

## 演習について

作成日：April 23, 2010 Version：1.1

担当教官：川平 友規（かわひら ともき）

担当 TA：齋藤 翔（さいとう しょう）

演習のウェブサイト：<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/2S10.html>  
配布されたプリントが pdf 形式でダウンロードできます。また、毎週の進捗状況についてコメントしていきます。

演習の進め方：毎回、問題プリントを配布します。私（川平）が基本事項を確認したあと、問題を指定し、各自ノートに解いてもらいます。その後、私が黒板で解説する、という流れです（配布した問題のすべてを演習で扱うとは限りません。）

演習で取り上げるテーマ：

- $\epsilon$ - $N$ ,  $\epsilon$ - $\delta$  論法の基礎
- 集合と写像の基礎（単射，全射，連続性など）
- 複素数・複素関数の基礎
- $n$  次元での線形写像（1 次変換），基底の概念
- 抽象ベクトル空間（数列のなすベクトル空間など）

演習と講義は独立したものと考えられています。したがって、講義で扱わない内容を演習で扱うこともありますし、逆もありえます。

単位・成績：成績に関係のある要素は、平常点と期末テストの点数です。成績の優・良・可は以下の基準で定めます。

- 平常点は、出席・宿題・小テスト・レポートの4つを加味し、60点満点で評価します。さらに、3クラス合同で実施する期末テストを40点満点とし、合計100点満点により成績を評価します。
- 成績は59点以下を不可、60 - 69点を可、70 - 79点を良、80点以上を優とする。
- 単位を出すにあたっては、期末テストの受験は必須とします。また、期末テストの点数が著しく悪い場合は、教務委員会の判断により単位を出せない場合もあるので注意してください。

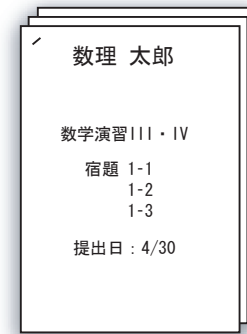
出席：授業の前半に出席を取ります。遅刻もしくは欠席する場合、授業開始1時間前までに連絡した場合に限って、2回まで無条件に加点します。

小テスト：皆さんの理解度を確認するため、前期の間に30分程度の小テストを2回実施します。出題内容は、演習でやった問題をベースにした基本的な問題です。

宿題：宿題は毎回出題されます。提出の際は、必ず A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙を使用し、右図のような表紙をつけてください。また、必ず左上をホチキスでとめて提出してください。

宿題の締め切りは次回演習の開始時間までとします。教壇前の机に提出しておいてください。締め切り以後に提出されたものも採点（添削）はしますが、成績にはいっさい加点しないので注意してください。

もし何らかの事情で授業時に提出できない場合、事前に申し出た場合に限り対処します。



- ・名前は上の方に書く。
- ・左上をホチキスで留める。
- ・解いた問題の番号、提出日を書く。
- ・裏面はなるべく使わない。

レポート：やや進んだ内容のレポート問題もほぼ毎週出題します。提出は任意ですが、平常点にボーナス加点します。学期中ならばいつ提出してもかまいません。受講者同士で協力し合い、グループで解答してもかまいません。提出様式は宿題に準じます（A4 ルーズリーフもしくは A4 レポート用紙使用、表紙をつける、etc.）ただし、たとえ同じ日に提出する場合でも、レポートと宿題は必ず分けて提出してください。（採点者が異なります。）

期末テスト：「この程度の問題ができないのに 3 年生に上がってもらっては困るし、本人のためにもならない」という気持ちを込めて、ごく基本レベルの問題を期末試験として出題します。

オフィスアワー：授業中・授業前後の質問は大歓迎です。それ以外の時間に質問したい場合は、ぜひオフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を活用してください。私のオフィスアワーは、Cafe David（カフェ・ダヴィド）という合同のオフィスアワー内に設定しています。Cafe David は月曜から金曜の昼休みにオープンし、コーヒー・紅茶を無料で提供しています。私の担当は金曜日の演習開始前（12:00-13:00）です。その他のスタッフも待機しているので、自由に質問していただいてもかまいません。数理学科の学部生・院生もたくさんいるので、勉強のこと、進路のことなど、情報収集の場としても活用してください。

