担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

演習について

作成日：April 14, 2005 Version：1.0

担当教官： 川平　友規（かわひら　ともき，助手, kawahira@math.nagoya-u.ac.jp, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses.htm）

担当 TA： 河本　大知（こうもと　だいち, M2）

演習の進め方： 毎回，問題のプリントを配布します．私（川平）が基本事項を確認したあと，問題を指定し，各自ノートに解いてもらいます．その後，私が黒板で解説する，という流れです．

配布した問題のすべてを演習で扱うとは限りません．扱わなかった問題については，**自分で解いた上で解答が欲しい場合のみ**，下記のオフィスアワーの時間等に私か TA に聞きに来てください．

演習で取り上げるテーマ： 数理学科の 2 年生として必要な数学の基礎知識，数学の記述能力を身につけることが目標です．特に，

- n 次元での線形写像（1 次変換），基底の概念
- 抽象ベクトル空間（数列のなすベクトル空間など）
- 命題の証明とその記述法
- 集合と写像の基礎（単射，全射，連続性など）
- ϵ-N，ϵ-δ 論法の基礎

を**直感的に理解し，かつ数学的に整備された形で記述できるようになる**ことを目標とします．

演習と講義は独立したものと考えられています．したがって，講義で扱わない内容を演習で扱うこともありますし，逆もありえます．

単位・成績： 成績に関係のある要素は，**出席回数，小テストおよび期末テストの点数，宿題の提出（とその内容），レポートの提出**です．成績の優・良・可は以下の基準で定めます．

- 上にあげた 4 つの要素のうち，出席を 15 点満点，小テストを 15 点満点，期末テストを 55 点満点，宿題を 15 点満点として点数化する．自発的なレポートの提出により，最大で 20 点まで加点する．
- 成績は 60 点未満を不可，60 − 74 点を可，75 − 89 点を良，90 点以上を優とする．

したがって，テストを受けるだけでは良い単位が取れません．出席，小テスト，宿題と，バランスよくこなしましょう．

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

出席： 授業の前半に出席を取ります．遅刻・欠席をする場合，事前に email 等で私に連絡し，かつやむを得ない事情だと判断される場合のみ，加点します．

小テスト： 皆さんの理解度を確認するため，前期の間に 3 回，30 分程度の小テストを行います．出題内容は，演習でやった問題をベースにした基本的な問題です．

宿題： 宿題はほぼ毎回出題されます．宿題用の問題プリントを配ることもありますし，演習中に黒板で出題することもあります．提出様式は，**A4 レポート用紙を使用し，必ず表紙をつけ，タイトルを『何月何日の宿題』とし，名前，学籍番号を記入**してください．また，**左上をホチキスでとめて**提出してください．

宿題の提出期限は次の演習の開始時間まで，提出場所は教室（理 1-409）です．提出期限に間に合わなかった宿題は後日提出してもかまいませんが，少し減点します．もし何らかの事情で授業時に提出できない場合，事前に email 等で連絡の上．(1) 川平の office(A439) に直接持ってくるか，(2) 事務室に提出してください．

宿題の中に，まれに**発展問題**があります．これはボーナス問題です．解けば加点の対象としますが，解かなくても減点しません．

レポート： 授業で扱えなかった問題や，やや進んだ内容の問題をレポート課題として指定することがあります．レポートの提出は任意ですが，提出されたレポートの質を判断して，成績にボーナス加点していきます．レポートには提出期限を設けません．提出場所は教室です．提出様式は宿題の提出様式に準じます.（A4 レポート用紙使用，タイトルを『何月何日のレポート』とする，etc.）ただし，たとえ同じ日に提出する場合でも，**レポートと宿題は必ず分けて提出してください．**（採点者が異なります.）

授業でやらなかった問題を自発的に解いた場合，その旨を記入し，宿題とは別にしてレポートとして提出してください．

オフィスアワー： 私の公式なオフィスアワー（質問受付時間）は**毎週金曜日 11:30-13:00，場所は Cafe David（理学部 1 号館 2 階エレベーター前）**です．私とその他のスタッフも待機しているので，自由に質問してください．もちろん，授業中，授業後の質問も歓迎します．金曜日以外の昼休みにも Cafe David は開店しているので，どんどん活用しましょう．有識者への質問は，問題を解決するのにもっとも有効な手段です．自力解決にこだわらないで，スマートに勉強をこなしましょう．

上記以外の時間に質問したい場合は，必ず事前に email 等で appointment を取るようにしてください．

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ちからだめしの復習+α

作成日：April 14, 2005 Version：1.0

ちからだめしの補足：ロピタルの定理

ロピタルの定理 (l'Hospital's rule) は使用条件が厳しいので扱いに注意しないといけない．

問題 1.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+x^2)}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin|x+x^2|}{|x|}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1}$

できるだけロピタルの定理に頼らずに極限を求められるよう，技を磨こう．

Taylor 展開と Landau の記号 無限小を比較するには，Landau の記号が非常に使いやすい．

問題 2. $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ に対し，$y=x^n$ $(x>0)$ のグラフを書け．また，$y=x^{\pm\sqrt{2}}$ $(x>0)$ のグラフはどのようになるか？

Landau の記号：$x=0$ の周りで定義された連続関数 $\varepsilon(x)$ にたいし，ある定数 $\alpha, M\geq 0$ が存在して，

$$|\varepsilon(x)|\leq M|x|^\alpha \iff -M|x|^\alpha\leq\varepsilon(x)\leq M|x|^\alpha$$

であるとき，これを

$$\varepsilon(x)=O(x^\alpha)\quad(x\to 0)$$

と表す．また，

$$\frac{\varepsilon(x)}{|x|^\alpha}\to 0\quad(x\to 0)$$

であるとき，

$$\varepsilon(x)=o(x^\alpha)\quad(x\to 0)$$

と表す．

注意 α が非整数の場合は $O(|x|^\alpha), o(|x|^\alpha)$ などと書くほうが正確である．が，$x\to+0$ ならば上の記号でも何ら問題はない．

問題 3. 次のことを確かめよ．ただし，必要に応じ $x\geq 0$ と仮定する．

(1) $f(x)=2x^2+x^3$ のとき，$f(x)=O(x^2)$ $(x\to 0)$ かつ $f(x)=o(x)$ $(x\to 0)$

(2) $f(x)=x^\pi+x^4$ のとき，$f(x)=O(x^\pi)$ $(x\to 0)$ かつ $f(x)=o(x^3)$ $(x\to +0)$

(3) $f(x)=10000000+x^2$ のとき，$f(x)=O(1)$ $(x\to 0)$

(4) $f(x)=O(x^4)$ $(x\to 0)$ のとき，$x^3f(x)=O(x^7)$ $(x\to 0)$.

(5) $0\leq\alpha<\beta$ のとき，$x^\beta=O(x^\alpha)$ $(x\to+0)$ かつ $x^\beta=o(x^\alpha)$ $(x\to+0)$.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

Taylor 展開

Taylor 展開：$x=a$ の周りで定義された $n+1$ 階微分可能な関数 $y=f(x)$ について，x が a に十分近いとき，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+O((x-a)^{n+1})$$

が成り立つ．これを f の $x=a$ における n **次の Taylor 展開**と呼ぶ．

つまらない例　たとえば，多項式 $f(x)=x^2+x^4$ の $x=0$ に関する 4 次の Taylor 展開は $f(x)$ そのものである．

問題 4. (←青い問題は「やや難」という意味です.)

$$f(x)=1+(x-1)+2(x-1)^2+3(x-1)^3+\pi|x-1|^\pi$$

に対し，Taylor の定理をそのまま適用すると $x=1$ における 2 次までの Taylor 展開しか求めることができない．これはなぜか？(3 階以上の微分まで求めてみよ.) しかし，

$$\begin{aligned}f(x)&=1+2(x-1)+2(x-1)^2+3(x-1)^3+O(|x-1|^\pi)\\&=1+2(x-1)+2(x-1)^2+3(x-1)^3+o(|x-1|^3)\end{aligned}$$

であることを確かめよ．

問題 5. Taylor 展開 $\sin x=x+O(x^3)$ $(x\to 0)$ を用いて，上の問題 1 の (1),(2) を解け．

数列と漸化式

大学の数学では，うまく式で表現できないような，ワイルドな数列も扱う．今日は私の専門分野の紹介もかねて，ワイルドな数列の具体例で少し遊んでみよう．

ある関数 $y=f(x)$ とある実数 $a_1=p$ （複素数でもよい）に対し，数列

$$p=a_1\ \mapsto\ f(p)=a_2\ \mapsto\ f(f(p))=a_3\ \mapsto\ f(f(f(p)))=a_4\ \mapsto\ \ldots$$

を考えよう．このように書くと一瞬戸惑うが，実は

$$a_{n+1}=f(a_n),\quad a_1=p$$

という初項 p の 2 項間**漸化式** (reccursive formula) を考えているのである．初項 p は**初期値** (initial value) とも呼ばれる．

問題 6. $f(x)$ と p が下のように与えられているとき，数列 a_n を求めよ．一般項が求まる場合は計算せよ．

(1) $f(x)=2x,\ p=0$　　(2) $f(x)=2x,\ p=1$　　(3) $f(x)=2x+1,\ p=-1$

(4) $f(x) = 2x+1,\ p=0$　(5) $f(x) = \dfrac{x+1}{-x+1},\ p=2$　(6) $f(x) = x^2-1,\ p=1$

(7) $f(x) = x^2+2x,\ p=1$　(8) $f(x) = x^2+i,\ p=0$

軌道を視覚化する：ウェブ・ダイアグラム

与えられた実数 p と関数 $y=f(x)$ に対し，数列

$$p \mapsto f(p) \mapsto f(f(p)) \mapsto f(f(f(p))) \mapsto \ldots$$

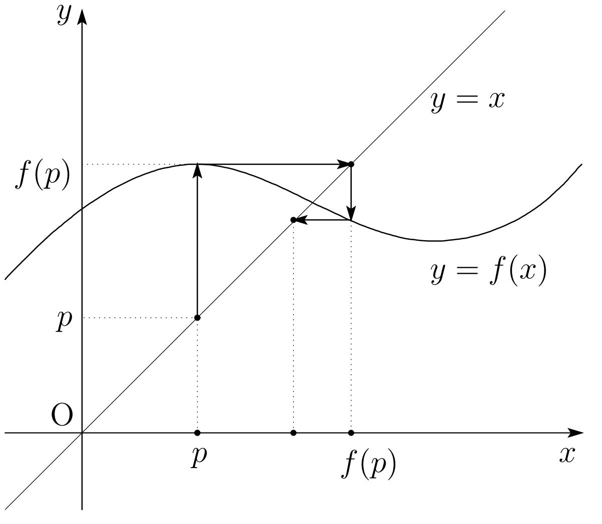
を視覚化する非常によい方法がある．$y=f(x)$ のグラフを用いて，xy 平面上の点 (p,p) から $(f(p), f(p))$ を作図する方法である：

