担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

演習について

作成日：April 24, 2008　Version：1.1

担当教官： 川平　友規（かわひら　ともき，　助教，
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses.htm）

担当 TA：
齋藤　克典（さいとう　かつのり，M2）
堀　智（ほり　さとる，M2）

演習の進め方： 毎回，問題のプリントを配布します．私（川平）が基本事項を確認したあと，問題を指定し，各自ノートに解いてもらいます．その後，私が黒板で解説する，という流れです．配布した問題のすべてを演習で扱うとは限りません．

演習で取り上げるテーマ： 数理学科の 2 年生として必要な数学の基礎知識，数学の記述能力を身につけることが目標です．特に，

- ϵ-N，ϵ-δ 論法の基礎
- 集合と写像の基礎（単射，全射，連続性など）
- n 次元での線形写像（1 次変換），基底の概念
- 抽象ベクトル空間（数列のなすベクトル空間など）
- 命題の証明とその記述法

を**直感的に理解し，かつ数学的に整備された形で記述できるようになる**ことを目標とします．

演習と講義は独立したものと考えられています．したがって，講義で扱わない内容を演習で扱うこともありますし，逆もありえます．

単位・成績： 成績に関係のある要素は，**出席回数，小テストの点数，宿題・レポートの提出（とその内容），期末テストの点数**です．成績の優・良・可は以下の基準で定めます．

- 上にあげた 4 つの要素のうち，出席，小・中テスト，宿題・レポートを計 60 点（便宜的に**平常点**とよぶ），期末テストを 40 点とし合計 100 点満点により成績を点数化する．
- 成績は 50 点未満を不可，50 − 69 点を可，70 − 84 点を良，85 点以上を優とする．

したがって，期末テストを受けるだけでは良い単位が取れません．出席，小テスト，宿題と，バランスよくこなしましょう．

出席： 授業の前半に出席を取ります．遅刻・欠席は，事前に email 等で私に連絡した場合に限って，2 回まで無条件に加点します．

小テストと中テスト： 皆さんの理解度を確認するため，前期の間に 30 分程度の小テスト 2 回，90 分程度の中テストを 1 回行います．出題内容は，演習でやった問題をベースにした基本的な問題です．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題： 宿題はほぼ毎回出題されます．提出様式は，**必ず A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙を使用し，表紙をつけ，そこに名前，学籍番号，解いた問題の番号（『宿題 x-x』），提出日を記入**してください．また，必ず**左上をホチキスでとめて**提出してください．

宿題の提出期限は次の演習の開始時間まで，提出場所は教室（理 1-509）です．提出期限に間に合わなかった宿題は後日提出してもかまいませんが，少し減点します．宿題の点数は再提出によってリカバーできます．もし何らかの事情で授業時に提出できない場合，事前に email 等で連絡の上．(1) 川平の office(A439) に直接持ってくるか，(2) 数理学科事務室に提出してください．

レポート： 授業で扱えなかった問題や，やや進んだ内容の問題をレポート課題として指定することがあります．レポートの提出は任意ですが，提出されたレポートの質を判断して，平常点にボーナス加点します．レポートには提出期限を設けません．提出場所は教室とします．提出様式は宿題の提出様式に準じます.（A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙使用，表紙をつける，etc.）ただし，たとえ同じ日に提出する場合でも，**レポートと宿題は必ず分けて提出してください．**（採点者が異なります.）

授業でやらなかった問題を自発的に解いた場合，レポートとして提出してください．

オフィスアワー： 授業中，授業後の質問は大歓迎です．それ以外の時間に質問したい場合は，オフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を利用してください．私のオフィスアワーは**毎週金曜日 12:00-13:00，場所は理学部 1 号館 2 階エレベーター前**（合同オフィスアワー “Cafe David”）です．私とその他のスタッフも待機しているので，自由に質問してください．金曜日以外の昼休みにも Cafe David は開店しているので，どんどん活用しましょう．難しいと感じられる問題は自力解決にこだわりすぎず，ヒントをもらいながらスマートに勉強をこなしてください．

上記以外の時間に質問したい場合は，必ず事前に email 等で appointment を取るようにしてください．

期末テスト： 「この程度の問題ができないのに 3 年生に上がってもらっては困るし，本人のためにもならない」という気持ちを込めて，基本レベルの問題を期末試験として出題します．

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体	(2) $\mathbb{R}$: 実数全体	(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体	(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体	(6) $x \in \mathbb{R}$: x は実数

ギリシャ文字

(1) α: アルファ	(2) β: ベータ	(3) γ, Γ: ガンマ	(4) δ, Δ: デルタ	(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ	(7) η: エータ	(8) θ, Θ: シータ	(9) ι: イオタ	(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ	(12) μ: ミュー	(13) ν: ニュー	(14) ξ, Ξ: クシー	(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ	(17) ρ: ロー	(18) σ, Σ: シグマ	(19) τ: タウ	(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ	(22) χ: カイ	(23) ψ, Ψ: プサイ	(24) ω, Ω: オメガ	

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ϵ と N

作成日：April 24, 2008 Version：1.1

今回は数列の収束を厳密に扱う方法（ϵ-N 論法，単に ϵ 論法とも呼ばれる）を練習します．一見難しそうですが，誰にでも理解できるので安心してください．そのまえに…

今後の予定

- 5/2：Cauchy 列
- 5/9：級数の収束

すべて $\forall$ と ある $\exists$ の使い方． 数学では「全ての…について…である」とか,「ある…が存在して…が成り立つ」という形の文章を多用する．これをそのまま板書するのはしんどいので,「全ての x について」を $\forall x$,「ある y が存在して」を $\exists y$ などと略記する． たとえば,「任意の正の数 x に対してある整数 n が存在して，$10^n \le x \le 10^{n+1}$ を満たす」という文章は

$$\forall x > 0,\ \exists n \in \mathbb{Z},\quad 10^n \le x \le 10^{n+1}$$

などと略記する．とくに，$x > 0$ と不等号を書くと $x \in \mathbb{R}$ であることは暗に示されている．

問題 1. 以下の文章を上の $\forall$, $\exists$ を用いた形に書き直せ．さらにその真偽を判定せよ．

(1) 任意の正の数 x に対しある正の数 y が存在して，$y = x^2$ を満たす．

(2) ある実数 x とある実数 y が存在して，$x^2 + y^2 + 1 = 0$ を満たす

問題 2. 逆に，以下の式を文章化せよ．また，その真偽を判定せよ．

(1) $\forall p \in \mathbb{Z},\quad \exists q \in \mathbb{Q},\quad pq = 1.$

(2) $\exists x \in \mathbb{R},\quad x^2 + x < 0.$

数列の収束は ϵ-N で

高校では数列の収束を「a_n は**限りなく** 2 に近づく」などと表現した．大学では，いや厳密には，次のように表現する：

ある数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が数 α に**収束する** (converge) とは,

> 任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して，$n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \epsilon$ が成り立つ

ときを言う．このとき α を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限** (limit) と呼ぶ．以上の状況を，記号では

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{もしくは} \quad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

と表す．

注意：**任意の** $\epsilon > 0$ という言葉は **任意に小さい** $\epsilon > 0$ と心の中で読みかえるべし．

問題 3.

(1) 上の収束の定義を $\forall$, $\exists$ などを用いて書き直せ．

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数列のとき，上の定義を図でイメージせよ．

(3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数列のとき，上の定義を図でイメージせよ．

問題 4. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \dfrac{n-\sqrt{2}}{n}$ で定める．以下の ϵ に対し,「$n > N$ ならば $|a_n - 1| < \epsilon$ を満たす」ような N をひとつ求めよ．

(1) $\epsilon = 5$　(2) $\epsilon = 1$　(3) $\epsilon = 0.1$　(4) $\epsilon = \frac{1}{1000}$　(5) $\epsilon = \epsilon_0 > 0$

これを用いて，$a_n \to 1$ $(n \to \infty)$ を示せ．

「近づく（近い)」という概念は相対的なもので，距離を比較する対象があって初めて成立する概念である．距離を比較するとは，二つの数の大小関係を見ることである．したがって,「限りなく近づく」という言葉を数学的に明確に表現しようとすると,「どんなに小さい数 $\epsilon > 0$ と比較しても，a_n と α の距離はそれよりも小さく出来る」，という形式になってしまう．

極限の和と和の極限

二つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ と仮定する．このとき,

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(3) $\beta \neq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

問題 5. 上の (2) を用いて，次を示せ：

(2)' C を定数とするとき，$\lim_{n\to\infty} (Ca_n) = C\alpha$.

問題 6. 上の (1), (2) を証明せよ．(3) は宿題．

問題 7. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，ϵ-N 論法を用いて

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \alpha$$

を示せ．

問題 8. 二つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ が存在したと仮定する．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在するとは限らないことを示せ．

今週の宿題・レポート

宿題 1-1. 以下の文章を上の $\forall$, $\exists$ を用いた形に書き直せ．さらにその真偽を判定せよ．

(1) 任意の整数 m に対しある整数 n が存在して，$3n + 4m = 1$ を満たす．

(2) ある正の実数 x が存在して，$2x - 1 > 0$ を満たす．

(3) 任意の実数 x と任意の実数 y に対し，$x^2 + y^2 \geq 2xy$ が成り立つ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 1-2. 二つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ とそれらの商からなる数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ について，次の問いに答えよ：

(1) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ が存在したと仮定する．このとき，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ が存在するとは限らない．その反例をひとつ以上あげよ．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$ と仮定する．このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ を示せ．

宿題 1-3. 複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．$z_n := x_n + y_n i$ と置くと，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列である．このとき，以下を示せ：

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれある実数に収束すれば，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ もある複素数に収束する．(Hint: 直角三角形の「斜辺の長さ」は「他の 2 辺の長さの和」より短し）

(2) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数に収束すれば．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ もそれぞれある実数に収束する．(Hint: 直角三角形の斜辺は他の辺より長し）

レポート 1-1.

