

はじめに

作成日：October 6, 2009 Version：1.2

この演習について

担当教員（メールは@以下に math.nagoya-u.ac.jp をつけてください。）

0 クラス（理 1-309）：川平 友規（かわひら ともき，理学部 A 館 439, kawahira@）

1 クラス（理 1-409）：石田 明（いしだ あきら，理学部 A 館 339, ishida@）

2 クラス（理 1-453）：川島 学（かわしま がく，理学部 A 館 339, kawashima@）

3 クラス（理 1-552）：瀧 真語（たき しんご，理学部 A 館 339, m04022x@）

4 クラス（理 1-555）：矢吹 康浩（やぶき やすひろ，理学部 A 館 339, yabuki@）

担当 TA

0 クラス：齋藤 翔（さいとう しょう，m09019h@）

1 クラス：高松 逸朗（たかまつ いつお，m09027g@）

2 クラス：長谷川 洸平（はせがわ こうへい，m09038a@）

3 クラス：林田 剛志（はやしだ たけし，m09039c@）

4 クラス：佐渡原 大樹（さどはら だいき，m07028g@）

演習のウェブサイト：

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/1W09.htm>

配布されたプリントが pdf 形式でダウンロードできます。また，毎週の進捗状況についてコメントしていきます。

演習の進め方：毎回，問題のプリントを配布します。担当教員が基本事項を確認したあと，問題を指定し，各自ノートに解いてもらいます。その後，担当教員が黒板で解説する，という流れです。ただし，配布した問題のすべてを演習で扱うとは限りません。

演習で取り上げるテーマ：

- (1) Taylor 展開と関数の近似
- (2) 2 変数関数のグラフと接平面，極大と極小
- (3) 2 変数関数の重積分，変数変換
- (4) 多項式の計算と高次方程式
- (5) 線形写像と行列式
- (6) 行列の固有値と対角化
- (7) 固有多項式と Cayley-Hamilton の定理

これらを直感的に理解し，計算ができるようになることが演習の目標です。さらに，自分の行った計算過程を数学的に整備された形で（他人にも分かるように）記述できるようになることも重要な目標です。

演習と講義は独立したものと考えられています。したがって，講義で扱わない内容を演習で扱うこともありますし，逆もありえます。

単位・成績：成績に関係のある要素は，出席回数および宿題です。成績の優・良・可は以下の基準で定めます。

- 出席を 50 点満点，宿題を 50 点満点として点数化する。
- 成績は 50 点未満を不可，50 - 69 点を可，70 - 84 点を良，85 点以上を優とする。
- ただし欠席 5 回もしくは宿題未提出 5 回で不可とする。

出席：授業中に出席を取ります。遅刻もしくは欠席する場合，事前に申し出た場合に限って，2回まで無条件に加点します。

宿題：宿題は毎回出題されます。提出の際は，必ず A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙を使用し，表紙をつけ，そこに名前，学籍番号，解いた問題の番号（『宿題 x-x』），提出日を記入してください。また，必ず左上をホチキスでとめて提出してください。

宿題の締め切りは次の演習の開始時間まで，提出場所は各クラスの教室とします。締め切り以後はいっさい受け取らないので注意してください。

もし何らかの事情で授業時に提出できない場合，事前に申し出た場合に限り対処します。

オフィスアワー：授業中・前後の質問は大歓迎です。それ以外の時間に質問したい場合は，ぜひオフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を活用してください。この演習の担当教員は，Cafe David（カフェ・ダヴィド）という合同のオフィスアワーに参加しています。月曜から金曜の昼休みにオープンし，コーヒー・紅茶を無料で提供しています。

Cafe David

営業時間：12:00 ~ 13:30（月～金）

営業期間：2009年10月1日（木）～ 2010年1月29日（金）

場所：理1号館2階エレベーター前

教員の担当曜日 水曜：瀧，木曜：矢吹，金曜：川平，石田，川島

その他のスタッフも待機しているので，自由に質問していただいてもかまいません。数理学科の学部生・院生もたくさんいるので，進路のことなど，情報収集の場としても活用してください。

オフィスアワー以外の時間に質問したい場合は，教員のオフィスに直接来ていただいてもかまいません。ただし，不在の場合や，他の仕事で忙しく対応できない場合もあります（事前に email 等で appointment を取ることをお勧めします。）

よく使う記号など：数の集合

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| (1) \mathbb{C} : 複素数全体 | (2) \mathbb{R} : 実数全体 | (3) \mathbb{Q} : 有理数全体 |
| (4) \mathbb{Z} : 整数全体 | (5) \mathbb{N} : 自然数全体 | (6) $x \in \mathbb{R}$: x は実数 |

ギリシャ文字

- | | | | | |
|-------------------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| (1) α : アルファ | (2) β : ベータ | (3) γ, Γ : ガンマ | (4) δ, Δ : デルタ | (5) ϵ : イプシロン |
| (6) ζ : ゼータ | (7) η : エータ | (8) θ, Θ : シータ | (9) ι : イオタ | (10) κ : カッパ |
| (11) λ, Λ : ラムダ | (12) μ : ミュー | (13) ν : ニュー | (14) ξ, Ξ : クシー | (15) \omicron : オミクロン |
| (16) π, Π : パイ | (17) ρ : ロー | (18) σ, Σ : シグマ | (19) τ : タウ | (20) υ, Υ : ウプシロン |
| (21) ϕ, Φ : ファイ | (22) χ : カイ | (23) ψ, Ψ : プサイ | (24) ω, Ω : オメガ | |

ちからだめし

作成日：October 2, 2009 Version：1.1

実施日：October 7, 2009

今日は夏休み明けのウォーミングアップということで、ちからだめしテストをやっていただきます（採点はしますが、成績には関係ないので安心してください。）前期にやった中間試験・期末試験の類題ですが、しっかり復習できてるでしょうか？

今後の予定

- 10/14：テイラー展開の復習
- 10/21：ランダウ記号とテイラーの定理
- 10/28：2変数関数の接平面とテイラー展開

問題 1. ある正の数 M が存在して、任意の自然数 n について

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq M$$

を満たすことが知られている。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して

$$p_n := (1+1)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

とするとき、数列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であることを示せ。

(2) 数列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示せ。ただし、不等式 $1+x \leq e^x$ ($x \geq 0$) を用いてもよい。

(3) 数列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するか？理由とともに答えよ。

問題 2. 球面 S と平面 π がそれぞれ次の方程式で与えられている。

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad \pi: x + y + z - 1 = 0.$$

必要ならば、点 (x_0, y_0, z_0) と $ax+by+cz+d=0$ で与えられる平面の距離は $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ であることを使ってよい。

(1) 球面 S と平面 π が交わってできる円 C の半径をもとめよ。

(2) 平面 π と平行な平面で、球面 S と 1 点だけで接する平面の方程式を求めよ。

問題 3. 方程式 $z^5 = 1$ を複素数の範囲で解き、解を複素平面に図示せよ。ただし、解は $z = re^{i\theta}$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) の形で表すこと。

裏面へ

問題 4. 関数 $f(x) = e^x(1 - \cos x)$ を $x = 0$ のまわりで x^5 の項までテイラー展開し, ランダウの記号 $o(x^5)$ を用いて有限テイラー展開の式として書き表せ.

問題 5. 次の行列式の値を計算せよ:
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -7 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

問題 6. 実数係数 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ が定める一次変換を考える. このとき原点 $0 \in \mathbb{R}^2$ の原像 (逆像) はどのような集合か?

問題 7. (オマケ) 解答用紙にギリシャ文字の表がある. 空欄を埋めよ.

ちからだめし

学生番号 _____ 名前 _____

問題 1.

問題 2.

ちからだめし

作成日：October 2, 2009 Version：1.1

実施日：October 7, 2009

学生番号 _____ 名前 _____

問題 3.

問題 4.

ちからだめし

作成日：October 2, 2009 Version：1.1

実施日：October 7, 2009

学生番号 _____ 名前 _____

問題 5.

問題 6.

ちからだめし

作成日：October 2, 2009 Version：1.1

実施日：October 7, 2009

学生番号 _____ 名前 _____

問題 7.