Step 1　点 (p,p) から垂直方向に，$y=f(x)$ のグラフと交わるまで直線を引く．その交点は $(p, f(p))$ である．

Step 2　そこから水平方向に，今度は $y=x$ のグラフと交わるまで直線を引く．その交点が $(f(p), f(p))$ である．

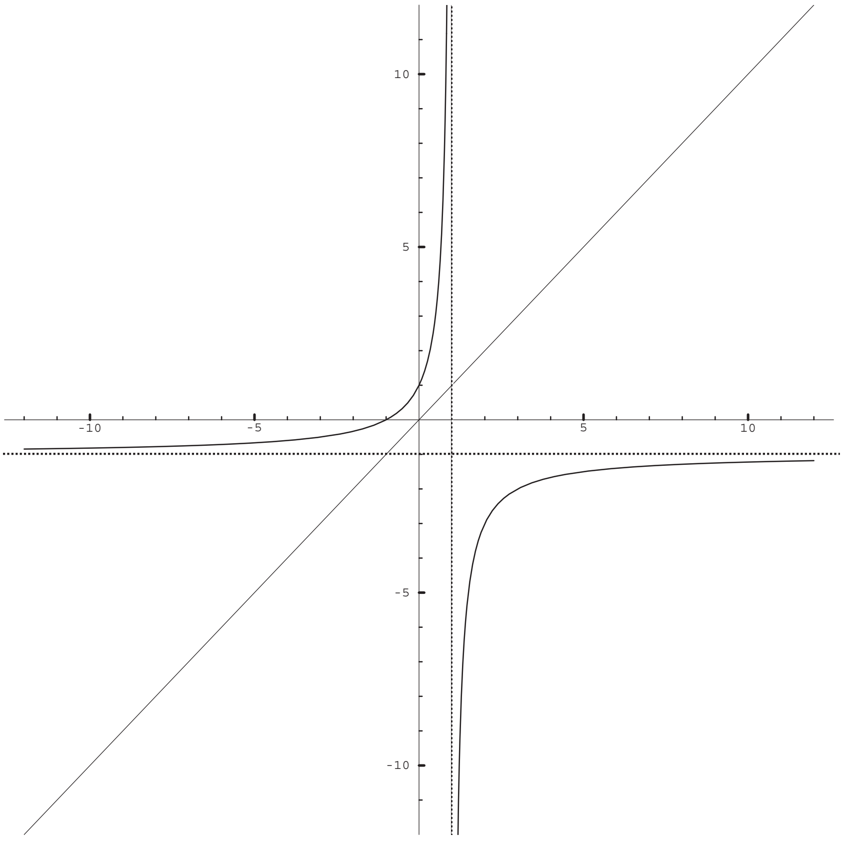
これを続けていき，直線 $y=x$ を数直線だと思えば点 p の軌道が視覚化される．この手続きを**グラフ解析** (graphical analysis) と呼ぶ．また，グラフ解析で得られる図を**ウェブ・ダイアグラム**（web diagram）と呼ぶ．

ちなみに，$y=f(x)$ と $y=x$ のグラフの交点は**固定点** (fixed point) と呼ばれる．



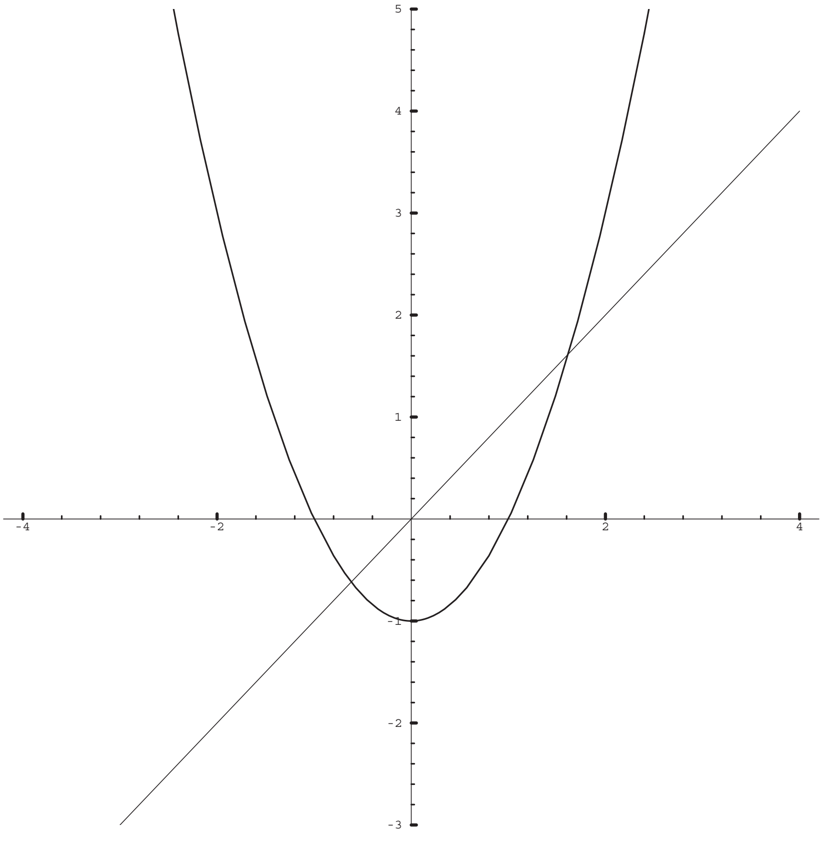
問題 7. $y=2x$, $y=2x+1$ をグラフ解析せよ．特に，初期値 p の値によってウェブ・ダイアグラムはどのように変化するか？

問題 8. $y=f(x)=\dfrac{x+1}{-x+1}$ とするとき，漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$,　$a_1=p$（ただし，$p \neq 0, \pm 1$）で決まる数列 a_n は p の値によらず周期 4 となることを下のグラフで確かめよ．



研究その１　ちからだめしの問題４を，グラフ解析を用いて再考察してみよ．

研究その２　下の $y = x^2 - 1$ のグラフを用いて，初期値 p の値と軌道の関係を観察せよ．



担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

問題 1　e^x **および** $\sin x$ **の Taylor 展開と Landau 記号を駆使して**以下の極限を求めよ：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x - x^2}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x-\sin x}$

問題 2　漸化式

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4},\quad a_1 = p$$

を考える．特に，$n\to\infty$ のとき，a_n は収束か，発散かを判定したい．

(1) $y = f(x) = x^2 + 1/4$ をグラフ解析し，

(a) 数列 $a_n\to\infty$ となる初期値 p の範囲

(b) 数列 a_n がある値に収束する初期値 p の範囲

を推測せよ．特に，a_n が収束するとき，その極限は何だと予想されるか？(答えのみでよい.)

(2) 以下，$p = a_1 = 0$ で考える．このとき，数学的帰納法により $a_n < 1/2$ を示せ．

(3) さらに，数学的帰納法により $a_n < a_{n+1}$ を示せ.（すなわち，a_n は単調増加）

(4) 一般に，次のことは使ってよいことになっている：

> **実数の連続性の"公理"**：単調増加数列 a_n に対しある実数 M が存在して，全て n について $a_n < M$ を満たすと仮定する．このとき，a_n はある値 α $(\le M)$ に収束する．

我々の a_n は $a_n < a_{n+1} < 1/2$ を満たすから，収束するはずである．その極限を α とすると，その値は何になるか？（Hint: 漸化式で $n\to\infty$ とせよ）

注意　上の四角で囲った事実を用いずに，式の形から直接 $a_n\to 1/2$ を証明するのは非常に難しい．

レポート問題 1-1（2 変数の Landau 記号）　$\varepsilon(x,y) = \varepsilon_1(x,y)+\varepsilon_2(x,y)+\varepsilon_3(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の関数とし，さらに $x,y\to 0$ のとき，

$$\varepsilon_1(x,y) = O(x^2),\quad \varepsilon_2(x,y) = O(xy),\quad \varepsilon_3(x,y) = O(y^2)$$

であると仮定する.（たとえば，ある定数 $M_2 > 0$ が存在して，x と y がともに十分小さければ $|\varepsilon_2(x,y)|\le M_2|xy|$ を満たすということである.）このとき

$$\varepsilon(x,y) = O(x^2+y^2)$$

であることを示せ．(Hint: $(x-y)^2\ge 0$)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

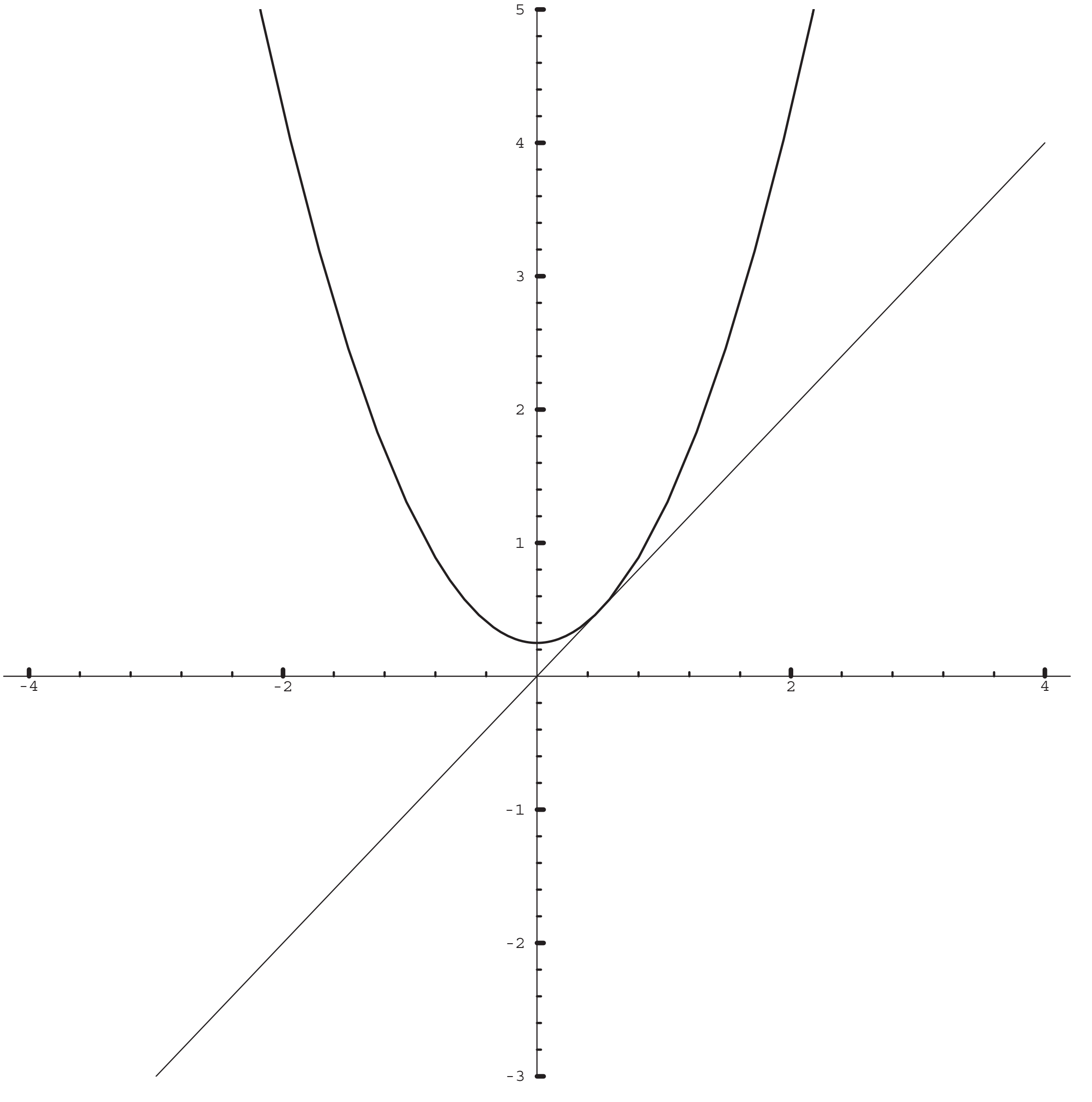
レポート問題 1-2　漸化式

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n, \quad a_1 = 1$$

の一般項をもとめよ．さらに余力があれば,

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n, \quad a_1 = p$$

の一般項をもとめよ.（←かなり難しい.）



$y = x^2 + 1/4$ のグラフ

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ε と N

作成日：April 21, 2005　Version：1.1

今日は ε-N 論法の初歩を練習します．一見難しそうですが，誰にでも理解できるので安心してください．そのまえに..

