担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

演習について

作成日：April 16, 2004　Version：1.1

担当教官：　川平友規（かわひら　ともき，助手）

担当 TA：　木下武彦（きのした　たけひこ，M2）

演習の進め方：

- 基本的に毎回，問題のプリントを配布します．私（川平）が基本事項を確認したあと，問題を指定し，各自ノートに解いてもらいます．その後，私が黒板で解説する，という流れです．
- 配布した問題のすべてを演習で扱うとは限りません．扱わなかった問題については，自分で解いた上で解答が欲しい場合のみ，下記のオフィスアワーの時間に私か TA に聞きに来てください．
- 休み時間は約 1 時間おきに，10 分程度取ります．

演習で取り上げるテーマ：　演習と講義は独立したものと考えられています．したがって，講義で扱わない内容を演習で扱うこともありまし，逆もありえます．ここでは数理学科の 2 年生として必要な数学の基礎知識，数学の記述能力を身につけることが目標です．特に，

- n 次元での線形写像（1 次変換），基底の概念
- 命題の証明とその記述法
- 集合と写像の基礎（単射，全射，連続性など）
- 抽象ベクトル空間（数列のなすベクトル空間など）
- ϵ-δ 論法の基礎
- 複素数の計算，一次分数変換，複素微分

を**直感的に理解し，かつ数学的に整備された形で記述できるようになる**ことを目標とします．

単位・成績：　成績に関係のある要素は，**出席回数，小テストの点数，宿題の提出（とその内容），期末テストの合否，および，レポートの提出**です．この中で最も重要なのが，期末テストです．これに合格しないと，単位はもらえません．しかし下に説明する通り，期末テスト合格は単位取得の十分条件ではありません．

成績の優・良・可は以下の基準で定めます．

- 上にあげた 5 つの要素のうち，出席を 15 点満点，小テストを 20 点満点，宿題を 20 点満点，期末テスト合格を 45 点として点数化する．自発的なレポートの提出により，加点することがある．

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

- 成績は 60 点未満を不可，60 − 74 点を可，75 − 89 点を良，90 点以上を優とする．

したがって，期末テストに合格するだけでは単位は取れません．授業には毎回出席し，小テスト，宿題とバランスよくこなしてください．

出席： 最初の休み時間までに出席を取ります（1 点）．遅刻・欠席をする場合，事前に email 等で私に連絡し，かつやむを得ない事情だと判断される場合のみ，加点します．

小テスト： 前期の間に 3，4 回，皆さんの理解度を確認するために，30 分程度の小テストを行います．だいたい月末を予定しています．

宿題： 宿題は基本的に毎回出題します．宿題用の問題プリントを配ることもありますし，演習中に黒板で出題することもあります．その次の演習の時間までに，**A4 レポート用紙**で提出してください．また，**必ず表紙をつけ，名前，学籍番号，何月何日の宿題かを記入**してください．

レポート： 授業で扱えなかった問題や，やや進んだ内容の問題をレポート課題として指定することがあります．レポートの提出は任意ですが，提出されたレポートの質を判断して，成績にボーナス加点していきます．レポートの提出様式は上と同様です．

オフィスアワー： 私のオフィスアワー（質問受付時間）は**毎週木曜日 12:00-13:30，場所は Cafe David（理学部 1 号館 2 階エレベーター前）**です．私と TA の木下さんだけでなく，その他のスタッフも待機しているので，自由に質問してください．できれば各自，少なくとも 1 回は質問に来るようにしてください．

基本的に，オフィスアワー以外の時間には質問を受け付けません．(もちろん授業中とその前後は例外です！）ただし，事前に email 等で appointment を取れば質問を受け付けます．他の時間の Cafe David も活用してください．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ちからだめしの復習，一次変換（線形写像）の復習

作成日：April 16, 2004　Version：1.1

ちからだめしの復習

$\alpha \in \mathbb{R}$，X を絶対値の十分小さな実数とすると，(たとえば $|X| < 0.01$)

$$(1+X)^\alpha = 1 + \alpha X + O(X^2)$$

である．ここで $O(X^2)$ はランダウ記号を表す．すなわち，$\epsilon(X) := (1+X)^\alpha - (1-\alpha X)$ とおくと，$\epsilon(X)/X^2$ は X が十分小さいとき有界であることを示唆している．

問題 1. 上の事実を用いて，次に答えよ．

(1) $\sqrt{1-x^2}$ を 0 について 2 次までテーラー展開せよ．

(2) $F(x) = \mathrm{Sin}^{-1}x$ （ちからだめしの問題参照）と置くとき，$F'(X)$ を 0 について 2 次までテーラー展開せよ．

(3) $F(x)$ を 3 次まで 0 についてテーラー展開せよ．

(4) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}x + 2\sqrt{1-x^2}$ とおく．このとき，$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2-x}{x^2}$ を求めよ．

問題 2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |2x-y| \le 1,\ |x-3y| \le 1\}$ とするとき，積分

$$\int_D (x-3y)^{100}\,dxdy$$

の値を求めよ．

写像 $f : D \to f(D) = E$ が単射
$\iff$ ある $x, x' \in D$ について $f(x) = f(x') \in E$ であるとき，実は $x = x'$ である

問題 3.

(1) $z \in \mathbb{C}$ とし，円環領域 $D = \{z : 1/2 < |z| < 2\}$ を考える．このとき，複素関数 $f(z) = z^2$ は D 上で単射ではないことを示せ．

(2) （発展）：一方，$\mathbb{C} \ni z = x + yi \longleftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$ として複素平面と実平面を同一視したとき，写像 $f : \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Im}\, z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z^2 \\ \mathrm{Im}\, z^2 \end{pmatrix}$ のヤコビアンは D 上 0 にならないことを示せ．

問題 4. $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ に写す写像

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Im}\, z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z^2 \\ \mathrm{Im}\, z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

の局所的な「振る舞い」を理解したい．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(1) u, v を x, y で表せ．また，$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ をもとめよ．

(2) $X := x-1$, $Y := y-1$, $U := u$, $V := v-2$ とおく．このとき，U, V を X, Y で表せ．

(3) X, Y の絶対値がものすごく小さい状況を（たとえば絶対値が 0.00001 以下とか）考える．このとき，ある 2 次正方行列 A が存在して $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}$ は $A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ に極めて近い．この行列 A は何か？

(4) f の $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ におけるヤコビ行列およびヤコビアンの値を求めよ．

(5) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ を中心に，小さな正方形を配置する．この正方形は，f によってだいたいどのような図形に写るか？

一次変換（線形写像）の復習

定義　3 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}^3$ の**基底**であるとは，任意のベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ に対し，3 つの数字の組 x_1, x_2, x_3 が**ただ 1 組**存在して，

$$\boldsymbol{p} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3$$

の形で書けるときをいう．

すなわち，基底は $\mathbb{R}^3$ の座標系を与えることができる．

問題 5. $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であるとき，これらは一次独立であることを示せ．すなわち，$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$ ならば $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ を示せ．

問題 6. 明らかに，ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底をなす．では，$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ はどうか？また，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ に写す線形写像を行列の形で求めよ．ついでに，この行列は正則か？

問題 7. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とする．このとき，任意の**正則行列** A に対して $\boldsymbol{u}'_1 = A\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}'_2 = A\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}'_3 = A\boldsymbol{u}_3$ はまた $\mathbb{R}^3$ の基底となることを示せ．

Hint. 示すことは「任意のベクトル $\boldsymbol{p}' \in \mathbb{R}^3$ に対し，3 つの数字の組 x'_1, x'_2, x'_3 が**ただ 1 組**存在して，$\boldsymbol{p}' = x'_1\boldsymbol{u}'_1 + x'_2\boldsymbol{u}'_2 + x'_3\boldsymbol{u}'_3$ と表される」ことである．いま，$\boldsymbol{p} := A^{-1}\boldsymbol{p}'$ は $\boldsymbol{u}_i$ たちの一次結合で一意的に表されている．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題

宿題 1. 上の $\mathbb{R}^3$ での議論をすべて n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の話に書き直せ.

宿題 2. 上の問題 7 との関連問題. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とする. このとき, ある A に対して $\boldsymbol{u}'_1 = A\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}'_2 = A\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}'_3 = A\boldsymbol{u}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底とならなかった. このような状況がおきる具体例を二つ挙げよ.（すなわち, 具体的に $\boldsymbol{u}_i$ たちや A を書き下す.）. また, 可能な限りその理由を考察し, 1 年生にもわかるよう説明せよ.

宿題 3. 0 の周りのテーラー展開により, 以下の極限をもとめよ.

(1)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$$

(2)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^3}$$

宿題 4. 問題 4 と同じ f に対し, 同様の手順で, $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ のまわりでの f の「振る舞い」を説明せよ.

宿題 5. 次の重積分の値をもとめよ.

$$\int_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} \quad (D : 1 \le x^2 + y^2 \le 4)$$

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

局所線形写像とJacobi行列，重積分の変数変換

作成日：April 23, 2004 Version：1.1

線形写像の復習に入る前に，線形写像の重要性を認識しておこう．ここでの話は高次元空間を扱う上でもっとも基本的な事項なので，ややくどめに説明する．

Jacobi 行列の話

以下，出てくる関数はすべて無限回微分可能とする．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像（関数）

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ u_m(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}$$

を考える．（具体的に，$n = 26$, $m = 10$ のときなどをイメージせよ.）この写像の点 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ における Jacobi 行列（Jacobian matrix）を

$$J(a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_n) \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$$

と表すことにする.（すなわち，この行列は $m \times n$ 行列である.）ここで $f \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ とし，$X_j := x_j - a_j$, $U_i := u_i - b_i$ などと置くと，Taylor 展開等により次のことがわかる：

各 X_j が十分小さいとき，

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix} = J(a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \boldsymbol{O}(X_1^2 + \cdots + X_n^2).$$

ここで，$\boldsymbol{O}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$ は誤差を表す n 次の縦ベクトルであり，おのおのの成分が $O(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$ になっていることを意味する．

たとえば $n = 3$ のとき，各 X_j が 0.0001 以下ならば $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ は高々 0.00000003 であり，上の近似における**相対的な誤差**はほとんどゼロベクトルである．したがって，f **の作用は局所的には Jacobi 行列による線形写像と思って良い**．1 次元の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を理解するのに微分（＝接線による線形近似）が必要だったように，多変数の関数を理解するには Jacobi 行列による線形近似が不可欠である．したがって，**線形写像を理解せずに多変数関数を理解するのは不可能に近い**.

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

重積分の変数変換を理解するために

A を（正則とは限らない）n 次正方行列とする．このとき，写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める． E を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし，その n 次元体積を $|E|$ と表す．このとき，

$$|f(E)| = |\det A||E|$$

となる．特に，$\det A = 0$ のとき $|f(E)| = 0$ となる．

補足 1. 上の E に関して，その体積を測ることができるか，という問題は自明ではない．詳しくは Lebesgue 積分論で学習する．ちなみに，もし E の体積を図ることが出来れば，$f(E)$ の体積も測ることができることは知られている．

重積分の変数変換をするともれなく Jacobian のおまけがついてくる．前回の宿題 5 を使って，その意味を**直感的に**理解しよう．

問題 1. 次の重積分の値をもとめたい：

$$I = \int_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} \qquad (D: 1 \le x^2+y^2 \le 4)$$

(1) まず，変数変換

$$f: \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，$f(E) = D$ となる $r\theta$-平面上の長方形領域 E をひとつ求めよ．

(2) I を角柱の体積和として近似したい．N を巨大な整数とし，E を N^2 個の合同な長方形 $\Delta E_1 \ldots \Delta E_{N^2}$ に等分割する．各 ΔE_i に対し，その中心を (r_i, θ_i) とおく．さらに，$\Delta D_i := f(\Delta E_i)$，$(x_i, y_i) := f(r_i, \theta_i)$ とおく．局所座標 $R := r - r_i$，$\Theta := \theta - \theta_i$，$X = x - x_i$，$Y = y - y_i$ を用いて，$f: \Delta E_i \to \Delta D_i$ を近似する線形写像を求めよ．

(3) 各 i について，ΔD_i の面積は ΔE_i の面積のおよそ何倍か？

(4) 今，N は極めて大きく，「各 ΔD_i は水素原子よりも小さい」，と言いたくなるぐらい小さい．このとき，積分 I は ΔD_i を底辺とする角柱の体積和として近似される．この近似式を x_i，y_i，$|\Delta D_i|$ を用いて式で表せ．さらに，上の近似式を r_i，θ_i，$|\Delta E_i|$ を用いて式で表せ．