(1) 複素数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{C}$ を満たしたと仮定する．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

を示せ．

(2) $a_n > 0$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha > 0$ であるとき，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \alpha$ を示せ．

レポート 1-2. 複素数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，以下の問いに答えよ．

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ はともに存在するが，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ と $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ はともに存在しない例を構成せよ．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ がともに存在すれば，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ と $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ はともに存在することを示せ．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ がともに存在するとき，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ と $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ の存在は言えるかどうか考察せよ．

レポート提出時の注意　レポートは 1 問だけでも提出可です．解き直して再提出する場合は，前に提出した分とその差分（解き直した問題・小問部分の答案のみ）を一緒にホチキスで留めてから提出してください．表紙には「何月何日再提出」と記入してください．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

コーシー列

作成日：May 2, 2008　Version：1.1

コーシー列 (Cauchy sequence) を扱う練習をします．コーシー列は実数の連続性に関わる非常に重要な数学的対象です．

今後の予定

- 5/9：級数の収束
- 5/16：イプシロンとデルタ，第１回小テスト，中間講義アンケート

Cauchy 列

（複素）数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは，「任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して，n，$m > N$ ならば $|a_n - a_m| < \epsilon$ とできる」ときを言う．
このとき，以下が成り立つ：

(C1) **コーシー列ならば，収束列である**．すなわち，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列ならば，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を持つ．

(C2) **逆に，収束数列はコーシー列である．**

すなわち，**収束数列＝コーシー列**である．したがって，収束性をチェックするのときには極限値が何になるか，事前に知る必要はない．ただ，コーシー列であることをチェックすれば良い．

問題 1. 上の (C2) を示せ．

問題 2. 上の (C1) が実数列の場合に正しいと仮定する．このとき，複素数列についても (C1) は正しいことを示せ．(先週の宿題 1-3 の結果を使ってよい．)

問題 3. (完備性) 有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ をコーシー列とする．このとき，極限は有理数とは限らないことを示せ．

問題 4. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \dfrac{1}{n}$ で定める．これはコーシー列になっていることを確認せよ．では，複素数列として $a_n = \dfrac{i^n}{n}$ と定めた場合はどうか？

問題 5. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を漸化式

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$$

で定める．

(1) $n \geq 3$ のとき，$a_n - a_{n-1} = (-1/2)(a_{n-1} - a_{n-2})$ を確かめよ．また，その幾何学的な意味を考えよ．

(2) $|a_{200} - a_{100}| \leq (\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{100}})|a_{100} - a_{99}|$ を示せ．

(3) $|a_{100} - a_{99}| = \frac{1}{2^{98}}|a_2 - a_1| = \frac{3}{2^{98}}$ を示せ．

(4) 以上の議論を応用して，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であることを示せ．また，その極限値は何か？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 6. (コーシー列の応用) サイコロを何回も振って，n 回目に出た目を d_n としよう．このとき，有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$r_n \ := \ 0.d_1 d_2 \cdots d_{n-1} d_n \quad (\text{十進小数})$$

として定める．このとき，r_n は必ず極限 γ を持つことを示せ．(ちなみに，γ が有理数となる確率は？)

今週の宿題・レポート

宿題 2-1. 複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．極座標を考え，$z_n := r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ と置く．ただし，$0 \le \theta_n < 2\pi$ とする．(ただし，$z_n = 0$ のときは $r_n = 0$，$\theta_n = 0$ とせよ.) このとき，数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列である．以下の問いに答えよ：

(1) 任意の θ，θ' に対し，

$$|(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta' + i\sin\theta')| \le |\theta - \theta'|$$

であることを幾何学的に説明せよ．(Hint: 東京からサンフランシスコ，船で行くのと，トンネルを掘って地中をまっすぐ進むのとどっちが近いか？)

(2) $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれある実数に収束すれば，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ もある複素数に収束することを示せ．

(3) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数に収束すれば．$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数に必ず収束するが，$\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するとは限らない．なぜか？そのような例をひとつ挙げよ．

宿題 2-2. $0 < r < 1$ とし，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ をある実数列とする． このとき，数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$b_n := a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n r^n$$

で定める．以下の問いに答えよ：

3 級： $a_n = 10000$ (一定) のとき，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ．

2 級： $0 < a_n < 10000$ のとき，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ．

1 級： $|a_n| < 10000$ のとき，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ．

初段： $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は複素数列とし，$|a_n| < M$ なる正の数 M が存在するとき，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ．

いずれも場合も b_n はコーシー列であるから，収束列である．

宿題 2-3. (来週への準備) 実数 $\alpha > 0$ に対し，数列 a_n を

$$a_n \ := \ 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$$

で定める．このとき，$\alpha > 1$ ならば a_n は収束し，$\alpha \le 1$ ならば無限大に発散することを示せ．(Hint．積分を用いる.)

2 段：レポート問題 2-1. ある $R > 0$ に対し，z を $|z| < R$ なる複素数とする．さらに，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を複素数列とし，$|a_{n+1}/a_n| \le 1/R$ を満たすと仮定する．このとき，

$$b_n := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

によって定まる複素数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．(Hint: $|z|/R < 1$ を利用して，初段問題に帰着させる.)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

級数の収束

作成日：May 9, 2008　Version：1.2

無限級数 (series) は解析学で最も基本的な対象のひとつです．取り扱いには注意が必要ですが，わずかなコツを掴めば大体のケースは処理できるようになります．特に，絶対収束を見極めるセンスが重要です．

今後の予定

- 5/16：ϵ と δ，第 1 回小テスト，中間講義アンケート
- 5/23：ϵ と δ（其の弐），関数の一様収束
- 5/30：中テスト

級数＝折れ線

ある数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$（実数列 or 複素数列）があるとき，**（無限）級数** (series) を，式として以下のように定める：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \;:=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \;=\; \lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n).$$

このとき，**右の極限が存在するとは限らない**のは $a_n = n$ などとおけば明らかであろう．極限が存在するとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する** (converge) といい，存在しないとき**発散する** (diverge) と言う．

これから実数の級数と複素数の級数を同時に扱うが，実数は複素数なので**複素数の級数で成り立つことは実数の級数でもなりたつ**ことに注意しよう．

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とは，複素平面で考えると 0 から $+a_1$ 進み，さらに $+a_2$ 進み，さらに $+a_3$ 進み$\cdots$ と無限に続けたものだと考えられる．これらを矢印で結び折れ線を描けば，その様子が幾何学的に見て取れるようになる：

問題 1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を以下のように定める．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散を直感的に判定せよ．

(1) $a_n = (-1)^{n+1}$　(2) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$　(3) $a_n = n \cdot i^n$　(4) $a_n = \dfrac{i^n}{2^n}$

問題 2. 上の問題の各 a_n で，級数に対応する折れ線のトータルの長さはどうなるか？[1]

級数に対応する折れ線のトータルの長さが有限（もしくは，上に有界）ならば，その級数は収束するに違いない（というか，発散のしようがない）ことは直感的に明らかであろう．折れ線のトータルの長さは級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \;=\; |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

で表されるから，次が成立する：

定理 A（絶対収束）　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が有限であれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

[1] Hint: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$．ちなみに $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$（発散），$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$（Leibniz 級数）であった．

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3.（実数の連続性の公理） $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が上に有界であることと，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束することは同値であることを示せ．

級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は**絶対収束** (absolute convergence) すると呼ばれる．上の定理は「絶対収束する級数は収束する」と言い換えられる（←覚えておこう）．

注意 この定理の逆は成立しない．すなわち，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **が収束するからと言って，** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **が絶対収束するとはかぎらない**．例えば，

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2$$

であるが，これは絶対収束していない．すなわち，長さの無限大の折れ線が $\log 2$ に向かって折りたたまれていく感じである．

問題 4. 収束はするが絶対収束しない級数の例を他に挙げよ．

問題 5. 上の定理を用いて，問題 1 の (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}$ が収束することを示せ．また，その値を求めよ．

問題 6. 級数 $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots$ は $\alpha>1$ のとき収束し，$\alpha\le 1$ のとき発散する．これを利用して，以下の問に答えよ．[2]

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ は収束するが $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束しないような例を作れ．

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$ と $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{(2n-1)^2}$ はそれぞれ収束することを示せ

(3) **発展：** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^\alpha}$ が収束するような $\alpha\in\mathbb{R}$ の範囲を求めよ．

べき級数（整級数）

問題 7.（余弦 Taylor 展開） 任意の複素数 z を固定する．このとき，上の定理を用いて，

$$C(z) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$$

が収束することを示したい．明らかに，$z\neq 0$ のとき証明すれば十分である．$n=0,1,2,\ldots$ に対し，$c_n := (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ と定める．

[2]Hint: (2) $\frac{1}{(2n+1)^3}<\frac{1}{(2n)^3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{n^3}$. (3) $p>0$ のとき，$(\log n)/n^p\to 0$ $(n\to\infty)$.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(1) $n \geq |z|$ ならば $|c_{n+1}| < \dfrac{|c_n|}{4}$ とできることを示せ.(**発展問題**：自然数 N を十分大きくとると，$n > N$ のとき $|c_{n+1}| < \dfrac{|c_n|}{10000}$ とできることを示せ.)

