立った場合，その人はまっすぐ立っていられるか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題

宿題 3-1　$f(x,y) = x^2 - 3xy + 3y^2 + 4x - 9y$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(x,y) = (0,0)$ における曲面 $z = f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(2) $(x,y) = (1,1)$ における $z = f(x,y)$ の 2 次の項までの Taylor 展開を求めたい．

(a) $f(x,y) = C + A(x-1) + B(y-1) + \dfrac{1}{2!}\{a(x-1)^2 + 2b(x-1)(y-1) + c(y-1)^2\}$ となるような A, B, C, a, b, c を求めよ．(Hint: $x - 1 = X$, $y - 1 = Y$ とおく.)

(b) $C = f(1,1)$，$A = f_x(1,1)$，$B = f_y(1,1)$，$a = f_{xx}(1,1)$，$b = f_{xy}(1,1)$，$c = f_{yy}(1,1)$ となることを確かめよ．

(c) $(x,y) = (1,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) 同様にして，$(x,y) = (1,2)$ における 2 次までの Taylor 展開をもとめよ．また，そこでの接平面の方程式を求めよ．

宿題 3-2　$(x,y) \to (0,0)$ のとき，以下を証明せよ．

(1) $f(x,y) = O(x^2) \implies f(x,y) = O(x^2 + y^2)$．(Hint：ある $M > 0$ が存在して $|f(x,y)| \le Mx^2$ ならば，ある $M' > 0$ が存在して $|f(x,y)| \le M'(x^2 + y^2)$ を示す．これはほぼ自明.)

(2) $f(x,y) = O(xy) \implies f(x,y) = O(x^2 + y^2)$．(Hint: $(x-y)^2 \ge 0$)

(3) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + O((x^2 + y^2)^{3/2}) \implies f(x,y) = O(x^2 + y^2)$．

今週のレポート問題

レポート問題 3　上の 2 変数関数の Taylor 展開を証明せよ．特に，"$\cdots$" の部分（誤差項，もしくは剰余項と呼ばれる部分）まで正確に記述し，それが $(x,y) \to (a,b)$ のとき $o((x-a)^2 + (y-b)^2)$ となることを示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

2 変数関数の極大と極小

作成日：October 31, 2006　Version：1.1

以下で扱う関数はすべて 3 階以上微分可能とする．

極大と極小の復習（1 変数）

問題 1.（放物線） 関数 $y = C + a(x-p)^2$ のグラフを描け．（a の値で場合わけせよ．）

> $y = f(x)$ に対し，$x = p$ において $f'(p) = 0$ と仮定する[a]．このとき，
>
> - $f''(p) < 0$ ならば f は $x = p$ で極大
> - $f''(p) > 0$ ならば f は $x = p$ で極小
> - $f''(p) = 0$ となる点は極大とも極小とも判定しかねる．
>
> [a] すなわち，p での Taylor 展開は $f(x) = f(p) + f''(p)(x-p)^2/2! + O((x-p)^3)$ となる．従って，グラフは $y = C + a(x-p)^2$ の形の関数で近似できる．

問題 2. $f(x) = x^3(x-1)$ とする．このとき，極大もしくは極小となる点を求めよ．

2 変数の極大と極小

> 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (p, q)$ で**極大（極小）**とは，(p, q) を中心とする十分小さな円板上で $f(p, q)$ が $f(x, y)$ の唯一の 最大値（最小値）になっているときを言う．

問題 3. 以下の関数の中から $(x, y) = (0, 0)$ で極小もしくは極大であるものを選べ．

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$　　(2) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(3) $f(x, y) = (x - y)^2$　　(4) $f(x, y) = x^2 + y^4$

2 変数の場合も，1 階微分と 2 階微分を用いて極大・極小の判定ができる．いま，$z = f(x, y)$ の $(x, y) = (p, q)$ における Taylor 展開が

$$\begin{aligned} f(x,y) &= C + A(x-p) + B(y-q) \qquad \text{（ここまでで 1 次近似，平面の式）} \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left\{a(x-p)^2 + 2b(x-p)(y-q) + c(y-q)^2\right\} + \cdots \end{aligned}$$

で与えられたとする．ただし，

$$\begin{aligned} C &= f(p,q), & A &= f_x(p,q), & B &= f_y(p,q) \\ a &= f_{xx}(p,q), & b &= f_{xy}(p,q), & c &= f_{yy}(p,q) \end{aligned}$$

である．もし $A = B = 0$ ならば $f(x, y)$ は定数関数 $z = C$（水平な平面）で 1 次近似されるので，極値となりうるであろう．そのまえに：

問題 4. 上の $A = B = 0$ を満たす式について，以下の問いに答えよ．

(1) 変数変換 $X = x - p$，$Y = y - q$, $Z = z - C$ を施し，上の式を $Z = F(X, Y)$ の形に書き直せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 2 次式 $G(X,Y) = aX^2 + 2bXY + cY^2 (a \neq 0)$ を考える．$(X,Y) \neq (0,0)$ のとき，常に $G(X,Y) > 0$ となるための a, b, c の十分条件を求めよ．「常に $G(X,Y) < 0$」の場合はどうか」

上の $f(x,y)$ が $A = B = 0$ ($\Longleftrightarrow f_x(p,q) = f_y(p,q) = 0$) を満たすとする．すなわち

$$f(x,y) \;=\; C + \frac{1}{2!}\big(a(x-p)^2 + 2b(x-p)(y-q) + c(y-q)^2\big) + \cdots$$

のとき，

- $ac - b^2 > 0$ かつ $a < 0$ ならば f は $(x,y) = (p,q)$ で極大
- $ac - b^2 > 0$ かつ $a > 0$ ならば f は $(x,y) = (p,q)$ で極小
- $ac - b^2 < 0$ のときは極値にならない（鞍点）
- $ac - b^2 = 0$ のときは，さらに調べないと分からない．