(5) 以上の議論をもとに，I を $\int_E \cdots drd\theta$ の形に書き直せ．さらに，積分値を求めよ．

これを発展させて，もっと難しい積分を考えよう．これができれば，高次元の重積分の意味は大体理解できるはずである：

問題 2. 次の重積分の値をもとめたい：

$$I = \int_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz \qquad (D: x^2+y^2+z^2 \le 1)$$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(1) まずは積分の意味を解釈したい．積分領域は，3 次元の球面とその内部である．この球体には，ある物質が詰まっていて，$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ におけるこの物質の密度（単位体積あたりの重さ）は $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ であることがわかっている．点 $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ を中心とする非常に小さな直方体で，縦・横・高さが Δx, Δy, Δz のものを考えよう．このとき，この直方体の重さのおよその値を求めよ．その上で，積分 I は一体何を計算しているのか？

(2) 変数変換

$$f : \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，$f(E) = D$ となる $r\theta\phi$-空間上の直方体領域 E をひとつ求めよ．

(3) I を直方体の質量和として近似したい．N を巨大な整数とし，E を N^3 個の合同な直方体 $\Delta E_1 \ldots \Delta E_{N^3}$ に等分割する．各 ΔE_i に対し，その中心を (r_i, θ_i, ϕ_i) とおく．さらに，$\Delta D_i := f(\Delta E_i)$, $(x_i, y_i, z_i) := f(r_i, \theta_i, \phi_i)$ とおく．局所座標 $R := r - r_i$, $\Theta := \theta - \theta_i, \Phi = \phi - \phi_i$ $X = x - x_i$, $Y = y - y_i$, $Z = z - z_i$ を用いて，$f : \Delta E_i \to \Delta D_i$ を近似する線形写像を求めよ．

(4) 各 i について，ΔD_i の体積は ΔE_i の体積のおよそ何倍か？

(5) 積分 I は「各 ΔD_i に密度 $(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ の物質を詰めたもの」の質量和として近似される．この近似式を x_i, y_i, z_i, $|\Delta D_i|$ を用いて式で表せ．さらに，上の近似式を r_i, θ_i, ϕ_i, $|\Delta E_i|$ を用いて近似せよ．

(6) 以上の議論をもとに，I を $\int_E \cdots dr d\theta d\phi$ の形に書き直せ．さらに，積分値を求めよ．

今週の宿題コーナー

$u = u(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ における Taylor 展開：

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u(a,b) + u_x(a,b)(x-a) + u_y(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left(u_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2u_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + u_{yy}(a,b)(y-b)^2\right) + \cdots \end{aligned}$$

宿題 1. $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ の $(x, y) = (1, 2)$ における 2 次までの Taylor 展開を以下の方法でもとめよ．

(1) 上野公式，じゃなくて，上の公式どおりに計算．

(2) 強引に別の公式 $(1 + X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} X^2 + \cdots$ に帰着させて計算．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 2.

(1) $u(x,y) = \sin(3x+2y)$ の $(x,y) = (0,0)$ における 2 次までの Taylor 展開をもとめよ．上の公式通りに計算しても良いし，$\sin X = X - X^3/3! + \cdots$ を用いても良い．

(2) $v(x,y) = \sin(x+4y)$ の $(x,y) = (0,0)$ における 2 次までの Taylor 展開をもとめよ．

(3) $(u,v) = f(x,y) := (\sin(3x+2y), \sin(x+4y))$ とする．このとき，$(x,y) = (0,0)$ のまわりで f を近似する線形写像をもとめよ．

(4) （発展）:$(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$ なる漸化式を考える．今，$(x_1, y_1) = (1/1000, 1/1000)$ からスタートとした．このとき，(x_n, y_n) が 0 に収束することはあり得るか？ちからだめしの問題 2 を参照しつつ，考察せよ．

宿題 3.　$a, b, c > 0$ とするとき，次の重積分の値をもとめよ：

$$I = \int_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz \quad \left(D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right)$$

宿題 4.　今日の積分の学習は直感的で，飽き足らないという君へ：今日の問題 1 において，I を近似するために $I_N := \{\Delta D_i$ を用いた N^2 個の角柱の体積和 $\}$ と，さらに $I'_N := \{$Jacobian や ΔE_i を用いて I_N を近似したもの $\}$ を用いた．教科書を参照しながら，I_N，$I'_N \to I$ $(N \to \infty)$ を理論的に証明せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

（抽象）ベクトル空間と座標系，基底など

作成日：April 30, 2004　Version：1.2

今日の演習に入る前に..

- レポートと宿題は分けて提出してください．
- 宿題の提出期限は次の演習の開始時間までです．提出場所は教室です．もし何らかの事情により演習を遅刻もしくは欠席する場合，(1) 事前に連絡の上川平の office(A439) に直接持ってくるか，(2)office hour（木曜昼休みの Cafe David）にて提出してください．
- 提出期限に間に合わなかった宿題は後日提出してもかまいません．ただし，遅れた日数に応じ多少減点します．
- レポートには提出期限は設けません．提出場所は教室です．
- 配布はしたが授業で宿題として指定しなかった問題を解きたい場合，宿題とは別にしてレポートとして提出してください．
- 宿題の中の発展問題はボーナス問題です．解けば加点の対象としますが，解かなくても減点しません．

以上よろしくお願いします．

抽象ベクトル空間に向けて

2 人の座標系　真っ白な，ただの平面 V がある．この平面上で，点 P を点 Q に移す平行移動をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であらわすことにしよう．さらに，ある基準点 O を適当にとり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を点 P と同一視する（位置ベクトル）．

さていま，この平面には以下のような運動法則 f が与えられている．

(1) Q は 1 秒後に $f(Q)$ の位置に移動する．

(2) 任意の $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in V$ について，$f(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = f(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) + f(\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ が成り立つ．

(3) 任意の $\mathrm{Q} \in V$ と任意の実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \alpha f(\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ が成り立つ．

すなわち，f は V から V への**線形写像**である．

問題 1. 点 O は f で固定されることを示せ．すなわち，$f(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$ を証明せよ．

このとき，以下のような懸賞問題が出された：

> 任意の点 Q に対し，その 100 秒後の位置 Q_{100} を予測せよ．

この問題に，2 人の研究者が名乗りを上げた：1 人は A さん（35 歳独身）．もう 1 人は B さん（42 歳既婚）である．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

35 歳独身の分析

(1) 彼は平面上の点を移動を定量的に知るために，座標を入れることを思いついた．彼は 2 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を O を通る同一直線上に乗らないように取り，**任意の Q に対し，ある実数の組** (x_1, x_2) **がただ 1 組存在して，**$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2$ **と書ける**ようにした（基底の発見）．さらに，その数字の組を用いて $Q = (x_1, x_2)_A$ と表し，Q の座標としたのである．

(2) 上の方法は画期的だった．彼は平面を丹念に観察し，ついには次の結果を得たのである：点 Q の座標を $(x_1, x_2)_A$ とするとき，1 秒後には $(3x_1 + 2x_2, x_1 + 4x_2)_A$ に移動する．したがって，Q_{100} の座標は

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

で与えられる．すなわち Q_{100} の位置ベクトルは $\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2$ であろう．

しかし彼は「ちからだめし」の問 2 が解けず（行列の対角化を知らず），$A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)^{100}$ が正確に求まらないまま時が過ぎて行った．

42 歳既婚の分析

(1) 彼も，座標を入れることを思いついた．彼は 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ をうまく取り，**任意の Q に対し，ある実数の組** (y_1, y_2) **がただ 1 組存在して，**$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2$ **と書ける**ようにした．さらに，その数字の組を用いて $Q = (y_1, y_2)_B$ と表し，Q の座標としたのである．

(2) 彼は平面を丹念に観察し，ついには次の結果を得たのである：点 Q の座標を $(y_1, y_2)_B$ とするとき，一秒後には $(2y_1, 5y_2)_B$ に移動する．したがって，Q_{100} の座標は

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{100}y_1 \\ 5^{100}y_2 \end{pmatrix}$$

で与えられる．Q_{100} の位置はベクトル $2^{100}y_1\boldsymbol{v}_1 + 5^{100}y_2\boldsymbol{v}_2$ の指し示す点である．

彼は精密な対数表を駆使して 100 乗を計算し，ほぼ正確にその位置を指し示したのである．
B さんはこれで賞金を得た．A さんもまあ，かなりいい線まで行ってたので，敢闘賞を授与された．

教訓：　問題に応じて，適切な座標系を選ぶべし．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

2 つの座標系の関係　B さんの成功には，裏話がある．実は彼も A さんと同じ座標系を最初に選んでしまい，A^{100} の計算に四苦八苦した時期があったのである．このとき彼は，学生時代に受験した「ちからだめし」問 2 の結果を思い出した．そう，『$P = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とすると，$P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right) =: B$ が成り立つ』という事実である…！さらに，座標の表現に関して，行列の記号を駆使した次のような方法をとった：

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

この記号法を用いると，A さんと同じ結果により

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{Q})} &= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 4x_1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)P(P^{-1}AP)P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって，

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) := (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)P = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2)$$

および

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と置くことで，

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{Q})} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 5x_2 \end{pmatrix} = 2x_1\boldsymbol{v}_1 + 5x_2\boldsymbol{v}_2$$

を得たのである．

- 2 次元ベクトル空間の基底 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ と正則写像 P に対し，$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ は別の基底を与える．
- このとき，最初の $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ に関する座標 $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ は $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ の座標では $P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ となる．
- さらに，基底 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ で見た線形変換 A は基底 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ でみると $P^{-1}AP$ に見える．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ベクトル空間の公理的定義

集合 V が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 (vector space) であるとは，以下を満たすときを言う：

- 全ての $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} \in V$ に対し，和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$ が一意的に (unique に) 定まる．
- 全ての $\alpha \in \mathbb{R}$，$\boldsymbol{a} \in V$ に対し，スカラー倍 $\alpha\boldsymbol{a} \in V$ が一意的に定まる．
- $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を任意の V の元，α，β を $\mathbb{R}$ の任意の元とするとき，

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(3) ある $\mathbf{0} \in V$ が存在して，$\mathbf{0}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}+\mathbf{0}$.

(4) 各 $\boldsymbol{a} \in V$ に $\boldsymbol{a}' \in V$ が存在して，$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}' = \mathbf{0}$.

(5) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$.

(6) $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$.

(7) $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$

(8) $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

例えば，$V = \mathbb{R}^n$ とすればこれら公理を満たすことは明らかであろう．

補足 1. 上の公理の $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ で置き換えれば $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間も定義される．例えば $V = \mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．しかし，$V = \mathbb{R}^n$ としてもこれは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間ではない．例えば，スカラー倍 i をすると $\mathbb{R}^n$ からはみ出てしまう．

問題 2. 以下の集合が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の公理を満たすことを示せ．

(1) $\mathrm{Poly}_d := \{f : f$ は d 次以下の多項式 $\}$.

(2) $\mathbb{R}^\infty := \{(x_1, x_2, \ldots) :$ 各 $x_j \in \mathbb{R}\}$.