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ は収束することを示せ．したがって $C(z)$ は収束する.

まめしちき　x が実数のとき，$C(x) = \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots$ である.

注意：複素数 z に対しても，$\cos z := C(z)$ と定義できる．しかしこの関数は各点での値が与えられただけで，連続性や微分可能性について何も保証されていないことに注意しよう．これらは別個に証明する必要がある.

問題 8. 複素数 z を固定するごとに定まる級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

は $|z| < 1$ で収束し，$|z| \geq 1$ では発散し意味を持たないことを示せ．また収束する場合，その極限は何か？

$z \in \mathbb{C}$ に対し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の形の級数を**べき級数** (power series) と呼ぶ．また,「$|z| < R$ のときべき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ は収束する」と言えるような最大の R を**収束半径** (radius of convergence) という．例えば $C(z)$ の収束半径は無限大，上の $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の収束半径は 1 である.

今週の宿題・レポート

来週（5/16）は授業のはじめに 30 分間の小テストをやるので，テスト勉強を今週の宿題とします．自筆ノート（コピー不可）に限り参照を許可するので，要点をまとめた手書きノートを作ってくると良いでしょう.(ノートの提出，採点はしません.)

レポート 3-1（リーマンのゼータ関数）

n を自然数，$s = \sigma + ti$ を複素数（σ, t は実数）とする．このとき，

$$n^s := n^\sigma(\cos(\log n^t) + i \sin(\log n^t))$$

と定義する．さらに，複素数 s に依存する級数

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

を考える．このとき，$\sigma > 1$ ならば級数 $\zeta(s)$ は収束することを示せ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

まめちしき　上の関数を**リーマン (Riemann) のゼータ関数**と呼ぶ．この関数は上の式のままでは $\sigma > 1$ のときしか定義できないが，**解析接続**とよばれる方法で複素平面全体に拡張することができる．(上の級数表示が意味を持たないかわりに，$\zeta(s)$ はある複素積分で表示できるようになる.)「$\zeta(s) = 0$ ならば $s = -2, -4, \ldots$ もしくは $\mathrm{Re}\, s = \sigma = 1/2$ であろう」というのが有名な**リーマン予想** (Riemann hypothesis) である．

レポート問題 3-2.　二つの実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ が収束したと仮定する．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ は収束することを示せ．(Hint $(A-B)^2 \geq 0$)

レポート問題 3-3.(Jacobian の意味を理解しよう)　$z = x + yi \in \mathbb{C}$ とする．$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ に写す写像

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Im}\, z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z^2 \\ \mathrm{Im}\, z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

において,「局所的に現れる線形写像」をみつけよう．

(1) u, v を x, y で表せ．また，$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもとめよ．

(2) この写像 $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 自体は線形写像で**ない**ことを示せ．

(3) $u = u(x,y)$，$v = v(x,y)$ を，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ においてそれぞれ 2 次の項まで Taylor 展開せよ．

(4) $X := x - 1$，$Y := y - 1$，$U := u$，$V := v - 2$ とおく．このとき，U, V を X, Y で表せ．

(5) X, Y の絶対値がものすごく小さい状況を（たとえば絶対値が 0.00001 以下とか）考える．このとき，ある 2 次正方行列 A が存在して $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ は $A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に極めて近い．この行列 A は何か？

(6) f の $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ におけるヤコビ行列 $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ およびヤコビアンの値を求めよ．

(7) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を中心に，小さな正方形（たとえば一辺 $\epsilon > 0$）を水平に配置する．この正方形は，f によってだいたいどのような図形に写るか図示せよ．さらに，面積はおよそ何倍されるか？

ポイント． ヤコビ行列はある写像の点から点への移り方を線形写像で近似したものだと考えられる．その近傍で面積は「ヤコビアンの絶対値」倍されるため，重積分の変数変換では重要な役割を果たす．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ϵ と δ

作成日：May 16, 2008　Version：1.1

今日は関数の連続性を厳密に扱う方法（ϵ-δ 論法）を練習しましょう．いつものように，複素数の関数（⊃実数の関数）を扱います．実関数の連続性は「グラフが繋がっているかどうか」で直感的に判定できますが，複素数ではそうは行きません．

今後の予定

- 5/23：ϵ と δ（其の弐），関数の一様収束
- 5/30：中テスト
- 6/6：名大祭のためお休み

関数の連続性

関数の連続性は，**近い点同士は写った先でも近い点同士になる**ことの数学的な表現である：

連続性の定義（其の壱，像の極限は極限の像）： 複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合 D 上で定義された関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $z_0 \in D$ で**連続** (continuous) であるとは，

> 任意の z_0 に収束する D 内の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，数列 $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(z_0)$ に収束する

ときをいう．すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n) = f(z_0)$$

であるときを言う．また，f が D **上で連続**であるとは，任意の $z_0 \in D$ で f が連続であるときを言う．

ちなみに，一般には $z_n \neq z_0$ を満たしながら収束する点列を考えた方が都合がよいとされているが，あまり神経質になる必要はない．

問題 1. 上の連続性の定義を，ϵ-N 式に厳密に書き下せ．($\forall$ などの記号を用いてよい.)

以下，$D \subset \mathbb{C}$ とする．

問題 2.（不連続性） 上の「連続性の定義（其の壱）」に従ってある関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in D$ で連続でない ことの定義を書き下せ．また，f が D 上で連続でない ことの定義を書き下せ．さらに，そのような具体例をいくつか挙げよ．

上の問題のように，連続性の定義をうっかり ϵ-N 式に書き直した日には，とってもまわりくどい．これでも，各点での連続性を示すときには全く問題は起きないのだが，今後の応用を考えると次のような同値な言い換えをしておいたほうが良い：

連続性の定義（其の弐，ϵ-δ 式）： 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $z = z_0 \in D$ で**連続**であるとは，

> 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ とできる

ときをいう．特に，f が D 上の各点で連続なとき，f **は** D **上で連続**という．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. この定義に対し，複素数バージョンと実数バージョンの絵を描き，自分なりに解釈を与えよ．また，実連続関数とはグラフが繋がっている関数，という感覚を定義を元に確認せよ．また，その感覚を複素数でイメージするにはどうしたら良いだろう？

問題 4. (不連続性) 「連続性の定義（其の弐）」に従ってある関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in D$ で連続で ない ことの定義を書き下せ．また，f が D 上で連続で ない ことの定義を書き下せ．

問題 5. (不連続性) 次のように与えられる f は $x = 0$ で連続で ない ことを示せ：

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\ (x \neq 0),\quad f(x) = 0\ (x = 0)$$

問題 6. 以下で定義される関数はすべて $\mathbb{C}$ 上で連続であることを示せ．

(1) 関数 $R : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,　$R(z) := \mathrm{Re}\, z$.

(2) 関数 $I : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,　$I(z) := \mathrm{Im}\, z$.

(3) 関数 $C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,　$C(z) := \bar{z}$.

(4) 関数 $M : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,　$M(z) := |z|^2 = z\bar{z}$.

問題 7. $f : D \to \mathbb{C}$ と $g : D \to \mathbb{C}$ を D 上で連続な関数とする．このとき，$h(z) = f(z)+g(z)$ も D 上で連続な関数となることを示せ．

問題 8. 実関数 $f(x) = x^2$ は $x = 1$ で連続であることを ϵ-δ 式に示したい．以下の ϵ に対し，「$|x - 1| < \delta$ ならば $|f(x) - f(1)| < \epsilon$ と出来る」ような $\delta > 0$ を一つ決定せよ．

(1) $\epsilon = 3$　(2) $\epsilon = \dfrac{1}{10}$　(3) $\epsilon = \dfrac{1}{1000}$　(4) $\epsilon > 0$

問題 9. $f(x) = x^2$ とおく．x が $\mathbb{R}$ 上を秒速 $\delta = 0.1$ で正の方向に動いている．今，x が $x_0 = 0$ から 1 秒間で $\delta = 0.1$ 動くとき，$f(x)$ は $f(x_0)$ からどの程度はなれるか？また，x が $x_0 = 100$ から同じ 1 秒間で $\delta = 0.1$ 動くときはどうか？

まめちしき. 関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が D 上で**一様連続**であるとは，

> 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，任意の $z_0 \in D$ について $|z-z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ とできる

ときをいう．もし z が秒速 δ 未満で D 内を動き回るとき，$f(z)$ の速さは秒速 ϵ 未満におさえられる．このように「動きが制御できること」は重要な性質で，複素線積分を考えるときにも要求される．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題・レポート

宿題 4-1. D を $\mathbb{C}$ の部分集合とする.

(1) 有限個の D 上で連続な関数 $f_k : D \to \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ に対し，関数

$$S : D \to \mathbb{C}, \quad S(z) \; := \; f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

は連続であることを ϵ-δ 論法および数学的帰納法を用いて示せ.

(2) 同様にして，関数

$$P : D \to \mathbb{C}, \quad P(z) \; := \; f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z)$$

が連続であることを示せ.

(3) (1)(2) を用いて，多項式関数は連続であることを示せ.