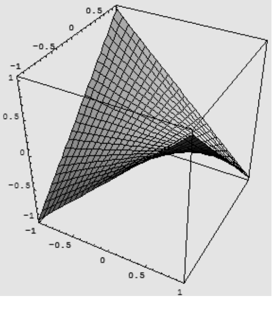
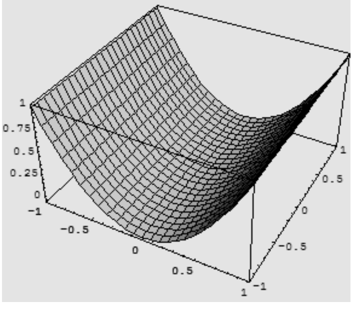
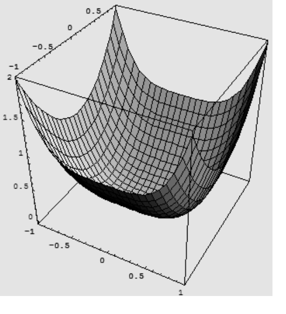
参考　ちなみに $ac - b^2$ は行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx}(p,q) & f_{xy}(p,q) \\ f_{yx}(p,q) & f_{yy}(p,q) \end{pmatrix}$$

の行列式である．これをヘッシアンと呼ぶ．3 変数の場合もこれに対応する行列の行列式の符号を計算することで，極値を探すことができる．

微妙な例　$ac - b^2 \leq 0$ となると，極値かどうかの判定は微妙である．

(1) $z = -xy$　　(2) $z = x^2$　　(3) $z = y^2 + x^4$

問題 5. 次の関数が $(0,0)$ において極値かどうか判定せよ．

(1) $z = f(x,y) = -xy$　　(2) $z = f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

(3) $z = f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$　　(4) $z = f(x,y) = \cos(x+y)$

問題 6. 関数 $z = f(x,y) = x^2 - 3xy + 3y^2 + 4x - 9y$ の極値を全て求めよ．

今週の宿題

来週（11/8）は授業のはじめに 30 分の小テストをやるので，テスト勉強を今週の宿題とします．自筆ノート（コピー不可）に限り参照を許可するので，要点をまとめた手書きノートを作ってくると良いでしょう.（ノートの提出，採点はしません.）

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

一次変換の線形性

作成日：November 7, 2006　Version：1.0

直線と平面のパラメーター表示

問題 1. xyz 空間を $\mathbb{R}^3$ で表す．このとき，以下の集合が平面もしくは直線となることを納得せよ．

(1) $$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (t \in \mathbb{R})\right\}$$

(2) $$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ (s,\ t \in \mathbb{R})\right\}$$

(3) $$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ (s,\ t \in \mathbb{R})\right\}$$

(4) $$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ (s,\ t \in \mathbb{R})\right\}$$

直線のパラメーター表示： $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + s\boldsymbol{u}_1 \quad (s \in \mathbb{R})$
平面のパラメーター表示： $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 \quad (s,\ t \in \mathbb{R})$
ただし，$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ は平行でなく，$\boldsymbol{0}$ でもない．

一次変換

xy 平面を $\mathbb{R}^2$ とあらわすことにする．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ があるとき，写像

$$T_A : \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$$

を**一次変換**と呼ぶ．

問題 2. (線形性) T_A は以下の性質を持つことを示せ：

(L1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2$ に対し，$T_A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{x}')$

(L2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$T_A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T_A(\boldsymbol{x})$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. $\ell : \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$ とする．以下の行列 A に対し，$T_A(\ell)$ を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

今週の宿題

宿題 5-1　$x + y + z = 1$ のとき，$xy + yz + zx$ の極値を求めよ．

宿題 5-2　2×2 行列 A によって定まる一次変換 $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える

(1) $T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T_A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ となるような A を定めよ．

(2) 直線 $\ell : y = 0$ が T_A により直線 $\ell' : y = x$ に写るような A をすべて求めよ．

宿題 5-3　$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$T_A : \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$$

で定める．

(1) **問題 1**(1)–(4) の直線または平面に対し，それぞれの T_A による像のパラメーター表示を求めよ．これらはどのような図形か？

(2) 上で求めた像はすべてある平面内に含まれることを示せ．(Hint: Set $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} := A\boldsymbol{x}$. Then x', y', z' satisfy an equation of the form $ax' + by' + cz' + d = 0$.)

今週のレポート

レポート問題 5　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ とするとき，単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の T_A による像を求めよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

行列式と体積

作成日：November 15, 2006　Version：1.0

今日は

行列式のもっとも重要な性質（多変数の微積分には欠かせない！）のひとつを調べます：　以下，

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

を正則行列とし，$\det A$ でその行列式を表すことにする．また，

$$Q := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

なる単位立方体を考える．このとき，次が成り立つことを調べたい．

定理：　写像 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．E を $\mathbb{R}^3$ の部分集合とするとき，その体積を $\mathrm{vol}\, E$ と表す．このとき，

$$\mathrm{vol}\, F(Q) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}\, Q.$$

すなわち，**行列式の絶対値は線形写像における体積の拡大率を表す**．任意の集合 $E \subset \mathbb{R}^3$ についても，これを細かい立方体で近似すれば $\mathrm{vol}\, F(E) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}\, Q$ が成り立つ[1]．この重要な性質は，多変数の微積分で **Jacobian** という形で現れる．

具体例から

問題 1. 次の 3 種類の正則行列を考える：

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$i = 1,\ 2,\ 3$ に対し，以下の問いに答えよ：