問題 3. Poly_d の部分集合 $\mathrm{Poly}_d^* := \{f : f$ は d 次多項式 $\}$ はベクトル空間の公理を満たさないことを示せ．

問題 4. $\mathrm{Poly}_\infty := \{f : f$ は実係数多項式 $\}$ とすると，これは $\mathbb{R}^\infty$ の部分集合 $\mathbb{R}_0^\infty := \{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty :$ ある自然数 n が存在して n 項目以降がすべて $0\}$ と同一視できる．その方法は？

（抽象）ベクトル空間の座標変換

$V = \mathrm{Poly}_2$ とする．ある $\boldsymbol{f} \in V$ は 2 次以下の多項式であるから，ある実数の組 a_1，a_2，a_3 が unique に存在して，$\boldsymbol{f} = f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ の形にかける．ここで $\boldsymbol{u}_1 = u_1(x) =$

1, $\boldsymbol{u}_2 = u_2(x) = x$, $\boldsymbol{u}_3 = u_3(x) = x^2$ とおくと，

$$\boldsymbol{f} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + a_3\boldsymbol{u}_3 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

と書ける．

問題 5. 多項式に対する微分

$$D\colon V \ni f(x) \mapsto \frac{d}{dx}f(x) \in V$$

は線形写像 $D : V \to V$ を定めることを示せ．また，

$$D(\boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

となる 3 次正方行列 A を求めよ．

一方，任意の $\boldsymbol{f} \in V$ に関して，ある実数の組 b_1, b_2, b_3 が unique に存在して，$\boldsymbol{f} = f(x) = b_1 + b_2 x + b_3(x-1)^2$ の形にかける．ここで $\boldsymbol{v}_1 = v_1(x) = 1$, $\boldsymbol{v}_2 = v_2(x) = x$, $\boldsymbol{v}_3 = v_3(x) = (x-1)^2$ とおくと，

$$\boldsymbol{f} = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + b_3\boldsymbol{v}_3 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

とも書ける．

問題 6. このとき，

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$$

となる 3 次正方行列 P を求めよ．このとき，P は正則であることを示し，その逆行列 P^{-1} を求めよ．

問題 7. 線形写像 $D : V \to V$ について，

$$D(\boldsymbol{f}) = D(b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + b_3\boldsymbol{v}_3) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)B\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

となる 3 次正方行列 B を求めよ．

問題 8. 上 2 つの問題を $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = (1, x-1, (x-1)^2)$ として解きなおせ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

宿題 1. 次の集合が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になることを示せ．(公理を満たすことをチェックする.)

(1) $V_1 = \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$.

(2) $V_2 = \left\{\boldsymbol{f} = f(x) : \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = f(x),\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right\}$.

(3) $V_3 = \{\boldsymbol{a} = A : A$ は $m \times n$ 行列$\}$.

宿題 2. 次の集合が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間でないことを示せ．(何か反例を挙げて公理が満たされないことを示せ．)

(1) $U_1 = \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_{n+1} = 2a_n + 1\}$.

(2) $U_2 = \{\boldsymbol{f} = f(x) : f$ は d 次以下の $\mathbb{Z}$ 係数多項式$\}$.

(3) $U_3 = \{\boldsymbol{a} = A : A$ は n 次正則行列$\}$. 難しい場合は $n = 2$ のときのみ解答しても良い.

数学の文法　数学では「全ての…について…である」とか,「ある…が存在して…が成り立つ」という形の文章を多用する．これをそのまま板書するのはしんどいので,「全ての x について」を $\forall x$,「ある y が存在して」を $\exists y$ などと略記する． たとえば,「任意の正の数 x に対してある整数 n が存在して，$10^n \le x \le 10^{n+1}$ を満たす」という文章は

$$\forall x > 0,\ \exists n \in \mathbb{Z}, \quad 10^n \le x \le 10^{n+1}$$

などと略記する．とくに，$x < 0$ と不等号を書くと $x \in \mathbb{R}$ であることは暗に示されている.

宿題 3. 以下の文章を上の $\forall$, $\exists$ を用いた形に書き直せ．さらにその真偽を判定せよ.

(1) 任意の整数 m に対しある整数 n が存在して，$3n + 4m = 1$ を満たす.

(2) ある正の実数 x が存在して，$2x - 1 > 0$ を満たす.

(3) 任意の実数 x と任意の実数 y に対し，$x^2 + y^2 \ge 2xy$ が成り立つ.

(4) ある実数 x とある実数 y が存在して，$x^2 - 3y + 1 = 0$ を満たす.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 4. 逆に，以下の式を文章化せよ．また，その真偽を判定せよ．

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y < 0.$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exists z \in \mathbb{Z}, \quad x + y - z < 0.$

(3) $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x + 1 < 0.$

(4) $\exists x > 0, \exists y < -10, \quad y > x^2 + 1.$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

部分ベクトル空間，基底など，用語の確認

作成日：May 7, 2004　Version：1.1

部分ベクトル空間

以下，V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．

V の部分集合 W が V の**部分ベクトル空間**であるとは，

- 任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in W$ に対し $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$，かつ
- 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と任意の $\boldsymbol{a} \in W$ に対し，$\alpha\boldsymbol{a} \in W$

であるときをいう．

問題 1. 上の $W \subset V$ に対し，$\boldsymbol{0} \in W$ を示せ．

問題 2. $W = \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$ は $\mathbb{R}^{\infty}$ の部分ベクトル空間になることを示せ．

問題 3. $W' = \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_{n+1} = 2a_n + 1\}$ は $\mathbb{R}^{\infty}$ の部分ベクトル空間にならないことを示せ．

Span

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$ に対し，集合

$$\{a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n : \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\} \subset V$$

を $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ で表し，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ **で張られる空間**と呼ぶ．

問題 4. 上の $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\} =: W$ は V の部分ベクトル空間になることを示せ．

問題 5. 次のベクトル空間に関する等式を示せ．

$$\begin{aligned}\mathrm{Poly}_d &= \mathrm{span}\{1, x, x^2, \ldots, x^d\} \\ &= \mathrm{span}\{1, (x-1), (x-1)(x-2), \ldots, (x-1)(x-2)\cdots(x-d)\}\end{aligned}$$

補足 1. より一般に，ある（部分ベクトル空間とは限らない）部分集合 $E \subset V$ に対し，集合

$$\{a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n : n \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in E,\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

を $\mathrm{span}\{E\}$ で表し，E **で張られる空間**と呼ぶ．例えば $\mathrm{Poly}_{\infty} = \mathrm{span}\{1, x, x^2, \ldots\}$．$\mathrm{span}\{E\}$ は V の部分ベクトル空間であり，また，E を含む最小の部分ベクトル空間である．

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

真っ白なベクトル空間に座標を入れたい

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が以下を満たすとする：任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対し実数の組 $(a_1, \ldots, a_n)$ が**ただ一組**存在して，

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書ける．
このとき，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を V の**基底**であるという．さらに，このような基底が存在する V を n **次元ベクトル空間**と呼ぶ．

真っ白なベクトル空間に与えられた「ものさし」が基底であり，我々はそれを基準にして，V の各点に座標を入れるのである．また，この座標によって我々は V を $\mathbb{R}^n$ とみなすレンズを得たことになる：

$$V \ni \boldsymbol{a} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

問題 6. $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n \in V$，$\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ ，$\alpha\boldsymbol{a}$ に対応する $\mathbb{R}^n$ の元は何か？

このとき，$\mathbb{R}^n$ は V をある基底で計測し，数値化した地図のようなものと考えてもよい．実際に V を調べる代わりに，まず地図 $\mathbb{R}^n$ で状況を調べ，次に現地に行って確認する，って感じだろうか．

補足 2. より一般には，ある部分集合 $E \subset V$ が次をみたすとき V の**基底**と呼ばれる：任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し，ある自然数 n と実数の組 $(a_1, \ldots, a_n)$ が**ただ一組**存在して，

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$$

と書ける
例えば，Poly_∞ の基底として $\mathrm{Poly}_\infty = \mathrm{span}\{1, x, x^2, \ldots\}$ をとることが出来るが，見ての通り，無限集合である．このように，有限個のベクトルからなる基底が取れないベクトル空間を**無限次元ベクトル空間**と呼ぶ．関数の空間などはその最たる例であるが，その詳細は関数解析で学習する．以後演習で扱うのは，主に無限次元ベクトル空間の有限次元部分ベクトル空間である．

問題 7. $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が以下を満たすとき，基底となることを示せ：

(1) $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\} = V$ かつ

(2) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は一次独立．

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

$\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\} = V$ だけではベクトル（ものさし）の数が多すぎて，一意的な座標を定められないことがある．($\mathbb{R}^2$ にベクトル 100 個，を想像せよ.) しかし，一次独立性を加えることによってその無駄が省かれ，過不足ない「ものさし」が得られるのである．より一般に，

> $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が一次独立ならば，それは部分ベクトル空間 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ の基底である．

問題 8. 連続関数の全体 $\{\boldsymbol{f} = f(x) : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を $\tilde{V}$ とする．$\boldsymbol{f}_1 = f_1(x)$，$\boldsymbol{f}_2 = f_2(x)$ に対し，和は $\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f} = f_1(x) + f_2(x) \in \tilde{V}$，スカラー倍は $\alpha_1 \boldsymbol{f} = \alpha f_1(x) \in \tilde{V}$ で自然に定まっている．このとき，以下の部分ベクトル空間を考えよう：

- $V_1 = \mathrm{span}\{1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos^3 x\}$
- $V_2 = \mathrm{span}\{1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x\}$
- $V_3 = \mathrm{span}\{\sin x,\ \sin x \cos x,\ \sin \cos^2 x\}$

(1) $1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos^3 x$ は V_1 の基底になっていることを示せ．(Hint. 上の問題 7 より，一次独立性を示せば十分)

(2) $V_1 = V_2$ を示せ．また，

$$(1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos^3 x)P = (1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x)$$

となる 4 次正方行列 P を求めよ．これは正則か？

(3) $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x$ も $V_1 = V_2$ の基底になっていることを示せ．

(4) $\sin x,\ \sin x \cos x,\ \sin \cos^2 x$ が V_3 の基底になっていることを示せ．

(5) 次の写像 $T : V_1 \to V_3$ を考える：

$$V_1 \ni \boldsymbol{f} = f(x) \longmapsto T\boldsymbol{f} = \frac{df(x)}{dx} \in V_3.$$

このとき，T は線形写像であることを示せ．

(6)

$$\boldsymbol{f} = f(x) = a_1 + a_2 \cos x + a_3 \cos^2 x + a_4 \cos^3 x = (1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos^3 x) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

とするとき，

$$T\boldsymbol{f} = (\sin x,\ \ \sin x \cos x,\ \ \sin \cos^2 x)A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 A を求めよ．これは写像 T の表現行列と呼ばれるが，当然基底の取り方に依存する．基底 $1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos^3 x$ を $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x$ に取り替えた場合，表現行列 A はどのように変化するか？

今週の宿題コーナー

宿題 1. $V = \mathrm{Poly}_2$ とする．

(1) $1,\ x,\ x^2$ は V の基底であることを示せ．

(2) $1,\ x+1,\ (x+1)^2$ も V の基底であることを示せ．

(3) 部分ベクトル空間 $\mathrm{span}\{1,\ \pi,\ x,\ 2x+1\}$ に対し，その基底をひとつ求めよ．

(4) $(1,\ x,\ x^2)P = (1,\ x+1,\ (x+1)^2)$ となる行列を求めよ．また，それが正則であることを示せ．

(5) 写像 $T : V \to V$ を以下で定める：

$$V \ni \boldsymbol{f} = f(x) \longmapsto T\boldsymbol{f} = (x+1)\frac{d}{dx}(f(x)) \in V.$$

このとき，T は線形写像であることを示せ．

(6)

$$\boldsymbol{f} = f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 = (1,\ x,\ x^2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

とするとき，

$$T\boldsymbol{f} = (1,\ x,\ x^2)A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 A を求めよ．これは写像 T の基底 $1,\ x,\ x^2$ に関する表現行列と呼ばれる．同様にして，写像 T の基底 $1,\ x+1,\ (x+1)^2$ に関する表現行列 B を求めよ．

(7) $B = P^{-1}AP$ を示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数学の文法　数学では「A ならば B」とか,「A でないならば B でない」という形の文章（命題）を多用する．条件 A，B に対し,「A ならば B」という命題があったとしよう．このとき,

- 「B ならば A」という命題を「A ならば B」の**逆**といい,
- 「B でないならば A でない」という命題を「A ならば B」の**対偶**という.

さらに,

- 命題「A ならば B」が正しくとも（真），その逆「B ならば A」が正しいとは限らない．例えば,「6 の倍数ならば 3 の倍数」の逆,「3 の倍数なら 6 の倍数」など.
- 命題「A ならば B」が正しければ（真），その対偶「B でないならば A でない」は常に正しい（真）．また，命題「A ならば B」が間違っていれば（偽），その対偶「B でないならば A でない」も間違いである（偽）．例えば,「6 の倍数ならば 3 の倍数」に対し,「3 の倍数でないなら 6 の倍数でない」.

宿題 2.　以下の命題の逆と対偶を書き下し，その真偽を判定せよ.

(1) $x,\ y > 0$ ならば $x^2 + y^2 > 0$

(2) $2x - 1 > 0$ ならば，$4x - 1 > 0$.

(3) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がすべての実数で連続ならば，すべて点で微分可能.