よく使う記号など：数の集合

- |                          |                          |                                  |
|--------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| (1) $\mathbb{C}$ : 複素数全体 | (2) $\mathbb{R}$ : 実数全体  | (3) $\mathbb{Q}$ : 有理数全体         |
| (4) $\mathbb{Z}$ : 整数全体  | (5) $\mathbb{N}$ : 自然数全体 | (6) $x \in \mathbb{R}$ : $x$ は実数 |

ギリシャ文字

- |                               |                   |                             |                             |                                   |
|-------------------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| (1) $\alpha$ : アルファ           | (2) $\beta$ : ベータ | (3) $\gamma, \Gamma$ : ガンマ  | (4) $\delta, \Delta$ : デルタ  | (5) $\epsilon$ : イプシロン            |
| (6) $\zeta$ : ゼータ             | (7) $\eta$ : エータ  | (8) $\theta, \Theta$ : シータ  | (9) $\iota$ : イオタ           | (10) $\kappa$ : カッパ               |
| (11) $\lambda, \Lambda$ : ラムダ | (12) $\mu$ : ミュー  | (13) $\nu$ : ニュー            | (14) $\xi, \Xi$ : クシー       | (15) $\omicron$ : オミクロン           |
| (16) $\pi, \Pi$ : パイ          | (17) $\rho$ : ロー  | (18) $\sigma, \Sigma$ : シグマ | (19) $\tau$ : タウ            | (20) $\upsilon, \Upsilon$ : ウプシロン |
| (21) $\phi, \Phi$ : ファイ       | (22) $\chi$ : カイ  | (23) $\psi, \Psi$ : プサイ     | (24) $\omega, \Omega$ : オメガ |                                   |

$\epsilon$  と  $N$ 

作成日：April 23, 2010 Version：1.2

今回は数列の収束を厳密に扱う方法 ( $\epsilon$ - $N$  論法) を練習します。一見難しそうですが、誰にでも理解できるので安心してください。そのまゝに...

今後の予定

- 4/30：Cauchy 列と級数の収束
- 5/7：ベクトル空間と基底

$\forall$  とか  $\exists$  とか。「全ての  $x$  に対して」を  $\forall x$ 、「ある  $y$  が存在して」を  $\exists y$  と略記する。

例。「任意の正の数  $x$  に対してある整数  $n$  が存在して、 $10^n \leq x < 10^{n+1}$  を満たす」という文章は

$$\forall x > 0, \exists n \in \mathbb{Z}, 10^n \leq x < 10^{n+1}$$

などと略記する。とくに、 $x > 0$  と不等号を書くと  $x \in \mathbb{R}$  であることは暗に示されている。

**問題 1.** 次の文章を上記の  $\forall, \exists$  を用いた形に書き直せ。さらにその真偽を判定せよ。

- (1) 任意の負の数  $x$  に対しある正の数  $y$  が存在して、 $y = x^2$  を満たす。
- (2) ある実数  $x$  とある実数  $y$  が存在して、 $x^2 + y^2 + 1 = 0$  を満たす

**問題 2.** 次の式を (日本語もしくは英語で) 文章化せよ。また、その真偽を判定せよ。

- (1)  $\forall p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Q}, pq = 1$  .
- (2)  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x < 0$  .

数列の収束は  $\epsilon$ - $N$  で

高校では数列の収束を「 $a_n$  は限りなく 2 に近づく」などと表現した。大学では、いや厳密には、次のように表現する：

数列の収束。ある数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が数  $\alpha$  に収束する (converge) とは、

『任意の  $\epsilon > 0$  に対し、ある自然数  $N$  が存在して、 $n > N$  ならば  $|a_n - \alpha| < \epsilon$  が成り立つ』

ときを言う。このことを  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  もしくは  $a_n \rightarrow \alpha$  ( $n \rightarrow \infty$ ) と表す。また、 $\alpha$  を数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の極限 (limit) と呼ぶ。

注意：「任意の  $\epsilon > 0$ 」という言葉は「任意に小さい  $\epsilon > 0$ 」と心の中で読みかえるべし。

**問題 3.**

- (1) 上の収束の定義を  $\forall, \exists$  などを用いて書き直せ。
- (2)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が実数列のとき、上の定義を図でイメージせよ。
- (3)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が複素数列のとき、上の定義を図でイメージせよ。

問題 4. 実数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $a_n = \frac{n - \sqrt{2}}{n}$  で定める. 以下の  $\epsilon$  に対し, 「 $n > N$  ならば  $|a_n - 1| < \epsilon$  を満たす」ような  $N$  をひとつ求めよ.