宿題 4-2. 次のように与えられる $\mathbb{R}$ 上の f を考える.：

$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x} \ (x \neq 0), \quad f(x) = 0 \ (x = 0)$$

(1) $-1 \le x \le 1$ における $f(x)$ のグラフを丁寧に描け.（$|f(x)| \le |x|$ に注意.）

(2) $x \to \pm\infty$ のとき，$f(x)$ のグラフはある直線を漸近線に持つことを証明せよ.

(3) ϵ-δ 論法を用いて，$f(x)$ は $x = 0$ で連続となることを示せ.

注：$x \to +\infty$ もしくは $x \to -\infty$ のとき $f(x) - (ax + b) \to 0$ が成り立つとき，直線 $ax + b$ を $f(x)$ の漸近線とよぶ.

宿題 4-3. 「（複素数の）級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ も収束する」ことを，以下の手順に従って証明せよ.

- まず，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n > N$ のとき $|a_n| < 1$ とできることを示す.（Hint: $s_n = |a_1| + \cdots + |a_n|$ はコーシー列. $|s_n - s_{n-1}|$ を考えると…）
- $|a_n| < 1$ のとき，$|a_n^2| < |a_n|$ である．これを用いて，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ も絶対収束することを示す.（念のため注意しておくが，複素数では一般に $a_n^2 \neq |a_n|^2$ である．）

レポート問題 4-1 a_n は複素数列とする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束しない例を挙げよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しない例を挙げよ.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ はともに収束するが，ともに絶対収束しない例はあるか？

(4) 実数列 a_n に対し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ は収束するか? (Hint: $|\sin x| \le |x|$ を示す．)

レポート問題 4-2　複素関数 $f,\ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を考える．

(1) 関数 $z \mapsto f(z) + g(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で連続だが，f と g はともに $\mathbb{C}$ 上連続でないような例を挙げよ．

(2) 関数 $z \mapsto f(z)g(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で連続だが，f と g はともに $\mathbb{C}$ 上連続でないような例を挙げよ．

(3) 関数 $z \mapsto f(z)f(z) = f(z)^2$ は $\mathbb{C}$ 上で連続だが，f は $\mathbb{C}$ 上連続でないような例を挙げよ．

(4) 関数 $z \mapsto f(z) + g(z)$ および $z \mapsto f(z)g(z)$ はともに $\mathbb{C}$ 上で連続だが，f と g はともに $\mathbb{C}$ 上連続でないような例を挙げよ．

レポート問題 4-3（重積分とヤコビアンの意味を理解しよう）

A を（正則とは限らない）n 次正方行列とする．このとき，写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める． E を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし，その n 次元体積を $|E|$ と表す．このとき，

$$|F(E)| = |\det A| \cdot |E|$$

となる．特に，$\det A = 0$ のとき $|f(E)| = 0$ となる．

さて $m \in \mathbb{R}$ を定数とするとき，次の重積分の値をもとめたい：

$$I = \int_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} \qquad (D : 1 \le x^2 + y^2 \le 4)$$

(1) まず，変数変換

$$f : \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，$f(E) = D$ となる $r\theta$-平面上の長方形領域 E をひとつ求めよ．

(2) I を角柱の体積和として近似したい．N を巨大な整数とし，E を N^2 個の合同な長方形 $\Delta E_1 \ldots \Delta E_{N^2}$ に等分割する．各 ΔE_i に対し，その中心を (r_i, θ_i) とおく．さらに，$\Delta D_i := f(\Delta E_i)$，$(x_i, y_i) := f(r_i, \theta_i)$ とおく．局所座標 $R := r - r_i$，$\Theta := \theta - \theta_i$，$X = x - x_i$，$Y = y - y_i$ を用いて，$f : \Delta E_i \to \Delta D_i$ を近似する線形写像 $F_i : \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$（ヤコビ行列！）を求めよ．

(3) 各 i について，ΔD_i の面積は ΔE_i の面積のおよそ何倍か？

(4) 今，N は極めて大きく，「各 ΔD_i は水素原子よりも小さい」，と言いたくなるぐらい小さい．このとき，積分 I は ΔD_i を底辺とする角柱の体積和としてものすごく良く近似される．この近似式を x_i，y_i，$|\Delta D_i|$ を用いた式で表せ．さらに，上の近似式を r_i，θ_i，$|\Delta E_i|$ を用いて書き直せ．

(5) 以上の議論をもとに，I を $\displaystyle\int_E \cdots dr d\theta$ の形に書き直せ．さらに，積分値を求めよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

関数列の各点収束 vs. 一様収束

作成日：May 23, 2008　Version：1.1

関数の列がどんな関数に収束するか，という問題は，たとえば Taylor 展開

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \to \exp(x)?$$

などを考えると自然に派生します．今回は収束性・連続性の議論の応用として，関数列の収束についてその問題意識を理解しておきましょう．

今後の予定

- 5/30：中テスト
- 6/6：名大祭のためお休み
- 6/13: 集合と写像

関数の級数は収束するか？

$\mathbb{C}$ 上の関数 $f_n(z) = (-1)^n z^{2n}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ にたいし，関数 $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$p_n(z) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \;=\; 1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n}$$

という有限和により定める．これはただの z に関する $2n$ 次多項式であるから，$\mathbb{C}$ 全体で連続な関数である（宿題 4-1(3)）．

問題 1. $z = z_0$ と固定して得られる数列 $\{p_n(z_0)\}_{n=0}^{\infty}$ について調べてみよう．

(1) 数列 $\{p_n(1)\}_{n=0}^{\infty}$ は収束するか？

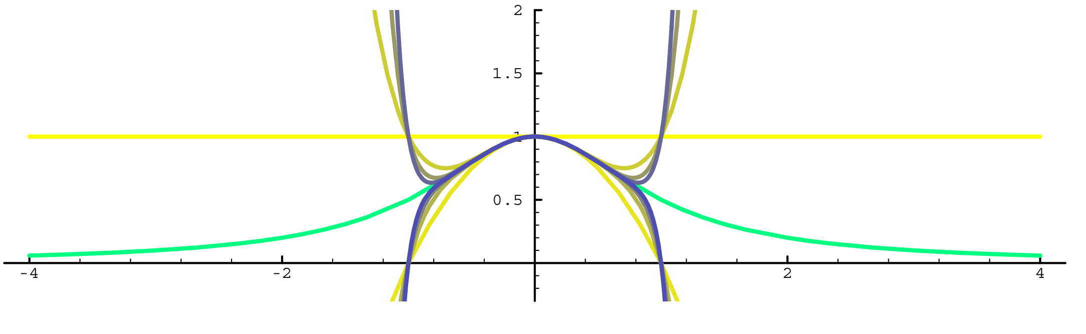
(2) $|z_0| < 1$ ならば数列 $\{p_n(z_0)\}_{n=0}^{\infty}$ は $\dfrac{1}{1+z_0^2}$ に収束することを示せ．

(3) $|z_0| \geq 1$ ならば数列 $\{p_n(z_0)\}_{n=0}^{\infty}$ は発散することを示せ．

$\{p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}_{n=0}^{\infty}$ という**関数列** (sequence of functions) は，このように $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ という形の「数列の集合体」とみなすことが出来る．各 $z \in \mathbb{C}$ にたいし極限への対応付け

$$p: \; z \;\longmapsto\; \lim_{n\to\infty} p_n(z)$$

を考えると，これが関数として意味をもつのは $z \in \mathbb{D} := \{|z| < 1\}$（単位円板，unit disk）の場合**のみ**である．すなわち関数 $p(z) = \lim_{n\to\infty} p_n(z)$ は $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ であり，しかも $g(z) := \dfrac{1}{1+z^2}$ という連続関数に（偶然？）一致する．事実，実数の部分だけ取り出してみると，下のような「グラフの収束」に見える．



このような状況を，数学的に定式化しよう．以下，$D \subset \mathbb{C}$ とする．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

各点収束 vs. 一様収束

関数列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ が $E \subset D$ 上で関数 $f : E \to \mathbb{C}$ に**各点収束** (pointwise convergence) するとは，

$$\underline{\text{任意の } z \in E \text{ に対し}},\ f_n(z) \to f(z)\ (n \to \infty)$$

となることをいう．すなわち，

$$\underline{(\forall z \in E)}\ (\forall \epsilon > 0)\ (\exists N = N_{z,\epsilon} \in \mathbb{N})\ (\forall n > N) \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

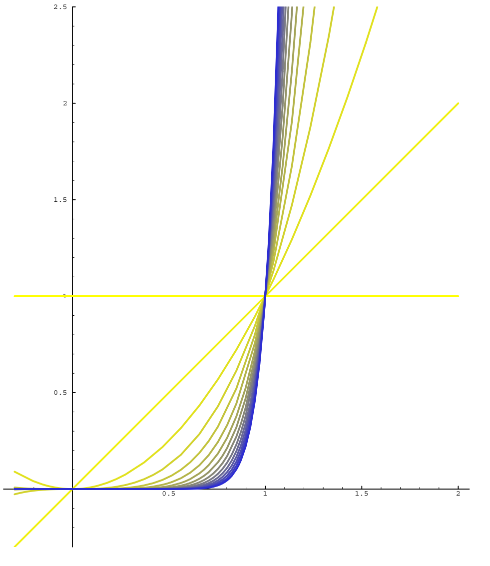
問題 2. 実数の関数列 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) = x^n$ と定める．

(1) この関数列は区間 $(-1, 1]$ 上で各点収束することを示せ．

(2) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定まる極限関数を求めよ．

(3) $x = 1/2$, $\epsilon = 0.001$ のとき，$n > N$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ となる $N = N_{x,\epsilon}$ を見つけよ．