- (1) α (大文字 A) アルファ
- (2) β (大文字 B) ベータ
- (3) γ (大文字) ガンマ
- (4) δ (大文字 Δ) デルタ
- (5) ϵ (大文字 E) イプシロン
- (6) ζ (大文字 Z)
- (7) η (大文字 H) エータ
- (8) θ (大文字 Θ) シータ
- (9) ι (大文字 I) イオタ
- (10) κ (大文字 K) カッパ
- (11) (大文字 Λ) ラムダ
- (12) μ (大文字 M) ミュー
- (13) ν (大文字 N) ニュー
- (14) ξ (大文字 Ξ) クシー
- (15) o (大文字 O)
- (16) π (大文字) パイ
- (17) ρ (大文字 P) ロー
- (18) (大文字 Σ) シグマ
- (19) τ (大文字 T) タウ
- (20) v (大文字 Υ)
- (21) ϕ (大文字 Φ) ファイ
- (22) χ (大文字 X) カイ
- (23) ψ (大文字 Ψ) プサイ
- (24) (大文字 Ω) オメガ

テイラー展開の復習

作成日：October 14, 2009 Version：1.3

まずはテイラー展開の復習をしましょう。ただ展開しているのではなく、近似しているという事実が大切です。

今後の予定

- 10/21：ランダウ記号とテイラーの定理
- 10/28：2変数関数の接平面とテイラー展開

何のための「展開」か？

問題 1. $f(x) = x^3$ を考える。

- (1) $f(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$ となるよう各 a_i の値を定めよ。
- (2) $x=1$ における $f(x)$ の接線の方程式 $y = g_1(x)$ を求めよ。このとき、 $g_1(1) = f(1)$ かつ $g_1'(1) = f'(1)$ を確かめよ。
- (3) $g_2(1) = f(1)$, $g_2'(1) = f'(1)$ かつ $g_2''(1) = f''(1)$ となる 2 次関数 $g_2(x)$ を求めよ。
- (4) $(1.02)^3$ と、近似値 $g_1(1.02)$, $g_2(1.02)$ を比較せよ。また、その相対誤差をもとめよ。

注： $A, B > 0$ にたいし、 $\frac{|A-B|}{|B|}$ を A の B に関する相対誤差とよぶ。

テイラー展開

テイラー (Taylor) の定理。数 a を含む区間 $I \subset \mathbb{R}$ において関数 $f(x)$ が $(n+1)$ 回微分可能であるとする。このとき、 $x = a$ において $f(x)$ は n 次多項式

$$F_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

で近似される。これを n 次のテイラー多項式と呼ぶ。とくに各 $x \in I$ に対して、誤差 $R_n(x) := f(x) - F_n(x)$ は x と a の間にある正体不明の数 c を用いて

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

と書ける (いわゆる剰余項) $f(x) = F_n(x) + R_n(x)$ の形の表記を $f(x)$ の $x = a$ における n 次のテイラー展開と呼ぶ。

問題 2. (曲がり具合の近似) 上の定理において、 $f(x)$ と $F_n(x)$ とは $x = a$ における 0 階から n 階までの微分が全て一致することを確認せよ。

問題 3. 上の定理を $f(x) = e^x$ に適用し、 $x = 0$ における n 次のテイラー展開を求めよ。また、 $e^{0.1} = 1.1051709 \cdots$ に関する $F_n(0.1)$ ($n = 0, 1, 2$) のおよその相対誤差を求めよ。

問題 4. (剰余項の大きさ) 上の定理において、 $f^{(n+1)}(x)$ が I 上で連続と仮定する。このとき、 $\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$) を示せ。

平均値の定理

平均値の定理 (by コーシー) 関数 $f(x), g(x)$ が $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能とする. 任意の $x \in (a, b)$ に関して $g'(x) \neq 0$ ならば

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する (通常は $g(x) = x$ として, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ の形で十分.)

問題 5. 上の $f(x), g(x)$ に対し曲線 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ ($a \leq t \leq b$) で表される xy 平面上の曲線 C を考える.

- (1) 曲線 C 上の $t = t_0$ における速度ベクトル (方向ベクトル) を求めよ.
- (2) 上の「平均値の定理」に対し, 幾何学的な意味づけを与えよ.

今週の宿題

宿題 2-1 $n = 2$ とおいてテイラーの定理 (前頁枠内) を証明しよう.

(1) $F(x) := f(x) - \left\{ f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \right\}$ とおく. (すなわち, $F(x) = f(x) - F_2(x) = R_2(x)$.) このとき, 以下を示せ:

- $F(a) = F'(a) = F''(a) = 0$.
- $F^{(3)}(x) = f^{(3)}(x)$.

(2) $F(x)$ と $G(x) = (x-a)^3$ に平均値の定理を適用して,

$$\frac{F(x)}{(x-a)^3} = \frac{F'(x_1)}{3(x_1-a)^2} = \frac{F''(x_2)}{3 \cdot 2(x_2-a)} = \frac{F^{(3)}(x_3)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

となる $a \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq x$ もしくは $x \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq a$ が存在することを示せ.

(3) (イ) と (2) の結果を用いて, $f(x)$ の $x = a$ における 2 次のテイラー展開を求めよ.

宿題 2-2 $f(x) = 1/(1-2x)$ の $x = -1$ におけるテイラー多項式を求めよう.

- (1) $g(t) = 1/(1-t)$ の $t = 0$ における 2 次テイラー展開を求めよ (剰余項も忘れずに!)
- (2) $u = x + 1$ のとき $f(x) = g(\frac{2u}{3})/3$ が成り立つことを用いて, f の $x = -1$ におけるテイラー多項式 $F_0(x), F_1(x), F_2(x)$ を求めよ. また, それらのグラフを f のグラフとともに (近似度が上がっていくのがわかるように) ひとつの座標系内に描け.

宿題 2-3 $A = \sqrt[3]{28}$ の近似値を手計算で求めたい.

- (1) $f(x) = (1+x)^{1/3}$ ($|x| < 1$) の $x = 0$ における 2 次のテイラー多項式 $F_2(x)$ をもとめよ.
- (2) $28 = 3^3 + 1$ および $F_2(x)$ を用いて得られる A の近似値 B (有理数) およびその値を (小数点以下第 5 位を四捨五入し) 求めよ.

ちなみに $\sqrt[3]{28} = 3.036588971875662519 \dots$ である. 電卓を用いて B^3 を計算し, 検算してみよう.

ランダウ記号とテイラー展開

作成日：October 21, 2006 Version：1.2

今後の予定

誤差の大きさを明示するための作法として、ランダウ記号を練習します。記号の性質を覚えて、大胆に使いこなしましょう。

- 10/28：2変数関数の接平面とテイラー展開
- 11/4：2変数関数の極大・極小

基本的なテイラー展開

次のテイラー展開は、必要ならば自由に用いてよい：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots & (2) \quad \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\
 (3) \quad \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots & (4) \quad \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
 (5) \quad \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots & (6) \quad (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots
 \end{aligned}$$

ただし、(2)(4)(6)では $|x| < 1$ 、 α は実数とする。

上の \cdots の部分を表現するのに便利なのが、以下で扱うランダウ記号である。

ランダウ記号

問題 1. $x > 0$ が十分小さい ($x = 0.0000000000000001$ とか) とき、以下の値を小さい順番に並べよ。

$$x^{10}, 2009x^2, x, 2x, \sqrt{x}, x^{\frac{1}{3}}, x^2, x^{\sqrt{2}}, x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, x^\pi, \frac{x^2}{100}$$

ランダウ (Landau) の o ： $x = a$ のまわりで定義された関数 $f(x)$ が、ある定数 $p \geq 0$ について

$$\frac{f(x)}{(x-a)^p} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow a)$$

を満たすとき、 $f(x) = o((x-a)^p)$ ($x \rightarrow a$) と表す。すなわち、 $f(x)$ は $(x-a)^p$ より速く 0 に近づく。

例 1. $x \rightarrow 0$ のとき、以下がなりたつ。

$$(1) \pm 2009 \cdot o(1) = o(1) \quad (2) e^x = 1 + x + o(x) = 1 + o(1) \quad (3) x \cdot o(x^2) = o(x^3).$$

問題 2. $x \rightarrow 0$ のとき、以下を示せ。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad o(x)^n &= o(x^n) \quad (n \in \mathbb{N}) & (2) \quad (1 + o(x))(1 - o(x)) &= 1 + o(x) \\
 (3) \quad \frac{x}{1-x} &= x + x^2 + o(x^2) & (4) \quad e^x \cos x &= 1 + x + o(x^2)
 \end{aligned}$$

問題 3. (前回の問題 4) 前回のプリント (K202) のテイラーの定理において、 $f^{(n+1)}$ が $x = a$ で連続であれば剰余項が $R_n(x) = o((x-a)^n)$ を満たすことを確認せよ。(じつは、 $f^{(n)}$ が $x = a$ で連続ならばこれは成り立つ。)

ランダウ (Landau) の O : 関数 $f(x)$ が $x = a$ の十分近くで

$$|f(x)| \leq M|(x-a)^p|$$

となる定数 $p \geq 0, M > 0$ をもつとき, $f(x) = O((x-a)^p)$ ($x \rightarrow a$) と表す. すなわち $f(x)$ は $(x-a)^p$ と同程度以上の速さで 0 に近づく.

例 2. $x \rightarrow 0$ のとき, 以下がなりたつ (例 1 と比較せよ.)

$$(1) \pm 2009 = O(1) \quad (2) e^x = 1 + x + O(x^2) = 1 + O(x) \quad (3) x \cdot O(x^2) = O(x^3).$$

問題 4. $x \rightarrow 0$ のとき以下をチェックせよ.

$$(1) O(x)^n = O(x^n) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2) \frac{O(x^3)}{x} = O(x^2)$$

$$(3) (1 + x + O(x^2))(1 - x + O(x^2)) = 1 + O(x^2)$$

$$(4) f(x) = x + O(x^2) \implies e^{f(x)} = 1 + x + O(x^2)$$

$$(5) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5) \quad (6) \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} + O(x^2)$$

極限への応用

問題 5. 以下の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

今週の宿題

宿題 3-1. $x \rightarrow +0$ のとき, つぎの 5 つの関数を小さい順番に並べよ.

$$e^{\sin x} - 1, 1 - \cos x, \log(1 + x^2), \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}, \sqrt[3]{1 + x + x^2} - \sqrt[3]{1 + x - x^2},$$

宿題 3-2. ランダウ記号を駆使して, 以下の極限を求めよ (問題 4(5) は用いてよい.)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - (x + x^2)}{x^3} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x) - x}{x^3} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +0} (1 + x)^{1/x}$$

(3) のヒント: まずは $f(x) = \log(1 + x)^{1/x}$ を展開する.