まめちしき

よく使われる数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体　(2) $\mathbb{R}$: 実数全体　(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体　(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体　(6) $x \in \mathbb{R}$: x は実数

ギリシャ文字

(1) α: alpha アルファ　(2) β: beta ベータ　(3) γ, Γ: gamma ガンマ
(4) δ, Δ: delta デルタ　(5) ε: epsilon イプシロン　(6) ζ: zeta ゼータ
(7) η: eta エータ　(8) θ, Θ: theta シータ　(9) ι: iota イオタ
(10) κ: kappa カッパ　(11) λ, Λ: lambda ラムダ　(12) μ: mu ミュー
(13) ν: nu ニュー　(14) ξ, Ξ: xi クシー　(15) o: omicron オミクロン
(16) π, Π: pi パイ　(17) ρ: rho ロー　(18) σ, Σ: sigma シグマ
(19) τ: tau タウ　(20) υ, Υ: upsilon ウプシロン　(21) ϕ, Φ: phi ファイ
(22) χ: chi カイ　(23) ψ, Ψ: psi プサイ　(24) ω, Ω: omega オメガ

for all と exists

数学の文法　数学では「全ての…について…である」とか,「ある…が存在して…が成り立つ」という形の文章を多用する．これをそのまま板書するのはしんどいので,「全ての x について」を $\forall x$,「ある y が存在して」を $\exists y$ などと略記する．たとえば,「任意の正の数 x に対してある整数 n が存在して，$10^n \le x \le 10^{n+1}$ を満たす」という文章は

$$\forall x > 0,\ \exists n \in \mathbb{Z}, \quad 10^n \le x \le 10^{n+1}$$

などと略記する．とくに，$x > 0$ と不等号を書くと $x \in \mathbb{R}$ であることは暗に示されている．

問題 1. 以下の文章を上の $\forall$, $\exists$ を用いた形に書き直せ．さらにその真偽を判定せよ．

(1) 任意の正の数 x に対しある正の数 y が存在して，$y = x^2$ を満たす．

(2) ある実数 x とある実数 y が存在して，$x^2 + y^2 + 1 = 0$ を満たす．

問題 2. 逆に，以下の式を文章化せよ．また，その真偽を判定せよ．

(1) $\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \exists q \in \mathbb{Q}, \quad pq = 1.$

(2) $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x < 0.$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ある英国人高校生の弁証法的（？）会話

Jimmy と Robert は高校生である．Robert は完璧主義の Jimmy に「数列 $a_n = 1/n$ は 0 に収束する」といわれて，なんとなく納得がいかない．

Robert: 「本当に a_n は 0 にいくらでも近づくのかよ？たとえば単位をメートルにしたとき，n を大きくしていくと a_n は 1 ミリよりも小さくなるんか？途中でひょいって，0 からの距離が大きくなったりしないのか？」

Jimmy: 「$(a_1, a_2, \ldots)$ は単調減少，すなわち，

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \cdots$$

はいいよな？そしたら，$n = 1000$ のとき $a_n = 0.001$ =1 ミリ だから，$n > 1000$ のとき a_n は 1 ミリより小さいだろ？たとえば数直線で見たらさ，a_n と 0 の距離はどんどん近くなって，近づきすぎて肉眼では区別できないぐらい 0 と a_n は近づくんだよ」

Robert: 「でもさ，見えなくなったその先でも，a_n は本当に 0 に近づいてる保証はあるのか？0 に行く前に，0.01 ミリぐらいのところで止まったりしないのか？例えば，n を大きくしていくと a_n は 1 ミクロンよりも小さくなるか？」

Jimmy: 「1 ミクロン $= 10^{-6}$ メートルだから，$n = 10^6$ のとき $a_n = 10^{-6}$ =1 ミクロン，よって $n > 10^6$ のとき a_n は全て 1 ミクロンより小さい.」

Robert: 「うーん，じゃあ，n を大きくしていくと a_n は水素原子よりも小さくなるか？」

Jimmy: 「水素原子の大きさはよく知らんけど，$N = 10^{50000}$（1 の後に 0 が 50000 個）とかにして，$a_N = 10^{-50000}$ メートルぐらいにしとけば，水素原子の直径よりは小さいやろうな．ってことは $n > N = 10^{50000}$ だったら a_n は全て水素原子より小さいはず.」

Robert: 「じゃあ，n をもっともっと大きくしていくと a_n は電子よりも小さくなるか？」

Jimmy: 「電子の大きさはよく知らんけど，Rob，お前がどんなに小さいものを挙げても，n を一定以上お〜きくお〜きくとれば，$a_n = 1/n$ は全部そいつより小さくなるんだよ.」

Robert: 「でも本当に，a_n は 0 に近づいてんのかなぁ？」

Jimmy: 「ほかにどう説明したらいいんだ ??! 」

ε-N

ほかに説明のしようがないので，数列の収束は次のように定義される：

> ある数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が数 α に**収束する** (converge) とは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して，$n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」ときを言う．このとき α を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限** (limit) と呼ぶ．以上の状況を，記号では
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{もしくは} \quad a_n \to \alpha \ \ (n \to \infty)$$
>
> と表す.

注意：**任意の** $\varepsilon > 0$ という言葉は **任意に小さい** $\varepsilon > 0$ と心の中で読みかえるべし．

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3.

(1) 上の収束の定義を $\forall$, $\exists$ などを用いて書き直せ.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数列のとき，上の定義を図でイメージせよ.

(3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数列のとき，上の定義を図でイメージせよ.

問題 4. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \dfrac{n-\sqrt{2}}{n}$ で定める．以下の ε に対し,「$n > N$ ならば $|a_n - 1| < \varepsilon$ を満たす」ような N をひとつ求めよ.

(1) $\varepsilon = 5$ (2) $\varepsilon = 1$ (3) $\varepsilon = 0.1$ (4) $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ (5) $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$

これを用いて，$a_n \to 1$ $(n \to \infty)$ を示せ.

君は Robert 状態から抜け出せただろうか?「近づく（近い)」という概念は相対的なもので，距離を比較する対象があって初めて成立する概念である．距離を比較するとは，二つの数の大小関係を見ることである．したがって,「限りなく近づく」という言葉を数学的に明確に表現しようとすると,「どんなに小さい数 $\varepsilon > 0$ と比較しても，a_n と α の距離はそれよりも小さく出来る」，という形式になってしまう.

極限の和と和の極限

二つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ と仮定する．このとき,

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$

(3) $\beta \neq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

問題 5. 上の (2) を用いて，次を示せ：
(2)' C を定数とするとき，$\lim_{n\to\infty}(Ca_n) = C\alpha$.

問題 6. 上の (1), (2) を証明せよ．(3) は宿題.

問題 7. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \alpha$$

を示せ.

問題 8. 二つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ が存在したと仮定する．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在するとは限らないことを示せ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題コーナー

今週は連休をまたぐのでちょっと多めです．

宿題 0-1. 以下の文章を上の ∀, ∃ を用いた形に書き直せ．さらにその真偽を判定せよ．

(1) 任意の整数 m に対しある整数 n が存在して，$3n+4m=1$ を満たす．

(2) ある正の実数 x が存在して，$2x-1>0$ を満たす．

(3) 任意の実数 x と任意の実数 y に対し，$x^2+y^2 \geq 2xy$ が成り立つ．

宿題 0-2. 逆に，以下の式を文章化せよ．また，その真偽を判定せよ．

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y<0.$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{Z},\ x+y-z<0.$

(3) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2+x+1<0.$

宿題 1. 二つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_nb_n$ が存在したと仮定する．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在するとは限らない．その反例をひとつ以上あげよ．

宿題 2. 二つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta\neq 0$ と仮定する．このとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ を示せ．

宿題 3. 複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．$z_n := x_n + y_n i$ と置くと，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列である．ことのき，以下を示せ：

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれある実数に収束すれば，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ もある複素数に収束する．(Hint: 直角三角形の「斜辺の長さ」は「他の 2 辺の長さの和」より短し)

(2) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数に収束すれば．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ もそれぞれある実数に収束する．(Hint: 直角三角形の斜辺は他の辺より長し)

レポート問題 2-1. ε-N 論法のみを用いて，実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha\geq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}=\alpha$ であることを示せ．(ただし関数 $y=\sqrt{x}$ の連続性は用いてよい．)

レポート問題 2-2. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ と $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$ はともに存在するが，$\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\lim_{n\to\infty} b_n$ はともに存在しない例を構成せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

重積分と Jacobian

作成日：May 6, 2005　Version：1.1

今日は連休の中日なので重積分と Jacobian の復習を軽くこなします．

問題 1. $z = x + yi$ とする．$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ に写す写像

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Im}\, z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z^2 \\ \mathrm{Im}\, z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

において，局所的に現れる「線形写像」をみつけよう．

(1) u, v を x, y で表せ．また，$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもとめよ．

(2) この写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線形写像で**ない**ことを示せ．

(3) $X := x - 1$, $Y := y - 1$, $U := u$, $V := v - 2$ とおく．このとき，U, V を X, Y で表せ．

(4) X, Y の絶対値がものすごく小さい状況を（たとえば絶対値が 0.00001 以下とか）考える．このとき，ある 2 次正方行列 A が存在して $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ は $A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に極めて近い．この行列 A は何か？

(5) f の $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ におけるヤコビ行列およびヤコビアンの値を求めよ．

(6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を中心に，小さな正方形（たとえば一辺 ε）を水平に配置する．この正方形は，f によってだいたいどのような図形に写るか？さらに，面積は約何倍されるか？

(7) $|X|$, $|Y| < 0.00001$ のとき，絶対誤差 $\left| \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right|$ の最大値を求めよ．