(1) B_i を A の左から掛ける．このとき，B_i は A に対しどのような操作を行っていることに対応するか？また，このとき行列式は $\det A$ に比べどのように変化するか？

(2) B_i を A の右から掛けた場合はどうか？

以上を踏まえて，次のような 3 種類の行列を考える：

(1) タイプ I：

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{ただし，$*$ のうち 1 つは定数 $k \neq 0$，残りは 1}$$

[1] 任意のの E に関して，その体積を測ることができるか，という問題は自明ではない．ここでは暗にそれを仮定した．詳しくは Lebesgue 積分論で学習する．ちなみに，E が直方体ならば，その体積を図ることができることは知られている．一般の集合の場合でも，E の体積を図ることが出来れば，$F(E)$ の体積も測ることができることは知られている．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(2) タイプ II：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) タイプ III：

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ただし，$*$ のうち 1 つは定数 $k \neq 0$，残りは 0}$$

これら 3 タイプの行列を，**基本行列**と呼ぶことにする．これらについて，次が成り立つ：

- 行列 A にタイプ I の行列を左から掛けると，ある行が k 倍され，右から掛けるとある列が k 倍される．特に，行列式は k 倍される．
- 行列 A にタイプ II の行列を左から掛けると，ある 2 つの行が交換される．右から掛けるとある 2 つの列が交換される．特に，行列式は -1 倍される．
- 行列 A にタイプ III の行列を左から掛けると，ある行にある行を k 倍したものが加えられる．右から掛けるとある列にある列を k したものを加えられる．特に，行列式，は 1 倍される（変化しない）．

すなわち，行列の基本変形はタイプ I, II, III の行列との積を取ることに対応している．また，簡単な事実だが，

タイプ I, II, III の行列の逆行列もまた，それぞれタイプ I, II, III である．

ということも確認しておこう．たとえば，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．これは対応する基本変形の意味から明らかであろう．

基本変形と体積の拡大率

問題 2. 問題 1 の B_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ に対し，以下の問いに答えよ：

(1) $G_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} \mapsto B_i \boldsymbol{x}$ で定める．このとき，$\operatorname{vol} G_i(Q)$ を求めよ．

(2) $\operatorname{vol} G_i(Q) = |\det B_i| \cdot \operatorname{vol} Q$ を確かめよ．

問題 3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を考える．

(1) 行と列の基本変形により，A を単位行列 I にせよ．

(2) 上の基本変形をもとに適当なタイプ I, II, III の行列 $L_1, L_2, \ldots, L_m, R_1, R_2, \ldots, R_n$ を見つけ，

$$L_1 L_2 \cdots L_m A R_1 R_2 \cdots R_n = I$$

とせよ．

(3) A を $L_1, L_2, \ldots, L_m, R_1, R_2, \ldots, R_n$ の逆行列で表せ.

(4) 写像 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．このとき,

$$\mathrm{vol}\, F(Q) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}\, Q$$

となることを説明せよ.

実は，次が成り立つ（→**レポート問題**）：

任意の正則行列 A について，適当なタイプ I, II, III の行列 $L_1, L_2, \ldots, L_m, R_1, R_2, \ldots, R_n$ を見つけて,

$$\begin{aligned} L_1 L_2 \cdots L_m A R_1 R_2 \cdots R_n &= I \\ \iff \quad A &= L_m^{-1} \cdots L_2^{-1} L_1^{-1} R_n^{-1} \cdots R_2^{-1} R_1^{-1} \end{aligned}$$

とできる．とくに，$\det A = \{(\det L_1) \cdots (\det L_m)(\det R_1) \cdots (\det R_n)\}^{-1}$. また，$A$ の定める線形写像による体積の拡大率は $|\det A|$ である.

今週の宿題＆レポート

宿題 6-1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) 行と列の基本変形により，A を単位行列 I にせよ.

(2) 上の基本変形をもとに適当なタイプ I, II, III の行列 $L_1, L_2, \ldots, L_m, R_1, R_2, \ldots, R_n$ を見つけ,

$$L_1 L_2 \cdots L_m A R_1 R_2 \cdots R_n = I$$

とせよ.

(3) A を $L_1, L_2, \ldots, L_m, R_1, R_2, \ldots, R_n$ の逆行列で表せ.

(4) 写像 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．このとき,

$$\mathrm{vol}\, F(Q) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}\, Q$$

となることを示せ.

レポート問題 6　任意の 3 次正則行列はタイプ I, II, III の行列の有限個の積で表されることを示せ.（すなわち，任意の 3 次正則行列は行と列の基本変形により単位行列に変形できることを示せ.）さらに意欲的な人は，この結果を正則ではない 3 次正方行列に拡張せよ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

『行列式と体積』の解答

作成日：November 15, 2006　Version : 1.1

問題 1 の解答

以下，$i = 1,\ 2,\ 3$ それぞれについて (1) と (2) を考える．

$i = 1$ のとき，(1)：　A に B_1 を左から掛けると，

$$B_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$$

となり，**3 行目が 3 倍される**．　このとき，行列式は $\det B_1A = (\det B_1)(\det A) = 3\det A$ より，　**$\det A$ にくらべ 3 倍される**．

$i = 1$ のとき，(2)：　A に B_1 を右から掛けると，

$$AB_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{pmatrix}$$

となり，**3 列目が 3 倍される．**このとき，行列式は $\det AB_1 = (\det A)(\det B_1) = 3\det A$ より，やはり **$\det A$ にくらべ 3 倍される**．

注意　これはタイプ I の例である．同様に，もし A の 2 **列目**を 100 倍したかったら行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を**右から**かければよく，1 **行目**を $-\sqrt{2}$ 倍したかったら行列

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を**左から**かければよい．(作用の方向は，(行)A(列) と覚えるとよい．)

$i = 2$ のとき，(1)：　A に B_2 を左から掛けると，

$$B_2A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

となり，**1 行目と 2 行目が交換される．**このとき，行列式は $\det B_2A = (\det B_2)(\det A) = -\det A$ より，**$\det A$ にくらべ (-1) 倍される**．

注意　『行列のある行とある行を入れ替えると，その行列式は (-1) 倍される』という現象は,「行の入れ替え」を「タイプ II の行列を左から掛ける」と読み替えると説明がつく.