(4) $x = 1000/1024 = 0.976..$, $\epsilon = 0.001$ の場合はどうか？ $\log_{10} 2 = 0.3010$ として計算せよ．



このように，関数列の各点収束極限は

- もとの関数列の定義域全体で存在するとは限らない（上の例：$\mathbb{R}$ から $(-1, 1]$ に狭まる）
- 関数列が連続でも，極限が連続とは限らない．

しかし，数学をやる上では

- 関数列 $f_n(x)$ が連続ならば極限関数 $f(x)$ も連続
- 関数列 $f_n(x)$ が微分可能ならば極限関数 $f(x)$ も微分可能で，$f_n'(x) \to f'(x)$
- 関数列が $f_n(x)$ 上で区間 I 上で積分可能ならば極限関数 $f(x)$ も区間 I 上で積分可能で，$\displaystyle\int_I f_n(x)dx \to \int_I f(x)dx$

が成り立つような，ハイ・クオリティーな収束があったほうが何かと便利であろう．それを実現するのが，**一様収束**の概念である．

関数列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ が $E \subset D$ 上で関数 $f : E \to \mathbb{C}$ に**一様収束** (uniform convergence) するとは，

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N = N_\epsilon \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ \underline{(\forall z \in E)} \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

が成り立つことを言う．

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

各点収束の場合と見比べてみよう．N 秒後，数列 $\{f_n(z)\}_{n\geq 1}$ は一斉に $f(z)$ 中心半径 ϵ の円の中に入っているのである．

問題 3. 一様収束の定義の最後の部分を，コーシー列を使って書き直せ．

問題 4. 実関数列の一様収束を説明する図を自分なりに描け．

問題 5. 問題 1 の $p_n(z)$ は，任意の $0 \leq r < 1$ に対し閉円板 $\{|z| \leq r\}$ 上で $p(z) = 1/(1+z^2)$ に一様収束することを示せ．

今週の宿題・レポート

来週は中テストなので，その対策を宿題とします．中テストでは手書きノートの参照はできませんので，ちゃんと重要事項は習得しておきましょう．中テストは (1) これまでの授業で取り上げた問題・宿題がきちんと消化できているか，(2)1 年生の線形代数，微積分（特にちからだめしの内容）が復習できているかを確認するためのものです．

TA より宿題に関する注意． 宿題を再提出した場合は，40 点を上限に点数を加点します．締め切りを過ぎて提出された宿題も同様です．ただし，40 点を超えた場合でも，提出されれば採点（答案のチェック）はされます．

レポート 5-1 実関数列 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定める：

$$f_n(x) \ := \ \frac{1}{x^2+1^2} + \frac{1}{x^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{x^2+n^2}.$$

(初段) 関数列 $f_n(x)$ はある $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ に各点収束することを示せ．(Hint: 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，$\dfrac{1}{x^2+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$.)

(２段) 上の収束は，じつは $\mathbb{R}$ 上の一様収束であることを示せ．(Hint:コーシー列を活用せよ.)

レポート 5-2 連続関数列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ が $E \subset D$ 上で関数 $f : E \to \mathbb{C}$ に一様収束すれば，f は E 上連続であることを示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

集合と写像

作成日：June 12, 2008　Version：1.1

集合と写像の取り扱いは足し算引き算のようにすらすらとできないと後で困ります．特に，単射と全射を明快にイメージできるようになること，それを論理的に取り扱えることが肝心です．

今後の予定

- 6/20: ベクトル空間と基底
- 6/27: 一次独立性と部分ベクトル空間
- 7/4：線形写像と次元定理，小テスト

集合の演算

問題 1. A, B を集合とする．次の定義を述べよ．

(1) $A \subset B$.　(2) $A = B$.　(3) $A \cup B$.　(4) $A \cap B$.　(5) $A - B$.

問題 2. X, Y, Z, W を集合とするとき, 次の命題を証明せよ.

(1) $X \subset Z$ かつ $Y \subset W \implies X \cup Y \subset Z \cup W$

(2) $X \subset Z$ かつ $Y \subset W \implies X \cap Y \subset Z \cap W$

(3) $X \cup Y \subset X \cap Y \iff X \cup Y = X \cap Y \iff X = Y$

写像 vs. 逆像

問題 3. X, Y を集合とし, f を X から Y への写像とする.

(1) X の部分集合 A に対し, 写像 f による A の**像** (image) $f(A)$ の定義を述べよ.

(2) Y の部分集合 B に対し, 写像 f による B の**逆像** (preimage) $f^{-1}(B)$ の定義を述べよ.

問題 4. f を集合 X から集合 Y への写像とする．X もしくは Y の部分集合 A, B に対し, 次が成り立つことを示せ．(3) では等号の成り立たない例も作れ.

(1) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$　(2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$　(4) $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

(5) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$　(6) $f(f^{-1}(A)) \subset A$

単射 vs. 全射

問題 5. X, Y を集合とし, f を X から Y への写像とする.

(1) 写像 $f : X \to Y$ が**単射** (injection) であることの定義を述べよ.

(2) 写像 $f : X \to Y$ が**全射** (surjection) であることの定義を述べよ.

(3) 写像 $f : X \to Y$ が**全単射** (bijection) であることの定義を述べよ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 6. X, Y, Z を集合とする．写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ について，以下の問いに答えよ．

(1) f と g がともに単射であれば，合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も単射である．

(2) f と g がともに全射であれば，合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も全射である．

(3) f が単射であれば，$A \subset X$ のとき $f^{-1}(f(A)) = A$ がなりたつ．

今週の宿題・レポート

宿題 6-1. 実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 A と B を

$$A := \{x \in \mathbb{R} : |x| + |1 - x| = 1\}$$
$$B := \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$$

で定める．このとき，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ を示せ.（すなわち， $A = B$ が成り立つ.）

宿題 6-2. f を集合 X から集合 Y への写像，g を集合 Y から集合 Z への写像とする．

(1) X の部分集合 A に対し，

(a) $f(X - A) \supset f(X) - f(A)$　　(b) $A \subset f^{-1}(f(A))$

を示せ．また，それぞれ等号が成り立たない例を作れ．

(2) Y の部分集合 A, B に対し, 次が成り立つことを示せ．

(c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$　　(d) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$

(3) Z の部分集合 C に対し，

(e) $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$

を示せ．また，$g \circ f$ が全射ならば，g も全射であることを示せ．

宿題 6-3. 正の実数全体を $\mathbb{R}_+$ で表す．以下をみたす例をつくれ.（答えのみでよい．連続関数でなくてもよい.）

(1) 全射だが単射でない写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$　(2) 全単射 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$
(3) 単射だが全射ではない写像 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$　(4) 単射でも全射でもない写像 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

レポート 6-1. 上の**宿題 6-2** と同じ記号において，

(1) $g \circ f$ が全射，g が単射であれば，f は全射，g は全単射であることを示せ.

(2) $g \circ f$ が単射のとき，f は単射となることを示せ．さらに g が全射と仮定するとき，g は全単射となるか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ベクトル空間と基底

作成日：June 20, 2008　Version：1.2　　実施日：June 20, 2008

今日から線形代数です．線形代数がただの記号演算にしか思えない人は，まず基底の何たるか，そのココロを理解してください．

今後の予定

- 6/27: 一次独立性と部分ベクトル空間
- 7/4：小テスト, 線形写像と表現行列
- 7/11：次元定理，内積 (?)

ベクトル空間の公理的定義

集合 V が $\mathbb{R}$ 上の**ベクトル空間** (vector space) であるとは，以下を満たすときを言う：

- 全ての $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ に対し，和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$ が一意的に (unique に) 定まる．
- 全ての $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in V$ に対し，スカラー倍 $\alpha\boldsymbol{a} \in V$ が一意的に定まる．
- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を任意の V の元, α, β を $\mathbb{R}$ の任意の元とするとき，

  (1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

  (2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

  (3) ある $\boldsymbol{0} \in V$ が存在して，$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$.

  (4) 各 $\boldsymbol{a} \in V$ に $\boldsymbol{a}' \in V$ が存在して，$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}$.

  (5) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$.

  (6) $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$.

  (7) $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$

  (8) $1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

問題 1. (ベクトル空間の例) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる集合は沢山ある．それをチェックしてみよ．

(1) $\mathbb{R}^n := \{\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

(2) $\mathrm{Poly}_d := \{\boldsymbol{f} = f(x) : f(x)$ は d 次以下の実係数多項式 $\}$.

(3) $\mathrm{Poly}_\infty := \{\boldsymbol{f} = f(x) : f(x)$ は実係数多項式 $\}$.

(4) $\mathbb{R}^\infty := \{\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots) :$ 各 $a_j \in \mathbb{R}\}$.

(5) $C^0(\mathbb{R}) := \{\boldsymbol{f} = f(x) : f(x)$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数 $\}$.