重積分の変数変換を理解するために

A を（正則とは限らない）n 次正方行列とする．このとき，写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．E を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし，その n 次元体積を $|E|$ と表す．このとき，

$$|f(E)| = |\det A| \cdot |E|$$

となる．特に，$\det A = 0$ のとき $|f(E)| = 0$ となる．

補足 1. 上の E に関して，その体積を測ることができるか，という問題は自明ではない．詳しくは Lebesgue 積分論で学習する．ちなみに，線形写像の場合，もし E の体積を図ることが出来れば，$f(E)$ の体積も測ることができることは知られている．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

重積分の変数変換をするともれなく Jacobian のおまけがついてくる．その意味を**直感的に**理解しよう．

問題 2. 次の重積分の値をもとめたい：

$$I = \int_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} \qquad (D : 1 \le x^2 + y^2 \le 4)$$

(1) まず，変数変換

$$f : \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，$f(E) = D$ となる $r\theta$-平面上の長方形領域 E をひとつ求めよ．

(2) I を角柱の体積和として近似したい．N を巨大な整数とし，E を N^2 個の合同な長方形 $\Delta E_1 \dots \Delta E_{N^2}$ に等分割する．各 ΔE_i に対し，その中心を (r_i, θ_i) とおく．さらに，$\Delta D_i := f(\Delta E_i)$，$(x_i, y_i) := f(r_i, \theta_i)$ とおく．局所座標 $R := r - r_i$，$\Theta := \theta - \theta_i$，$X = x - x_i$，$Y = y - y_i$ を用いて，$f : \Delta E_i \to \Delta D_i$ を近似する線形写像を求めよ．

(3) 各 i について，ΔD_i の面積は ΔE_i の面積のおよそ何倍か？

(4) 今，N は極めて大きく,「各 ΔD_i は水素原子よりも小さい」，と言いたくなるぐらい小さい．このとき，積分 I は ΔD_i を底辺とする角柱の体積和として近似される．この近似式を x_i，y_i，$|\Delta D_i|$ を用いて式で表せ．さらに，上の近似式を r_i，θ_i，$|\Delta E_i|$ を用いて式で表せ．

(5) 以上の議論をもとに，I を $\displaystyle\int_E \cdots drd\theta$ の形に書き直せ．さらに，積分値を求めよ．

これを発展させて，もっと難しい積分を考えよう．これができれば，高次元の重積分の意味は大体理解できるはずである：

問題 3. 次の重積分の値をもとめたい：

$$I = \int_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz \qquad (D : x^2+y^2+z^2 \le 1)$$

(1) まずは積分の意味を解釈したい．積分領域は，3 次元の球面とその内部である．この球体には，ある物質が詰まっていて，$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ におけるこの物質の密度（単位体積あたりの重さ）は $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ であることがわかっている．点 $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ を中心とする非常に小さな直方体で，縦・横・高さが Δx，Δy，Δz のものを考えよう．このとき，この直方体の重さのおよその値を求めよ．その上で，積分 I は一体何を計算しているのか？

(2) 変数変換

$$f : \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\cos\phi\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，$f(E) = D$ となる $r\theta\phi$-空間上の直方体領域 E をひとつ求めよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(3) I を直方体の質量和として近似したい．N を巨大な整数とし，E を N^3 個の合同な直方体 $\Delta E_1 \dots \Delta E_{N^3}$ に等分割する．各 ΔE_i に対し，その中心を (r_i, θ_i, ϕ_i) とおく．さらに，$\Delta D_i := f(\Delta E_i)$，$(x_i, y_i, z_i) := f(r_i, \theta_i, \phi_i)$ とおく．局所座標 $R := r - r_i$，$\Theta := \theta - \theta_i, \Phi = \phi - \phi_i$ $X = x - x_i$，$Y = y - y_i$，$Z = z - z_i$ を用いて，$f : \Delta E_i \to \Delta D_i$ を近似する線形写像を求めよ．

(4) 各 i について，ΔD_i の体積は ΔE_i の体積のおよそ何倍か？

(5) 積分 I は「各 ΔD_i に密度 $(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ の物質を詰めたもの」の質量和として近似される．この近似式を x_i，y_i, z_i，$|\Delta D_i|$ を用いて式で表せ．さらに，上の近似式を r_i，θ_i, ϕ_i，$|\Delta E_i|$ を用いて近似せよ．

(6) 以上の議論をもとに，I を $\displaystyle\int_E \cdots dr d\theta d\phi$ の形に書き直せ．さらに，積分値を求めよ．

今週の宿題コーナー

来週 (5/13) は授業の始めに第 1 回小テストをやります．小テストでは，**自筆ノートに限り持込と参照を許可します**．今週は宿題として具体的な問題は出しませんが，テスト対策に，要点を上手にまとめたノートを作ってきましょう．（ノートの提出・採点はしません.）

レポート問題 3.（複素線積分） C で $\mathbb{C}$ 上の単位円を表すことにする．このとき，C に反時計回りに沿った線積分

$$I_m = \int_C \frac{1}{z^m} dz \quad (m \in \mathbb{Z})$$

を以下のように定義する．

- まず，N を十分大きな自然数とする．$k = 0, \dots, N-1$ に対し，$t_k := \dfrac{2\pi k}{N}$ と置く．さらに，数直線上の区間 $0 \le t < 2\pi$ を T，$t_k \le t < t_{k+1}$ を ΔT_k と表す．
- さて次に，写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を
$$f(t) = \cos t + i \sin t$$
で定める．このとき，C 上の点 z_k $(k = 0, \dots, N-1)$ を $z_k := f(t_k)$ で定めると，C は z_k 達によって N 等分されることになる．z_k 達を頂点とする正 N 角形 C_N を考え，これで C を近似する．とくに，z_k と z_{k+1} の間の辺を ΔC_k で表す．
- ΔT_k，ΔC_k の「方向を持った長さ」$|\Delta T_k|$，$|\Delta C_k|$ をそれぞれ $|\Delta T_k| := t_{k+1} - t_k$，$|\Delta C_k| := z_{k+1} - z_k$ で定義する．(「方向を持った長さ」は複素数で測られる.)
- このとき，I_m の第 N 近似 $I_m(N)$ を
$$I_m(N) := \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{z_k} \cdot |\Delta C_k|$$
で定め，$I_m := \lim_{N\to\infty} I_m(N)$ と定義する．

すなわち I_m とは次のように解釈できる：複素平面は非常に特殊な材質で出来ていて，$z = z_0$ におけるこの物質の密度（単位面積あたりの重さ）はなんと，$\dfrac{1}{z_0^m}$ という複素数になっている．このとき，I_m は C という「方向を持った曲線」の「重さ」である．

以上を踏まえて，I_m の値を求めよ．(Hint: I_m を t の積分に書き直し，さらに積分を実部と虚部に分けて計算する．)

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

コーシー列

作成日：May 13, 2005 Version：1.2

今日は

コーシー列 (Cauchy sequence) を扱う練習をします．コーシー列は実数の連続性に関わる非常に重要な数学的対象です．

Cauchy 列

- 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは，「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して，n, $m > N$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon$ とできる」ときを言う．
- コーシー列ならば，収束する．すなわち，実数列（もしくは複素数列）$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列ならば，実数（もしくは複素数）の極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を持つ．

注意：これは当たり前のことではなく，数の集合 $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ もつ**完備性** (completeness) という性質を明言化したものである．たとえば，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は完備性を持たない．すなわち，有理数列がコーシー列でも，有理数に収束するとは限らない．

問題 1. 逆に，収束数列はコーシー列である．すなわち，実数列（複素数列）$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数（もしくは複素数）の極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を持つならば，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である．これを示せ．

すなわち，収束数列＝コーシー列　である．したがって，収束性をチェックするのときには極限値が何になるか，事前に知る必要はない．ただ，コーシー列であることをチェックすれば良い．

問題 2. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \dfrac{1}{n}$ で定める．これはコーシー列になっていることを確認せよ．では，複素数列として $a_n = \dfrac{i^n}{n}$ と定めた場合はどうか？

問題 3. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を漸化式

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$$

で定める．

(1) $n \geq 3$ のとき，$a_n - a_{n-1} = (-1/2)(a_{n-1} - a_{n-2})$ を確かめよ．また，その幾何学的な意味を考えよ．

(2) $|a_{200} - a_{100}| \leq (\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{100}})|a_{100} - a_{99}|$ を示せ．

(3) $|a_{100} - a_{99}| = \dfrac{1}{2^{98}}|a_2 - a_1| = \dfrac{3}{2^{98}}$ を示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(4) 以上の議論を応用して，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であることを示せ．また，その極限値は何か？

今週の宿題コーナー

宿題 4-1. 複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．極座標を考え，$z_n := r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ と置く．ただし，$0 \le \theta_n < 2\pi$ とする.（ただし，$z_n = 0$ のときは $r_n = 0$, $\theta_n = 0$ とせよ.）このとき，数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列である．以下の問いに答えよ：

(1) 任意の θ, θ' に対し，

$$|(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta' + i\sin\theta')| \le |\theta - \theta'|$$

であることを幾何学的に説明せよ.（Hint: 東京からサンフランシスコ，船で行くのと，トンネルを掘って地中をまっすぐ進むのとどっちが近いか？）

(2) $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれある実数に収束すれば，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ もある複素数に収束することを示せ.

(3) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数に収束すれば．$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数に必ず収束するが，$\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するとは限らない．なぜか？そのような例をひとつ挙げよ.

宿題 4-2. $0 < r < 1$ とし，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ をある実数列とする． このとき，数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$b_n := a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n r^n$$

で定める．以下の問いに答えよ：

初級： $a_n = 10000$（一定）のとき，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ.

2 級： $0 < a_n < 10000$ のとき，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ.

3 級： $|a_n| < 10000$ のとき，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ.

初段： $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は複素数列とし，$|a_n| < M$ なる正の数 M が存在するとき，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ.

いずれも場合も b_n はコーシー列であるから，収束列である.