(4) $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ がベクトル空間 V の基底ならば，$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ は一次独立.

(5) $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ がベクトル空間 V の基底ならば，$\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\} = V$.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題!!

作成日：May 14, 2004　Version：1.1

今週のプリントは宿題だけです.

今週の宿題コーナー

宿題 1. まずは普通の計算問題. **ヴェクトル空間** $V = \mathbb{R}^4$ のもっとも自然な基底

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

を考える. これの基底に関して, ある一次変換 $f : V \to V$ は次のような表現行列を持ったとする:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

すなわち,

$$f : V \ni \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_4) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \longmapsto f(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_4) A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in V$$

である. このとき, 基底 $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4,\ \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4$ に関する f の表現行列 B を求めよ.

宿題 2. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ をベクトル空間 $\mathbb{C}^N$ の一次独立なベクトルとする. このとき, 以下を示せ:

(1) $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^N$ を $\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ 以外からとると, 任意の複素数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ に対し, $\boldsymbol{a}_1 + \alpha_1 \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}_2 + \alpha_2 \boldsymbol{b},\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_n + \alpha_n \boldsymbol{b}$ は一次独立となる.

(2) $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3, \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1} - \boldsymbol{a}_n,\ \boldsymbol{a}_n$ は一次独立.

裏には宿題 3 が!

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数学の文法　二つの集合 $A,\ B$ があって，$A=B$ を証明したいとする．このとき，

(1) $A \subset B$ が成り立つ

(2) $B \subset A$ も成り立つ

(3) ゆえに，$A=B$ である．

という論法が一般的かつ明解である．

宿題 3.　集合 $A,\ B$ を以下のように与える．このとき，$A=B$ ならば上の要領で証明し，そうでないならその理由を述べよ．

(1) $A \subset \mathbb{Z}$ は 6 の倍数全体．$B \subset \mathbb{Z}$ は 2 でも 3 でも割り切れる整数全体．

(2) $A = \mathrm{span}\{x,\ 2x,\ x^2,\ 3x^2\}$, $B = \mathrm{span}\{2,\ x^2,\ (x-1)^2\}$, ただし $A,\ B \subset \mathrm{Poly}_2$.

(3) $A = \mathrm{span}\{x,\ x+2,\ x^2\}$, $B = \mathrm{span}\{2,\ x^2,\ (x-1)^2\}$, ただし $A,\ B \subset \mathrm{Poly}_2$.

(4) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$，$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |1-x| = 1\}$.

(5) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0$ かつ $y \ge 0\}$，$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - |x-y| \ge 0\}$.

(6) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0$ または $y \ge 0\}$，$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + |x-y| \ge 0\}$.

(Hints for (4), (5) and (6): 絶対値記号を場合分けして外して行き，こつこつ不等式の成立をチェックする．)

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

像，核，次元，階数

作成日：May 21, 2004 Version：1.2

線形写像の像

Otis（故人，享年 26 歳）はある平面 U を眺めていた．そこには，見たことも無い珍妙な図形が描かれている．Otis はこれを，ガラスの壁 A の向こうにいる Aretha に見せたくなった．Aretha の側にも平面 V があって，今，Otis, U, A, V, Aretha の順に並んでいる．Otis は光源 f を持ってきて U の前に置き，その図形を V に向かって投影することに決めた．とりあえず，U, V に適当な中心点 O_U, O_V を定め，f による O_U の像が O_V に映るように固定する．Otis は，図形を f で映すと A の作用で多少歪んだ画像になるだろう，と思った．しかし，その珍妙っぷりは Aretha に十分伝わるだろうと思い，投影を実行してみた．

「Aretha，どうだい，U に珍妙な図形が映ってるだろう？」

「ううん，線分がひとつ映ってるだけ.」

どうして，そしてどこに，図形の情報は失われたのだろう？Otis はガラスの壁 A が原因だろう，と考えた．どうやら，ただのガラスでは無いらしい….

> 2 つのベクトル空間 U, V に対し，線形写像 $f : U \to V$ を考える．このとき，$f(U)$ を $\mathrm{Im}\, f$ で表し，**U の f による像** (image) と呼ぶ．$\mathrm{Im}\, f$ は $\underline{V\ の}$ 部分ベクトル空間である．また，$\mathrm{Im}\, f$ の次元を f の**階数**とよび，$\mathrm{rank}\, f$ で表す．すなわち，$\mathrm{rank}\, f := \dim(\mathrm{Im}\, f)$.

次元に関する注意

- ベクトル空間 V に有限個の基底が取れないとき，V を**無限次元ベクトル空間**とよび，$\dim V = \infty$ と定義する．さらに，
- ゼロベクトルだけからなる集合 $\{\mathbf{0}\}$ もベクトル空間であるが，$\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$ と約束しておく．逆に,（部分）ベクトル空間 V で $\dim V = 0$ となるのは $V = \{\mathbf{0}_V\}$ の形のときのみである．

例 $D : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_{10}$ を $D : \boldsymbol{f} = f(x) \mapsto \dfrac{d}{dx} f(x) = D(\boldsymbol{f})$ で定める．このとき，$\mathrm{Im}\, D = \mathrm{Poly}_1$ である．したがって，$\mathrm{rank}\, f = \dim(\mathrm{Poly}_1) = 2$ である．実は，f のある基底に関する表現行列のひとつを A とすると，$\mathrm{rank}\, f = \mathrm{rank}\, A$ （=行列の階数，基本行変形で求めるやつ）が常に成り立つ．

問題 1. $D : \mathrm{Poly}_\infty \to \mathrm{Poly}_\infty$ をやはり $D : \boldsymbol{f} = f(x) \mapsto \dfrac{d}{dx} f(x) = D(\boldsymbol{f})$ で定める．このとき，$\mathrm{Im}\, D = \mathrm{Poly}_\infty$ を示せ．このとき，$\mathrm{rank}\, f$ は何か？

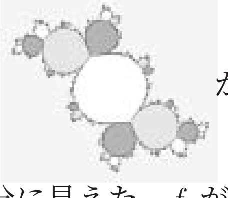
問題 2. 上の $f : U \to V$ について，$\mathrm{Im}\, f$ は V の部分ベクトル空間となることを示せ．

問題 3. 上の $f : U \to V$ について，$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ を U の基底とする.（すなわち，U は n 個の「ものさし」のセットで座標付けできる，n 次元ベクトル空間である.） このとき，以下の問い答えよ：

(1) $\mathrm{span}\{f(\boldsymbol{u}_1), \dots, f(\boldsymbol{u}_n)\} = \mathrm{Im}\, f$ を示せ.

(2) $f(\boldsymbol{u}_1), \dots, f(\boldsymbol{u}_n)$ が $\mathrm{Im}\, f$ の基底になるための条件は？

(3) $f(\boldsymbol{u}_1), \dots, f(\boldsymbol{u}_n)$ が V の基底になるための条件は？

問題 4. これ→が Otis の見た U 上の珍妙な図形である．これは Aretha には，V 上の線分に見えた．f が線形写像，A がその表現行列だったと仮定すると，A はどんな行列だったと考えれれるか？

線形写像の核と次元定理

線形写像 $f : U \to V$ において，U 上の全ての情報が V に伝達されるとは限らない．では一体，どのような情報を失っているのだろう？それを明確にするのが，次の**核**の概念である．

線形写像 $f : U \to V$ において，$f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ $(= \boldsymbol{0}_V \in V)$ となる $\boldsymbol{a} \in U$ の全体を**核** (kernel) とよび，$\mathrm{Ker}\, f$ であらわす．すなわち，

$$\mathrm{Ker}\, f := \{\boldsymbol{a} \in U : f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}\} = f^{-1}(\{\boldsymbol{0}\}).$$

特に，$\mathrm{Ker}\, f$ は $\underline{U\text{ の}}$ 部分ベクトル空間である.

例　再び $D : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_{10}$ を $D : \boldsymbol{f} = f(x) \mapsto \dfrac{d}{dx} f(x) = D(\boldsymbol{f})$ で定める．このとき，$\mathrm{Ker}\, D = \mathrm{Poly}_0 = \mathrm{span}\{1\}$ である．Poly_2 の中の $\mathrm{Ker}\, D$ に含まれる情報は線形写像 D によりすべて失われ，Poly_{10} において復元することは出来ない.

問題 5. 上の $f : U \to V$ に対し，$\mathrm{Ker}\, f$ は $\underline{U\text{ の}}$ 部分ベクトル空間になることを示せ.

問題 6. 線形写像 $D^2 : \mathrm{Poly}_3 \to \mathrm{Poly}_3$ を $D^2 : \boldsymbol{f} = f(x) \mapsto \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = D^2(\boldsymbol{f})$ で定める.

(1) D^2 の核と像を求めよ（集合の形で書け）.

(2) Poly_3 の基底 1，x，x^2，x^3 をとる．このとき，$D^2(1)$，$D^2(x)$，$D^2(x^2)$，$D^2(x^3)$ は $\mathrm{Im}\, D^2$ の基底となっているか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像において,「伝達された情報量＋失われた情報量＝オリジナルの情報量」という解釈は当然であろう．これを定式化すると，次の定理となる．

次元定理　線形写像 $f: U \to V$ において，以下が f, V によらず常に成り立つ：

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim U.$$

注意　任意の整数 n について $\infty + n = n + \infty = \infty$ と約束すれば，上の定理は無限次元ベクトル空間に関しても正しい定理となる．

問題 7. 次のような線形写像 $f: U \to V$ の例を作れ．

(1) $\dim U = 3$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2$.

(2) $\dim U = 3$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

(3) $\dim U = 5$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 5$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$.

(4) $\dim U = 5$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 0$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 5$.

(5) $\dim U = \infty$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = \infty$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

(6) $\dim U = \infty$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = \infty$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2004$.

(7) $\dim U = \infty$, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2004$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = \infty$.

単射と全射

上の定理より，線形写像において情報が失われないためには $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$，すなわち $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\}$ が必要であることがわかる．

問題 8. 線形写像 $f: U \to V$ について，以下は全て同値であることを示せ．

(1) $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\}$

(2) f は単射．すなわち，$f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}') \in V \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \in U$.

(3) f は異なる点を異なる点に移す．(＝2 点を 1 点につぶさない＝情報をつぶさない)

問題 9. $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を U の基底とする．$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\}$ を仮定すると，$f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ は $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ の基底になることを示せ．

この問題において，$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_U\}$ に加えさらに $\operatorname{Im} f = V$ が成立すれば，$f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ は V の基底となることを意味する．U の「ものさし」のセットが，f で写してもやはり V での「ものさし」のセットとして過不足なく使える，ということである．特に，

$$\dim U = n = \dim V = \dim(\operatorname{Im} f)$$

が成り立つ．

$\operatorname{Im} f = V$ とは f で伝達された情報量が V での情報容量 (capacity) に等しいとうことである．もしかしたら，U のもつオリジナルの情報は V のそれよりはるかに大きく，f でかなりの情報を失ってなおかつ $\operatorname{Im} f = V$，ということもありうる．

例　$f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, $f : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto x_1$ など．$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ なる線形写像であるが，数列の 2 項目以降の情報は完全に失ってしまう．

- 線形写像 $f : U \to V$ に対し，$\operatorname{Im} f = f(U) = V$ であるとき f **は全射である** (surjective) という．言い換えると，「**任意の** $\boldsymbol{b} \in V$ **に対しある** $\boldsymbol{a} \in U$ **が存在して** $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ **となる**」ということである．写像の全射性を証明したいときには，この形を用いる．
- 線形写像 $f : U \to V$ が全射かつ単射であるとき，**全単射** (bijective) または**同型写像** (isomorphism) とよぶ．写像が全単射であることを証明するには，全射性と単射性をそれぞれ示す，2 手詰めとなる．

問題 10. 線形写像 $f : U \to V$ に対し，$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim V$ ならば全射であることを示せ．

今週の宿題コーナー

宿題 1　授業であげた例以外で，次のような線形写像 $f : U \to V$ の例をひとつ以上あげよ．どの本にも載ってないような，奇抜で面白い例を期待しています．

(1) $\dim U = 3$，$\dim(\operatorname{Im} f) = 1$，$\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$，かつ f は全射．

(2) $\dim U = 3$，$\dim(\operatorname{Im} f) = 2$，$\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$，かつ f は全射でない．

(3) $\dim U = 5$，$\dim(\operatorname{Im} f) = 5$，$\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$.