逆に，これら全てに共通の性質を列挙したものが，上のベクトル空間の定義ともいえる．

問題 2. (関数の和とスカラー倍) （$\mathbb{R}$ 上の）ベクトル空間 Poly_2 を考える．$\boldsymbol{u}_1 = u_1(x) = 1$（定数関数）, $\boldsymbol{u}_2 = u_2(x) = x$，$\boldsymbol{u}_3 = u_3(x) = x^2$ とおくとき，次のベクトルをグラフとして図示せよ．

(1) $\boldsymbol{f}_1 = -2\boldsymbol{u}_1$　(2) $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2$　(3) $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3$　(4) $\boldsymbol{0}$ (ゼロベクトル)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今，任意のベクトル $\boldsymbol{f} = f(x) \in \mathrm{Poly}_2$ に対し，ある実数の組 a_1，a_2，a_3 がただ 1 つ存在して，$\boldsymbol{f} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + a_3\boldsymbol{u}_3$ と書けることは明らかであろう.（実際，$f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$ と書けるから.）

問題 3. 一方 $\boldsymbol{v}_1 = v_1(x) = 1$, $\boldsymbol{v}_2 = v_2(x) = x - 1$，$\boldsymbol{v}_3 = v_3(x) = (x-1)^2$ とおくとき，ある実数の組 b_1，b_2，b_3 がただ 1 つ存在して，$\boldsymbol{f} = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + b_3\boldsymbol{v}_3$ と書けることを示せ.

基底と座標系

問題 4. (準備) 下の図のように，点 O と点 P が与えられている.

(1) 点 O を原点と定め，これを始点とする同一直線上にないベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を自由に描け.

(2) 点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ なる実数 a_1，a_2 が**ただひと組**定まるはずである．そのような a_1，a_2 の大体の値を求めよ.

(3) 以下で定まるこのプリント上の部分集合を図示せよ.

(a) $S_1 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : s = 2\}$

(b) $S_2 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : t = s + 1\}$

(c) $S_3 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : s \geq 0,\ t \geq 0,\ s + t = 1\}$

(d) $S_4 = \{s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 : s^2 + t^2 = 1\}$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

基底と座標

上の問題で，Aretha さんはベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を選び，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

を得た．これは,「$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ **というベクトルを単位系として計った点 P の座標が** $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$」と解釈できる．このように，平面に座標軸を与えるベクトルの組（この場合 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ ）を平面の**基底** (basis) と呼ぶ．さて一方，Otis さんは別の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を選び，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

を得た．このとき，明らかに

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

であるから，**同じベクトルの異なる表現**が得られたことになる．すなわち,「同じものを測っているのに，異なる基底（$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$）を用いたために，異なる座標値（$\left(\begin{smallmatrix}a_1\\a_2\end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix}b_1\\b_2\end{smallmatrix}\right)$）が得られた」と解釈できる．

ちょっとたとえ話を．われわれは長さを測るとき，必要に応じて mm, cm, m, km などを使いわける．例えば一円玉の直径 L は $L = 2\mathrm{cm} = 20\mathrm{mm}$ と，**単位によって異なる表現を持つ**．同じ長さでも，異なる単位 (cm と mm) に応じて異なる数値 (2 と 20) をとるのである．このとき，$\mathrm{cm} \times \frac{1}{10} = \mathrm{mm}$ であり，$2 \times 10 = 20$ であるから，単位が $\frac{1}{10}$ 倍されると，数値は 10 倍されることが分かる．

単位を変えれば数値が変わるように，基底を変えれば座標値も変わる．上はともに同じベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表すが，基底によって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = (\text{基}, \text{底})\begin{pmatrix}\text{座}\\\text{標}\\\text{値}\end{pmatrix}$$

と異なる表現をもつわけである．

問題 5. (異なる基底の関係) Otis の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に対し，Aretha の基底を用いて

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$$

という関係が与えられたとする．このとき，上の $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ の間の関係式を与えよ．

一般のベクトル空間の基底

一般に（$\mathbb{R}$ 上の）ベクトル空間 V が与えられたとき，この時点では白紙のような，真っ白な空間にすぎない．しかし，地球に緯度・経度による座標が入っているように，詳しく V を解析するには，座標を入れたほうが都合が良いに決まっている．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が以下を満たすとする：任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対し実数の組 $(a_1, \ldots, a_n)$ が**ただ一組**存在して，次のように書ける：

$$\boldsymbol{a} \;=\; a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n \;=\; (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

このとき，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を V の**基底**であるという．さらに，このような基底が存在する V を n **次元ベクトル空間**と呼ぶ．

真っ白なベクトル空間に与えられた「単位系」が基底であり，我々はそれを基準にして座標軸を定め，V の各点に座標を入れるのである．また，この座標によって我々は V を $\mathbb{R}^n$ とみなすレンズを得たことになる：

$$V \ni \boldsymbol{a} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ここで，$\mathbb{R}^n$ は座標値のサンプル集合であると同時に，すべての n 次元ベクトル空間のモデルともみなせる．

問題 6. (具体例) $V = \mathrm{Poly}_2$ を考える．

(1) $\boldsymbol{u}_1 = u_1(x) = 1$, $\boldsymbol{u}_2 = u_2(x) = x$, $\boldsymbol{u}_3 = u_3(x) = x^2$ とおくとき，これらは $V = \mathrm{Poly}_2$ の基底になっていることを確かめよ．

(2) $\boldsymbol{v}_1 = v_1(x) = 1$, $\boldsymbol{v}_2 = v_2(x) = x - 1$, $\boldsymbol{v}_3 = v_3(x) = (x-1)^2$ も基底になっていることを確かめよ．

(3) （同じベクトルの異なる表現）$\boldsymbol{f} = f(x) = -2+x^2$ とおく．このとき，基底 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ で測った $\boldsymbol{f}$ の座標値と，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ で測った $\boldsymbol{f}$ の座標値を求め，比較せよ．

基底の変換

問題 7. (上の問題の続き) 上で与えられた V の二つの基底に対し，

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)P \;=\; (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3)$$

が成り立つような 3 次正方行列 P を求めよ．また，任意のベクトル $\boldsymbol{f} = f(x) \in V = \mathrm{Poly}_2$ に対し

$$\boldsymbol{f} \;=\; (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \;=\; (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ならば

$$P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

となることを示せ.

> n 次元ベクトル空間 V と任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ をとる．このとき，V の異なる基底 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ に対し，
>
> $$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\text{基}, \dots, \text{底})\begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix}.$$
>
> と表されたとする．このとき，ある n 次正則行列 P が存在して，
>
> $$(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)P = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n), \qquad P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

基底の変換も，長さの単位変換と考え方はまったく同じである．単位が k 倍されると数値が $1/k$ 倍されるように，基底が「P 倍」されると座標値は「P^{-1} 倍」される．

今週の宿題・レポート

宿題 7-1.　数列の集合

$$V_1 \;=\; \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$$

が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になることを示せ.（公理を満たすことを全てチェックする.）一方，数列の集合

$$V_2 \;=\; \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_{n+1} = 2a_n + 1\}$$

は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間で<u>ない</u>ことを示せ.（何か反例を挙げて公理が満たされないことを示せ．）

宿題 7-2.　ベクトル空間 $V = \mathrm{Poly}_3$ に対し，自然な基底 $\boldsymbol{u}_1 = u_1(x) = 1$, $\boldsymbol{u}_2 = u_2(x) = x$, $\boldsymbol{u}_3 = u_3(x) = x^2$, $\boldsymbol{u}_4 = u_4(x) = x^3$ をとる．このとき，$\boldsymbol{v}_1 = v_1(x) = 1$, $\boldsymbol{v}_2 = v_2(x) = x-1$, $\boldsymbol{v}_3 = v_3(x) = (x-1)(x-2)$, $\boldsymbol{v}_4 = v_4(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ も $V = \mathrm{Poly}_3$ の基底になることを示せ．また，

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4)P = (\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4)$$

となるような 4 次正則行列を求めよ．また，P^{-1} も求めよ．

レポート問題 7-1.　ベクトル空間の基底と次元の定義に基づき，$\mathbb{R}^{\infty}$ が任意の $n \geq 0$ に対し n 次元ベクトル空間で<u>ない</u>ことを証明せよ.

レポート問題 7-2（微分段位認定試験）.　実数 t に依存する C^1 級関数 $A_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto A_t(x)$ を考える.（例えば，$A_t(x) = tx^2 - t^2$ など.）いま，任意の実数 x について $A_t'(x) = \dfrac{dA_t}{dx}(x)$ は t について連続であり，さらに $\dot{A}_0(x) := \dfrac{d}{dt}A_t(x)\Big|_{t=0}$ が存在するとき，次の等式を示せ：

$$\frac{d}{dt}A_t(A_t(x))\Big|_{t=0} \;=\; \dot{A}_0(A_0(x)) + A_0'(A_0(x)) \cdot \dot{A}_0(x).$$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

一次独立性と部分ベクトル空間

作成日：June 26, 2008　Version：1.2　　実施日：June 27, 2008

真っ白なベクトル空間に座標を入れるのが基底の役割でした．今日は基底の性質を掘り下げてみましょう．以下特に断らない限り，V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とします．

今後の予定

- 7/4：小テスト, 線形写像と表現行列
- 7/11：次元定理，内積 (?)
- 7/18：期末テスト

基底になる，ならないの判定

問題 1. $V = \mathrm{Poly}_2$ 上のベクトルの組を以下のように定める：

$$
\begin{aligned}
\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\ ,\boldsymbol{e}_3\} &= \{1,\ x,\ x^2\} \\
\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\ ,\boldsymbol{u}_3\} &= \{1,\ x-1,\ (x-1)^2\} \\
\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\} &= \{x,\ 1+x^2\} \\
\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\ ,\boldsymbol{w}_3,\ \boldsymbol{w}_4\} &= \{1,\ 1+x,\ 1-x,\ 1-x^2\}
\end{aligned}
$$

(1) これらベクトルの組をそれぞれ用いて，$\boldsymbol{f} = 2-2x+x^2 \in V$ を「1 次結合」の形で表せ．例えば，適当な実数の組 (d_1, d_2, d_3, d_4) を見つけて，

$$\boldsymbol{f} = d_1\boldsymbol{w}_1 + d_2\boldsymbol{w}_2 + d_3\boldsymbol{w}_3 + d_4\boldsymbol{w}_4$$

の形で書き表せ．

(2) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ および $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4\}$ の中で，V の基底になっているものを選べ．基底とならないものについては，その理由を考えよ．

張る空間

V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ に対し，ある実数の組 $a_1, \ldots, a_N$ が存在して（**←ただ 1 組とは限らない**）

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_N\boldsymbol{v}_N$$

と書けるベクトルの全体を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ **の張る（部分）空間**と呼び，$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N \rangle$ もしくは $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$ などと表す．

問題 2.