2 段：レポート問題 4. ある $R > 0$ に対し，z を $|z| \le R$ なる複素数とする．さらに，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を複素数列とし，$|a_{n+1}/a_n| \le M < 1/R$ なる正の数 M が存在すると仮定する．このとき，

$$b_n := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

によって定まる複素数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

級数の収束

作成日：May 20, 2005　Version：1.1

今日は級数の収束を考えます．特に，絶対収束に関するセンスを磨きましょう．ここでは複素数の数列（⊃ 実数の数列）を扱います．

級数＝折れ線

ある数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$（実数列 or 複素数列）があるとき，**（無限）級数** (series) を，式として以下のように定める：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n).$$

このとき，**右の極限が存在するとは限らない**のは $a_n = n$ などとおけば明らかであろう．極限が存在するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する**といい，存在しないとき**発散する**と言う．

これから実数の級数と複素数の級数を同時に扱うが，実数は複素数なので**複素数の級数で成り立つことは実数の級数でもなりたつ**ことに注意しよう．

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とは，複素平面で考えると 0 から $+a_1$ 進み，さらに $+a_2$ 進み，さらに $+a_3$ 進み… と無限に繰り返していったものだと考えられる．これらを矢印で結び折れ線を描けば，その様子が幾何学的に見て取れるようになる：

問題 1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を以下のように定める．このとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散を直感的に判定せよ．

(1) $a_n = (-1)^{n+1}$　　(2) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$　　(3) $a_n = \dfrac{i^n}{n}$　　(4) $a_n = \dfrac{i^n}{2^n}$

ちなみに $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty$（発散），$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}$ である．

問題 2. 上の問題の各 a_n で，級数に対応する折れ線のトータルの長さはどうなるか？(Hint: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} > \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$)

級数に対応する折れ線のトータルの長さが有限ならば，その級数は収束するに違いない（というか，発散のしようがない）ことは直感的に明らかであろう．すなわち，

> **定理**　$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき，級数 a_n は**絶対収束する**と呼ばれる．

注意　この定理の逆は成立しない．すなわち，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **が収束するからと言って，** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **が絶対収束するとはかぎらない**．例えば，

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2$$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

であるが，これは絶対収束していない．すなわち，長さの無限大の折れ線が $\log 2$ に向かって折りたたまれていく感じである．

問題 3. 上の定理を用いて，問題 1 の (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n}$ が収束することを示せ．また，その値を求めよ．

問題 4. 一般に，数列 $s_n := |a_1| + \cdots + |a_n|$ が「上に有界」ならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は収束することを示せ.（したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する.）

問題 5. 任意の複素数 z を固定する．このとき，上の定理を用いて，

$$C(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

が収束することを示したい．明らかに，$z \neq 0$ のとき証明すれば十分である．$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，$c_n := (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$ と定める．

(1) $n \geq |z|$ ならば $|c_{n+1}| < \dfrac{|c_n|}{4}$ とできることを示せ.（**発展問題**：自然数 N を十分大きくとると，$n > N$ のとき $|c_{n+1}| < \dfrac{|c_n|}{10000}$ とできることを示せ．）

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ は収束することを示せ．したがって $C(z)$ は収束する．

まめしちき　x が実数のとき，$C(x) = \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots$ である．

注意：　複素数 z に対しても，$\cos z := C(z)$ と定義できる．しかしこの関数は各点での値が与えられただけで，連続性や微分可能性について何も保証されていないことに注意しよう．これらは別個に証明する必要がある．

べき級数（整級数）

α を複素定数．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を複素数列とする．このとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

を a を中心とする**べき級数（べき級数）**(power series) とよぶ．一般に $z = \alpha$ の場合をのぞき，この式が収束するとは限らない．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

以降は上の級数を z に関して α 平行移動して，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

を考える．

問題 6. べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

は $|z| < 1$ で収束し，$|z| \geq 1$ では発散し意味を持たないことを示せ．また収束する場合，その極限は何か？

問題 7. 「$|z| < R$ のときべき級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \cdots$$

は収束する」といえるような最大の R を求めよ．

このような R を**収束半径** (radius of convergence) という．

今週の宿題コーナー

宿題 5-1.　級数

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots$$

は $\alpha > 1$ のとき収束し，$\alpha \leq 1$ のとき発散する．これを利用して，以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束するが $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないような例を作れ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(2n)^3}$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ はそれぞれ収束することを示せ．
(Hint: $\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{1}{(2n)^3} \cdot \frac{(2n)^3}{(2n+1)^3} < \frac{1}{(2n)^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^3}$)

宿題 5-2.　任意の複素数 z を固定する．このとき，

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

が収束することを示せ．

まめしちき　x が実数のとき，$S(x) = \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$ である．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 5-3（リーマンのゼータ関数）　n を自然数，$s = \sigma + ti$ を複素数（σ, t は実数）とする．このとき，

$$n^s := n^\sigma(\cos(\log n^t) + i\sin(\log n^t))$$

と定義する．さらに，複素数 s に依存する級数

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

を考える．このとき，$\sigma > 1$ ならば $\zeta(s)$ は級数 σ は収束することを示せ．

まめしちき　上の関数を**リーマン (Riemann) のゼータ関数**と呼ぶ．この関数は上の式のままでは $\sigma > 1$ のときしか定義できないが，**解析接続**とよばれる方法で複素平面全体に拡張することができる．(上の級数表示が意味を持たないかわりに，$\zeta(s)$ はある複素積分で表示できるようになる.)「$\zeta(s) = 0$ ならば $s = -2, -4, \ldots$ もしくは $\mathrm{Re}\, s = \sigma = 1/2$ であろう」というのが有名な**リーマン予想** (Riemann hypothesis) である．

今週のレポート

レポート問題 5-1　1 ページ目の**定理**を証明しよう！複素数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対し，級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ が絶対収束したと仮定する．

(1) $s_n := |a_1| + \cdots + |a_n|$ と置く．仮定より $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ は収束列である．収束列はコーシー列であるから，$\underline{\{s_n\}_{n=1}^\infty \text{ はコーシー列である．}}$ 左の下線部分を ϵ-N 式に書け．

(2) $S_n := a_1 + \cdots + a_n$ と置く．コーシー列は収束列であるから，$\{S_n\}_{n=1}^\infty$ がコーシー列であることを示せば定理の証明は終わる．すなわち,「任意に小さい $\epsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して，$n \geq m > N$ ならば

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \epsilon$$

となる」ことを示せば十分である．s_n がコーシー列であることを用いて，これを証明せよ．

レポート問題 5-2.　二つの実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ に対し，$\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ および $\sum_{n=1}^\infty b_n^2$ が収束したと仮定する．このとき，$\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ は絶対収束することを示せ．(Hint $(A-B)^2 = (A^2+B^2) - 2AB \geq 0$)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ε と δ

作成日：May 26, 2005　Version：1.0

お知らせ　来週 (6/3) の授業（とオフィスアワー）は，名大祭のためお休みです．今週の宿題は 6 月 6 日月曜日 17:00 までに，私のオフィス (A439) 前の封筒に提出してください．再来週 (6/7) は第 2 回小テストをやるので，復習もしておきましょう．

さて今日は関数の連続性について考えます．いつものように，複素数の関数（$\supset$ 実数の関数）を扱います．

関数の連続性

『関数＝グラフ』というイメージは，すぐに破綻するアイディアである．たとえば複素関数は平面から平面のへの対応付けであり，すでに「グラフ」が描けない．そこで少し，工夫を試みる．

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の部分集合 D をひとつ固定する．どんな集合でもかまわない．$\mathbb{C}$ 自身でもよい．さてこのとき，D 上の複素数値の関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を考える．たとえば，$f(z) = z^2 - 2$ のよう具体的な関数を想像すればよい．

この場合，$X = \mathbb{C}$ というスクリーンにある D という図形を，別の $Y = \mathbb{C}$ というスクリーンに f という光源を用いて投影している，と考えてみる．スクリーンの間には歪んだレンズ A があって，それを通過することで z という点は $f(z)$ という点に写るのである.（ここで A は,「f の定義」に対応するモノである．たとえば，$f(z) = z^2 - 2$ という写像ならば $z^2 - 2$ という式に対応する.）

さて，この $f : D \to \mathbb{C}$ はどのような性質を持っていることが望ましいだろうか？ スクリーン $X = \mathbb{C}$ 上の，とくに部分集合 D に関する情報を出来るだけスクリーン $Y = \mathbb{C}$ に反映させたい．

たとえば，$D = \mathbb{C}$ かつ f が「全単射である」と嬉しいだろう．しかし，全単射は点の位置を入れ替えるだけなので，ぐちゃぐちゃに場所を入れ替えられてしまっては困る．むしろ，**近い点同士は写った先でも近い点同士になる**ことをまず期待したい．これを満たすのが，**連続性**の概念である：

> **定義その１**：関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $z_0 \in D$ で**連続** (continuous) であるとは，任意の z_0 に収束する D 内の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，数列 $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(z_0)$ に収束するときをいう．すなわち，
>
> $$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n) = f(z_0)$$
>
> であるときを言う．また，f が D **上で連続**であるとは，任意の $z_0 \in D$ で f が連続であるときを言う．

「近い」という概念は相対的な（比較するものがあって意味を成す）概念であるから，定式化が難しい．そのかわりに，**「近づく」という性質（情報）が保存される写像**として連続写像を定式化する．ちなみに，一般には $z_n \neq z_0$ を満たしながら収束する点列を考えた方が都合がよいとされているが，あまり神経質になる必要はない．

問題 1. 上の連続性の定義を，ε-N 式に厳密に書き下せ．

問題 2. $p \in \mathbb{N}$ のとき，$f(z) = z^p$ は $\mathbb{C}$ 上で（したがって，$\mathbb{R}$ 上でも）連続であることを ε-N 式で示せ．

問題 3. 連続な関数の和，積，商はまた連続関数になる理由を，**定義その１**と数列の極限の性質から説明せよ．

上の問題のように，連続性の定義をうっかり ε-N 式に書き直した日には，とってもまわりくどい．これでも，各点での連続性を示すときには全く問題は起きないのだが，今後の応用を考えると次のような同値な言い換えをしておいたほうが良い：

定義その２： 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $z = z_0 \in D$ で**連続**であるとは，「任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ とできる」ときをいう．特に，f が D 上の各点で連続なとき，f **は** D **上で連続**という．

問題 4. この定義に対し，複素数バージョンと実数バージョンの絵を描き，自分なりに解釈を与えよ．また，実連続関数とはグラフが繋がっている関数，という感覚を定義を元に確認せよ．また，その感覚を複素数でイメージするにはどうしたら良いだろう？

問題 5. $f : D \to \mathbb{C}$ と $g : D \to \mathbb{C}$ を D 上で連続関数とする．このとき，$h(z) = f(z)+g(z)$ も D 上で連続な関数となることを示せ．

問題 6. 複素関数 $f(z) = z^2$ は $z = 1$ で連続であることを ε-δ 式に示したい．以下の ε に対し，「 $|z - 1| < \delta$ ならば $|f(z) - f(1)| < \varepsilon$ と出来る」ような $\delta > 0$ を一つ決定せよ．

(1) $\varepsilon = 3$　　(2) $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$　　(3) $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$　　(4) $\varepsilon > 0$

問題 7. 実関数 $f(x) = x^3$ は任意の $x = x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であること示せ．すなわち，関数 f は $\mathbb{R}$ 上連続である．

問題 8. (不連続性) ある実数上の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $x = x_0$ で連続で<u>ない</u>ことを ε-δ 式に表現せよ．そのうえで，次のように与えられる f は $x = 0$ で連続でないことを示せ：

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\ (x \neq 0),\quad f(x) = 0\ (x = 0)$$

問題 9. 関数 $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \longmapsto z(t)$ を以下で定めるとき，その $\mathbb{R}$ 上での連続性を示せ．

(1) $z : t \longmapsto z(t) := 3t + 4ti$

(2) $z : t \longmapsto z(t) := t + t^2 i$

(3) $z : t \longmapsto z(t) := e^{it} = \cos t + i \sin t$

一様連続性

「任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ とできる」という状況は，もし z が z_0 から δ 程度しか動かないならば，$f(z)$ は $f(z_0)$ から高々 ε しか動かない，という意味である．しかしこの δ の値（上限）は，z_0 や ε に強く依存している．

問題 10. $f(x) = x^2$ とおく．x が $\mathbb{R}$ 上を秒速 $\delta = 0.1$ で正の方向に動いている．今，x が $x_0 = 0$ から 1 秒間で $\delta = 0.1$ 動くとき，$f(x)$ は $f(x_0)$ からどの程度はなれるか？また，x が $x_0 = 100$ から同じ 1 秒間で $\delta = 0.1$ 動くときはどうか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

関数 $f: D \to \mathbb{C}$ が D 上で**一様連続**であるとは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，任意の $z_0 \in D$ について $|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ とできる」ときをいう.