- (1)  $\epsilon = 5$       (2)  $\epsilon = 1$       (3)  $\epsilon = 0.1$       (4)  $\epsilon = 0.001$       (5)  $\epsilon = \epsilon_0 > 0$

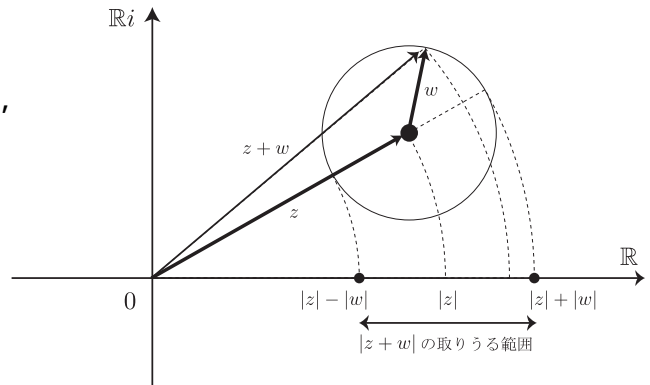
これを用いて,  $a_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$  を示せ.

三角不等式と極限の四則

問題 5. (Triangle inequality) 右の図から, 任意の複素数  $z, w \in \mathbb{C}$  について,

$$|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

が成り立つことを納得せよ.  
(もちろん,  $z$  と  $w$  が実数でも成り立つ.)



極限の四則公式. 二つの数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  について,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  と仮定する. このとき,

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$       (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$   
 (3)  $\beta \neq 0$  のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$       (4)  $C$  が定数のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (C a_n) = C \alpha$

問題 6. (2)  $\implies$  (4) である. なぜか?

問題 7.  $P(z)$  を  $z$  の多項式とすると  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  であれば  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(z_n) = P(\alpha)$  である. なぜか?

問題 8. 上の (1), (2) を証明せよ. (3) は宿題.

問題 9. (A hint for the homework)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \neq 0$  のとき,  $\epsilon$ - $N$  論法を用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta} \text{ を示せ.}$$

今週の宿題・レポート

宿題 1-1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  とする. 以下を  $\epsilon$ - $N$  論法により (上の公式を使わずに) 証明せよ:

- (1)  $C$  を定数とすると  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + C) = \alpha + C$ .  
 (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \neq 0$  と仮定する. このとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$  を示せ.  
 (3)  $N$  を自然数とすると  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+N-1}) = N\alpha$ .

(4)  $N$  を自然数とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1} \cdots a_{n+N-1} = \alpha^N$ . (Hint: 数学的帰納法を用いる.)

宿題 1-2. 複素数列  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  を考える.  $z_n := x_n + y_n i$  と置くと、数列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  は実数列である. このとき、以下を示せ:

- (1)  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  がそれぞれある実数に収束すれば、 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  もある複素数に収束する. (Hint:  $z = x + yi$  とするとき、 $|z| \leq |x| + |y|$ .)
- (2)  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  がある複素数に収束すれば、 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  もそれぞれある実数に収束する. (Hint:  $z = x + yi$  とするとき、 $|x| \leq |z|$  かつ  $|y| \leq |z|$ .)

レポート 1-1. 複素数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  と  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対し、以下の問いに答えよ.

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$  は存在するが、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  はともに存在しない例を構成せよ.
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$  はともに存在するが、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  はともに存在しない例を構成せよ.
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  がともに存在すれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  はともに存在することを示せ.
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  がともに存在するとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  の存在は言えるかどうか考察せよ.

レポート 1-2. (行列の収束)  $m$  次正方行列  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  に対し、そのノルム (norm) を

$$\|A\| := \max_{1 \leq i, j \leq m} |a_{ij}|$$

で定義する. また、 $n$  次正方行列の列  $A_n$  が  $A$  に収束するとは、

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) \quad \|A_n - A\| < \epsilon$$

と定義し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  と書く. 別の  $m$  次正方行列による列  $B_n$  が  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$  を満たすとき、以下を示せ:

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = A + B$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n = AB$
- (3) (やや難)  $\det A \neq 0$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{-1} = A^{-1}$ . ( $n$  が十分大きいとき、 $\det A_n \neq 0$  であることも確認すること.)