$i=2$ のとき，(2)：　A に B_2 を右から掛けると，

$$AB_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & b & c \\ \boldsymbol{d} & e & f \\ \boldsymbol{g} & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \boldsymbol{a} & c \\ e & \boldsymbol{d} & f \\ h & \boldsymbol{g} & i \end{pmatrix}$$

となり，**1 列目と 2 列目が交換される．**このとき，行列式は $\det AB_2 = (\det A)(\det B_2) = -\det A$ より，やはり **$\det A$ にくらべ** (-1) **倍される**.

注意　これらはタイプ II の例であるが，他の 2 つのタイプ II の行列についても，同様の現象を各自チェックしてみよう.

$i=3$ のとき，(1)：　A に B_3 を左から掛けると，

$$B_3A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

となり，**1 行目に 3 行目 × 2 が加えられる．**このとき，行列式は $\det B_3A = (\det B_3)(\det A) = 1 \cdot \det A$ より，**$\det A$ から変化しない**.

注意　『行列のある行にある行の定数倍を加えても，その行列式の値は変わらない』という現象は，この操作を「タイプ III の行列を左から掛ける」と読み替えると説明がつく.

$i=3$ のとき，(2)：　A に B_3 を右から掛けると，

$$AB_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c+2a \\ d & e & f+2d \\ g & h & i+2g \end{pmatrix}$$

となり，**3 列目に 1 列目 × 2 が加えられる．**このとき，行列式は $\det AB_3 = (\det A)(\det B_3) = \det A$ より，**$\det A$ から変化しない**.

注意　これはタイプ III の例である．同様に，もし A の 2 **列目**に 1 列目 × 10 を加えたかったら，行列

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{10} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

を**右から**かければよく，2 **行目**に 1 列目 × $(-\frac{1}{2})$ を加えたかったら，行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1/2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を**左から**かければよい.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 2 の解答

$i=1$ のとき，(1)：　線形写像としての B_1 の作用を見てみよう．任意の点 (x,y,z) について

$$G_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3z \end{pmatrix}$$

であるから，B_1 は任意の点の z 座標を 3 倍する．したがって，Q の高さだけが 3 倍されることになり，$\mathrm{vol}\, G_1(Q) = 3 \cdot \mathrm{vol}\, Q = 3$ を得る．

$i=1$ のとき，(2)：　$\det B_1 = 3$ であることは一瞬でわかる．よって，

$$\mathrm{vol}\, G_1(Q) = |\det B_1| \cdot \mathrm{vol}\, Q$$

はすぐにわかる．

$i=2$ のとき，(1)：　任意の点 (x,y,z) について

$$G_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

であるから，B_2 は任意の点の x 座標と y 座標を交換する．これは，平面 $y=x$ に鏡を置いて写った像だと思えばよい．このとき，**向きが変わる**という現象は起きる（右手が左手に写る，など）が，**体積は変化しない**．すなわち，$\mathrm{vol}\, G_2(Q) = \mathrm{vol}\, Q = 1$ を得る．

$i=2$ のとき，(2)：　$\det B_2 = -1$ であることはすぐに計算できる．よって，

$$\mathrm{vol}\, G_2(Q) = |\det B_2| \cdot \mathrm{vol}\, Q$$

が成立する．

$i=3$ のとき，(1)：　この部分はかなり難しいかもしれない．少し詳しく説明しよう．任意の点 (x,y,z) について

$$G_3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

であるから，B_3 は

(1) x 座標に z 座標の 2 倍を加え，

(2) y 座標と z 座標を保つ

ということがわかる．これは何を意味しているのだろうか？結論から言うと，

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

立方体 Q の体積は変化しない．すなわち，$\mathrm{vol}\, G(Q) = \mathrm{vol}\, Q = 1$ である．

理由を考える前に，次のように考えてみよう：単位正方形のカードを大量に用意し，それを xy 平面（$z=0$）上の正方形 $0 \le x, y \le 1$ 上に重ねる．今，立方体 Q はそのようなカードの山だと仮定しよう．このとき，一番下のカードを固定させたまま，y 方向と z 方向には動かさないようにカードをずらしていく．カードの体積の総和は当然のように変化しない．実はこれが，B_3 の作用なのである．丹念に調べるには，次のように調べればよい．

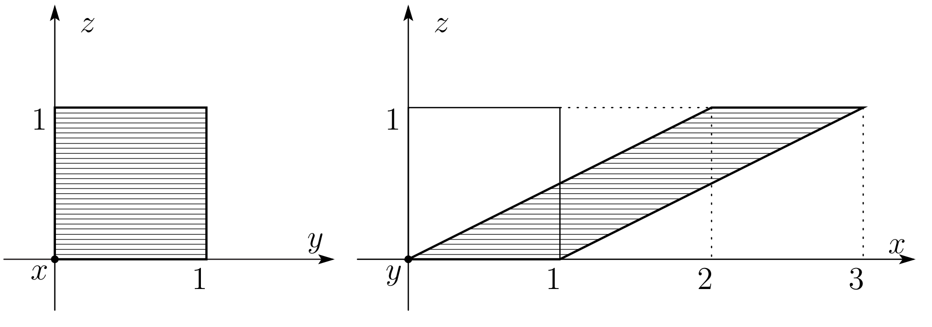


図 1: 断面図

い．Q の各頂点

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

の行き先は，それぞれ

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

となる．これらを辺で結べば，$G_3(Q)$ の形が特定でき，体積が 1 であることが計算できる．

注意　同様に，タイプ III の行列では $G(Q)$ は「カードのずらし」で表現でき，体積の変化はない．

$i=3$ のとき，(2)：　$\det B = 1$ であることはすぐに計算できる．よって，

$$\mathrm{vol}\, G(Q) = |\det B| \cdot \mathrm{vol}\, Q$$

が成立する．

問題 3 の解答 (1):