もし z が秒速 δ 未満で $\mathbb{D}$ 内を動き回るとき，$f(z)$ の速さは秒速 ε 未満におさえられる．すなわち，スクリーン $X = \mathbb{C} \supset D$ の方で十分遅く動けば，スクリーン $Y = \mathbb{C}$ のほうの動きはいくらでも遅くできる.

問題 11. 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し，実関数 $f(x) = x^3$ は閉区間 $[-N, N]$ 上で一様連続となることを示せ.

問題 12. 実関数 $f: (0, 1] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 1/x$ で定める．このとき f は $N = 2, 3, 4, \ldots$ に対し，閉区間 $I_N = [1/N, 1]$ 上で一様連続となることを示せ．さらに，f は区間 $D = (0, 1]$ で一様連続とならないことを示せ.

今週の宿題コーナー（6 月 6 日までに提出）

宿題 1. $f: D \to \mathbb{C}$ と $g: D \to \mathbb{C}$ を D 上で連続な関数とする．このとき，$h(z) = f(z)g(z)$ も D 上で連続な関数となることを ε-δ 論法で示せ.

宿題 2. 次のように与えられる $\mathbb{R}$ 上の f を考える.：

$$f(x) = x \sin\frac{\pi}{x}\ (x \neq 0),\quad f(x) = 0\ (x = 0)$$

(1) $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ のグラフの概形を描け.

(2) $x \to \pm\infty$ のとき，$f(x)$ のグラフはある直線を漸近線に持つことを証明せよ.

(3) ε-δ 論法を用いて，$f(x)$ は $x = 0$ で連続となることを示せ.

注：$x \to +\infty$ もしくは $x \to -\infty$ のとき $f(x) - (ax + b) \to 0$ が成り立つとき，直線 $ax + b$ を $f(x)$ の漸近線とよぶ.

宿題 3. 「級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ も収束する」ことを示したい.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n > N$ のとき $|a_n| < 1$ とできることを示せ.（Hint: $s_n = |a_1| + \cdots + |a_n|$ はコーシー列．$|s_n - s_{n-1}|$ を考えると…）

(2) $|a_n| < 1$ のとき，$|a_n^2| < |a_n|$ である．これを用いて，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ も絶対収束することを示せ.

(3) 「級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ も収束する」と言えるような関数 $f(z)$ をひとつ探し，それを証明せよ．上は $f(z) = z^2$ の場合である.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週のレポート問題

レポート 6-1

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束しない例を挙げよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しない例を挙げよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ はともに収束するが，ともに絶対収束しない例はあるか？

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ は収束するか？

レポート 6-2　関数 $z : (0,1] \to \mathbb{C}$，$t \longmapsto z(t)$ を

$$z : t \longmapsto z(t) := t + \frac{i}{t}$$

で定める．このとき，$z(t)$ は $(0,1]$ 上一様連続でないことを示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

関数列の収束

作成日：June 10, 2005　Version：1.2

お知らせ　再来週 (6/24) は私が出張のため，休講です．

今日は数列からさらに発展して，関数列について考えます．今日も主に，複素数の関数（⊃ 実数の関数）を扱いましょう．

関数列と各点収束

複素数 z に対し，

$$p_n(z) := 1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n}$$

と定義する．これはただの z に関する $2n$ 次多項式であるから，複素平面全体で定義されている．

問題 1.

- 数列 $\{p_n(1)\}_{n=0}^{\infty}$ は収束するか？
- $|z_0| < 1$ ならば $\{p_n(z_0)\}_{n=0}^{\infty}$ は $\dfrac{1}{1+z_0^2}$ に収束することを示せ．
- $|z_0| > 1$ ならば $\{p_n(z_0)\}_{n=0}^{\infty}$ は発散することを示せ．

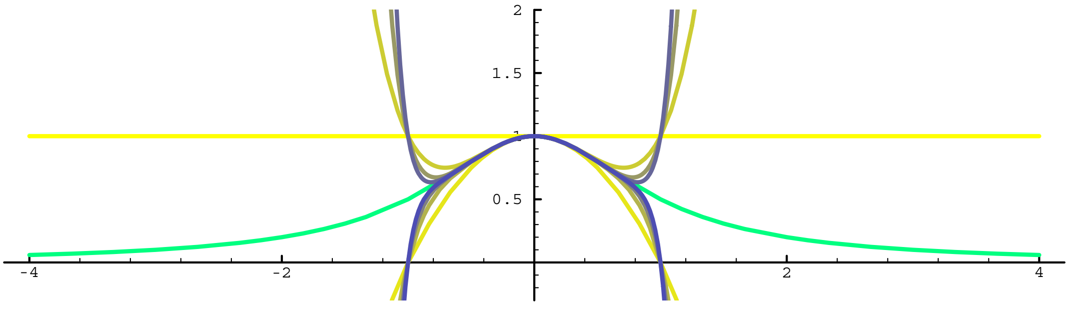
したがって，級数

$$\lim_{n\to\infty} p_n(z) = 1 - z^2 + z^4 - \cdots$$

の収束半径は 1 である．これは，$\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ という領域で，

$$1,\ 1-z^2,\ 1-z^2+z^4,\ 1-z^2+z^4-z^6,\ 1-z^2+z^4-z^6+z^8,\ \ldots$$

という数列が一斉に $\dfrac{1}{1+z^2}$ に収束している様子を表している．このように，$p_n(z)$ という「数列の集合体」は z を変数とする**関数列** (sequence of functions) とみなすことができる．さらに**領域 $\mathbb{D}$ に限ると**，$f(z) := \dfrac{1}{1+z^2}$ という関数に「収束している」と言っても良いだろう．事実，実数の部分だけ取り出してみると，下のような「グラフの収束」に見える．



このような状況を，次のように定式化する．

> 領域 D 上で定義された関数列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ が関数 $f : D \to \mathbb{C}$ に**各点収束** (pointwise convergence) するとは，次が成り立つときをいう：「任意の $z \in D$ に対し，$f_n(z) \to f(z)$ $(n \to \infty)$」 $\iff$ 「任意の $z \in D$ に対し，『任意の $\varepsilon > 0$ をとると，ある自然数 $N = N(z, \varepsilon)$ が存在して，$n > N$ ならば $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$』.」

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

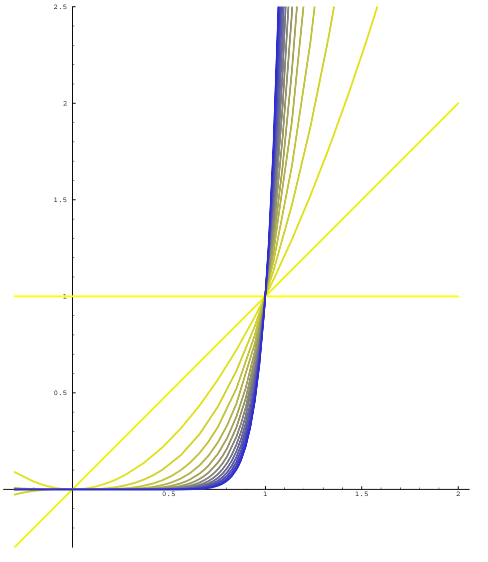
問題 2. 実数の関数列 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) = x^n$ と定める．

(1) この関数列は区間 $(-1, 1]$ 上で各点収束することを示せ．

(2) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定まる極限関数を求めよ．

(3) $x = 1/2$, $\varepsilon = 0.001$ のとき，$n > N$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ となる $N = N(x, \varepsilon)$ を見つけよ．

(4) $x = 1000/1024 = 0.976..$, $\varepsilon = 0.001$ の場合はどうか？ $\log_{10} 2 = 0.3010$ として計算せよ．



このように，関数列の各点収束極限は

- 定義域全体で存在するとは限らない（上の例：$\mathbb{R}$ から $(-1, 1]$ に狭まる）
- 関数列が連続でも，極限が連続とは限らない．

しかし，数学をやる上では

- 関数列 $f_n(x)$ が連続ならば極限関数 $f(x)$ も連続
- 関数列 $f_n(x)$ が微分可能ならば極限関数 $f(x)$ も微分可能で，$f'_n(x) \to f'(x)$
- 関数列が $f_n(x)$ 上で区間 I 上で積分可能ならば極限関数 $f(x)$ も区間 I 上で積分可能で，$\int_I f_n(x)dx \to \int_I f(x)dx$

が成り立つような，ハイ・クオリティーな収束があったほうが何かと便利であろう．それを実現するのが，**一様収束**の概念である．

一様収束

> 領域 D 上で定義された関数列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ が関数 $f : D \to \mathbb{C}$ に**一様収束** (uniform convergence) するとは，次が成り立つときをいう：「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 $N = N(\varepsilon)$ が存在して，『任意の $z \in D$ に対し $n > N$ ならば $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 』.」

各点収束の場合と見比べてみれば良い．N 秒後，数列 $\{f_n(z)\}_{n\geq 1}$ は一斉に $f(z)$ 中心半径 ε の円の中に入っているのである．

問題 3. 一様収束の定義の最後の部分を，コーシー列を使って書き直せ．

問題 4. 一様収束の定義を説明する図（実数＆複素数バージョン）を自分なりに描け．

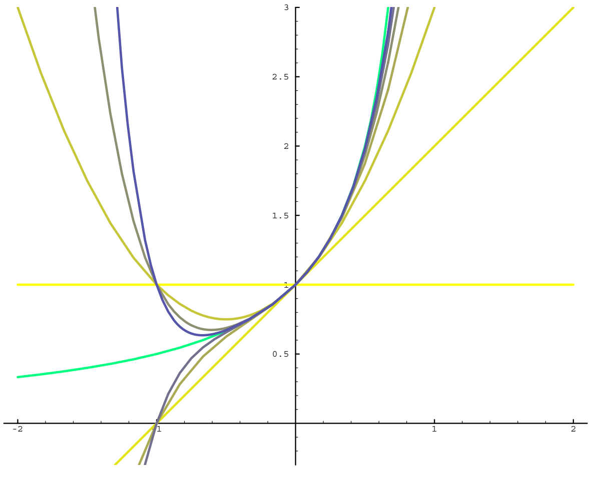
担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. $n \geq 0$ に対し，関数列 $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f_n(x) = 1 + z + \cdots + z^n$ で定める．

(1) この関数列は単位円板 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ 上で各点収束することを示せ．

(2) $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ で定まる極限関数を求めよ．

(3) $\mathbb{D}_r = \{|z| \leq r < 1\}$ と定める．このとき，$f_n(z)$ は $\mathbb{D}_r$ 上で一様収束することを示せ．