(1) 線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が基底ならば，$V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ であることを示せ．

(2) 一般に，ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N \in V$ は $V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$ でなければ基底とはなり得ないことを示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

$V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$ であることは，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ が V の座標系を与えるための必要条件である．したがって，基底となるための必要条件である．

問題 3. 再び $V = \mathrm{Poly}_2$ を考える．上の問題で定義した $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ は $V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ と**ならない**ことを確認せよ.（したがって，基底となり得ない.）また，$\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{w}_3$，$\boldsymbol{w}_4$ は $V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4\}$ を満たすことを確認せよ．

一次独立性

N を自然数とする．V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ に対し，ある実数 $a_1, \ldots, a_N$ が存在して

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_N\boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{0}$$

と書けたと仮定する．これら係数 $a_1, \ldots, a_N$ が $a_1 = \cdots = a_N = 0$ と**ただ一組に**決まるとき，$a_1, \ldots, a_N$ は**一次独立（線形独立）**であると呼ばれる．

実は一般に，不等式 $N \leq n =$（V の次元）が成り立つ.（レポート問題）

問題 4.

(1) 線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が基底ならば，これらは一次独立であることを示せ．

(2) あるベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ について，Aretha が基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を用いて座標値を求めたところ，$(a_1, \ldots, a_n)$ となった．一方，Otis が同じ基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を用いて，別の方法を用いて座標値を求めたところ，$(b_1, \ldots, b_n)$ となった．このとき，実は $a_i = b_i$ が全ての $i = 1, \ldots, n$ で成り立つことを，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の一次独立性を用いて証明せよ．

ベクトルの組の**一次独立性は，座標値がただ 1 つに定まるための必要条件である**．すなわち，基底となるための必要条件である．

問題 5. 再び $V = \mathrm{Poly}_2$ を考える．上の問題で定義した $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ は一次独立となることを確認せよ．また，$\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{w}_3$，$\boldsymbol{w}_4$ は一次独立ではないことを確認せよ.（したがって，基底となり得ない.）

基底の特徴づけ

問題 6. 次の枠内の命題を証明せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

基底の定義の言い換え： V のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が基底であることと，

- $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が一次独立であり，かつ
- $V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$

が成り立つことは同値（互いに必要十分条件）である．

部分ベクトル空間

V の（空でない）部分集合 W が V の**部分ベクトル空間**であるとは，

- 任意の $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} \in W$ に対し $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$，かつ
- 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と任意の $\boldsymbol{a} \in W$ に対し，$\alpha\boldsymbol{a} \in W$

であるときをいう．

部分ベクトル空間は，それ自体が閉じたベクトル空間になっている．

問題 7. 上の $W \subset V$ に対し，$\boldsymbol{0} \in W$ を示せ．

問題 8. 以下のベクトル空間 V とその部分集合 W について，それが部分ベクトル空間かどうか判定せよ．

(1) $V = \mathbb{R}^n$, $W_{\boldsymbol{b}} = \{\boldsymbol{x} \in V : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$. ただし A は n 次正方行列，$\boldsymbol{b} \in V$.

(2) $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^\infty : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$.

(3) $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^\infty : a_{n+1} = 2a_n + 1\}$.

(4) $V = \mathrm{Poly}_d$, $W = \{\boldsymbol{f} = f(x) : f(x) = f(-x)\}$.

(5) $V = \mathrm{Poly}_d$, $W_c = \{\boldsymbol{f} = f(x) : f(0) = c\}$ $(c \in \mathbb{R})$.

(6) $V = C^0(\mathbb{R})$, $W = \{\boldsymbol{f} = f(x) : \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = f(x)\}$.

問題 9. ベクトル空間 $V = C^0(\mathbb{R})$ の部分集合として $W = \mathrm{Span}\{1,\ \cos x,\ \cos^2 x\}$ を考える．

(1) W は V の部分ベクトル空間であることを証明せよ．

(2) 1，$\cos x$，$\cos^2 x$ は W の基底となることを証明したい．それには，1，$\cos x$，$\cos^2 x$ が一次独立であることを示せば十分である．なぜか？

(3) 1，$\cos x$，$\cos^2 x$ が一次独立であることを示せ．(Hint: $C = \cos x$ と置くと，$a_1 + a_2 \cos x + a_3 \cos^2 x \equiv 0$（定数関数）$\Longrightarrow a_1 + a_2 C + a_3 C^2 = 0$ が全ての $-1 \leq C \leq 1$ で成り立つ.）

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題・レポート

来週 (7/4) は小テストのため，以下の問題はすべてレポート問題としました．

宿題 8-1

(1) V の任意のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N$ に対し，$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N\}$ は V の部分ベクトル空間であることを証明せよ．

(2) V のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N$ が一次独立であれば，それは $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N\}$ の基底となることを示せ．

宿題 8-2　ベクトル空間 $V = C^0(\mathbb{R})$ の部分空間を以下のように定める．

- $V_1 = \mathrm{Span}\{1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos^3 x\}$
- $V_2 = \mathrm{Span}\{1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x\}$

(1) $1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos^3 x$ は V_1 の基底になっていることを示せ．(Hint. 上の問題より，一次独立性を示せば十分)

(2) $V_1 = V_2$ を示せ（$V_1 \subset V_2$ かつ $V_1 \supset V_2$ を示す）．また，

$$(1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \cos^3 x)P = (1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x)$$

となる 4 次正方行列 P を求めよ．これは正則か？

(3) $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x$ も $V_1 = V_2$ の基底になっていることを示せ．

レポート問題 8-1　ベクトル空間 V の次元を $n = \dim V$ で表す．

(1) V 内のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N$ が一次独立であれば，$N \leq \dim V$ が成り立つことを証明せよ．

(2) V 内のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N$ が $V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N\}$ を満たせば，$N \geq \dim V$ が成り立つことを証明せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像と表現行列

作成日：July 04, 2008　Version：1.0　　実施日：July 04, 2008

真っ白なベクトル空間から真っ白なベクトル空間へ写像があるとき，それをいかにして数値的に見える形で表現するか．基底を通すことで表現行列という概念を用います．

今後の予定

- 7/11：次元定理，内積（宿題なし）
- 7/18：期末テスト（宿題返却，アンケート）

線形写像

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 U, V に対し，写像 $f : U \to V$ が次の性質をみたすとき**線形写像**とよぶ：

- 任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in U$ に対し，$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$ （和の像は像の和）
- 任意の $\boldsymbol{a} \in U$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha f(\boldsymbol{a})$ （定数倍の像は像の定数倍）

これは当たり前の性質ではない．線形写像とは，ベクトル空間の構造を保存する**非常に特別な写像**である：

問題 1. 以下のベクトル空間の間の写像が線形写像かどうか判定せよ．

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f : x \mapsto \sin x$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y$

(3) $D : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_2,\ D : u(x) \mapsto u'(x) + 2u''(x)$

(4) $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R},\ f : \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \mapsto x_{2008}$

(5) $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty,\ f : \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \mapsto \{x_2, x_4, x_6, \ldots\}$

(6) $T : C^0(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ T : u(x) \mapsto u(x) + u(x)^2$

線形写像を基底を通して見ると..

問題 2.（「ちからだめし」） $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とし，線形写像 $f_A = f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が

$$f : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

で与えられているとする．いま，$\mathbb{R}^2$ の基底として $\boldsymbol{u}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{u}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる．

(1) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とするとき，「座標値」$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の関係式を求めよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 写像 f が基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を通して

$$f : (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \longmapsto (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix}$$

と表現されるとき，$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix}$ の関係を $\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ (B は正方行列) の形で表せ．

問題 3. (表現行列) $V = \mathrm{Poly}_2$ とする．

(1) 復習：$1,\ x-1,\ (x-1)^2$ は V の基底であることを示せ．

(2) $(1,\ x,\ x^2)P = (1,\ x-1,\ (x-1)^2)$ となる正方行列 P を求めよ．また，それが正則であることを示せ．

(3) 写像 $L : V \to V$ を以下で定める：

$$L : \boldsymbol{f} = f(x) \longmapsto L\boldsymbol{f} \ := \ (x-1)f'(x) - f''(x).$$

このとき，L は線形写像であることを示せ．

(4) $\boldsymbol{f} = a_1 + a_2x + a_3x^2 \in V$，$L(\boldsymbol{f}) = a_1' + a_2'x + a_3'x^2$ とする．すなわち，

$$\boldsymbol{f} = (1,\ x,\ x^2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto L(\boldsymbol{f}) = (1,\ x,\ x^2)\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}$$