宿題 3-3. (微分係数とランダウ記号)

- (1) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能なとき, $f(a+h) = f(a) + Ah + o(h)$ ($h \rightarrow 0$) が成り立つような定数 A が存在する. その理由を述べよ.
- (2) $f(x) = \log(\sin(\tan x) + \cos(\tan x))$ とする. $x \rightarrow 0$ として $f(x)$ を $B + Ax + o(x)$ の形で表すとき, A, B の値を求めよ.
- (3) $f'(0)$ の値を求めよ.

2変数関数の接平面とテイラー展開

作成日：October 28, 2009 Version：1.1

2変数関数と接平面の関係を「1次近似」という観点から理解しましょう。また、2変数関数で近似したものがテイラー展開（多項式）になることを確認します。以下であつかう関数はすべて、必要なだけ偏微分できるものとしします。

今後の予定

- 11/4：2変数関数の極大・極小
- 11/11：1次変換と線形写像

平面・接平面の方程式

問題 1. (復習：平面の方程式)

- (1) xyz 空間において、 $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り $n = (a, b, c)$ に垂直な平面の方程式 $F(x, y, z) = 0$ を求めよ。
- (2) 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 上の点 $(1, 1, 1)$ で S に接する平面の方程式を求めよ。

問題 2. (接平面の方程式) 関数 $z = f(x, y)$ のグラフ（曲面）を考える。

- (1) グラフの平面 $y = b$ による切り口に現れる曲線の、 $x = a$ における接線 l_x の方程式およびパラメーター表示を求めよ。
- (2) 同様に、平面 $x = a$ による切り口に現れる曲線の、 $y = b$ における接線 l_y の方程式およびパラメーター表示を求めよ。
- (3) l_x と l_y を同時に含む平面の方程式は

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

で与えられることを示せ。また、これが $(x, y) = (a, b)$ における $z = f(x, y)$ の接平面になっていることを納得せよ。

2変数テイラー多項式

問題 3. $f(x, y) = x^2 + y^2$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x, y) = C + A(x - 2) + B(y - 1) + \frac{1}{2!}\{a(x - 2)^2 + 2b(x - 2)(y - 1) + c(y - 1)^2\}$ となるような定数 A, B, C, a, b, c を求めよ。(Hint: $x - 2 = X, y - 1 = Y$ とおく。)
- (2) $C = f(2, 1), A = f_x(2, 1), B = f_y(2, 1), a = f_{xx}(2, 1), b = f_{xy}(2, 1), c = f_{yy}(2, 1)$ となることを確かめよ。
- (3) $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (2, 1)$ における接平面の方程式は何か？

2変数テイラー多項式：関数 $z = f(x, y)$ にたいし、

$$F_2(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \quad (\text{ここまでで1次近似：接平面}) \\ + \frac{1}{2!}\{f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2\}$$

を $(x, y) = (a, b)$ における2次のテイラー多項式と呼ぶ。

(注：誤差について $f(x, y) - F_2(x, y) = o((x - a)^2 + (y - b)^2)$ ($(x, y) \rightarrow (a, b)$) が成り立つ。)

テイラー多項式の計算例. $f(x, y) = 1/(1-2x-y)$ の原点における接平面を求めよう. $1/(1-t) = 1 + t + t^2 + O(t^3)$ ($t \rightarrow 0$) に $t = 2x + y$ を代入すると,

$$\frac{1}{1-2x-y} = 1 + (2x+y) + (2x+y)^2 + [3 \text{ 次以上の項}] \quad (x, y \rightarrow 0).$$

1 次式の部分 $z = 1 + 2x + y$ が $(x, y) = (0, 0)$ における接平面の方程式 (1 次テイラー多項式), 2 次までの部分が 2 次テイラー多項式を与える.

問題 4. 同様の方法で, 次の関数の (a, b) における接平面の方程式および 2 次のテイラー多項式を求めよ.

(1) $z = f(x, y) = e^{x+y}, \quad (a, b) = (0, 0)$

(2) $z = f(x, y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}, \quad (a, b) = (1, 1)$

問題 5. 問題 4 でもとめた 2 次多項式が, 枠内のテイラー多項式の公式に合致していることを (偏微分を計算して) チェックせよ.

今週の宿題

宿題 4-1. $z = f(x, y) = x^2 - 3xy + 3y^2 + 4x - 9y$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $(x, y) = (0, 0)$ における曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式は何か? (答えのみでよい.)
- (2) 問題 3 の計算を真似て, $(x, y) = (1, 1)$ における接平面の方程式および 2 次のテイラー多項式を求めよ.

宿題 4-2. 次の関数について, (a, b) における接平面の方程式および 2 次テイラー多項式を求めよ.

(1) $z = f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}, \quad (a, b) = (0, 0)$

(2) $z = f(x, y) = e^{x+y}, \quad (a, b) = (1, 1)$ (Hint: $e^{x+y} = e^2 \cdot e^{(x-1)+(y-1)}$)

宿題 4-3. (1 次近似と勾配ベクトル) xy 平面上にある地図を広げたところ, 海拔高度を与える関数がちょうど $z = f(x, y) = 1 + \sin(2x - y)$ であった.

- (1) $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (0, 0)$ における接平面を与える 1 次関数 $z = F_1(x, y)$ を求めよ.
- (2) 平面上の動点 $P(x, y)$ が原点から一定方向に一定距離 $\epsilon > 0$ だけ移動するとき, 定数でない 1 次関数 $z = F(x, y) = ax + by$ が最大および最小となるのは, ベクトル (x, y) が (a, b) に平行なときであることを示せ. (Hint: $ax + by$ はこれらのベクトルの内積. これらベクトルの成す角度を考えよ.)
- (3) 原点 $(x, y) = (0, 0)$ に対応する地点にボールをおいた場合, 地図 (xy 平面) 上でいとうどのベクトルの方向に転がり始めるか?

2変数関数の極大と極小

作成日：November 04, 2009 Version：1.2

以下で扱う関数はすべて、必要なだけ（偏）微分できるものとする。

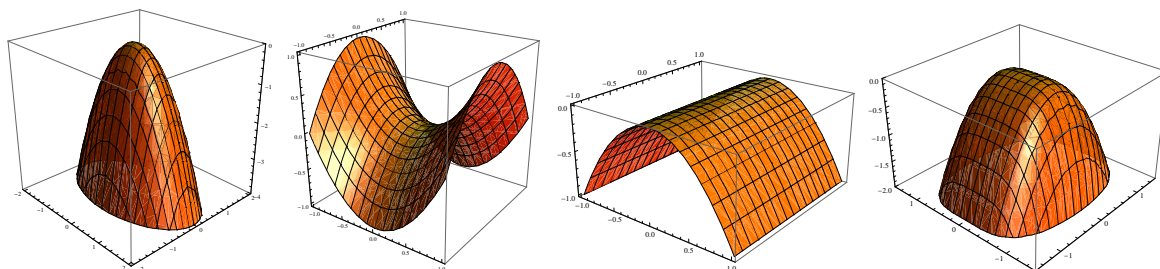
問題 1. (極大・極小の判定：1変数関数の場合) $f(x) = e^{\sin^2 x}$ とする。このとき、 $f(x)$ は $x = 0$ において極小となることを示せ。(Hint: 2次のテイラー多項式を考えよ。)

2変数の極大と極小

2変数関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (p, q)$ で極大（極小）とは、 (p, q) を中心とする十分近くで $f(p, q)$ が $f(x, y)$ の 唯一の 最大値（最小値）になっているときを言う。

例。「極値かどうか」は、関数のグラフの局所的な形状を調べないと判定できない：

(1) $z = -(x^2 + 3y^2)$ (2) $z = x^2 - y^2$ (3) $z = -x^2$ (4) $z = -(x^2 + y^4)$



2変数の場合も、2次のテイラー多項式（前回のプリント参照）を用いて極大・極小の判定ができる場合がある。いま、 $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (p, q)$ における2次のテイラー展開が

$$f(x, y) = C + A(x - p) + B(y - q) \quad (\text{ここまでは1次近似, 接平面の式}) \\ + \frac{1}{2!} \{ a(x - p)^2 + 2b(x - p)(y - q) + c(y - q)^2 \} + [\text{3次以上の項}] \quad \dots (*)$$

で与えられたとする。ただし、

$$C = f(p, q), \quad A = f_x(p, q), \quad B = f_y(p, q) \\ a = f_{xx}(p, q), \quad b = f_{xy}(p, q), \quad c = f_{yy}(p, q)$$

である。もし $(x, y) = (p, q)$ においてこの関数が極値をもつならば、そこでの接平面は水平な定数関数 $z = C$ でなくてはならない。すなわち、 $A = B = 0$ でなくてはならない（必要条件）。以下この条件のもと、 $f(x, y)$ が極値をもつための条件を2階導関数の値 a, b, c を通してみよう。