レポート提出時の注意 レポートは1問だけでも提出可です. 解き直して再提出する場合は、前に提出した分とその差分(解き直した問題・小問部分の答案のみ)を一緒にホチキスで留めてから提出してください. 表紙には「何月何日再提出」と記入してください.

## コーシー列と級数の収束

作成日：April 30, 2010 Version：1.2

コーシー列は実数の連続性に関わる重要な概念です。またコーシー列を利用して「絶対収束する級数は収束する」という便利な結果を証明しましょう。

今後の予定

- 5/7：ベクトル空間と基底
- 5/14：一次独立性と部分ベクトル空間、中間講義アンケート

## コーシー列

(複素) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  がコーシー列 (Cauchy sequence) であるとは、「任意の  $\epsilon > 0$  に対し、ある自然数  $N$  が存在して、 $n, m > N$  ならば  $|a_n - a_m| < \epsilon$  とできる」ときを言う。このとき、以下が成り立つ：

(C1) コーシー列ならば、収束列である。すなわち、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  を持つ。

(C2) 逆に、収束列ならばコーシー列である。

すなわち、収束列 = コーシー列である。したがって、収束性をチェックするときには極限值が何になるか、事前に知る必要はない。ただ、コーシー列であることをチェックすれば良い。

**問題 1.** 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2}$  で定める。まず、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  を  $\epsilon$ - $N$  論法で示せ。さらに、これはコーシー列になっていることを確認せよ。(Hint:  $|a_n - a_m| = |(a_n - 1) - (a_m - 1)|$ .)

**問題 2.** 上の (C2) を示せ。

**問題 3. (完備性)** 有理数列  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$  をコーシー列とする。このとき、極限は有理数とは限らないことを示せ。

**問題 4. (コーシー列の応用)** サイコロを何回も振って、 $n$  回目に出た目を  $d_n$  としよう。このとき、有理数列  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  を

$$r_n := 0.d_1d_2 \cdots d_{n-1}d_n \text{ (十進小数)}$$

として定める。このとき、 $r_n$  は必ず極限  $\gamma$  を持つことを示せ (ちなみに、 $\gamma$  が有理数となる確率は? )

## 級数の収束

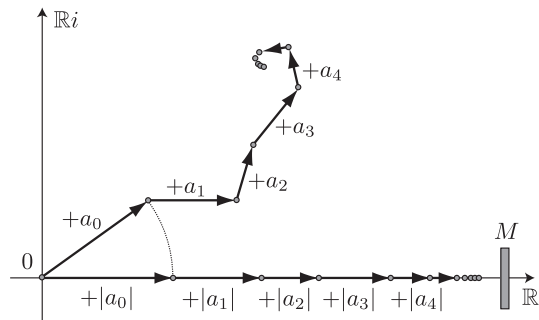
ある数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  (実数列 or 複素数列) があるとき、有限和  $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$  の極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + \cdots + a_n)$  を

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{もしくは} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

と表し、これを数列  $a_n$  の定める級数 (series) と呼ぶ。ただし、これは形式的な記号であって、一般に有限和の極限值が存在するとは限らない (たとえば  $a_n$  がどんな数列の場合か?) 極限が存在するとき、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束する (converge) といい、存在しないとき発散する (diverge) と言う。



さて級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  とは何か、複素平面で表現したのが右の図である。  
 0 から  $+a_0$  進み、さらに  $+a_1$  進み、さらに  $+a_2$  進み...と無限に続けていった「折れ線」の先がどこかに留まれば、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束するわけである。



**問題 5.**  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  を以下のように定める。このとき、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  の収束・発散を直感的に判定せよ。

(1)  $a_n = (-1)^n$       (2)  $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$       (3)  $a_n = n \cdot i^n$       (4)  $a_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n$

**問題 6.** 上の問題の各  $a_n$  で、級数に対応する折れ線のトータルの長さはどうなるか？<sup>1</sup>

級数に対応する折れ線のトータルの長さが有限（もしくは、上に有界）ならば、その級数は収束するに違いない（というか、発散のしようがない）。折れ線のトータルの長さは級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots$$

で表されるから、次が成立する：

**定理 A (絶対収束)**  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  が有界であれば、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束する。

**問題 7.**  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  が上に有界であれば、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束する。なぜか？

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  が収束するとき、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は絶対収束 (absolute convergence) と呼ばれる。