(4) $\dim U = 5$，$\dim(\operatorname{Im} f) = 0$，$\dim(\operatorname{Ker} f) = 5$.

(5) $\dim U = \infty$，$\dim(\operatorname{Im} f) = \infty$，$\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$.

(6) $\dim U = \infty$，$\dim(\operatorname{Im} f) = \infty$，$\dim(\operatorname{Ker} f) = 2004$，かつ f は全射でない．

(7) $\dim U = \infty$，$\dim(\operatorname{Im} f) = 2004$，$\dim(\operatorname{Ker} f) = \infty$.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 2　線形写像 $I : U = \mathrm{Poly}_2 \to V = \mathrm{Poly}_3$ を

$$I : \boldsymbol{f} = f(x) \mapsto \int_0^x f(t)dt = I(\boldsymbol{f})$$

で定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) I の核と像を求めよ（集合の形で書け）．また，次元定理を確認せよ．

(2) I は全射か？単射か？ 全単射か？

(3) $U = \mathrm{Poly}_2$ の基底 $1,\ x,\ x^2$ をとる．このとき，$I(1),\ I(x),\ I(x^2)$ は $\mathrm{Im}\, I \subset V$ の基底となっているか？

(4) $V = \mathrm{Poly}_3$ の基底を $1,\ x,\ \dfrac{x^2}{2},\ \dfrac{x^3}{3}$ で定める．このとき，上でとった U の基底とこの基底に関する I の表現行列 A を求めよ．すなわち，

$$f : (1,\ x,\ x^2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto (1,\ x,\ \frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{3})A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

となる行列である．

(5) 上の行列 A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ と f の階数 $\mathrm{rank}\, f$ が等しいことを確認せよ．

宿題 3　以下の写像は全単射かどうか判定せよ．もし全単射ならば証明し，そうでなければ理由を述べよ．

(1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f : n \mapsto 2n.$

(2) $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N},\ f : n \mapsto 2n$，ただし $2\mathbb{N}$ は偶数全体の集合．

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3y \\ 2x \end{pmatrix}.$

(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ xy \end{pmatrix}.$

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

全射・単射・全単射

作成日：May 28, 2004 Version：1.1

今日は小テストです．あと，他の 2 クラスが図書室ツアーをやったそうなので，俺らも負けじと今日はツアーを決行します．というわけで，時間も限られてることですし，今日は写像に関するトピックをやります．

写像について

前回の Otis と Aretha の話を一般化してみると：

> Otis はある集合 X を眺めていた．そこには，見たことも無い珍妙な部分集合がある．Otis はこれを，ガラスの壁（レンズ） A の向こうにいる Aretha に見せたくなった．Aretha の側にも集合 Y があって，今，Otis, X, A, Y, Aretha の順に並んでいる．Otis は光源 f を持ってきて X の十分手前に置き，X 全体を Y に向かって投影することに決めた．Otis は，その珍妙な部分集合を f で映すと A の作用で多少歪んだ画像になるだろう，と思った．しかし，その珍妙っぷりは Aretha に十分伝わるだろうと思い，投影を実行してみた.（続く）

X の情報をレンズ，もしくはフィルター（この場合 A ）を通して Y に投影する，この行為を**写像** f と呼び，$f : X \to Y$ と表す．ただし，光は光源を出た後分岐せず，X のある一点は Y のある一点に投影されるとする．

このとき，線形写像の場合と同様，X 上のすべての情報が Y に伝わるとは限らない．

問題 1.

- $X = Y = \mathbb{R}, f : X \to Y$ を $y = f(x) := |x|$ で定める．このとき，どんな情報が失われたか？
- $X = Y = \mathbb{R} - \{0\}, g : X \to Y$ を $y = g(x) := x/|x|$ で定める．このとき，どんな情報が失われたか？

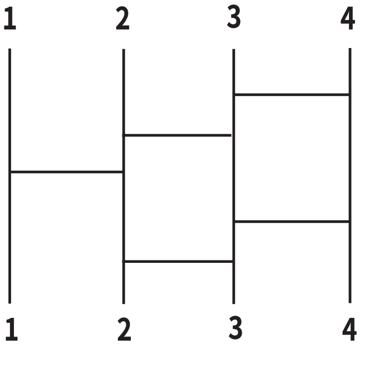
情報をちゃんと保存したい場合，**単射性**や**連続性**が重要になる．単射性は，X の集合としての大きさ，もしくは情報量を保存する性質である．また，連続性は X の近い点同士を Y の近い点同士に写す性質で，X 上の「近さ」に関する情報を保存する．また，意図的に情報を減らし，必要な部分だけを取り出す場合もある．たとえば，整数の余りの部分だけを考えるのはその例である．

- 写像 $f : X \to Y$ に対し，X の異なる点が Y の異なる点に写るとき f **は単射である** (injective) という．言い換えると,「任意の $x,\ x' \in X$ で $x \neq x'$ ならば，$f(x) \neq f(x')$ である」ということである．写像の単射性を証明したいときには，対偶をとって「**ある** $x,\ x' \in X$ **について** $f(x) = f(x') \in Y$ **ならば，** $x = x'$」という形にしたほうが証明しやすい．

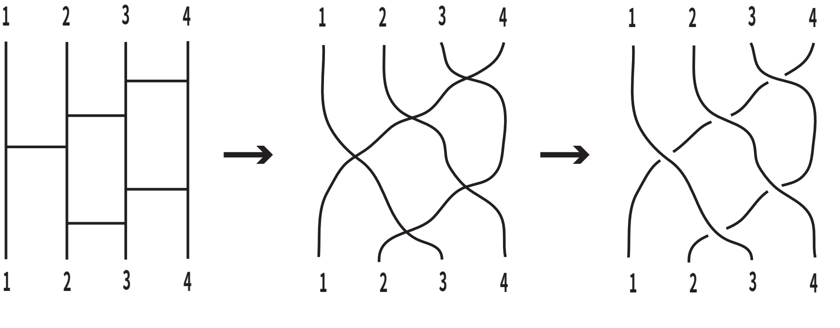
- 写像 $f : X \to Y$ に対し，$f(X) = Y$ であるとき f **は全射である** (surjective) という．言い換えると,「**任意の** $y \in Y$ **に対しある** $x \in X$ **が存在して** $f(x) = y$ **となる**」ということである．写像の全射性を証明したいときには，この形を用いる．

- 写像 $f : X \to Y$ が全射かつ単射であるとき，**全単射** (bijective) とよぶ．写像が全単射であることを証明するには，全射性と単射性をそれぞれ示す，2 手詰めとなる．

全単射の例：糸さんのあみだくじ　n 個の元から成る有限集合 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ を考える．このとき「あみだくじ」は X から X への全単射写像を定める．たとえば，次のような図を考えよう：



この図では，次のような見方をすれば全単射が分かる：



上のような写像は**置換**と呼ばれ，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

とも書かれる．特に，X の元のうち，i と j だけを入れ替える写像を (i, j) と書く．すると，上の置換は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2,3) \circ (3,4) \circ (1,2) \circ (2,3) \circ (3,4)$$

と互換の積として書ける．(互換は右から順に作用させる．また，上の $\circ$ は省略されることが多い)．

問題 2. $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．上の例とは逆に，任意の全単射写像 $f : X \to X$ は「あみだくじ」によって与えられることを説明せよ．特に $n = 4$ の場合，全単射写像 $f : X \to X$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$ を与える「あみだくじ」を具体的に求めよ．また，この写像を互換の積に直せ．

今週の宿題コーナー

来週 (6/7) はお祭りで休みなんで，少し変わった問題にします．

宿題１　図書室や図書館で，数学，物理，認知心理学のいずれか関する本を何でも良いので借りて読み,「へぇー」と思ったこと，明日使える（無駄とは限らない）知識，をレポート用紙 2,3 枚程度に要約してください．数学者の逸話でもいいですし，面白い定理，現象でもかまいません．

宿題２　次の置換を実現するあみだくじを描き，互換の積で書き表してください．積の数（あみだの横棒の数）が少ないほど，よい解答とみなします．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 2 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

内積・直交基底・直交補空間

作成日：June 11, 2004　Version：1.2

内積に向けて（いままでの演習のまとめ）

今日のテーマは**内積** (inner product) なんだけど，今回は休みを挟んだので，軽く前回までの流れを言葉で復習しておこう．

これまで，基底と座標系という観点から，抽象的なベクトル空間をいかに定量的に扱うか，という問題に取り組んできた：

(1) そもそもベクトル空間というのは真っ白な空間であり，そこに**基底**という「ものさしのセット」をとることで，空間の各点に座標を入れることが出来るようになる．

(2) **線形写像**とは「和の像は像の和」「スカラー倍の像は像のスカラー倍」という性質を持つベクトル空間の間の写像である．

(3) 有限個の基底で座標が入る**有限次元ベクトル空間**の場合，線形写像は座標を座標へ写す行列として表現できる．

(4) ひとつのベクトル空間に対し，基底の取り方は無数にあるが，基底をうまく取ることで，線形写像はより簡単な行列で表現できる．(最初にやった『A さん B さんの座標系』を思い出そう.)

(5) 写像（線形写像）とは，ある集合（ベクトル空間）の 1 点をある集合（ベクトル空間）へ 1 点投影する行為である．写像により，もとの集合の情報の一部は失われることがある．(『Otis と Aretha と珍妙な図形』を思い出そう)

(6) 線形写像がどの程度の情報を保存するかは，**核**の次元を見ることで判定できる．

内積の有用性はおそらく (1) の部分で最も顕著に現れる．基底をとっても，座標の測定が難しくては話にならない．内積を用いると，座標計算が容易な「いい基底」を見つけることができる．今日はそのエッセンスを理解しよう．

復習：$\mathbb{R}^3$ の内積と座標系

まずは $\mathbb{R}^3$ において，高校で学んだ内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ がどのような意味を持っていたかを考えてみる．ただし，ここでは線形代数の授業にあわせて，内積を $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ で表すことにする．

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対し，**内積**は

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle := |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_1b_1+a_2b_2+a_2b_3$$

と定義されるのだった．ただし θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を含む平面において，これらのベクトルがなす角度 $(0\le\theta\le\pi)$ である．

ここで，$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ =($\boldsymbol{b}$ から見た $\boldsymbol{a}$ の長さ)×($\boldsymbol{b}$ の長さ) となることに注意．

問題 1. $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ とおく．このとき，あるベクトル $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ に関する座標は $(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1\rangle,\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_2\rangle,\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_3\rangle)$ で表されることを示せ．また，この事実を図形的に説明せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 2. $\mathbb{R}^3$ の基底を $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，あるベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ に関する座標は $\left(\dfrac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1\rangle}{|\boldsymbol{u}_1|^2}, \dfrac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_2\rangle}{|\boldsymbol{u}_2|^2}, \dfrac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_3\rangle}{|\boldsymbol{u}_3|^2}\right)$ で表されることを示せ．

問題 3. $\mathbb{R}^3$ の基底を $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，あるベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ に関する座標は，一般には $\left(\dfrac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1\rangle}{|\boldsymbol{u}_1|^2}, \dfrac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_2\rangle}{|\boldsymbol{u}_2|^2}, \dfrac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_3\rangle}{|\boldsymbol{u}_3|^2}\right)$ とならないことを示せ．(反例を挙げよ）これはなぜだろうか？

実ベクトル空間の内積

U を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．この空間に，$\mathbb{R}^3$ の標準基底のような都合の良い基底を選ぶには，以下のような性質を持つ「積」が定義されていれば十分である：

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in U$ に対し，**内積** $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$ とは以下の性質を満たすものをいう：$\boldsymbol{a}' \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき，

(1) $\langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}\rangle$

(2) $\langle \alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$

(3) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle$

(4) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle \geq 0$

(5) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(4) より，平方根 $\sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle} \geq 0$ が定まる．これをベクトル $\boldsymbol{a}$ の**長さ**と呼び，$\|\boldsymbol{a}\|$ で表す．また，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = 0$ であるとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**と呼び，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ と表す．

これだけでやれ「長さ」だ，やれ「直交」だといわれても図形的な直感は沸いてこないが，とにかく上の性質があればそれは内積として役に立つ．特に，$U = \mathbb{R}^3$ のときに，先に定義した内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ が上の性質を満たすことは（経験上）明らかであろう．図形的な解釈が可能かどうかは別にして，我々の欲しい「座標を計算しやすい基底」を作るには上の性質さえあれば十分なのである．