問題 2. 上の式 (*) で $A = B = 0$ を仮定し、次の問いに答えよ。

- (1) 変数変換 $X = x - p, Y = y - q, Z = z - C$ を施し、(*) を $Z = F(X, Y)$ の形に書き直せ。
- (2) 一般に、2次式 $G(X, Y) = aX^2 + 2bXY + cY^2$ を考える。この関数が $(X, Y) \neq (0, 0)$ のとき、常に $G(X, Y) > 0$ となるための a, b, c の必要十分条件は「 $a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ 」であることを示せ。(Hint: 平方完成、もしくは $t = X/Y$ として2次関数の問題に帰着させる。)

2階導関数による極値の判定法．式(*)において $A = B = 0$ ($\iff f_x(p, q) = f_y(p, q) = 0$) と仮定する．このとき，

$$ac - b^2 = f_{xx}(p, q)f_{yy}(p, q) - f_{xy}(p, q)^2$$

の値に応じて，次のことがわかる：

- (1) $ac - b^2 > 0$ かつ $a < 0 \implies f$ は $(x, y) = (p, q)$ で極大
- (2) $ac - b^2 > 0$ かつ $a > 0 \implies f$ は $(x, y) = (p, q)$ で極小
- (3) $ac - b^2 < 0 \implies f$ は $(x, y) = (p, q)$ で極値にならない(鞍点)
- (4) $ac - b^2 = 0 \implies$ さらに調べないと分からない．

参考 ちなみに $ac - b^2$ は行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx}(p, q) & f_{xy}(p, q) \\ f_{yx}(p, q) & f_{yy}(p, q) \end{pmatrix}$$

の行列式である．これをヘッシアンと呼ぶ．3変数の場合もこれに対応する行列の行列式の符号を計算することで，極値を探ることができる．

問題 3. 次の関数について 2 次テイラー多項式を計算し，(*) 式における係数 a, b, c を決定せよ．さらに，原点 $(0, 0)$ において極値をもつか判定せよ．

- (1) $z = f(x, y) = -xy$
- (2) $z = f(x, y) = x^2 - xy + y^2$
- (3) $z = f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
- (4) $z = f(x, y) = \cos(x + y)$
- (5) $z = f(x, y) = (x + y^2)e^{x+y}$

問題 4. 関数 $z = f(x, y) = x^2 - 3xy + 3y^2 + 4x - 9y$ の極値を全て求めよ．

今週の宿題

宿題 5-1. 関数 $f(x) = x^2 \sin x - x^3 e^x$ が原点で極大値・極小値をもつか判定せよ (問題 1 のように， f の原点におけるテイラー多項式を必要な次数まで求めた上で，その関数の形をもとに判定すること)

宿題 5-2. $z = f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 - 8x + 5y$ に極大値・極小値があれば，その xy 座標と値を求めよ．

宿題 5-3. 関数 $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$ の極大値・極小値をすべて求めたい．

- (1) 連立方程式 $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ の解は $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$ である．これを示せ．
- (2) $(x, y) = (1, 1), (-1, -1)$ にたいし上枠内 2 階導関数による極値の判定法を適用し，それぞれにおいて f が極小値をもつことを示せ．
- (3) $(x, y) = (0, 0)$ の場合，上の判定条件でいう (4) になることを示せ．この場合極値をもつかどうかわからないので，手作業で判定してみよう．
 - (a) $0 < t < 1$ のとき， $f(t, t) < 0$ かつ $f(t, -t) > 0$ を示せ．
 - (b) (a) の結果から f が原点で極値をもつか判定し，その理由を示せ．

一次変換と線形性

作成日：November 11, 2009 Version：1.2

本日 14:45 から理 1-509 で数理学科説明会を行います．是非いらして下さい．

直線と平面のパラメーター表示

問題 1. xyz 空間を \mathbb{R}^3 で表す． \mathbb{R}^3 上で次の方程式で与えられる直線もしくは平面をパラメーター表示（ベクトル表示）せよ．

(1) $x = z, y = 1$

(2) $z = 0$

直線のパラメーター表示： $p = p_0 + su_1$ ($s \in \mathbb{R}$)平面のパラメーター表示： $p = p_0 + su_1 + tu_2$ ($s, t \in \mathbb{R}$)ただし， u_1 と u_2 は平行でなく， 0 でもない．

一次変換

xy 平面を \mathbb{R}^2 とあらわすことにする．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ があるとき，写像

$$T_A : \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

を一次変換と呼ぶ．なお一次変換は \mathbb{R}^n 上でも定義され， $n \times n$ 行列で与えられる．

問題 2. (線形性) T_A は以下の性質を持つことを示せ：

(L1) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2$ に対し， $T_A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = T_A(\mathbf{x}) + T_A(\mathbf{x}')$

(L2) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ と任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し， $T_A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T_A(\mathbf{x})$

問題 3. 以下の写像が線形性（問題 2 の (L1) と (L2)）をみたすか否かを調べよ．もしそれが一次変換であれば，それを与える行列を求めよ．

(1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix}$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$

(4) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

問題 4. 一次変換 f によってベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ はともにベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に写るとする．

(1) ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ の形で表し, その f による像を求めよ.

(2) 直線 $x + 2y = 1$ をパラメーター表示し, f による像のパラメーター表示を求めよ.

\mathbb{R}^2 上の一次変換では, 任意のベクトルの像は (たった) 2つの一次独立なベクトル (\mathbb{R}^n の場合は, n 個の一次独立なベクトル) の像から容易に計算できる (問題4 (1) 参照.) このように, 一次変換は単純で分かりやすい写像とすることができる.

問題5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 集合 $\{se_1 + te_2 : 0 \leq s, t \leq 1\}$ を図示せよ.

(2) (1) で与えた集合の一次変換 T_A による像を求め, 図示せよ.

問題6. 以下の行列が定める一次変換の幾何学的意味を調べよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

今週の宿題

宿題6-1. 2×2 行列 A によって定まる一次変換 $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える

(1) $T_A \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T_A \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ となるような A を定めよ.

(2) 直線 $\ell : y = 0$ が T_A により直線 $\ell' : y = x$ に写るような A をすべて求めよ.

宿題6-2. 平面 $\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ($s, t \in \mathbb{R}$) とする. 以下の行列 A

に対し, $T_A(\pi)$ のパラメーター表示を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

宿題6-3. \mathbb{R}^3 上の一次変換 f によって $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ はともに $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ へ, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

へ写るとする. このとき $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の f による像を求めよ. (この問題は仮定に矛盾がありません. 詳しくは K207 の解答プリントをご参照ください.)

線形空間の基底

作成日：November 18, 2009 Version：1.2

線形空間の基底とは「座標系」を定めるための基準となるベクトルの組です。その「座標系」はわれわれの都合に応じて好き勝手に選ぶことができます。

今後の予定

- 11/25：線形写像と表現行列
- 12/2：表現行列と対角化

基底と座標

問題 1. このプリントのこのページを平面と思い， Π で表す。

(1) 下の点 O を Π の原点と定め，これを始点とする同一直線上にないベクトル u_1, u_2 を自由に描け。

(2) 下の点 P に対し， $\overrightarrow{OP} = a_1 u_1 + a_2 u_2 = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ なる実数 a_1, a_2 がただひと組定まるはずである。そのような a_1, a_2 の大体の値（小数点以下 1 桁ぐらい）を求めよ。

(3) 以下で定まるこのプリント Π 上の部分集合を図示せよ。

$$S_1 = \{s u_1 + t u_2 \in \Pi : s = 2\}$$

$$S_2 = \{s u_1 + t u_2 \in \Pi : t = s + 1\}$$

$$S_3 = \{s u_1 + t u_2 \in \Pi : s^2 + t^2 = 1\}$$



あなたが作った $\vec{OP} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ という関係式は、「 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ というベクトルを単位系として測った点 P の座標値が $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ だった」と解釈できる。このように、平面全体に一意な座標値を与えるベクトルの組 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ を平面の基底と呼ぶ。同じベクトル \vec{OP} も、別の誰かが選んだ基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ を用いれば

$$\vec{OP} = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\text{基底}) \begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix} \cdots (*)$$

のように、異なる表現をもつ。これは、同じモノの長さを cm で測るか、inch で測るか、といった状況と似ている。

問題 2. (異なる基底の関係) 「別の誰か」Otis さんの基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ をあなたの基底で測ったところ、次のようになった：

$$\mathbf{v}_1 = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) ある正方行列 P が存在して、上の式 (*) において $(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2)P$ および $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を満たすことを示せ。

(2) 問題 1 の集合 S_i ($i = 1, 2$) が

$$S_i = \{p\mathbf{v}_1 + q\mathbf{v}_2 \in \Pi : F_i(p, q) = 0\}$$

となるように、関数 $F_i(p, q)$ をひとつずつ定めよ。

基底の変換。 \mathbb{R}^n のベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ が異なる基底 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ と $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ で

$$x = (\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\text{基底}) \begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix}.$$

と表されたとする。このとき、ある n 次正則行列 P が存在して、

$$(\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_n)P = (\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_n), \quad P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

基底の変換も、長さの単位変換と考え方はまったく同じである。単位が k 倍されると数値が $1/k$ 倍されるように、基底が「右から P 倍」されると座標値は「左から P^{-1} 倍」される。