今週の宿題コーナー

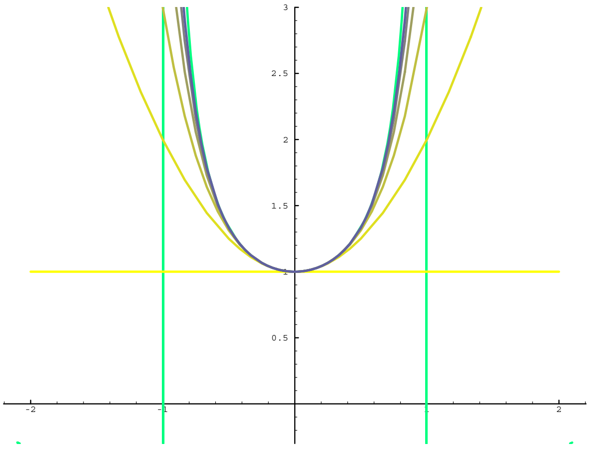
宿題 7-1　問題 1 との関連問題．複素数 Z に対し，

$$P_n(Z) := 1 + Z^2 + Z^4 + \cdots + Z^{2n}$$

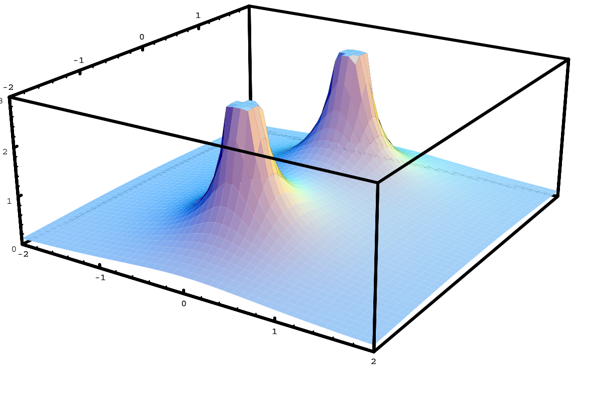
と定義する．

(1) $|Z| < 1$ ならば $\{P_n(Z)\}_{n=0}^{\infty}$ は関数 $F(Z) = \dfrac{1}{1 - Z^2}$ に収束することを示せ．

(2) $Z = iz$ とおく．このとき，$P_n(Z) = p_n(z)$，$F(Z) = f(z)$ を示せ．



すなわち，関数 $z \mapsto p_n(z)$ は $z \mapsto Z = iz \mapsto P_n(Z)$ という「90 度回転」するレンズを通し，さらに P_n というレンズを通すことに対応する．ちなみに右の曲面は，$z \mapsto |f(z)| = |F(Z)|$ のグラフである．二つの「火山」は $z = \pm i$ を頂点とする．$p_n(z)$ は $f(z)$ の 0 における $2n$ 次 Taylor 展開であるが，発散の様子まで忠実に近似してしまう．実はこのような「火山」までの距離が Taylor 展開の収束半径を決定する．



担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 7-2　実関数列 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定める：

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+1^2} + \frac{1}{x^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{x^2+n^2}$$

このとき，関数列 $f_n(x)$ はある R 上の関数 $f(x)$ に各点収束することを示せ.（Hint: 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，$\dfrac{1}{x^2+n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$. これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定まる級数は絶対収束する.）

今週のレポート問題

レポート問題 7-1　問題 1，宿題 7-1 ででてくる $p_n(z)$，$P_n(Z)$ はそれぞれ $\{|z| \le r < 1\}$ および $\{|Z| \le r < 1\}$ で一様収束することを示せ.

レポート問題 7-2　宿題 7-2 の $f_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ.（Hint: コーシー列を使う.）さらに，複素数関数 $f_n(z)$ は $\{|z| < r \le 1\}$ で一様収束することを示せ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ベクトル空間と基底

作成日：June 17, 2005　Version：1.2

お知らせ　来週 (6/24) は私が出張のため，休講です．
さて今日から，ベクトル空間をやります．

ベクトル空間の公理的定義

集合 V が $\mathbb{R}$ 上の**ベクトル空間** (vector space) であるとは，以下を満たすときを言う：

- 全ての $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ に対し，和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$ が一意的に (unique に) 定まる．
- 全ての $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in V$ に対し，スカラー倍 $\alpha\boldsymbol{a} \in V$ が一意的に定まる．
- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を任意の V の元, α, β を $\mathbb{R}$ の任意の元とするとき，

  (1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.
  (2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.
  (3) ある $\mathbf{0} \in V$ が存在して，$\mathbf{0}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}+\mathbf{0}$.
  (4) 各 $\boldsymbol{a} \in V$ に $\boldsymbol{a}' \in V$ が存在して，$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}' = \mathbf{0}$.
  (5) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$.
  (6) $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$.
  (7) $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$
  (8) $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

補足 1.　上の公理の $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ で置き換えれば $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間も定義される．例えば $V=\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．しかし，$V=\mathbb{R}^n$ としてもこれは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間ではない．例えば，スカラー倍 i をすると $\mathbb{R}^n$ からはみ出てしまう．

問題 1. (ベクトル空間の例)　$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる集合は沢山ある．それをチェックしてみよ．

(1) $\mathbb{R}^n := \{\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n) : a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}\}$.

(2) $\mathrm{Poly}_\infty := \{\boldsymbol{f}=f(x) : f(x)$ は実係数多項式 $\}$.

(3) $\mathrm{Poly}_d := \{\boldsymbol{f}=f(x) : f(x)$ は d 次以下の実係数多項式 $\}$.

(4) $\mathbb{R}^\infty := \{\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,\dots) :$ 各 $x_j \in \mathbb{R}\}$.

(5) $C^0(\mathbb{R}) := \{\boldsymbol{f}=f(x) : f(x)$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数 $\}$.

逆に，これら全てに共通の性質を列挙したものが，上のベクトル空間の定義ともいえる．

問題 2. $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間となる集合も沢山ある．いくつか例を挙げよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. (関数の和とスカラー倍)　($\mathbb{R}$ 上の) ベクトル空間 Poly_2 を考える．$\boldsymbol{u}_1 = u_1(x) = 1$ (定数関数)，$\boldsymbol{u}_2 = u_2(x) = x$，$\boldsymbol{u}_2 = u_2(x) = x^2$ とおくとき，次のベクトルをグラフとして図示せよ．

(1) $\boldsymbol{f}_1 = -2\boldsymbol{u}_1$　(2) $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2$　(3) $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3$　(4) $\mathbf{0}$ (ゼロベクトル)

今，任意のベクトル $\boldsymbol{f} = f(x) \in \mathrm{Poly}_2$ に対し，ある実数の組 a_1，a_2，a_3 がただ 1 つ存在して，$\boldsymbol{f} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + a_3\boldsymbol{u}_3$ と書けることは明らかであろう．(実際，$f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$ と書けるから．)

問題 4. 一方 $\boldsymbol{v}_1 = v_1(x) = 1$，$\boldsymbol{v}_2 = v_2(x) = x - 1$，$\boldsymbol{v}_3 = v_3(x) = (x-1)^2$ とおくとき，ある実数の組 b_1，b_2，b_3 がただ 1 つ存在して，$\boldsymbol{f} = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + b_3\boldsymbol{v}_3$ と書けることを示せ．

基底と座標系

問題 5. (準備)　下の図のように，点 O と点 P が与えられている．

(1) 点 O を原点と定め，これを始点とする同一直線上にないベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ を自由に書け．

(2) 点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ なる実数 a_1，a_2 が**ただひと組**定まるはずである．そのような a_1，a_2 の大体の値を求めよ．

(3) 以下で定まるこのプリント上の部分集合を図示せよ．

(a) $S_1 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : s = 2\}$

(b) $S_2 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : t = s + 1\}$

(c) $S_3 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : s \geq 0,\ t \geq 0,\ s + t = 1\}$

(d) $S_4 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : s^2 + t^2 = 1\}$

基底と座標

上の問題で，Aretha さんはベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を選び，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \;=\; a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 \;=\; (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

を得た．これは,「$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ **というベクトルを単位系として計った点 P の座標が** $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$」と解釈できる．このように，平面に座標軸を与えるベクトルの組（この場合 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ ）を平面の**基底** (basis) と呼ぶ．さて一方，Otis さんは別の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を選び，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \;=\; b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 \;=\; (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

を得た．このとき，明らかに

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \;=\; (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \;=\; (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

であるから，**同じベクトルの異なる表現**が得られた．すなわち,「同じものを測っているのに，異なる基底（$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$）を用いたために，異なる座標値（$\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$）が得られた」と解釈できる．

ちょっとたとえ話を．われわれは長さを測るとき，必要に応じて mm, cm, m, km などを使いわける．例えば一円玉の直径 L は $L = 2\mathrm{cm} = 20\mathrm{mm}$ と，**単位によって異なる表現を持つ**．同じ長さでも，異なる単位 (cm と mm) に応じて異なる数値 (2 と 20) をとるのである．このとき，$\mathrm{cm} \times \frac{1}{10} = \mathrm{mm}$ であり，$2 \times 10 = 20$ であるから，単位が $\frac{1}{10}$ 倍されると，数値は 10 倍されることが分かる．

単位を変えれば数値が変わるように，基底を変えれば座標値も変わる．上はともに同じベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表すが，基底によって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \;=\; (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \;=\; (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \;=\; (\text{基}, \text{底})\begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix}$$

と異なる表現をもつわけである．

問題 6. (異なる基底の関係) Otis の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に対し，Aretha の基底を用いて

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$$

という関係が与えられたとする．このとき，上の $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の間の関係式を与えよ．

一般のベクトル空間の基底

一般に（$\mathbb{R}$ 上の）ベクトル空間 V が与えられたとき，この時点では白紙のような，真っ白な空間にすぎない．しかし，地球に緯度・経度による座標が入っているように，詳しく V を解析するには，座標を入れたほうが都合が良いに決まっている．

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が以下を満たすとする：任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対し実数の組 $(a_1, \ldots, a_n)$ が**ただ一組**存在して，

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書ける．
このとき，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を V の**基底**であるという．さらに，このような基底が存在する V を n **次元ベクトル空間**と呼ぶ．

真っ白なベクトル空間に与えられた「単位系」が基底であり，我々はそれを基準にして座標軸を定め，V の各点に座標を入れるのである．また，この座標によって我々は V を $\mathbb{R}^n$ とみなすレンズを得たことになる：

$$V \ni \boldsymbol{a} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

問題 7. $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n \in V$，$\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\alpha\boldsymbol{a}$ に対応する $\mathbb{R}^n$ の元は何か？

このとき，$\mathbb{R}^n$ は V をある基底で計測し，数値化した地図のようなものと考えてもよい．地図は当然，単位系（基底）によって変化する．

問題 8. (具体例) $V = \mathrm{Poly}_2$ を考える．

(1) $\boldsymbol{u}_1 = u_1(x) = 1$, $\boldsymbol{u}_2 = u_2(x) = x$，$\boldsymbol{u}_2 = u_2(x) = x^2$ とおくとき，これらは $V = \mathrm{Poly}_2$ の基底になっていることを確かめよ．