たとえば，次のような基本変形が考えられる．

$$A = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&2\\0&0&3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = I$$

この変形は次のような操作によって得られる：

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

- 1 行目と 2 行目を入れ替え
- 3 列目に 1 列目 $\times\,(-2)$ を加える
- 3 行目を 1/3 倍する．

(2) 上の操作をタイプ I, II, III の行列の積に読み替えると，

- 左から $L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を掛ける．
- 右から $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{-2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ を掛ける．
- 左から $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ を掛ける．

となる．したがって，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

(3) まず，対応する基本変形の意味を考えると

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

となることがわかる．したがって，

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

(4) $A = L_1^{-1} L_2^{-1} R_1^{-1}$ であるから，写像としては

$$\boldsymbol{x} \quad \longmapsto \quad R_1^{-1}\boldsymbol{x} \quad \longmapsto \quad L_2^{-1}(R_1^{-1}\boldsymbol{x}) \quad \longmapsto \quad L_1^{-1}(L_2^{-1}R_1^{-1}\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

という操作である．まず，最初の矢印で Q の体積は $|\det R_1^{-1}| = 1$ 倍され，次の矢印で $|\det L_2^{-1}| = 3$ 倍され，最後の矢印で $|\det L_1^{-1}| = 1$ 倍される．したがって，

$$\mathrm{vol}\, F(Q) = 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \mathrm{vol}\, Q = 3$$

である．一方，普通に計算すれば $\det A = -3$ であるから，

$$\mathrm{vol}\, F(Q) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}\, Q$$

が成立する．■

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

研究　$\mathbb{R}^3$ 内に，時計を置いた．ある正則行列 A をとり，これの定める線形写像 $f : \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ を考えよう．もとの $\mathbb{R}^3$ を A というレンズを通して見ていると思えばよい．このとき，時計はグニャっとひしゃげて見えるだろう．しかし，それはレンズの向こうの姿を写しているだけで，時計は依然として時を刻んでいる．このとき，

- $\det A > 0$ のとき，ひしゃげた時計版の文字は普通に読めて，針は時計回りに進み，
- $\det A < 0$ のとき，ひしゃげた時計版の文字は逆向き（”鏡文字”）で，針は反時計回りに進む

ことを説明せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形空間の基底

作成日：November 22, 2006　Version：1.0

今日は線形空間（ベクトル空間）の基底の意味について演習します.

基底と座標系

問題 1. 下の図のように，点 O と点 P が与えられている.

(1) 点 O を原点と定め，これを始点とする同一直線上にないベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を自由に描け.

(2) 点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ なる実数 a_1，a_2 が**ただひと組**定まるはずである．そのような a_1，a_2 の大体の値を求めよ.

(3) 以下で定まるこのプリント上の部分集合を図示せよ.

(a) $S_1 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : s = 2\}$

(b) $S_2 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : t = s + 1\}$

(c) $S_3 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : s \geq 0,\ t \geq 0,\ s + t = 1\}$

(d) $S_4 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : s^2 + t^2 = 1\}$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

基底と座標

上の問題で，Aretha さんはベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を選び，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

を得た．これは,「$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ **というベクトルを単位系として計った点 P の座標値が** $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$」と解釈できる．このように，**平面全体に一意な座標値を与えるベクトルの組**（この場合 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ ）を平面の**基底** (basis) と呼ぶ．さて一方，Otis さんは別の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を選び，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

を得た．このとき，明らかに

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

であるから，**同じベクトルの異なる表現**が得られた．すなわち,「同じものを測っているのに，異なる基底 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ と $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ を用いたために，異なる座標値 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ が得られた」と解釈できる．

ちょっとたとえ話を．われわれは長さを測るとき，必要に応じて mm, cm, m, km などを使いわける．例えば一円玉の直径 L は $L = 2\mathrm{cm} = 20\mathrm{mm}$ と，**単位によって異なる表現を持つ**．同じ長さでも，異なる単位 (cm と mm) に応じて異なる数値 (2 と 20) をとるのである．このとき，$\mathrm{cm} \times \frac{1}{10} = \mathrm{mm}$ であり，$2 \times 10 = 20$ であるから，単位が $\frac{1}{10}$ 倍されると，数値は 10 倍されることが分かる．

単位を変えれば数値が変わるように，基底を変えれば座標値も変わる．上はともに同じベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表すが，基底によって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\text{基}, \text{底})\begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix}$$

と異なる表現をもつわけである．

問題 2.（異なる基底の関係） Otis の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に対し，Aretha の基底を用いて

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$$

という関係が与えられたとする．このとき，上の $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の間の関係式を与えよ．

問題 3. **問題 2** において，

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2)P \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

となる 2 次の正方行列をもとめよ．このとき，$Q = P^{-1}$ を示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形空間 $\mathbb{R}^n$ に任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ をとる．このとき，$\mathbb{R}^n$ の異なる基底 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ に対し，

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\text{基}, \dots, \text{底})\begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix}.$$

と表されたとする．このとき，ある n 次正則行列 P が存在して，

$$(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)P = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n), \qquad P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