基底となる条件

問題 3. \mathbb{R}^3 上のベクトルを以下のように定める：

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (1) \mathbb{R}^3 のベクトル $\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ について、ベクトルの組 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

および $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ のそれぞれを用いた 1 次結合の形で表せ（表せないこともありうる。）例えば、適当な数字の組 (d_1, d_2, d_3, d_4) を見つけて、

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = d_1 \mathbf{w}_1 + d_2 \mathbf{w}_2 + d_3 \mathbf{w}_3 + d_4 \mathbf{w}_4$$

の形で書き表せ。

- (2) ベクトルの組 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ および $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ の中で、 \mathbb{R}^3 の基底になっているものを選び、基底とならないものについては、その理由を考えよ。

基底の条件（定義）．基底とは次の 2 点を満たすベクトルの組である：
 (B1) その基底で測った座標値は、必ずひと通りに決まる（ \iff 一次独立性）
 (B2) その基底の一次結合で、 \mathbb{R}^n のすべてのベクトルが表現できる

今週の宿題

宿題 7-1. \mathbb{R}^2 に 2 つの基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ と $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ がそれぞれ

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

で与えられている。

- (1) $(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2)P$ となる行列 P を求めよ。
- (2) 集合 $S = \{x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ を（できるだけ正確に）図示せよ。
- (3) $S = \{s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2 : F(s, t) = 0\}$ となるように、関数 $F(s, t)$ をひとつ定めよ。

宿題7-2. Otisさんが \mathbb{R}^2 のある直線 ℓ について調べたところ,基底 $\left\{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ を用いて

$$\ell = \{xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 1\}$$

と書けることがわかった. 一方, Arethaさんが別の基底 $\left\{u_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right\}$ を用いて直線 ℓ を調べたところ,

$$\ell = \{su_1 + tu_2 \in \mathbb{R}^2 : s = 2\}$$

を満たしていた.

- (1) $x = xe_1 + ye_2 = su_1 + tu_2$ と表すとき, x, y をそれぞれ s, t を用いて表せ.
- (2) Arethaさんの基底 $\{u_1, u_2\}$ が互いに直行するベクトルであると仮定した場合, $\{u_1, u_2\}$ として考えられる候補をすべて求めよ (無限にある).
- (3) さらに u_1 と u_2 の長さが一致すると仮定した場合, $\{u_1, u_2\}$ の候補をすべて求めよ.

線形写像と表現行列

作成日：November 25, 2009 Version：1.2

線形写像

写像 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ が次の性質をみたすとき線形写像とよぶ：

(L1) 任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対し, $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$ (和の像は像の和)

(L2) 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, $f(\alpha \mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a})$ (定数倍の像は像の定数倍)

$n = m$ のときが 1 次変換である。

問題 1. 以下の写像が線形写像かどうか判定せよ (答えのみでよい)

$$(1) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f: x \mapsto \sin x$$

$$(3) f: \mathbb{R}^{2009} \rightarrow \mathbb{R}, f: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2009} \end{pmatrix} \mapsto x_{11} \quad (4) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, f: x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix}$$

1 次変換の表現行列

問題 2. (基底を用いた 1 次変換の表現) 線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が与えられているのだが, うっかり \mathbb{R}^2 に描かれていた xy 座標系を消してしまい, 原点以外の座標がわからなくなってしまった. 復元には相当な手間がかかるので, 平面 \mathbb{R}^2 に新たに基底 (平行でない 2 ベクトル) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ をとり, 座標系を定めることにした.

(1) f は $f(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{u}_1, f(\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{u}_2$ を満たしていた. このとき, 任意の $x = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2$ にたいし $f: x \mapsto f(x)$ が $f: (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と表されるような 2 次正方行列 A を求めよ.

(2) $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, f(\mathbf{u}_2) = -\mathbf{u}_1$ を満たす場合の A は何か?

(3) 別の基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ が, ある正則行列 P により

$$(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2)P$$

と書けている. $x = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2$ とするとき, $f: (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \mapsto (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) B \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ を満たす 2 次正方行列 B は $P^{-1}AP$ で与えられることを示せ.

上の問題でいう行列 A は, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ に関する表現行列と呼ばれる. 同じ線形写像でも, その表現行列は基底の取り方に依存する. そのため, きれいな表現行列が得られるように, 基底を上手に選ぶ方法がいくつか知られている. 次週のテーマ「対角化」は, その典型例である.

問題 3. (怪我の功名) 問題 2 において，うっかり消される前の xy 座標を復元したところ，実は標準基底 $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ により $u_1 = (e_1 \ e_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = (e_1 \ e_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書けていた． f が (1) の条件を満たしていた場合， $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めよ．また， B^n ($n \in \mathbb{N}$) を求めよ．

問題 4. 原点中心の θ 回転 $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は $f_\theta : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表される．ある基底 $\{u_1, u_2\}$ に関する f_θ の表現行列を求めたところ，すべての θ について同じく $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ であった．このとき， u_1 と u_2 は互いに直行し，かつ同じ長さであることを証明せよ．

今週の宿題

宿題 8-1. 以下から線形写像でないものを選び，(L1) もしくは (L2) を満たさないことを示せ．

$$(1) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \quad (2) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto a \cdot x \quad (a \in \mathbb{R}^2 \text{ との内積})$$

$$(3) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} \quad (4) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ 0 \end{pmatrix}$$

宿題 8-2. 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が $f : x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 98y \\ 100y \end{pmatrix}$ で与えられている．

(1) f の標準基底 $\{e_1, e_2\}$ に関する表現行列 A はなにか？ (答えのみでよい)

(2) 別の基底 $\{u_1, u_2\}$ を用いたところ，

$$(e_1 \ e_2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (e_1 \ e_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成立した．このとき， f の基底 $\{u_1, u_2\}$ に関する表現行列 B を求めよ．

(3) $n \in \mathbb{N}$ にたいし， A^n を求めよ．

(4) 直線 $l_0 : x = 0$ (y 軸) にたいし，直線 l_n ($n \in \mathbb{N}$) を帰納的に $l_{n+1} = f(l_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) で定める．このとき， l_n ($n \in \mathbb{N}$) のパラメーター表示を求めよ．

(5) l_n は原点を通る直線であるが，その傾きはある一定値に近づく．その値はなにか？

お知らせ 1 : 宿題 6-3 に出題ミス (問題の仮定に矛盾) がありました．宿題を提出してくれた皆さんには一律相応の点数を加点します．時間をかけて考えてくれた受講生のみなさん，たいへん申し訳ありませんでした．また，間違いを指摘してくれたみなさん，どうもありがとうございました．

お知らせ 2 : インフルエンザにかかり「自宅待機」の措置に伴って授業を欠席する方へ．ア．欠席 2 回までは出席点を与えますが，事前に担当教員に連絡するか，罹患したことが証明できる書類 (医師の診断書，病院・薬局の領収書など．本人の名前と日付入り) を後日提示することが条件です．欠席 3 回目以降は担当教員に相談してください．イ．締め切り後の宿題提出は，上記のような書類を提示した場合に限って認めます．ただし，2 週間を超えて提出が遅れる場合は，担当教員に相談してください．

表現行列と対角化

作成日：December 2, 2009 Version：1.2

今日は対角化の手順をより深いレベルで理解しましょう。

今後の予定 12/9：ケイリー・ハミルトンの定理，12/16：ヤコビ行列，1/13：微分と変数変換

行列の対角化（うまい基底ときれいな表現）

問題 1. (表現行列の復習) 線形写像 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x + 4y \end{pmatrix}$ で定める。

(1) 標準基底 $\{e_1, e_2\}$ に関する F の表現行列 A は何か？

(2) 基底 $\left\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ に関する F の表現行列 B を求めよ。

以下では，基底 $\{u_1, u_2\}$ をうまく選び，任意の $x = su_1 + tu_2$ にたいし上の $F: x \mapsto F(x)$ が

$$F: (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 s \\ \lambda_2 t \end{pmatrix} = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad \dots (*)$$

と表現されるようにしたい。このとき，座標値の変化はたいへんシンプルでわかりやすい。

問題 2. 次の (1)(2) を示せ：

- (1) 基底 $\{u_1, u_2\}$ が (*) を満たすとき， $Au_1 = \lambda_1 u_1$ ， $Au_2 = \lambda_2 u_2$ が成り立つ。
- (2) 一般に，行列 A に対し $Au = \lambda u$ を満たすベクトル $u \neq 0$ および定数 λ が存在したと仮定する。このとき， $\det(\lambda E - A) = 0$ (E は単位行列) となる。

問題 3. (対角化の手順)

- (1) 上の A に対し， λ の方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ を解け。
- (2) 上の方程式のそれぞれの解 λ にたいし， $Au = \lambda u$ を満たす u を 1 つずつ求めよ。
- (3) 基底 $\{u_1, u_2\}$ および定数 λ_1, λ_2 を適当に定め， F を (*) の形で表せ。

一般に， n 次正方行列 A にたいし，

- 方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ の解 λ を A の固有値と呼び，
- $Au = \lambda u$ となる $u \neq 0$ を (固有値 λ の) 固有ベクトルと呼ぶ。

問題 3 の手順は，与えられた行列 A にたいし $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を見つける操作とも解釈できる (解答プリント参照。) これがいわゆる行列の対角化である。行列の中には，対角化できないものも存在する。固有ベクトルから基底を選べない場合があり，そのときは上の手順も途中で行き詰ってしまうからである。

問題 4. (F の意味, n 乗計算) \mathbb{R}^2 上には「 x に置かれた素粒子は, 1 秒後に $F(x)$ に移動する」という運動法則が与えられている. 時刻 0 において, 素粒子 π を $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に置いた.