問題 4. Schwarz の不等式： $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ を示したい．(←これ重要！)

(1) 準備：$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$\|\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}\|^2 = \langle \boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}\rangle$ を内積の性質に従って計算せよ．

(2) $\boldsymbol{b} = 0$ ならば不等式は明らかなので $\boldsymbol{b} \neq 0$ を仮定する．$\alpha = -\dfrac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{b}\|^2}$ を代入して $0 \leq \|\boldsymbol{a}\|^2 - \dfrac{|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle|^2}{\|\boldsymbol{b}\|^2}$ を示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

Schwarz の不等式より，$-1 \leq \dfrac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \leq 1$ である．したがって，

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

が存在する．このような θ を $\boldsymbol{a}$ **と** $\boldsymbol{b}$ **のなす角**と呼ぶ．

注意：　そもそも「角度」とはどのように定義するのだろうか？これは意外に難しい問題である．各自考えてみよ．$\mathbb{R}^3$ の場合，内積は $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_3$ のように定義し，それが $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ を満たす，と解釈するのがより一般論に則している．また，後で見るように,「角度」という言葉を用いなくても「座標の計算しやすい基底」を見つけることは出来る．

問題 5. 三角不等式：$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ を示したい.（←これも重要！）

(1) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \rangle$ を内積の性質に従って計算せよ．

(2) 上の計算と Schwarz の不等式を用いて，$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2$ を示せ．

三角不等式は「遠回りしたら道のりは長い」という性質を数学的に表現している．記号 $\|\cdot\|$ がこの自然な性質を満たすことは，$\|\boldsymbol{a}\|$ が $\boldsymbol{a}$ の長さとして意味を成すひとつの理由づけを与える．

複素ベクトル空間の内積

U を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の場合と同様に，内積を次のように定義する：

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in U$ に対し，**内積** $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \underline{\in \mathbb{C}}$ とは以下の性質を満たすものをいう：$\boldsymbol{a}' \in U$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とするとき，

(1) $\langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} \rangle$

(2) $\langle \alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$

(3) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle}$

(4) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0$

(5) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

$\sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} \geq 0$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ の**長さ**と呼び，$\|\boldsymbol{a}\|$ で表す．また，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ であるとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**と呼び，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ と表す．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

この定義も，図形的な解釈が可能かどうかは別にして,「我々の欲しい『座標を計算しやすい基底』を作るには上の性質さえあれば十分」といえるものになっている．

$\mathbb{R}$ 上 $\mathbb{C}$ 上問わず，内積の定義されたベクトル空間を**内積空間**（もしくは**計量ベクトル空間，pre-Hilbert 空間**）と呼ぶ．

問題 6. $\langle \boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}\rangle = \bar{\alpha}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ を示せ．

問題 7. 実ベクトル空間の場合を参考にして，以下を示せ

(1) **Schwarz の不等式**： $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| \le \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$

(2) **三角不等式**： $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \le \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$

複素ベクトル空間の内積では，$-1 \le \dfrac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \le 1$ とは限らない.（←なぜか ?? ）したがって，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を定めることは一般には出来ない．

例　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ の成分を $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ とする．このとき，

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle := \boldsymbol{a}^T\bar{\boldsymbol{b}} = (a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix}\bar{b}_1\\ \vdots \\ \bar{b}_n\end{pmatrix} = a_1\bar{b}_1 + \cdots + a_n\bar{b}_n$$

と定めると，内積となる．

問題 8. $U = \mathrm{Poly}^{\mathbb{C}}_{\infty}$ を複素数係数の多項式全体とする．このとき，$\boldsymbol{f} = f(x), \boldsymbol{g} = g(x) \in U$ に対し，内積を

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$$

で定義する.（実際に内積になっていることは各自の練習問題としよう.）

(1) $\boldsymbol{f} = f(x) = x^2 + i$ と置く．このとき，$\|\boldsymbol{f}\|$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{f}$ と直交する複素数係数 1 次多項式をひとつ求めよ．

(3) （**発展問題**）： U の中の奇関数と偶関数は直交することを示せ．

直交系・直交基底　では,「座標の計算しやすい基底」を考えていこう．

ゼロベクトルを含まないベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ が次のような性質を満たすとき，**直交系** (orthogonal system) と呼ばれる：

$$i \ne j \Longrightarrow \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j\rangle = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{u}_i \perp \boldsymbol{u}_j$$

特に，$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ が U の基底である，これを**直交基底** (orthogonal basis) と呼ぶ．直交系もしくは直行基底が全ての $i = 1, \dots, n$ に対して $\|\boldsymbol{u}_i\| = 1$ であるとき，**正規直交系** (orthonormal system) もしくは**正規直交基底** (orthonormal basis) と呼ぶ．

例　：$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ の標準基底は正規直交基底である．

問題 9. 直交系 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ は一次独立であることを示せ．

したがって，直交系 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ は部分空間 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ の基底となる．特に $U = \mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ の場合，すなわち $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ が U の直交基底の場合，次のことが分かる：

任意の $\boldsymbol{a} \in U$ に対し，その直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ に関する座標表示を

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$$

とする．このとき，

$$a_i = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i \rangle}{\|\boldsymbol{u}_i\|^2} = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i \rangle}.$$

すなわち，**内積の計算で座標の測定が出来る**．特に，正規直交規定の場合はより簡単に，$a_i = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i \rangle$ となる．

問題 10. 上を示せ．

問題 11. $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ が直交基底であるとする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in U$ について，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}_i \rangle$ が全ての $i = 1, \dots, n$ で成り立つとき，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ であることを示せ．

Gram-Schmidt の直交化法

U を内積空間とする．$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ $(n < \dim U \leq \infty)$ が直交系であるとき，適当に $\boldsymbol{u}_{n+1} \in U$ をとれば，$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_{n+1}$ が直交系であるように出来る．また，$\dim U < \infty$ であれば，この手続きを繰り返し $n+1 = \dim U$ となった時点で直交基底を得る．

問題 12. 上の命題を示す！$\dim U = N \leq \infty$ と置く！

(1) $n < N$ のとき，$\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ に含まれない $\boldsymbol{v} \in U$ が存在することを示せ．

(2) この $\boldsymbol{v}$ を用いて，

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{v} - \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 - \cdots - \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_n \rangle}{\|\boldsymbol{u}_n\|^2}\boldsymbol{u}_n$$

と置く．このとき，$\boldsymbol{u}_{n+1} \neq \boldsymbol{0}$ を示せ．

(3) $\boldsymbol{u}_i \perp \boldsymbol{u}_{n+1}$ $(1 \leq i \leq n)$ を示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

注意　$\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n$ が直交系であるとき，$\dfrac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|},\dots,\dfrac{\boldsymbol{u}_n}{\|\boldsymbol{u}_n\|}$ は正規直交系となる．

問題 13. $U=\mathbb{R}^3$ とする．このとき，次の基底を考える．

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

これを用いて，正規直交基底を見つけよ．

問題 14. 2 次以下の複素係数多項式全体 $U=\mathrm{Poly}_2^{\mathbb{C}}$ を考える．これは，$\mathrm{Poly}_\infty^{\mathbb{C}}$ と同じ内積を考えることで，内積空間となる．

(1) 正規直交基底をひとつ求めよ．

(2) $\boldsymbol{f}=f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2$，$\boldsymbol{g}=g(x)=b_1+b_2x+b_3x^2\in U$ とする．このとき，$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$ を a_i,b_i で表せ．また，

$$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle=(a_1,a_2,a_3)A\begin{pmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\\\bar{b}_3\end{pmatrix}$$

となる 3 次正方行列 A を求めよ．

直交補空間

- 内積空間 U について，ある部分ベクトル空間 W を考える．W の全てのベクトルに直交するベクトルの全体を W **の直交補空間** (orthogonal subspace) と呼び，$W^\perp$ で表す．

問題 15.

(1) $W^\perp$ も U の部分ベクトル空間となることを示せ．

(2) 任意の $\boldsymbol{a}\in U$ に対し，ある二つのベクトル $\boldsymbol{a}_1\in W$，$\boldsymbol{a}_2\in W^\perp$ がただ一組存在して，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$ と書けることを示せ.（このような状況を，$U=W\oplus W^\perp$ と表す.）この事実を，図形的にイメージせよ．

今週の宿題コーナー

今週は宿題を休みにするんで，その分テスト勉強を頑張ってください．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数学の文法：ε-N と ε-δ（その１）

作成日：June 18, 2004　Version：1.2

「限りなく‥」とか言っててはいかん．

学問の世界では，何か発見をしても，それをうまく他人に伝えないと価値が評価されません．特に数学では，抽象的な概念を他人と共有するために，表現方法にさまざまな工夫がされてきました．今では半ば決まりごとのようになってる表現もあって，それが工学や物理の人には堅苦しいのだろうけど，音楽の世界に楽譜や楽典があるように，数の世界にも明快な表現体系がないとどうも困るのであります．

さて今日のテーマは**極限** (limit) です．高校時代は「a_n は**限りなく** 2 に近づく」なんて表現を使ってきたけど，これは語学で言うなら口語表現．大人の世界でも通用する，正しい格式ある表現を練習しよう．

ある英国人高校の弁証法的（？）会話

Jimmy と Robert は高校生である．Robert は完璧主義の Jimmy に「数列 $a_n = 1/n$ は 0 に収束する」といわれて，なんとなく納得がいかない．

Robert:「本当に a_n は 0 にいくらでも近づくのかよ？たとえば単位をメートルにしたとき，n を大きくしていくと a_n は 1 ミリよりも小さくなるんか？途中でひょいって，0 からの距離が大きくなったりしないのか？」

Jimmy:「$a_1, a_2, \ldots$ は単調減少，すなわち，

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \cdots$$

はいいよな？そしたら，$n = 1000$ のとき $a_n = 0.001$ =1 ミリ だから，$n > 1000$ のとき a_n は 1 ミリより小さいだろ？たとえば数直線で見たらさ，a_n と 0 の距離はどんどん近くなって，近づきすぎて肉眼では区別できないぐらい 0 と a_n は近づくんだよ」

Robert:「でもさ，見えなくなったその先でも，a_n は本当に 0 に近づいてる保証はあるのか？例えば，n を大きくしていくと a_n は 1 ミクロンよりも小さくなるか？」

Jimmy:「1 ミクロン $= 10^{-6}$ メートルだから，$n = 10^6$ のとき $a_n = 10^{-6}$ =1 ミクロン，よって $n > 10^6$ のとき a_n は全て 1 ミクロンより小さい.」

Robert:「うーん，じゃあ，n を大きくしていくと a_n は水素原子よりも小さくなるか？」

Jimmy:「水素原子の大きさはよく知らんけど，$N = 10^{50000}$（1 の後に 0 が 50000 個）とかにして，$a_N = 10^{-50000}$ メートルぐらいにしとけば，水素原子の直径よりは小さいやろうな．ってことは $n > N = 10^{50000}$ だったら a_n は全て水素原子より小さいはず.」

Robert:「じゃあ，n をもっともっと大きくしていくと a_n は電子よりも小さくなるか？」

Jimmy:「電子の大きさはよく知らんけど，Rob，お前がどんなに小さいものを挙げても，n を一定以上お〜きくお〜きくとれば，$a_n = 1/n$ は全部そいつより小さくなるんだよ.」

Robert:「でも本当に，a_n は 0 に近づいてんのかなぁ？」

Jimmy:「ほかにどう説明したらいいんだよ ?!! 」

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ε-N

ある数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が数 α に**収束する** (converge) とは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して，$n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」ときを言う．このとき α を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限** (limit) と呼ぶ．以上の状況を，記号では

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{もしくは} \quad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

と表す.

注意：**任意の** $\varepsilon > 0$ という言葉は **任意に小さい** $\varepsilon > 0$ と心の中で読みかえるべし.

問題 1.

(1) 上の収束の定義を $\forall$, $\exists$ などを用いて書き直せ.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数列のとき，上の定義を図でイメージせよ.

(3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数列のとき，上の定義を図でイメージせよ.

問題 2. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \dfrac{n^2+n-1}{n^2}$ で定める．以下の ε に対し,「$n > N$ ならば $|a_n - 1| < \varepsilon$ を満たす」ような N をひとつ求めよ.