**問題 8.** 上の定理を用いて、問題 5(4)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$  が収束することを示せ。また、その値を求めよ。

**問題 9. (定理の逆は??)** 収束はするが絶対収束しない級数の例を他に挙げよ。すなわち、定理 A の逆は成立しない。

**問題 10. (定理 A の証明)**

<sup>1</sup>Hint:  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$  . ちなみに  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$  (発散),  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$  (Leibniz 級数) であった。

- (1)  $s_n := |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$  ( $\geq 0$ ) とおくと、仮定よりある正の数  $M$  が存在して  $s_n \leq M$  がすべての  $n$  について成り立つ。このとき、数列  $s_n$  はコーシー列となる。その根拠を述べよ。
- (2)  $S_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$  とおく。コーシー列は収束列であることが知られているから、 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  がコーシー列であることを示せば定理の証明は終わる。 $s_n$  がコーシー列であることを用いて、これを証明せよ。

**問題 11. (定理 A の応用)** 級数  $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots$  は  $\alpha > 1$  のとき収束し、 $\alpha \leq 1$  のとき発散する。これを利用して、以下の問に答えよ。

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  は収束するが  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束しないような例を作れ。
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$  は収束することを示せ。(Hint:  $\frac{1}{(2n+1)^3} < \frac{1}{(2n)^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^3}$ .)
- (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+1}}{n}$  は発散することを示せ。
- (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+1}}{n^2}$  は収束することを示せ。
- (5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1) + (2n+1)i}{n^4}$  は収束することを示せ。

### 今週の宿題・レポート

**宿題 2-1.** 複素数列  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  を考える。極座標を考え、 $z_n := r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$  とおく。ただし、 $0 \leq \theta_n < 2\pi$  とする(ただし、 $z_n = 0$  のときは  $r_n = 0$ ,  $\theta_n = 0$  とせよ。)このとき、数列  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$  は実数列である。以下の問いに答えよ：

- (1) 任意の  $\theta, \theta'$  に対し、

$$|(\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta' + i \sin \theta')| \leq |\theta - \theta'|$$

であることを幾何学的に説明せよ。(Hint: 東京からサンフランシスコ、船で行くのと、トンネルを掘って地中をまっすぐ進むのとどっちが近いかな?)

- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  となることを  $\epsilon$ - $N$  論法により示せ。(Hint:  $z_n - r(\cos \theta + i \sin \theta) = z_n - r(\cos \theta_n + i \sin \theta_n) + r(\cos \theta_n + i \sin \theta_n) - r(\cos \theta + i \sin \theta)$ .)
- (3)  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  がある複素数に収束すれば、 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  はある実数に必ず収束するが、 $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$  は収束するとは限らない。なぜか? そのような例をひとつ挙げよ。



宿題 2-2. 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を漸化式

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$$

で定める．この数列がコーシー列（したがって収束列）であることを示そう．

- (1)  $n \geq 3$  のとき,  $a_n - a_{n-1} = (-1/2)(a_{n-1} - a_{n-2})$  を示せ．（ついでに, この式の幾何学的な意味を考えよ．
- (2)  $a_{200} - a_{100} = (a_{200} - a_{199}) + \cdots + (a_{101} - a_{100})$  に三角不等式を（複数回）適用して,  $|a_{200} - a_{100}| \leq \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{100}}\right)|a_{100} - a_{99}|$  を示せ．
- (3)  $|a_{100} - a_{99}| = \frac{1}{2^{98}}|a_2 - a_1| = \frac{3}{2^{98}}$  を示せ．
- (4) 以上の議論を応用して,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  がコーシー列であることを示せ．また, その極限值は何か?

宿題 2-3.