- (1) 問題 3 で求めた基底 $\{u_1, u_2\}$ を用いて, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $su_1 + tu_2$ の形で表せ.
- (2) n 秒後の素粒子 π の位置 x_n をもとめよ.

問題 5. F が $F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y \\ -x \end{pmatrix}$ の場合, (*) のような表現を与える基底 $\{u_1, u_2\}$ を求めよ. また, この場合問題 4(2) の答えは何か?

今週の宿題

宿題 9-1 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) A の固有値 λ を全て求め, それぞれにたいし固有ベクトルをひとつずつ与えよ.
- (2) $B = P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ.
- (3) 数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が漸化式

$$x_{n+1} = -3x_n + 4y_n, \quad y_{n+1} = 4x_n + 3y_n, \quad x_1 = y_1 = 1$$

で与えられている. このとき, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項を求めよ.

宿題 9-2 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. この行列を対角化してみよう.

- (1) 方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ の解は $\lambda = 1$ (重解), 2 となることを示せ.
- (2) 固有値 $\lambda = 1$ にたいし, その固有ベクトル全体の集合 $W_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = u\}$ は原点を通る平面となることを示せ.
- (3) 固有値 $\lambda = 2$ にたいし, その固有ベクトル全体の集合 $W_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = 2u\}$ は原点を通る直線となることを示せ.
- (4) ベクトルの組 $\{u_1, u_2, u_3\}$ が \mathbb{R}^3 の基底となるように, $u_1, u_2 \in W_1, u_3 \in W_2$ を選べ. (答えのみでよい. ただし, あとで逆行列の計算をするので, できるだけ成分が簡単な数値になるように工夫せよ. 一次独立性も確かめること.)
- (5) $(e_1 \ e_2 \ e_3)P = (u_1 \ u_2 \ u_3)$ (ただし $\{e_1, e_2, e_3\}$ は \mathbb{R}^3 の標準基底) とするとき, P^{-1} を求めよ. また, $B = P^{-1}AP$ は対角行列となることを確かめよ.
- (6) A^n ($n \in \mathbb{N}$) を求めよ.

ケイリー・ハミルトンの定理，2次曲線

作成日：December 9, 2009 Version：1.2

対角化の応用をいくつか紹介します。

今後の予定 12/16：ヤコビ行列，1/13：微分
と変数変換

ケイリー・ハミルトンの定理

問題 1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は異なる実数の固有値 α, β をもつとする。

- (1) α と β の満たす 2 次方程式を求めよ。
- (2) α と β の固有ベクトルは互いに平行でないことを示せ。
- (3) 任意のベクトル $x \in \mathbb{R}^2$ にたいし， $(\alpha E - A)(\beta E - A)x = 0$ を示せ。ただし E は単位行列を表す。(Hint: x を固有ベクトルからなる基底で表現してみよ。)
- (4) 関係式 $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$ (ゼロ行列) を示せ。(Hint: 解と係数の関係を用いる。)

一般に，次の定理が知られている：

ケイリー・ハミルトンの定理． n 次正方行列 A に対し，多項式 F_A を

$$F_A(x) := \det(xE - A) \quad (E : n \text{ 次の単位行列})$$

と定める．このとき， $F_A(A) = O$ が成り立つ．とくに $n = 2$ のとき， $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ならば

$$F_A(A) = A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O.$$

この多項式 F_A を A の固有多項式と呼ぶ。

問題 2. (固有多項式による n 乗計算) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) A の固有多項式 F_A (2 次多項式) および固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) を求めよ。
- (2) $A^4 - 3A^3 - 4A^2$ および A^5 を求めよ。
- (3) 多項式 x^n を $F_A(x)$ で割った余りを $ax + b$ とおく．すなわち，ある多項式 $Q(x)$ が存在して，

$$x^n = F_A(x)Q(x) + ax + b$$

と書けるとする． $F_A(\lambda_1) = F_A(\lambda_2) = 0$ を利用して，係数 a, b を求めよ。

- (4) $F_A(A) = O$ を利用して A^n を求めよ。

2次曲線と直交行列

問題 3. (2次曲線の標準化) xy 平面 \mathbb{R}^2 内の曲線 Q を

$$Q := \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x - 16y - 16 = 0 \right\}$$

で定める.

(1) 変数変換 $X = x - \alpha, Y = y - \beta$ により,

$$\mathbf{x} \in Q \iff 8X^2 + 4XY + 5Y^2 = \gamma$$

となるよう定数 α, β, γ を定めよ.

(2) 次を満たす 2 次対称行列 A (すなわち $A = {}^tA$) を求めよ:

$$8X^2 + 4XY + 5Y^2 = \gamma \iff (X \ Y)A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \gamma$$

(3) A の固有値を求めよ. さらに, 固有ベクトルとして互いに直交する単位ベクトルを 2 つ選び, XY 平面の基底 $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\}$ とせよ.

(4) 行列 $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は直交行列となる ($\iff {}^tP = P^{-1}$ を満たす) ことを示せ. また, ${}^tPAP = P^{-1}AP$ は対角行列になることを確かめよ.

(5) $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ と置くと,

$$(X \ Y)A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \gamma \iff ps^2 + qt^2 = \gamma$$

となるよう p, q を定めよ.

(6) 結局, Q の表す図形はどのような図形か?

今週の宿題

宿題 10-1. 漸化式 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, a_0 = 0, a_1 = 1$ で定まる数列を考える.

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

であることを用いて, a_n ($n \geq 0$) の一般項を求めよ. ただし, 問題 2 のように固有多項式を使って行列の累乗を計算すること.

宿題 10-2. 問題 3 の手順に従い, 方程式 $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ が定める \mathbb{R}^2 内の曲線が楕円になることを示せ.

線形近似とヤコビ行列

作成日：December 16, 2009 Version：1.1

多変数写像を線形写像で近似してみましょう。ヤコビ行列の意味が自然と理解されるはずですが、

今後の予定 1/13：偏微分と変数変換 1/20：重積分と変数変換

2変数テイラー展開からヤコビ行列へ

2変数関数の1次近似式：関数 $z = f(x, y)$ について、 (x, y) が (a, b) に近いとき

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + [2 \text{ 次以上の項}]$$

が成り立つ。ただし「2次以上の項」とは「 $(x - a)$ と $(y - b)$ の2つ以上の積からなる同類項全体」をさす。

問題 1. 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(3x + 2y) \\ \sin(x + 4y) \end{pmatrix}$ で定める。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 関数 u, v の $(x, y) = (0, 0)$ におけるテイラー展開を上枠内の形で書け。

(2) $(x, y) = (0, 0)$ の十分近くに限ると、ある2次正方行列 J が存在して、

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は線形写像 $F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で近似される。この行列 J は何か？

(3) 時刻 $t = 0$ において、ある粒子が xy 平面の原点を速度 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で通過した。これを写像 f を通し uv 平面で観測したときの、同時刻における速度を求めよ。

(4) ある粒子が xy 平面内を運動していて、その軌跡が滑らかな曲線 $p(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ で表されるとする。この粒子が $t = 0$ で原点を速度 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ で通過した。その瞬間における、粒子の像 $f(p(t))$ の uv 平面における速度を求めよ。

一般に、写像 $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ において1次近似して得られる行列を f の $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ における微分もしくはヤコビ行列と呼ぶ。その成分はテイラー展開の1次の係数である：

$$J = J(a, b) = \begin{pmatrix} u_x(a, b) & u_y(a, b) \\ v_x(a, b) & v_y(a, b) \end{pmatrix}$$

問題 2. 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ xy \end{pmatrix}$ で与えられている。

(1) uv 平面における xy 平面の像 $f(\mathbb{R}^2)$ を求めよ。

(2) 関数 $u(x, y) = x + y$ および $v(x, y) = xy$ の、 $(x, y) = (1, 2)$ における2次のテイラー展開を求めよ。

(3) xy 平面において, 新たに XY 座標系を関係式 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ により定める. 同

様に, uv 平面における UV 座標系を $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-3 \\ v-2 \end{pmatrix}$ で定める. $X, Y \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + [X, Y \text{ の 2 次以上の項}]$$

となるよう行列 J を定めよ. また, J が f の $(x, y) = (1, 2)$ におけるヤコビ行列であることを納得せよ.

(4) $x \leq y$ を仮定し, 逆写像 $f^{-1} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$ を求めよ. ただし $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in f(\mathbb{R}^2)$.

(5) 関数 $x(u, v), y(u, v)$ の $(u, v) = (3, 2)$ における 1 次のテイラー展開を求めよ. また, $U, V \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + [U, V \text{ の 2 次以上の項}]$$

となることを確かめよ. また, J^{-1} が現れる理由を説明せよ.