基底の変換も，長さの単位変換と考え方はまったく同じである．単位が k 倍されると数値が $1/k$ 倍されるように，基底が「P 倍」されると座標値は「P^{-1} 倍」される．

今週の宿題

宿題 7-1.　xy 平面 $\mathbb{R}^2$ に 2 つの基底 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ と $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ がそれぞれ

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$$

で与えられている．

(1) $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)P$ となる行列 P を求めよ．

(2) 集合 $S = \{x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy = 1\}$ を（できるだけ正確に）図示せよ．

(3) $S = \{s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2 \,:\, F(s,t) = 0\}$ となるように，関数 $F(s,t)$ をひとつ定めよ．

宿題 7-2.　xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ 内にベクトル $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとる．

(1) $S = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}^3 \,:\, s,\ t \in \mathbb{R}\}$ であらわされる集合は平面である．S の方程式（$ax + by + cz + d = 0$ の形）を求めよ．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ を考え，線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．このとき，S の像 $T(S)$ はまた平面である．$T(S)$ の方程式を求めよ．

（今週のレポート問題はお休みです.）

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像と表現行列

作成日：November 29, 2006　Version：1.0

- 今日は線形写像とその表現行列に関して理解するための演習です．
- 来週 (12/6) は出張のため休講とします．
- 再来週 (12/13) 日は第 2 回小テストのあと対角化について演習します．

線形写像

写像 $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が次の性質をみたすとき**線形写像**とよぶ[a]：

(L1) 任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対し，$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$ （和の像は像の和）

(L2) 任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha f(\boldsymbol{a})$ （定数倍の像は像の定数倍）

[a] $n = m$ のときは**一次変換**とも呼ばれる．

これは当たり前の性質ではない．線形写像とは，**非常に特別な写像**である：

問題 1. 以下の写像が線形写像かどうか判定せよ．

(1) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$　(2) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x+y$

(3) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f: x \mapsto \sqrt{2}\,x$　(4) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f: x \mapsto \sin x$

(5) $f:\mathbb{R}^{2006} \to \mathbb{R},\ f:\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2006} \end{pmatrix} \mapsto x_{32}$　(6) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

しかし，大概の写像は**局所的には**線形写像とみなしてよい：

問題 2. $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への関数 $f_1(x,y) = \sin(3x+2y)$, $f_2(x,y) = \sin(x+4y)$ を考える．さらに，写像 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ で定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(x,y) = (0,0)$ のまわりで f_1，f_2 の 3 次の Taylor 展開をせよ．$(\sin t = t - t^3/3! + \ldots)$

(2) $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の十分近くに限ると，ある 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して，$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は $F:\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に非常に近い．このような行列 A を求めよ．

このような A を $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の **Jacobi 行列** (もしくは **Jacobian**) と呼ぶ．重積分の変数変換を考えるときにまた登場するので，要注意．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

基底の変換と線形変換の表現

問題 3. 線形空間 $\mathbb{R}^2$ 上の標準基底を $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表す．すなわち，点 Q (x, y) に対応する位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表される．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 別の $\mathbb{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を用いたところ，

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成立した．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の終点を定める点の xy 座標を求めよ．

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が

$$f : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + 98y \\ 100y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 98 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられている．すなわち，

$$f : (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} 2x + 98y \\ 100y \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} 2 & 98 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である．このとき，

$$f : (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \longmapsto (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

となるような行列 $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ を求めよ．

このような B を，$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **の基底** $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ **に関する表現行列**と呼ぶ．

> **教訓：**線形写像は基底によって異なる表現行列をもつ．従って，きれいな表現行列が得られるように上手に基底を選んだほうが解析しやすい．

今週の宿題・レポート

再来週（12/6）は授業のはじめに 30 分の小テストをやるので，テスト勉強を今週の宿題とします．自筆ノート（コピー不可）に限り参照を許可するので，要点をまとめた手書きノートを作ってくると良いでしょう.（ノートの提出，採点はしません.）

レポート問題 8. 実数の集合 $\mathbb{R}$ は，それ自体が $\mathbb{R}$ 上の線形空間となっている．このとき，単に「写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$」と言った場合これはただの関数であり，その種類は計り知れないぐらいに多い．しかし,「線形写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 」と言った場合，f の種類はただ一通り，$f(x) = Kx$（ただし K は実数の定数）という形に定まってしまうことを示せ．また，この性質を 2 次元の写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の場合に拡張せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

表現行列と対角化

作成日：November 29, 2006　Version：1.0

今日は「対角化，固有値，固有ベクトル」の意味を理解することが目標です．線形代数の理論におけるこれらの役割を考えつつ，計算方法を身に付けよう．(そうしないとすぐに計算の仕方を忘れてしまうので.)

行列の対角化（うまい基底ときれいな表現）

問題 1. $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $F:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3x+2y\\x+4y\end{pmatrix}$ で定める．このとき，うまい基底 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を見つけ，F の $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ に関する表現行列 B が $\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{smallmatrix}\right)$ の形，すなわち

$$F:\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\longmapsto(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=f(\boldsymbol{x})$$

となるようにしたい．

(1) F の標準基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ に関する表現行列を A とする．このとき，$A\boldsymbol{u}_1=\lambda_1\boldsymbol{u}_1$，$A\boldsymbol{u}_2=\lambda_2\boldsymbol{u}_2$ が成り立つことを示せ．

(2) 一般に，正則行列 A に対し $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ を満たす $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ および $\lambda\neq 0$ が存在したと仮定する．このとき，$\det(\lambda E-A)=0$（E は単位行列）となることを示せ．

(3) 上の A に対し，方程式 $\det(\lambda E-A)=0$ を解け．

(4) 上の方程式のそれぞれの解 λ に対し，$A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ を満たす $\boldsymbol{u}$ を 1 つずつ求めよ．