である．このとき，

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

を満たす 3×3 行列 A を求めよ．これは写像 L の基底 $1,\ x,\ x^2$ に関する**表現行列**と呼ばれる．

(5) 同様にして，写像 L の基底 $1,\ x-1,\ (x-1)^2$ に関する表現行列 B を求めよ．

(6) $B = P^{-1}AP$ を示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像の像と核

以下 U, V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．

線形写像 $f : U \to V$ にたいし，$f(U)$ を $\mathrm{Im}\, f$ で表し，**U の f による像** (image) と呼ぶ．また，$\mathrm{Im}\, f$ の次元を f の**階数**とよび，$\mathrm{rank}\, f$ で表す．すなわち，$\mathrm{rank}\, f := \dim(\mathrm{Im}\, f)$．

注意． ベクトル空間 V に有限個の基底が取れないとき，V を**無限次元ベクトル空間**とよび，$\dim V = \infty$ と定義する．ゼロベクトルだけからなる集合 $\{\mathbf{0}\}$ もベクトル空間であるが，$\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$ と約束しておく．逆に，(部分) ベクトル空間 V で $\dim V = 0$ となるのは $V = \{\mathbf{0}_V\}$ の形のときのみである．(なぜか？)

問題 4. 線形写像 $f : U \to V$ について，$\mathrm{Im}\, f$ は $\underline{V\text{ の}}$ 部分ベクトル空間となることを示せ．

問題 5. 問題 1 の (1)-(6) の中で線形写像となるものについて，その階数を求めよ．

線形写像 $f : U \to V$ において，U 上の全ての情報が V に伝達されるとは限らない．では一体，どのような情報を失っているのだろう？それを明確にするのが，次の**核**の概念である．

線形写像 $f : U \to V$ において，$f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ $(= \mathbf{0}_V \in V)$ となる $\boldsymbol{a} \in U$ の全体を**核** (kernel) とよび，$\mathrm{Ker}\, f$ であらわす．すなわち，

$$\mathrm{Ker}\, f := \{\boldsymbol{a} \in U : f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}_V\} = f^{-1}(\{\mathbf{0}_V\}).$$

問題 6. 上の $f : U \to V$ に対し，$\mathrm{Ker}\, f$ は $\underline{U\text{ の}}$ 部分ベクトル空間になることを示せ．

問題 7. 次の線形写像に対し，核をもとめよ．

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \end{pmatrix}$

(2) $D : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_{10}$，$D : \boldsymbol{f} = f(x) \mapsto \dfrac{d}{dx} f(x) = D(\boldsymbol{f})$

(3) 問題 3 の $L : \mathrm{Poly}_2 \to \mathrm{Poly}_2$

問題 8. 問題 1 の (1)-(6) の中で線形写像となるものについて，核，および核の次元を求めよ．

今週の宿題・レポート

宿題 9-1(正方でない表現行列)　$U = \mathrm{Poly}_2$, $V = \mathrm{Poly}_3$ とする．

(1) 1, $x + 1$, $(x + 1)^2$ は U の基底であることを示せ．

(2) 1, $x + 1$, $(x + 1)^2$, $(x + 1)^3$ は V の基底であることを示せ．

(3) $(1,\ x,\ x^2)P_1 = (1,\ x + 1,\ (x + 1)^2)$ となる行列を求めよ．また，それが正則であることを示せ．

(4) $(1,\ x,\ x^2,\ x^3)P_2 = (1,\ x+1,\ (x+1)^2,\ (x+1)^3)$ となる行列を求めよ．また，それが正則であることを示せ．

(5) 写像 $T : U \to V$ を以下で定める：

$$U \ni \boldsymbol{f} = f(x) \longmapsto T\boldsymbol{f} = (x+1)^2 \frac{d}{dx}(f(x)) \in V.$$

このとき，T は線形写像であることを示せ．

(6) $\boldsymbol{f} = f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \in U$，$T(\boldsymbol{f}) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3$ とする．すなわち，

$$\boldsymbol{f} = (1,\ x,\ x^2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad\longmapsto\quad T(\boldsymbol{f}) = (1,\ x,\ x^2,\ x^3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

である．このとき，

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

を満たす 4×3 行列 A を求めよ．これは写像 T の基底 $1,\ x,\ x^2$ および $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ に関する**表現行列**と呼ばれる．

(7) 同様にして，写像 T の基底 $1,\ x+1,\ (x+1)^2$ および $1,\ x+1,\ (x+1)^2,\ (x+1)^3$ に関する表現行列 B を求めよ．

(8) $B = P_2^{-1} A P_1$ を示せ．

レポート問題 9-1（ホモロジー）　U, V, W をそれぞれ (ゼロベクトル以外の元をもつ) ベクトル空間とし，写像 $f : U \to V$，　$g : V \to W$ はそれぞれ線形写像とする．いま $g \circ f(U) = \{\mathbf{0}_W\}$ （W のゼロベクトル）と仮定する．

(1) $\mathrm{Im}\, f$ は $\mathrm{Ker}\, g$ の部分空間となることを示せ．

(2) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ となる具体例を構成せよ．

(3) $\mathrm{Im}\, f \neq \mathrm{Ker}\, g$ となる具体例を構成せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

次元定理

作成日：July 11, 2008　Version : 1.0　　実施日：July 11, 2008

線形写像がどのくらいの情報量を保存し，どのくらいの情報量を失うのか．これを定式化するのが，次元定理です． 以下，特に断らない限り U, V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，$f : U \to V$ は線形写像とします．

今後の予定

- 7/18：期末テスト（宿題返却，アンケート）
- 7/25：オフィスアワー最終日 (Cafe David)

次元定理

問題 1. n を自然数，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を U の基底とする．このとき，

$$\mathrm{Im}\, f \;=\; \mathrm{Span}\{f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$$

を示せ．

問題 2. 線形写像 $D : \mathrm{Poly}_3 \to \mathrm{Poly}_3$ を $D : p(x) \mapsto \dfrac{d^2}{dx^2} p(x)$ で定める．

(1) D の核と像を求めよ（集合の形で書け）．

(2) Poly_3 の基底 1，x，x^2，x^3 をとる．このとき，$D(1)$，$D(x)$，$D(x^2)$，$D(x^3)$ は $\mathrm{Im}\, D$ の基底となっているか？

(3) $\dim(\mathrm{Im}\, D) + \dim(\mathrm{Ker}\, D) \;=\; \dim \mathrm{Poly}_3$ を示せ．

線形写像において，「伝達された情報量＋失われた情報量＝オリジナルの情報量」という解釈は当然であろう．これを定式化すると，次の定理となる．

> **次元定理**　線形写像 $f : U \to V$ において，以下の等式が常に成り立つ：
>
> $$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) \;=\; \dim U.$$

注意：任意の整数 n について $\infty + n = n + \infty = \infty$ と約束すれば，上の定理は無限次元ベクトル空間に関しても正しい定理となる．

問題 3. 次のような線形写像 $f : U \to V$ の例を作れ．

(1) $\dim U = 3$，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 1$，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2$.

(2) $\dim U = 3$，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

(3) $\dim U = 5$，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 5$，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$.

(4) $\dim U = 5$，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 0$，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 5$.

(5) $\dim U = \infty$，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \infty$，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

(6) $\dim U = \infty$，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \infty$，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2008$.

(7) $\dim U = \infty$，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2008$，$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = \infty$.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像の単射と全射

上の定理より，線形写像において情報が失われないためには $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$，すなわち $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\}$ が必要であることがわかる．

問題 4. 線形写像 $f : U \to V$ について，以下は全て同値であることを示せ．

(1) $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\}$

(2) $(\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in U)\ \ f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}') \in V \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$（すなわち f は単射）．

(3) $(\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in U)\ \ \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{a}' \Longrightarrow f(\boldsymbol{a}) \neq f(\boldsymbol{a}') \in V$（＝異なる 2 点を 1 点につぶさない＝情報をつぶさない）．

問題 5. $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を U の基底とする．

(1) $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\}$ を仮定すると，$f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ は $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\{f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$（**問題 1**）の基底になることを示せ．

(2) $\mathrm{Ker}\, f \neq \{\mathbf{0}_U\}$ かつ $f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ が $\mathrm{Im}\, f$ の基底とならない例を構成せよ．

覚えておこう：

- **定義**　$f : U \to V$ がが線形写像かつ全単射であるとき，**同型写像** (isomorphism) と呼ばれる．
- **定理**　U, V を有限次元ベクトル空間，$f : U \to V$ が 線形写像 であるとき，
  - f が単射 $\iff \mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\} \iff \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$
  - f が全射 $\iff \mathrm{Im}\, f = V \iff \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim V$
  - f が同型写像 $\iff$ 表現行列は正方正則行列 $\iff \dim U = \dim V$

問題 6.（オマケ） $f : U \to V$ を線形写像とする．このとき以下を示せ：

(1) $W \subset U$ が部分空間ならば，$f(W) \subset V$ も部分空間．

(2) $W \subset V$ が部分空間ならば，$f^{-1}(W) \subset U$ も部分空間．

(3) $W_1, W_2 \subset U$ がともに部分空間ならば，$f(W_1) \cap f(W_2) \subset V$ は部分空間．

(4) $W_1, W_2 \subset U$ をともに部分空間とするとき，$f(W_1) \cup f(W_2) \subset V$ が部分空間となる場合とならない場合がある．

(5) $W_1, W_2 \subset V$ をともに部分空間とするとき，$f^{-1}(W_1) \cup f^{-1}(W_2) \subset U$ が部分空間となるときとならない場合がある．