(1) $\varepsilon = 5$ (2) $\varepsilon = 1$ (3) $\varepsilon = 0.1$ (4) $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ (5) $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$

これを用いて，$a_n \to 1$ $(n \to \infty)$ を示せ.

君は Robert 状態から抜け出せただろうか？「近づく（近い)」という概念は相対的なもので，距離を比較する対象があって初めて成立する概念である．距離を比較するとは，二つの数の大小関係を見ることである．したがって,「限りなく近づく」という言葉を数学的に明確に表現しようとすると,「どんなに小さい数 $\varepsilon > 0$ と比較しても，a_n と α の距離はそれよりも小さく出来る」，という形式になってしまう.

極限の和と和の極限

二つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ と仮定する．このとき,

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$

(3) $\beta \neq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

問題 3. (2) を用いて，次を示せ：

(2)' C を定数とするとき，$\lim_{n\to\infty}(Ca_n) = C\alpha$.

問題 4. 上の (1), (2) を証明せよ．(3) は宿題.

問題 5. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \alpha$$

を示せ．ちなみに，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正数の列とすると，$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} = \alpha$ は示せるか？

問題 6. 二つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ が存在したと仮定する．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在するとは限らないことを示せ.

（発展）：より一般に，この仮定のもと

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ がともに存在するか，もしくは

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ がともに存在しない

ことを示せるか？

問題 7. 複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．$z_n := x_n + y_n i$ と置くと，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列である．ことのき，以下を示せ：

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれある実数に収束すれば，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ もある複素数に収束する.

(2) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数に収束すれば．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ もそれぞれある実数に収束する.

Cauchy 列

- 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して，n，$m > N$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon$ とできる」ときを言う.
- コーシー列ならば，収束する．すなわち，実数列（もしくは複素数列）$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列ならば，実数（もしくは複素数）の極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を持つ.

注意：これは当たり前のことではなく，数の集合 $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ もつ**完備性** (completeness) という性質を明言化したものである．たとえば，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は完備性を持たない．すなわち，有理数列がコーシー列でも，有理数に収束するとは限らない.

問題 8. 逆に，収束数列はコーシー列である．すなわち，実数列（複素数列）$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数（もしくは複素数）の極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を持つならば，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である．これを示せ．

> すなわち，収束数列＝コーシー列　である．

注意 2：収束性をチェックするのときには極限値が何になるか，事前に知る必要はない．ただ，コーシー列であることをチェックすれば良い．

問題 9. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \dfrac{1}{n}$ で定める．これはコーシー列になっていることを確認せよ．では，複素数列として $a_n = \dfrac{i^n}{n}$ と定めた場合はどうか？

問題 10. 数列 $\{a_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ を漸化式

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$$

で定める．

(1) $n \geq 3$ のとき，$a_n - a_{n-1} = (-1/2)(a_{n-1} - a_{n-2})$ を確かめよ．また，その幾何学的な意味を考えよ．

(2) $|a_{200} - a_{100}| \leq (1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{100}})|a_{100} - a_{99}|$ を示せ．

(3) $|a_{100} - a_{99}| \leq \dfrac{1}{2^{98}}|a_2 - a_1| = \dfrac{3}{2^{98}}$ を示せ．

(4) 以上の議論を応用して，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であることを示せ．また，その極限値は何か？

今週の宿題コーナー

宿題 1.　二つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ が存在したとか仮定する．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在するとは限らない．その反例をひとつ以上あげよ．

宿題 2.　二つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$ と仮定する．このとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ を示せ．

宿題 3.　複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．極座標を考え，$z_n := r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ と置く．ただし，$0 \leq \theta_n < 2\pi$ とする．(ただし，$z_n = 0$ のときは $r_n = 0$，$\theta_n = 0$ とせよ.) このとき，数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列である．以下を示せ：

(1) $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれある実数に収束すれば，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ もある複素数に収束する．

(2) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数に収束すれば．$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数に必ず収束するが，$\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するとは限らない．なぜか？そのような例をひとつ挙げよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数学の文法：ε-N と ε-δ（その2）

作成日：June 25, 2004　Version：1.1

紐って言うか，線みたいなやつをポキポキと折れ線に

ある数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$（実数列 or 複素数列）があるとき，**（無限）級数** (series) を，式として以下のように定める：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n).$$

このとき，**右の極限が存在するとは限らない**のは $a_n = n$ などとおけば明らかであろう．極限が存在するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する**といい，存在しないとき**発散する**と言う．

これから実数の級数と複素数の級数を同時に扱うけど，実数は複素数なので**複素数の級数で成り立つことは実数の級数でもなりたつ**ことに注意しよう．

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とは，複素平面で考えると 0 から a_1 進み，さらに a_2 進み，さらに a_3 進み…と無限に繰り返していったものだと考えられる．これらを折れ線もしくは矢印で結ぶと，その様子が幾何学的に見て取れるようになる：

問題 1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を以下のように定める．このとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散を直感的に判定せよ．

(1) $a_n = (-1)^n$　　(2) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$　　(3) $a_n = \dfrac{i^n}{n}$　　(4) $a_n = \dfrac{i^n}{2^n}$

ちなみに $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$ （発散），$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$ である．

問題 2. 上の問題の各 a_n で，級数に対応する折れ線のトータルの長さはどうなるか？

級数に対応する折れ線のトータルの長さが有限ならば，その級数は収束するに違いない（というか，発散のしようがない）ことは直感的に明らかであろう．すなわち，

定理　$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき，級数 a_n は**絶対収束する**と呼ばれる．この定理の逆は成立しない．すなわち，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **が収束するからと言って，**$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **が絶対収束するとはかぎらない**．例えば，

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

であるが，これは絶対収束していない．すなわち，長さの無限大の折れ線が $\log 2$ に向かって折りたたまれていく感じである．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. 以下の事実は既知のものとして仮定する：任意の実数 θ に対し，

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots \\
\cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots \\
\exp(\theta) &= 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots
\end{aligned}
$$

すなわち，右辺の級数は収束し，左辺の関数の値と一致する．

(1) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ と $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，$a_n := \dfrac{(i\theta)^n}{n!}$ と定める．このとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束することを示したい．$\theta \neq 0$ を仮定しよう．

(a) $b_n := |a_n|$ とおく．このとき，b_{n+1}/b_n を求めよ．

(b) ある自然数 N とある実数 $r \in (0,1)$ が存在して，$n \geq N$ のとき $b_{n+1}/b_n \leq r$ と出来ることを示せ．

(c) $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，$b_{N+k} \leq r^k b_N$ を示せ.（折れ線の長さを上から評価）

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束することを示せ．

(2) $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \sum_{n=0}^{\infty} (i\theta)^n/n!$ とおく．このとき，その実部，虚部は何か？

これで，いわゆるオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ に対し一応の説明がつく．

今週の宿題コーナー

宿題 1. 上の定理を証明しよう！複素数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束したと仮定する．

(1) $b_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ と置く．このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の絶対収束性より，$\underline{\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は収束する}}$．左の下線部分を ε-N 式に書け．

(2) 収束列はコーシー列である．したがって，$\underline{\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ はコーシー列である}}$. 左の下線部分を ε-N 式に書け．

(3) $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ と置く．コーシー列は収束列であるから，$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であることを示せば級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束性が示される．すなわち,「任意に小さい $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して，$n \geq m > N$ ならば

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

となる」ことを示せば十分である．b_n がコーシー列であることを用いて，これを証明せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 2.　二つの複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれの級数が収束し，

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z, \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n = w$$

であると仮定する．このとき，任意の複素数 α, β に対し，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z_n + \beta w_n)$ は収束して，その極限は $\alpha z + \beta w$ であることを示せ．

宿題 3.　二つの実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ および $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ が収束したと仮定する．このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ は絶対収束することを示せ．(Hint $(A-B)^2 = (A^2+B^2) - 2AB \geq 0$)

もし余裕があったら，の発展問題: 二つの複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$\sum_{n=1}^{\infty} z_n w_n$ が絶対収束するための十分条件をひとつ見つけよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数学の文法：ε-N と ε-δ（その３）

作成日：July 2, 2004 Version：1.2

級数のセンスを磨くことはとてもとても大事です．今日も頑張るぞ．

有名な級数とか

級数とは「時刻 0 に 0 からスタートし，時刻 n のとき a_n 直進」というルールでできる，複素平面上（または実数直線上）の折れ線である．人の人生が紆余曲折，いろいろであるように，折れ線にもいろいろなことが起きる．

ところで　以下のことは，（実数を定義する場面等，特別な場合を除いては）普通に使って差し支えない．

単調増加な有界実数列は収束する．すなわち，実数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，ある $M>0$ が存在し全ての n ついて $S_n \leq S_{n+1} < M$ ならば，$\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在する．

すなわち，数直線上を右に進み続ける人は，壁が見えたら歩みを遅くして，その手前で留まるようにちびちび進むしかない．そもそも，収束したかったらちびちび進むのが当たり前なのである：

問題 1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を一般の複素数列とする．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ．

この逆はいえない．すなわち，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でも $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないこともある．

問題 2. $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots \dfrac{1}{n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ はコーシー列で**ない**ことを示せ．すなわち，$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ **は発散する．**

級数

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots \frac{1}{n^\alpha} + \cdots$$

は $\alpha \leq 1$ のとき発散，$\alpha > 1$ のとき収束する．

問題 3. $0 < \alpha < 1$ または $1 < \alpha$ のとき，これを示せ．

応用：　一見怪しい級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-i)^2}{(n+i)^5}$ は収束する．級数の「道のり」を途中から収束する級数で押さえ，絶対収束することを示せばよい．

問題 4. 以下の級数の収束，発散を判定せよ．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)^{\frac{1}{3}}}{(n+1)^2}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{n+1}}$　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+i}{2n-i}\right)^n$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ も収束することを示せ．この逆は成り立たない．反例を挙げよ．

問題 6. 「$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も絶対収束しないし，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ も収束しない」という，救いようのない例を挙げよ．

今週の宿題コーナー

宿題 1. $p>1$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ も収束することを示せ．

発展問題： $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ は収束するか？

宿題 2. 次の級数の収束・発散を「道のり」の長さ評価することにより判定せよ．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(2n+1)^3}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(3) x をある複素数とするとき，$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

(4) $|x|<1$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} -\dfrac{(-x)^n}{n}$

宿題 3（集合の演算）． f を集合 X から Y への写像とする．X の部分集合 $P,\ P_1,\ P_2$，および B の部分集合 $Q,\ Q_1,\ Q_2$ に対し，以下の式が正しければ証明し，間違っていれば反例をあげよ．

(1) $Q_1 \subset Q_2 \Longrightarrow f^{-1}(Q_1) \subset f^{-1}(Q_2)$

(2) $f(P_1 \cap P_2) = f(P_1) \cap f(P_2)$

(3) $f^{-1}(Q_1 \cap Q_2) = f^{-1}(Q_1) \cap f^{-1}(Q_2)$

(4) $P \subset f^{-1}(f(P))$

(5) $Q = f(f^{-1}(Q))$

注：$Q \subset Y$ に対し，$f^{-1}(Q) := \{x \in X : f(x) \in Q\}$ である．すなわち，Y というスクリーン上に Q という図形が映ったとき，そこに投影される X 上のもとの図形を $f^{-1}(Q)$ と表す．もちろん，複数個の点が Q 上の 1 点に投影されているかもしれない．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数学の文法：ε-N と ε-δ（その４）

作成日：July 9, 2004　Version：1.1

ε-N から ε-δ へ：関数を扱う

今日は数列，級数から飛んで，関数をやります．数列や級数の収束・発散という考え方が，関数を扱うときにもうまく使われている，そのことを実感して頂けると嬉しきこと限りなし．

関数の連続性

いきなりだが，複素平面 $\mathbb{C}$ 上の部分集合 D をひとつ固定する．どんな集合でもかまわない．$\mathbb{C}$ 自身でもよい．さてこのとき，D 上の複素数値の関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を考える．たとえば，$f(z) = z^2 + z - 1$ のよう具体的な関数を想像すればよい．複素数が苦手な人は，普通の実数の関数（$D, f(D) \subset \mathbb{R}$）をイメージしても差し支えない．