(5) F の「うまい基底」と「きれいな表現行列」を求めよ．

前回配ったプリントの図を参照せよ．「うまい基底」と「きれいな表現行列」が見えるだろうか？

> n 次正方行列 A に対し，
> - 方程式 $\det(\lambda E-A)=0$ の解 λ を A の**固有値**と呼び，
> - $A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ となる $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ を λ に対する**固有ベクトル**と呼ぶ．

問題 2. $\mathbb{R}^2$ 上には次のような「運動法則」がある：

座標 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ に置かれた素粒子は，1 秒後に $\begin{pmatrix}3x+2y\\x+4y\end{pmatrix}$ に移動する

時刻 0 において，素粒子 π を $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ に置いた．n 秒後の素粒子 π の位置をもとめよ

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題・レポート

宿題 9-1. $z = x + yi$ とする．$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ に写す写像

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Im}\, z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z^2 \\ \mathrm{Im}\, z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

において，局所的に現れる線形写像をみつけよう．

(1) u, v を x, y で表せ．また，$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもとめよ．

(2) この写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線形写像では**ない**ことを示せ．

(3) $X := x - 1$, $Y := y - 1$, $U := u$, $V := v - 2$ とおく．このとき，U, V を X, Y で表せ．

(4) X, Y の絶対値がものすごく小さい状況を（たとえば絶対値が 0.0001 以下とか）考える．このとき，ある 2 次正方行列 A が存在して $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ は $A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に極めて近い．この行列 A は何か？

宿題 9-2：固有値が複素数に… !! $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$ で定める．このとき，

(1) 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の f による像を求めよ.（「うまい基底」は存在するか，ちょっと考えてみよう.）

(2) 方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ の解 λ を全てもとめよ．

(3) 上の各 λ に対し，$A\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$ となる縦ベクトル $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ を 1 つずつ見つけよ．

(4) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を $f : \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2z - 2w \\ 2z + 2w \end{pmatrix}$ で定める．このとき,「うまい $\mathbb{C}^2$ の基底」を見つけ，その基底による f の「きれいな表現行列」をもとめよ．

レポート問題 9. 上の**宿題 9-1** について，近似の精度を測りたい．実際に $|X|, |Y| \leq 0.0001$ のとき，$\left| \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right|$ の最大値を求めよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

局所的な線形写像

作成日：November 29, 2006　Version：1.0

この資料では，*Mathematica* を用いて写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が局所的に線形写像のように見える様子を描く方法を紹介します．

問題

$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への関数 $f_1(x,y)=\sin(3x+2y)$, $f_2(x,y)=\sin(x+4y)$ を考える．さらに，写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}f_1(x,y)\\f_2(x,y)\end{pmatrix}$ で定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(x,y)=(0,0)$ のまわりで f_1，f_2 の 3 次の Taylor 展開をせよ．($\sin t=t-t^3/3!+\ldots$)

(2) $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ の十分近くに限ると，ある 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ が存在して，$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は $F:\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ に非常に近い．このような行列 A を求めよ．

このような A を $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の **Jacobi 行列** (もしくは **Jacobian**) と呼ぶのであった．すなわち，Jacobi 行列とは**局所的な線形写像近似**を表す行列なのである．

まず，簡単に問題を解答しておこう．まず (1)．3 次の Taylor 展開なので，$C+Ax+By+ax^2+bxy+cy^2+o(x^2+y^2)$ の形にすれば OK．$\sin t=t-t^3/3!+\ldots$ の t に $3x+2y$，$x+4y$ をそれぞれ代入して

$$\begin{aligned}f_1(x,y)&=(3x+2y)-\frac{1}{3!}(3x+2y)^3+o((3x+2y)^3)\\f_2(x,y)&=(x+4y)-\frac{1}{3!}(x+4y)^3+o((x+4y)^3)\end{aligned}$$

となるが，3 次以上の項は無視できるので結局

$$\begin{aligned}f_1(x,y)&=3x+2y+o(x^2+y^2)\\f_2(x,y)&=x+4y+o(x^2+y^2)\end{aligned}$$

となる．次に (2)．上の式から

$$\begin{pmatrix}f_1(x,y)\\f_1(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+2y\\x+4y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}o(x^2+y^2)\\o(x^2+y^2)\end{pmatrix}$$

となるので，明らかに

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x,y)\\f_1(x,y)\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

である．すなわち，$A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$．また，Taylor 展開の定義より，これが Jacobi 行列になっていることは明らかである．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像との比較

では，実際に (0,0) の周りでの

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(3x+2y)\\ \sin(x+4y)\end{pmatrix} \qquad \text{と} \qquad F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

の作用を *Mathematica* で比較してみよう．そのために，原点の周りに小さな円を描き，それらがどのように f と F で写るか比較するためのコマンドを入力する．

まず，円の半径だけを列挙したリストを作成しよう．

```
radii = N[Range[1,20]/20]
```

と打ち込み（ちなみに radii は radius（半径）の複数形），Shift+Enter(Return) すると，

```
{0.05,0.1,0.15,0.2,0.25,0.3,0.35,0.4,0.45,0.5,0.55,
0.6,0.65,0.7,0.75,0.8,0.85,0.9,0.95,1.}
```

という結果が出てくる．これは，`Range[1,20]` により 1 から 20 までの数字を打ち出し，それを `/20` により割り算して 0 から 1 までの数字に直したものである．ここで `N[···]` をはずすと分数で表示されるが，ここでは見易さを考慮して少数で表示させた．