今週の宿題

宿題 11-1 (複素関数) 複素平面上の関数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $w = f(z) = z^2$ で定める.

(1) $z = x + yi, w = u + vi$ とするとき, u, v を x, y で表せ.

(2) 写像 $f: z \mapsto w = z^2$ の $z = 1 + i$ 周辺における様子を調べたい. $X := x - 1, Y := y - 1, U := u, V := v - 2$ とおくと, U, V を X, Y で表せ.

(3) $X, Y \rightarrow 0$ のとき $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + [X, Y \text{ の 2 次以上の項}]$ となる行列 J を定めよ.

(4) $z = 1 + i$ において, 実軸の正の方向に秒速 1 の風が吹いていた. このとき, f による像 $w = 2i$ では, どんな風が吹いているように見えるか? (方向と速さを答えよ.)

宿題 11-2 (極座標) $r\theta$ 平面上の $2 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi$ で定まる長方形を S とする. また, S

から xy 平面への写像 f を $f: \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ と定める.

(1) xy 平面における像 $f(S)$ を図示せよ.

(2) 点 $(r, \theta) = (r_0, \theta_0)$ における $x = x(r, \theta), y = y(r, \theta)$ の 1 次のテイラー展開を求めよ. (Hint: 公式も使えるが, $r = R + r_0, \theta = \Theta + \theta_0$ とおき, 三角関数の加法定理・テイラー展開から計算してみよ.)

(3) 点 $(r, \theta) = (r_0, \theta_0)$ における f のヤコビ行列は $J = J(r_0, \theta_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -r_0 \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & r_0 \cos \theta_0 \end{pmatrix}$ となることを示せ.

(4) S 上の点 $(r, \theta) = (r_0, \theta_0)$ から粒子を秒速 1 で発射する. その xy 平面における像がもっとも速く見えるのは, 粒子がどの方向に向かって発射されたときか? (Hint: $J(r_0, \theta_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$ と書けることを用いる.)

合成関数の微分・偏微分

作成日：January 13, 2010 Version：1.2

(偏)微分係数の計算を、1次近似のアイデアでやってみましょう。公式に頼らない、本当の計算力を身につけることが目標です。以下、関数はすべて好きだけ(偏)微分できるものとします。

今後の予定

1/20：重積分と変数変換(宿題あり)

1/27：重積分の応用(最終回,宿題なし)

1 変数テイラー展開と微分係数

微分係数の別定義。関数 $f(x)$ にたいしある定数 A が存在して

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + o(x - a) \quad (x \rightarrow a)$$

と書けるとき、 A を $f(x)$ の a における微分係数と呼び、 $f'(a)$ で表す。

上の式は1次テイラー展開にほかならない。微分係数をこのように解釈すると、微分の計算はすべて1次式の計算に帰着できる。たとえば、別の関数 $g(x)$ が $x \rightarrow a$ で $g(x) = g(a) + B(x - a) + o(x - a)$ をみたすとき、上の式と掛け合わせると $f(x)g(x) = f(a)g(a) + \{f(a)B + Ag(a)\}(x - a) + o(x - a)$ を得る。これは積関数 $f(x)g(x)$ の $x = a$ における微分が $f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$ となることを示している(高校で習った証明と比べてみよ。)

問題 1. (合成関数の微分) 関数 $y = f(x)$, $z = g(y)$ を考える。

- (1) 関数 $f(x)$ の $x = a$ における1次テイラー展開を求めよ。また、 $x \rightarrow a$ のとき、 $f(x) - f(a) = O(x - a)$ であることを納得せよ。
- (2) 関数 $g(y)$ の $y = b = f(a)$ における1次テイラー展開を求めよ。また、 $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ を示せ。

2 変数関数における合成関数と(偏)微分

問題 2. xy 平面 \mathbb{R}^2 上に関数 $f = f(x, y)$ と、 $t \in \mathbb{R}$ をパラメーターにもつ曲線 $x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$ ($a, b > 0$) が与えられている。このとき、関数 $t \mapsto f(x(t))$ の $t = \pi/4$ における微分係数を求めてみよう。

- (1) $t = \pi/4$ における $x(t), y(t)$ の1次テイラー展開をそれぞれ求めよ。
- (2) $(x, y) = (x(\frac{\pi}{4}), y(\frac{\pi}{4})) = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ における $f(x, y)$ の1次テイラー展開を求めよ。
- (3) (1)(2)の結果を用いて、微分係数 $\left. \frac{df(x(t))}{dt} \right|_{t=\pi/4}$ の値を求めよ。
- (4) 上の結果から、一般に次の公式が成り立つことを納得せよ。

合成関数の微分・偏微分(その1) $f = f(x, y) = f(x(t), y(t))$ のとき、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

偏微分係数の別定義．関数 $f(x, y)$ にたいしある定数 A, B が存在して

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + [2 \text{ 次以上の項}] \quad (x \rightarrow a, y \rightarrow b)$$

と書けるとき, A, B を $f(x, y)$ の (a, b) における偏微分係数と呼び, $A = f_x(a, b)$, $B = f_y(a, b)$ で表す．

問題 3. xy 平面と uv 平面は $\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - 2v \\ 2u + 3v \end{pmatrix}$ で関係付けられている．与えられた関数 $f = f(x, y)$ にたいし, 合成関数 $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ の $(u, v) = (2, 1)$ における偏微分係数を求めてみよう．

- (1) $(u, v) = (2, 1)$ における $x(u, v), y(u, v)$ の 1 次テイラー展開をそれぞれ求めよ．
- (2) $(x, y) = (x(2, 1), y(2, 1)) = (0, 7)$ における $f(x, y)$ の 1 次テイラー展開を求めよ．
- (3) (1), (2) の結果を用いて, $(u, v) = (2, 1)$ における偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial u}$ および $\frac{\partial f}{\partial v}$ の値を求めよ．
- (4) 上の結果から, 一般に次の公式が成り立つことを納得せよ．

合成関数の微分・偏微分 (その 2) $f = f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v))$ のとき,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

今週の宿題

宿題 12-1 (商の微分) 1 変数関数 $f(x), g(x)$ が $g(a) \neq 0$ を満たすとする．

- (1) $x \rightarrow a$ のとき $g(x) = g(a) + B(x - a) + o(x - a)$ であれば, $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(a)} - \frac{B}{g(a)^2}(x - a) + o(x - a)$ となることを示せ．(Hint: $(1 + t)^{-1} = 1 - t + o(t)$ ($t \rightarrow 0$))
- (2) (1) および $f(x)$ の 1 次テイラー展開を用いて, 商関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ の $x = a$ における微分は $\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ となることを証明せよ．

宿題 12-2 . 問題 3 で与えられた関数 $x(u, v), y(u, v), f(x, y)$ について, $(u(t), v(t)) = (\cos t, \sin t)$ のとき, 関数 $F : t \mapsto f(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)))$ の微分 dF/dt を求めよ．

宿題 12-3 (3 変数のヤコビ行列と 3 次方程式) 変数 $x = (x, y, z)$ および $u = (u, v, w)$ の間には $u = f(x) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$ という関係式が与えられている．

- (1) u, v, w をそれぞれ $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$ でテイラー展開せよ (可能な限り高次で．多項式なので剰余項はでない)．
- (2) $X = (X, Y, Z) = (x + 1, y, z - 1)$, $U = (u, v + 1, w)$ と置くとき, $U = JX + [X, Y, Z \text{ の 2 次以上の式}]$ となるよう 3 次正方行列 J を定めよ．また, J の逆行列を求めよ．
- (3) x, y, z を解に持つ 3 次方程式は $t^3 - ut^2 + vt - w = 0$ であることを示せ．
- (4) 方程式 $t^3 - t + \epsilon = 0$ ($\epsilon \in \mathbb{R}$) を考える． ϵ が十分 0 に近いとき, その解 $x(\epsilon) < y(\epsilon) < z(\epsilon)$ を ϵ の 1 次式で近似せよ．ただし, U が 0 に十分近いときは, X の近似として $J^{-1}U$ を用いること．

重積分

作成日：January 20, 2010 Version：1.3

とりえず重積分の計算に慣れましょう。変数変換が正しくできるようになることが目標です。

今後の予定

1/27：重積分の応用（最終回）

重積分（変数変換なし）

問題 1. 次の重積分を計算せよ。

$$(1) \int_D (1 + 2xy) dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$(2) \int_D x^2 y dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$(3) \int_D \frac{3}{1+x^3} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$$

$$(4) \int_D \frac{y \sin x}{x} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \pi, y \leq x \leq \pi\}$$

重積分（変数変換あり）

重積分の変数変換。微分可能な関数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ により uv 平面上の閉集合 E が xy 平面上の閉集合 D 上に 1 対 1 に写るとき、

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_E f(x(u, v), y(u, v)) |\det J(u, v)| du dv.$$

ただし $J(u, v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ はヤコビ行列である。

注意。値 $\det J(u, v)$ をヤコビアンとよぶ。その絶対値は、面積の局所的な拡大率である（この部分の解釈については来週扱う予定。）

問題 2. 次の重積分を求めたい：

$$I = \int_D (x - y)^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq |x + 2y| \leq 1, 0 \leq |x - y| \leq 1\}$$

(1) $u = x + 2y$, $v = x - y$ とするとき、写像 $(u, v) \mapsto (x, y)$ のヤコビ行列 $J(u, v)$ とヤコビアンを求めよ。また D に対応する uv 平面上の集合 E は何か？

(2) I を $\int_E \dots du dv$ の形に書き直し、積分値を求めよ。

問題 3. (極座標変換) $m \in \mathbb{R}$ を固定する。次の重積分の値を求めよう：

$$I_m = \int_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^m} \quad (D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\})$$

- (1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) とするとき, ヤコビ行列 $J(r, \theta)$ とヤコビアンを求めよ. また D に対応する $r\theta$ 平面上の長方形領域 E を求めよ.
- (2) I_m を $\int_E \cdots drd\theta$ の形に書き直し, 積分値を求めよ.
- (3) 関数 $m \mapsto I_m$ は \mathbb{R} 上で連続か?