さて，この $f : D \to \mathbb{C}$ はどのような性質を持っていることが望ましいだろうか？前にやった，Otis と Aretha の，スクリーンの話を思い出して欲しい．Otis 側のスクリーン，（この場合は $\mathbb{C}$）上の，とくに部分集合 D に関する情報を出来るだけ Aretha 側のスクリーン（こちらも $\mathbb{C}$ ）に反映させたい．

たとえば，$D = \mathbb{C}$ かつ f が「全単射である」と嬉しいだろう．しかし，全単射は「あみだくじ」のように点の位置を入れ替えるだけなので，ぐちゃぐちゃに場所を入れ替えられてしまっては困る．むしろ，**近い点同士は写った先でも近い点同士になる**ことをまず期待したい．これを満たすのが，**連続性**の概念である：

> 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $z_0 \in D$ で**連続**であるとは，任意の z_0 に収束する D 内の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，数列 $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(z_0)$ に収束すときをいう．すなわち，
>
> $$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n) = f(z_0)$$
>
> であるときを言う．

「近い」という概念は相対的な（比較するものがあって意味を成す）概念であるから，定式化が難しい．そのかわりに，**「近づく」という性質（情報）が保存される写像**として連続写像を定式化する．

注意　一般には $z_n \neq z$ を満たしながら収束する点列を考えた方が都合がよいとされているが，あまり神経質になる必要はない．

例　恒等写像 $f(z) = z$ は任意の点 $z = z_0$ で連続．

ちなみに，この定義をうっかり ε-N 式に書き直した日には

関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $z \in D$ で連続であるとは，「任意の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して，$n > N$ であるとき $|z_n - z| < \varepsilon$ が成り立

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

つとすれば，任意の $\varepsilon' > 0$ に対しある自然数 N' が存在して，$n > N'$ であるとき $|f(z_n) - f(z)| < \varepsilon'$ とできる」ことである．

となり，とってもまわりくどい．これでも，ある1点での連続性を示すときにはほとんど問題は起きないのだが，今後の応用を考えると次のような同値な言い換えをしておいたほうが良い：

> 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $z = z_0 \in D$ で**連続**であるとは，「任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ とできる」ときをいう．特に，f が D 上の各点で連続なとき，f **は** D **上で連続**という．

問題 1. この定義に対し，複素数バージョンと実数バージョンの絵を描き，自分なりに解釈を与えよ．また，実連続関数とはグラフが繋がっている関数，という感覚を定義を元に確認せよ．また，その感覚を複素数でイメージするにはどうしたら良いだろう？

問題 2. 複素関数 $f(z) = z^2$ は $z = 1$ で連続であることを示したい．以下の ε に対し，「 $|z - 1| < \delta$ ならば $|f(z) - f(1)| < \varepsilon$ と出来る」ような $\delta > 0$ を一つ決定せよ．

(1) $\varepsilon = 1$　　(2) $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$　　(3) $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$　　(4) $\varepsilon > 0$

問題 3. $f(z) = z^2$ は $z = 1$ で連続であることを ε-N 式で示せ．

実関数 $f(x) = x^2$, $(x \in \mathbb{R})$ は複素関数 $f(z) = z^2$ の一部分であるから，$x = 1$ で連続であることがわかる．

問題 4. 実関数 $f(x) = x^3$ は任意の $x = x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であること示せ．すなわち，関数 f は $\mathbb{R}$ 上連続である．

すなわち，関数 $f(x) = x^3$ は $\mathbb{R}$ 上（実は $\mathbb{C}$ 上でも）連続である．

問題 5. 次の関数 $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ を次で定める．このとき，f は連続でないことを $\underline{\varepsilon\text{-}\delta \text{ 式で}}$ 示せ：

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \ (x \neq 0), \quad f(x) = 0 \ (x = 0)$$

一様連続性

「任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ とできる」という状況は，もし z が z_0 から δ 程度しか動かないならば，$f(z)$ は $f(z_0)$ から高々 ε しか動かない，という意味である．しかしこの δ の値（上限）は，z_0 や ε に強く依存している．

問題 6. 実関数 $f(x) = x^2$ において，x が $x_0 = 0$ から $\delta = 0.1$ 動くとき，$f(x)$ は $f(x_0)$ からどの程度はなれるか？また，x が $x_0 = 100$ から同じ $\delta = 0.1$ 動くときはどうか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が D 上で**一様連続**であるとは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，任意の $z_0 \in D$ について $|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ とできる」ときをいう.

問題 7. 実関数 $f(x) = x^3$ は閉区間 $[0, 1]$ 上で一様連続であることを示せ．また，開区間 $(-100, 100)$ でも一様連続であることを示せ.

問題 8. 実関数 $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 1/x$ で定める．このとき，区間 $D = (0, 1]$ 上で f は一様連続でないことを示せ.

今週の宿題コーナー

宿題 1. $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ を複素係数多項式とする．このとき，この関数は $\mathbb{C}$ 上で連続であることを示せ．難しい場合は $n = 2,\ 3$ のときで良い.

宿題 2. $f(z) = z^2$ は単位閉円板 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ 上で一様連続であることを示せ.

宿題 4. **問題 9.** 関数 $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \longmapsto z(t)$ を以下で定めるとき，その $\mathbb{R}$ 上での連続性を示せ.

(1) $z : t \longmapsto z(t) := 3t + 4ti$

(2) $z : t \longmapsto z(t) := t + t^2 i$

(3) $z : t \longmapsto z(t) := e^{it} = \cos t + i \sin t$

宿題 4 上の 3 つの関数について，区間 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ での一様連続性を示せ．また，これらの関数の中で，$\mathbb{R}$ 全体で一様連続とならないものはどれか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数学の文法：ε-N と ε-δ（その５）

作成日：July 16, 2004　Version：1.2

今日は最終回です．時間も限られてることですし，今後解析学を勉強する上で重要な概念や考え方をざっと眺めていこうかと思います．

まぎらわしい定義等

関数の連続性や収束性に関連して，いくつかの数学用語を列挙しておく．

(1) （ある関数が）連続 (continuous)

(2) （ある関数が）一様連続 (uniformly continuous)

(3) （ある関数列が）各点収束 (pointwise convergence)

(4) （ある関数列が）一様収束 (uniform convergence)

その他，関連する重要な概念として

- （ある関数列が）広義（コンパクト）一様収束 (compact uniform convergence)
- （ある関数族が）同等（同程度）連続 (equicontinuous)
- （ある集合が）コンパクト (compact)

などがある．以上の概念は相互に関係していて，かつ用語も似ていて，最初は混乱しやすい．ともあれ，絶対にマスターしないといけない概念なので，夏休みの間に，これらの概念がどう重要なのか，以下を参考に自分なりにまとめてみるとよい．

(1) 関数の連続性

D を $\mathbb{C}$ 上の区間，$f : D \to \mathbb{C}$ をその上の関数とする：

> 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $z = z_0 \in D$ で**連続**であるとは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ とできる」ときをいう．特に，f が D 上の各点で連続なとき，**f は D 上で連続**という．

連続性の定義は二通りあって，ひとつは ε-N 式（像の極限は極限の像），もうひとつは上の ε-δ 式であった（前回のプリント）．一般に，ある 1 点での連続性を言うのには，ε-N 式の，点列をつかった議論で事足りる．しかし，応用を考えると ε-δ 式のほうが使い勝手がよい．

(2) 関数の一様連続性

D を $\mathbb{C}$ 上の区間，$f : D \to \mathbb{C}$ をその上の関数とする：

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が D 上で**一様連続**であるとは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，任意の $z_0 \in D$ について $|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ とできる」ときをいう．

関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が D 上で一様連続ならば，D 上で連続である．一様収束性は，積分の値，とくに（複素）線積分を定義するときに重要な役割を果たす．

その意味を考えよう：D の上を点 z が一定速度で動き回っているとする．このとき，f が連続ならば，$f(z)$ はある曲線を描くであろう．しかし，その曲線上を動く速度は D 上の各点における f の性質によって変化する．たとえば，$f(z) = 1/z$ の場合，z が 1 から 0 へ，等速で移動しただけで，$f(z)$ は 1 から無限大に，次第に速度を上げながら移動する．(z がどんなに遅くても，$f(z)$ は途中で光速も超える !!）このような関数は，線積分のように「積分路」をベースにした計算では極めて厄介である．一方，一様連続性を仮定すると，z が一定の幅 δ 移動する間に，$f(z)$ は高々 ε しか移動しないので，扱いやすい．

次の事実は基本的であり，かつ有用である：

連続関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は D の任意の有界閉集合上で一様連続である．

例えば，$f(z) = 1/z$ は $D = \mathbb{C} - \{0\}$ で定義された複素関数であるが，区間 $[0.00000001, 1]$ では一様連続である．複素線積分も，一様連続性が保証されている範囲内でなら安心して定義できる．

(3) 関数列の各点収束性

ここでは，簡単のために実数の関数を考える．I を $\mathbb{R}$ 上の区間，$f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ をその上の関数の列とする．

例　$f_n(x) = x^n$, $f_n(x) = \sin nx$, $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n}$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^n$ etc.

このとき，ある $x_0 \in I$ を固定すると，$a_n := f_n(x_0)$ は実数列であるから，その収束性を考えることが出来る．もし任意の x について，数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するならば，その値を $f(x)$ と置くことで，新たな関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が定まる．このとき，**関数列 f_n は I 上 f に各点収束する** と呼ばれる．より正確に書くと，

関数列 $f_n : I \to \mathbb{R}$ が I 上の関数 $f : I \to R$ に**各点収束**するとは,「任意の $x \in I$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 $N = N(x, \varepsilon)$ が存在して $n > N$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ とできる」ときをいう．

問題 1. 関数列 $f_n : [0, 1] \to R$ を以下のように定める．このとき，これらは各点収束するか？また，各点収束する場合，その極限は連続か？

(1) $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$　(2) $f_n(x) = nx$　(3) $f_n(x) = x^n$　(4) $f_n(x) = \dfrac{x}{n|x|} (x \neq 0)$, $f_n(0) = 0$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

一般に，連続関数列の各点収束極限は連続とは限らない．逆に，不連続関数列の各点収束極限が連続になることもある．したがって，各点収束性は「関数の連続性」は保存しないので，使い勝手が良くない．一方，次の一様収束性があれば文句なしである：

(4) 関数列の一様収束性

I を $\mathbb{R}$ 上の区間，$f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ をその上の関数の列とする．

> 関数列 $f_n : I \to \mathbb{C}$ が I 上の関数 $f : I \to R$ に**一様収束**するとは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 $N = N(\varepsilon)$ が存在して $n > N$ ならば 任意の $x \in I$ について $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ とできる」ときをいう．

問題 2. 一様収束を自分なりにイメージし，説明的な図を描け．

問題 3. f_n が一様収束すれば，各点収束することを示せ.（したがって，一様収束極限は各点収束極限と一致する.）

問題 4. 関数列 $f_n : [0, 1] \to R$ を以下のように定める．このとき，これらは一様収束するか？また，一様収束する場合，その極限は連続か？

(1) $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$　(2) $f_n(x) = nx$　(3) $f_n(x) = x^n$　(4) $f_n(x) = \dfrac{x}{n|x|}(\ x \neq 0),\ f_n(0) = 0$

問題 5.

(1) 連続関数列 $f_n : [0, 1] \to R$ で，一様収束しているのに極限関数が連続でない，ということはありうるか？

(2) 連続関数列 $f_n : [0, 1] \to R$ で，一様収束してないのに極限関数が連続，ということはありうるか？

> 連続関数列が**一様収束すれば**極限も連続である．

さらに，例えば以下が成立する．

> 有界区間 I 上で積分可能な関数の列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に**一様収束すれば**，$f(x)$ も積分可能で，かつ
> $$\int_I f_n(x)dx \to \int_I f(x)dx.$$

また，複素函数論では以下が基本的である．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

開集合 $D \subset \mathbb{C}$ 上で複素微分関数な列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ が，任意の有界閉集合 $K \subset D$ 上で $f : D \to \mathbb{C}$ に**一様収束すれば**，$f(z)$ も複素微分可能で，かつ f_n' も任意の有界閉集合 $K \subset D$ 上で f' に一様収束する．

上のように,「任意の有界閉集合 $K \subset D$ 上で一様収束」することを D 上で広義一様収束（コンパクト一様収束）と言う．

研究　複素関数ではなく，実数の関数の場合は上の定理は成立するか？

とにかく，**一様収束していれば**何かと安全に数学が出来るのである．