次に与えられた半径の円を描く式を入力する（//より右の部分は不要）：

```
ran = {-2, 2, -2, 2};      //グラフをかく範囲
P[r_] := ParametricPlot[    // パラメーター表示によるグラフ描画
{r*Cos[t], r*Sin[t]},    // 円のパラメーター表示
{t, -Pi, Pi},            //パラメーターの変域
AspectRatio -> Automatic,   //グラフの縦横比を 1 に
PlotStyle -> RGBColor[r, r, 1 - r],    //円の半径ごとに色を変える
PlotRange -> ran];            //グラフをかく範囲を指定
```

これで Shift+Enter した後，

```
Show[Map[P, radii] ]
```

と入力して Shift+Enter すれば，図 1 のように `radii` にある数字を半径にもつ円が表示される．

さて今度は，これらに F や f を施した図を描いてみよう．これらは特別ややこしい関数ではないので，直接グラフを描くコマンドの中に関数の式を入れてしまう：

```
F[r_] := ParametricPlot[
{3*r*Cos[t] + 2*r*Sin[t], r*Cos[t] + 4*r*Sin[t]},
{t, -Pi, Pi},
AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> RGBColor[r, r, 1 - r],
PlotRange -> ran];
```

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

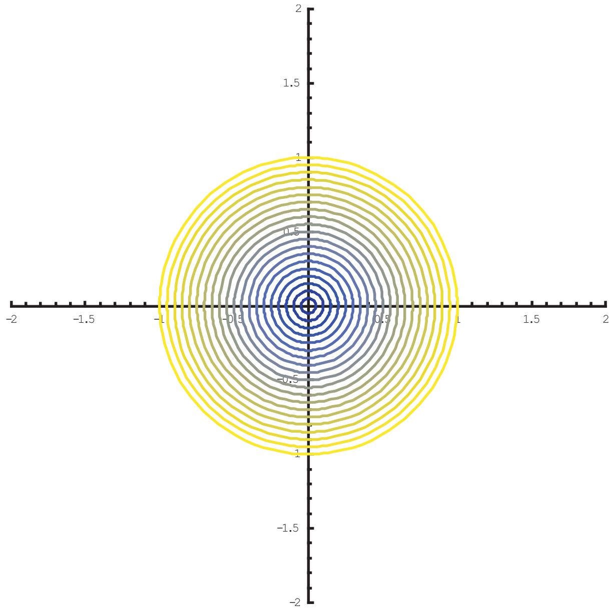


図 1: 原点まわりの円

```
f[r_] := ParametricPlot[
{Sin[3*r*Cos[t] + 2*r*Sin[t] ], Sin[r*Cos[t] + 4*r*Sin[t]]},
{t, -Pi, Pi},
AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> RGBColor[r, r, 1 - r],
PlotRange -> ran]
```

これで，上と同様に `Show[Map[F, radii]]` もしくは `Show[Map[f, radii]]` とすれば，次のような図が得られる：

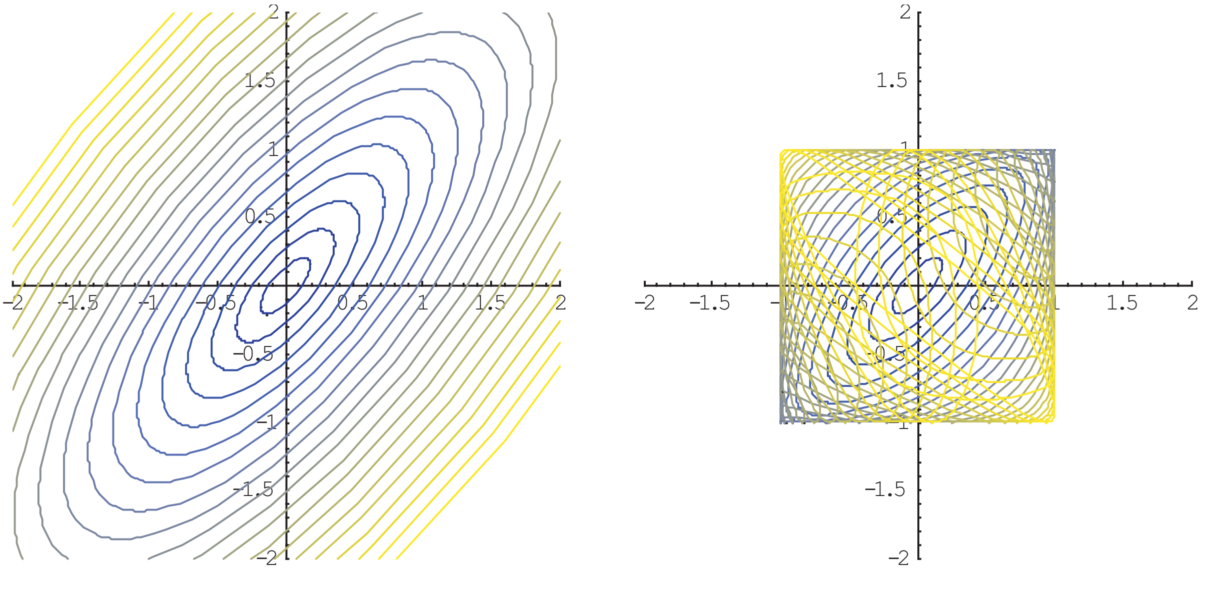


図 2: 左が F，右が f

原点に近い円は F も f もほぼ同じように写像していることが分かるだろう．特に F による円の像は楕円に，f による円の像は，$-1 \leq \sin t \leq 1$ であることから正方形の中に折りたたまれてしまう．

研究 1. 任意の $-1 \leq u,\ v \leq 1$ について，$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ となるような $x, y \in \mathbb{R}$ のペアは存在するだろうか？

研究 2. 他の $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像についても，局所的な線形写像（Jacobi 行列）を計算してみよ．*Mathematica* があれば，上のようにその作用を図示してみよ．