(2) $\boldsymbol{v}_1 = v_1(x) = 1$, $\boldsymbol{v}_2 = v_2(x) = x-1$，$\boldsymbol{v}_3 = v_3(x) = (x-1)^2$ も基底になっていることを確かめよ．

(3) （異なる地図）$\boldsymbol{f} = f(x) = -2 + x^2$ とおく．このとき，基底 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ で測った $\boldsymbol{f}$ の座標値と，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ で測った $\boldsymbol{f}$ の座標値を求め，比較せよ．

基底の変換

問題 9. (上の問題の続き) 上で与えられた V の二つの基底に対し，

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)P = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3)$$

が成り立つような 3 次正方行列 P を求めよ．また，任意のベクトル $\boldsymbol{f} = f(x) \in V = \mathrm{Poly}_2$ に対し

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ならば

$$P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

> n 次元ベクトル空間 V と任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ をとる．このとき，V の異なる基底 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ に対し，
>
> $$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\text{基}, \dots, \text{底})\begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix}.$$
>
> と表されたとする．このとき，ある n 次正則行列 P が存在して，
>
> $$(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)P = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n), \qquad P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

基底の変換も，長さの単位変換と考え方はまったく同じである．単位が k 倍されると数値が $1/k$ 倍されるように，基底が「P 倍」されると座標値は「P^{-1} 倍」される．

今週 (6/17) の宿題コーナー

宿題 8-1　数列の集合

$$V_1 \ = \ \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$$

が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になることを示せ.（公理を満たすことを全てチェックする.）一方，数列の集合

$$V_2 \ = \ \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_{n+1} = 2a_n + 1\}$$

は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間でない ことを示せ.（何か反例を挙げて公理が満たされないことを示せ．）

宿題 8-2　ベクトル空間 $V = \mathrm{Poly}_3$ に対し，自然な基底 $\boldsymbol{u}_1 = u_1(x) = 1$, $\boldsymbol{u}_2 = u_2(x) = x$, $\boldsymbol{u}_3 = u_3(x) = x^2$, $\boldsymbol{u}_4 = u_4(x) = x^3$ をとる．このとき，$\boldsymbol{v}_1 = v_1(x) = 1$, $\boldsymbol{v}_2 = v_2(x) = x-1$, $\boldsymbol{v}_3 = v_3(x) = (x-1)(x-2)$, $\boldsymbol{v}_4 = v_4(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ も $V = \mathrm{Poly}_3$ の基底になることを示せ．また，

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4)P = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4)$$

となるような 4 次正則行列を求めよ．また，P^{-1} も求めよ．

今週 (6/17) のレポート問題

レポート問題 8　ベクトル空間の基底と次元の定義に基づき，$\mathbb{R}^{\infty}$ が任意の $n \geq 0$ に対し n 次元ベクトル空間でない ことを証明せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

一次独立性・部分ベクトル空間など

作成日：July 1, 2005　Version：1.2

今後の予定

- 7/8（金）：宿題なし．線形写像と次元定理
- 7/15（金）：小テスト，宿題あり．内積と正規直交基底
- 7/22（金）：宿題なし．レポート，宿題再提出の締め切り日．期末試験．
- 7/29（金）11:30-13:00：Cafe David（オフィスアワー）最終日．レポート，宿題等返却．この日に取りに来れない場合は**事前にメールで連絡の上**，私の office(A439) に取りに来てください．8 月末日までに取りに来ない場合はこちらで処分します．

基底になる，ならないの判定

真っ白なベクトル空間に座標を入れるのが基底の役割であった．今日は基底の性質を掘り下げてみよう．以下特に断らない限り，V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．

基底の定義：$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n \in V$ が次を満たすとする：『任意の $\boldsymbol{a}\in V$ に対し実数の組 $(a_1,\ldots,a_n)$ が**ただ一組**存在して，

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$$

と書ける．』このとき，$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ を V の**基底**であるという．

さらに，このような基底が存在する V を n **次元ベクトル空間**と呼ぶのであった．

問題 1. $V=\mathrm{Poly}_2$ 上のベクトルの組を以下のように定める：

$$\begin{aligned}
\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\ ,\boldsymbol{e}_3\} &= \{1,\ x,\ x^2\}\\
\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\ ,\boldsymbol{u}_3\} &= \{1,\ x-1,\ (x-1)^2\}\\
\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\} &= \{x,\ 1+x^2\}\\
\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\ ,\boldsymbol{w}_3,\ \boldsymbol{w}_4\} &= \{1,\ 1+x,\ 1-x,\ 1-x^2\}
\end{aligned}$$

(1) これらベクトルの組をそれぞれ用いて，$\boldsymbol{f}=2-2x+x^2\in V$ を「1 次結合」の形で表せ．例えば，適当な実数の組 (d_1,d_2,d_3,d_4) を見つけて，

$$\boldsymbol{f} = d_1\boldsymbol{w}_1+d_2\boldsymbol{w}_2+d_3\boldsymbol{w}_3+d_4\boldsymbol{w}_4$$

の形で書き表せ．

(2) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ および $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3,\boldsymbol{w}_4\}$ の中で，V の基底になっているものを選べ．基底とならないものについては，その理由を考えよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

張る空間

V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N$ に対し，ある実数の組 $a_1, \dots, a_N$ が存在して（**←ただ 1 組とは限らない**）

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_N\boldsymbol{v}_N$$

と書けるベクトルの全体を $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N$ **の張る（部分）空間**と呼び，$\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N \rangle$ もしくは $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N\}$ などと表す．

問題 2.

(1) 線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ が基底ならば，$V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ であることを示せ．

(2) 一般に，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N \in V$ が一次独立でも，$V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N\}$ でなければ基底とはなり得ないことを示せ．

$V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N\}$ であることは，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N$ が V の座標系を与えるための必要条件である．したがって，基底となるための必要条件である．

問題 3. 再び $V = \mathrm{Poly}_2$ を考える．上の問題で定義した $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ は一次独立だが $V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ と**ならない**ことを確認せよ.（したがって，基底となり得ない.）また，$\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{w}_3$，$\boldsymbol{w}_4$ は $V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4\}$ を満たすことを確認せよ．

一次独立性

N を自然数とする．V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N$ に対し，ある実数 $a_1, \dots, a_N$ が存在して

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_N\boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{0}$$

と書けたと仮定する．これら係数 $a_1, \dots, a_N$ が $a_1 = \cdots = a_N = 0$ と**ただ一組に**決まるとき，$a_1, \dots, a_N$ は**一次独立（線形独立）**であると呼ばれる．

実は一般に，不等式 $N \le n =$（V の次元）が成り立つ.（レポート問題）

問題 4.

(1) 線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ が基底ならば，これらは一次独立であることを示せ．

(2) あるベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ について，Aretha が基底 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ を用いて座標値を求めたところ，$(a_1, \dots, a_n)$ となった．一方，Otis が同じ基底 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ を用いて，別の方法を用いて座標値を求めたところ，$(b_1, \dots, b_n)$ となった．このとき，実は $a_i = b_i$ が全ての $i = 1, \dots, n$ で成り立つことを，$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ の一次独立性を用いて証明せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ベクトルの組の**一次独立性は，座標値がただ 1 つに定まるための必要条件である**．
すなわち，基底となるための必要条件である．

問題 5. 再び $V = \mathrm{Poly}_2$ を考える．上の問題で定義した $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ は一次独立となることを確認せよ．また，$\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{w}_3$，$\boldsymbol{w}_4$ は一次独立ではないことを確認せよ．(したがって，基底となり得ない.)

基底の特徴づけ

問題 6. 次の枠内の命題を証明せよ．

基底の定義の言い換え：V のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が基底であることと，

- $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が一次独立であり，かつ
- $V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$

が成り立つことは同値（互いに必要十分条件）である．

部分ベクトル空間

V の部分集合 W が V の**部分ベクトル空間**であるとは，

- 任意の $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} \in W$ に対し $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$，かつ
- 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と任意の $\boldsymbol{a} \in W$ に対し，$\alpha\boldsymbol{a} \in W$

であるときをいう．

部分ベクトル空間は，それ自体が閉じたベクトル空間になっている．

問題 7. 上の $W \subset V$ に対し，$\mathbf{0} \in W$ を示せ．

問題 8. 以下のベクトル空間 V とその部分集合 W について，それが部分ベクトル空間かどうか判定せよ．

(1) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{\boldsymbol{x} \in V : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$. ただし A は n 次正方行列，$\boldsymbol{b} \in V$.

(2) $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^\infty : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$.

(3) $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^\infty : a_{n+1} = 2a_{n+1} + 1\}$.

(4) $V = \mathrm{Poly}_d$, $W = \{\boldsymbol{f} = f(x) : f(x) = f(-x)\}$.

(5) $V = C^0(\mathbb{R})$, $W = \{\boldsymbol{f} = f(x) : \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = f(x)\}$.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 9. ベクトル空間 $V = C^0(\mathbb{R})$ の部分集合として $W = \mathrm{Span}\{1,\ \cos x,\ \cos^2 x\}$ を考える．

(1) W は V の部分ベクトル空間であることを証明せよ．

(2) $1,\ \cos x,\ \cos^2 x$ は W の基底となることを証明したい．それには，$1,\ \cos x,\ \cos^2 x$ が一次独立であることを示せば十分である．なぜか？

(3) $1,\ \cos x,\ \cos^2 x$ が一次独立であることを示せ．(Hint: $C = \cos x$ と置くと，$a_1 + a_2 \cos x + a_3 \cos^2 x \equiv 0$（定数関数）$\Longrightarrow a_1 + a_2 C + a_3 C^2 = 0$ が全ての $-1 \leq C \leq 1$ で成り立つ.）

今週 (7/1) の宿題コーナー

宿題 9-1

(1) V の任意のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N$ に対し，$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N\}$ は V の部分ベクトル空間であることを証明せよ．

(2) V のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N$ が一次独立であれば，それは $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N\}$ の基底となることを示せ．

宿題 9-2　ベクトル空間 $V = C^0(\mathbb{R})$ の部分空間を以下のように定める．

- $V_1 = \mathrm{Span}\{1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos^3 x\}$
- $V_2 = \mathrm{Span}\{1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x\}$

(1) $1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos^3 x$ は V_1 の基底になっていることを示せ．(Hint. 上の問題より，一次独立性を示せば十分）

(2) $V_1 = V_2$ を示せ（$V_1 \subset V_2$ かつ $V_1 \supset V_2$ を示す）．また，

$$(1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos^3 x)P = (1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x)$$

となる 4 次正方行列 P を求めよ．これは正則か？

(3) $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x$ も $V_1 = V_2$ の基底になっていることを示せ．

今週 (7/1) のレポート問題

レポート問題 9　ベクトル空間 V の次元を $n = \dim V$ で表す．

(1) V 内のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N$ が一次独立であれば，$N \leq \dim V$ が成り立つことを証明せよ．

(2) V 内のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N$ が $V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N\}$ を満たせば，$N \geq \dim V$ が成り立つことを証明せよ．