問題 4. (円と球) 極座標変換を用いて, 以下の問いに答えよ:

- (1) 半径 $R > 0$ の円板 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ の面積 $\int_D 1 dx dy$ を求めよ.
- (2) 半径 $R > 0$ の球体 $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ の体積が $\frac{4\pi R^3}{3}$ であることを証明せよ.
(Hint: 半球面で囲まれる部分の体積を 2 重積分で表現せよ.)

答. 問題 1(1) $3/2$ (2) $1/10$ (3) $2 \log 3$ (4) $\pi/2$ 問題 2(2) $4/9$
問題 3(2) $m \neq 1$ のとき $\pi(4^{1-m} - 1)/(1 - m)$, $m = 1$ のとき $2\pi \log 2$

今週の宿題 (最終回)

宿題 13-1. (順序交換) 積分 $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx \right) dy$ を考える.

- (1) I の積分領域 D を図示せよ.
- (2) 積分を $\int_{\square} \left(\int_{\square} e^{-x^2} dy \right) dx$ の形に書き換えて, I の値を求めよ.

宿題 13-2. 次の積分領域 D , 関数 f について, $I = \int_D f(x, y) dx dy$ を計算せよ.

- (1) $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$, $f(x, y) = \frac{1}{(1+x+y)^2}$.
- (2) D は $x = 2, y = x, xy = 1$ に囲まれる部分, $f(x, y) = x^2 y$.
- (3) D は $(0, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)$ を頂点にもつ三角形の内部, $f(x, y) = \sin(x - y)$.
- (4) $D = \{(x, y) : -1 \leq x - y \leq 1, -1 \leq x + y \leq 1\}$, $f(x, y) = \frac{e^{x-y}}{1 + (x+y)^2}$.
- (5) $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$, $f(x, y) = a^2 x^2 + b^2 y^2$ ($a, b > 0$).

宿題 13-3. (行列式と面積の拡大率: 来週の予習)

- (1) xy 平面において, 原点, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ および $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ で張られる平行四辺形 (線分につぶれている場合も含む) の面積は $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ で与えられることを示せ.
- (2) $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ を 2 次正方行列とする. このとき, 線形写像 $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は任意の正方形の面積を $|\det A|$ 倍することを示せ.

重積分とヤコビアン・曲面積

作成日：January 27, 2010 Version：1.3

変数変換とヤコビアン

重積分の変数変換（再）．微分可能な関数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ により uv 平面上の閉集合 E が xy 平面上の閉集合 D へ 1 対 1 に写るとき，

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_E f(x(u, v), y(u, v)) |\det J(u, v)| du dv.$$

ただし $J(u, v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ はヤコビ行列である．また，値 $\det J(u, v)$ をヤコビアンとよぶ．

問題 1. (極座標変換・再考) $m \in \mathbb{R}$ を固定する．次の重積分の値を求めよう：

$$I_m = \int_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^m} \quad (D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\})$$

(1) $f : \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) とするとき， D に対応する $r\theta$ 平面上の長方形領域 E を求めよ．

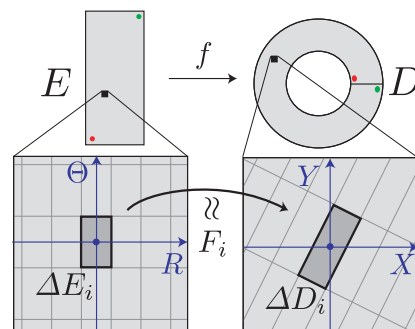
(2) 巨大な自然数 N を固定する． E を縦横それぞれ N 等分すると，計 N^2 個の合同な長方形 $\Delta E_1, \dots, \Delta E_{N^2}$ を得る．各 ΔE_i に対し，その中心を (r_i, θ_i) とおく．さらに， $\Delta D_i := f(\Delta E_i)$, $(x_i, y_i) := f(r_i, \theta_i)$ とおく． ΔE_i および ΔD_i の周囲だけで定義された局所的な座標 $R := r - r_i$, $\Theta := \theta - \theta_i$, $X := x - x_i$, $Y := y - y_i$ を用いて， $f : \Delta E_i \rightarrow \Delta D_i$ を近似する線形写像 $F_i : \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を求めよ．

(3) 各 i について， ΔD_i , ΔE_i の面積をそれぞれ $[\Delta D_i]$, $[\Delta E_i]$ で表す．また， f の (r_i, θ_i) におけるヤコビ行列を J_i で表す．このとき， $[\Delta D_i]$ は $|\det J_i| \cdot [\Delta E_i]$ で近似されることを説明せよ．(Hint: 宿題 13-3 参照)

(4) 積分 I_m を各 ΔD_i を底面とする角柱の体積和として近似し， $I_m \approx \sum (x_i, y_i, [\Delta D_i])$ の形で表せ．さらに，この式を $r_i, \theta_i, [\Delta E_i]$ を用いて近似し直せ．

(5) I_m を $\int_E \dots dr d\theta$ の形に書き直せ．

(6) 以上の計算をふまえ，上枠内の公式が成り立つことを納得せよ．



重積分の応用：曲面積

問題 2. (平行四辺形の面積) xyz 空間において，ベクトル $a, b \neq 0$ によって張られる平行四辺形（線分につぶれている場合も含む）の面積 $[S(a, b)]$ は次で与えられることを示せ：

$$[S(a, b)] = \sqrt{|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2}.$$

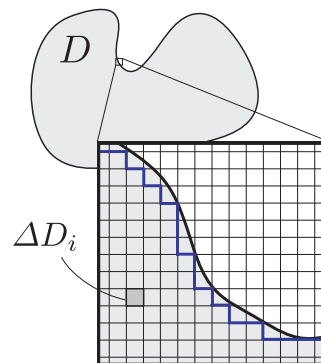
(Hint: a, b のなす角を θ とすると...)

曲面積．関数 $z = f(x, y)$ は xy 平面の有界閉集合 D で定義され，連続微分可能とする．このとき，その xyz 空間におけるグラフ S の面積 $[S]$ は次の積分で与えられる：

$$[S] = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

問題 3. 上の公式を理解しよう．まず， xy 平面に微小な升目の方眼紙を敷き，閉集合 D を N 個の正方形 $\Delta D_1, \dots, \Delta D_N$ で近似する．ただし，これらの正方形はすべて一辺が升目の長さ $\epsilon > 0$ であるとする．

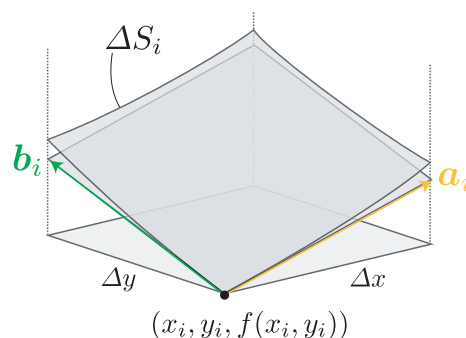
グラフ S を各 ΔD_i の範囲で切り取った部分を ΔS_i とし，それぞれを適当な微小平面で近似すれば，その面積和として求める表面積も近似されるはずである．



- (1) ΔD_i の xy 平面における左下隅の点を (x_i, y_i) とおくととき，そこでの S の接平面の方程式を求めよ．
- (2) $\Delta x = \Delta y = \epsilon$ とする．グラフ S を $\Delta D_i = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_i + \Delta x, y_i \leq y \leq y_i + \Delta y\}$ の範囲で切り取った部分 ΔS_i は，点 $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ を始点として，ベクトル

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ f_x(x_i, y_i) \Delta x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta y \\ f_y(x_i, y_i) \Delta y \end{pmatrix}$$

で張られる平行四辺形 $S(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ によって近似できることを説明せよ．



- (3) 求める面積 $[S] \approx \sum_{i=1}^N [\Delta S_i]$ をさらに $\sum_{i=1}^N [S(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)]$ で近似し，上枠内の公式を説明せよ．

問題 4. (球面積) 上の公式を利用して，半径 $R > 0$ の球面は表面積が $4\pi R^2$ で与えられることを証明せよ．

研究． uv 平面上の領域 D でパラメーター付けされた曲面

$$S = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in D\}$$

の面積公式はどんな形か？たとえば，トーラス（ドーナツの表面）

$$T = \{((3 + \cos u) \cos v, (3 + \cos u) \sin v, \sin u) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi\}$$

の面積は求まるか？（答えは $12\pi^2$.）