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$  は収束することを示せ．
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2n^3 + 1}$  は収束することを示せ．

レポート 2-1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}$  が収束するような  $\alpha \in \mathbb{R}$  の範囲を求めよ．ただし,  $p > 0$  のとき,  $(\log n)/n^p \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であることを用いてもよい．

レポート 2-2 (余弦 Taylor 展開)．任意の複素数  $z$  を固定する．このとき, 上の定理を用いて,

$$C(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

が収束することを示したい．明らかに,  $z \neq 0$  のとき証明すれば十分である． $n = 0, 1, 2, \dots$  に対し,  $c_n := (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$  と定める．

- (1)  $n \geq |z|$  ならば  $|c_{n+1}| < \frac{|c_n|}{4}$  とできることを示せ．
- (2)  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$  は収束することを示せ．したがって  $C(z)$  は収束する．

まめちしき  $x$  が実数のとき,  $C(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$  である．

注意：複素数  $z$  に対しても,  $\cos z := C(z)$  と定義できる．しかしこの関数は各点での値が与えられただけで, 連続性や微分可能性について何も保証されていないことに注意しよう．これらは別個に証明する必要がある．

## ベクトル空間と基底

作成日：May 7, 2010 Version：1.1

いったん線形代数に移ります．線形代数がただの記号演算にしか思えない人は，まず基底の何たるか，そのココロを理解してください．

今後の予定

- 5/14：一次独立性と部分ベクトル空間，中間講義アンケート
- 5/21：小テスト，集合と写像

## ベクトル空間の公理的定義

**Definition.** A set  $V$  is called a *vector space* (ベクトル空間) over  $\mathbb{R}$  if the following conditions are satisfied:

- (V1) For any  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ , the *sum* (和)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$  is uniquely defined.
- (V2) For any  $\alpha \in \mathbb{R}$  and  $\mathbf{a} \in V$ , the *scalar multiplication* (スカラー倍)  $\alpha \mathbf{a} \in V$  is uniquely defined.
- (V3) For any  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$  and for any  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , we have:
- (1)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .
  - (2)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ .
  - (3) There exists an element  $\mathbf{0} \in V$ , called the *zero vector* (ゼロベクトル), such that  $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ .
  - (4) For any  $\mathbf{a} \in V$ , there exists an element  $\mathbf{a}' \in V$  such that  $\mathbf{a}' + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0}$ .
  - (5)  $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ .
  - (6)  $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ .
  - (7)  $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$
  - (8)  $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$

**問題 1. (ベクトル空間の例)**  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間となる集合は沢山ある．それぞれ，和とスカラー倍がどのように定義されるか確かめよ．

- (1)  $\mathbb{R}^n := \{\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$  .
- (2)  $\text{Poly}_d := \{f = f(x) : f(x) \text{ は } d \text{ 次以下の実係数多項式}\}$  .
- (3)  $\text{Poly}_\infty := \{f = f(x) : f(x) \text{ は実係数多項式}\}$  .
- (4)  $\mathbb{R}^\infty := \{\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots) : \text{各 } a_j \in \mathbb{R}\}$  .
- (5)  $M_n(\mathbb{R}) := \{\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} : \text{各 } a_{ij} \in \mathbb{R}\}$

逆に，これら全てに共通の性質を列挙したものが，上のベクトル空間の定義ともいえる．

**問題 2. (関数の和とスカラー倍)** ( $\mathbb{R}$  上の)ベクトル空間  $\text{Poly}_2$  を考える． $\mathbf{u}_1 = u_1(x) = 1$  (定数関数)， $\mathbf{u}_2 = u_2(x) = x$ ， $\mathbf{u}_3 = u_3(x) = x^2$  とおくととき，次のベクトルをグラフとして図示せよ．

- (1)  $f_1 = -2\mathbf{u}_1$
- (2)  $f_2 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$
- (3)  $f_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3$
- (4)  $\mathbf{0}$  (ゼロベクトル)

今，任意のベクトル  $f = f(x) \in \text{Poly}_2$  に対し，ある実数の組  $a_1, a_2, a_3$  がただ 1 つ存在して， $f = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$  と書けることは明らかであろう（実際， $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$  と書けるから．）

**問題 3.** 一方  $v_1 = v_1(x) = 1, v_2 = v_2(x) = x - 1, v_3 = v_3(x) = (x - 1)^2$  とおくとき，ある実数の組  $b_1, b_2, b_3$  がただ 1 つ存在して， $f = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3$  と書けることを示せ．

### 基底と座標系

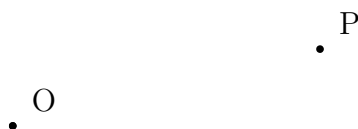
**問題 4.** このプリントのこのページを平面と思い， $\Pi$  で表す．

- (1) 下の点  $O$  を  $\Pi$  の原点と定め，これを始点とする同一直線上にないベクトル  $u_1, u_2$  を自由に描け．
- (2) 下の点  $P$  に対し， $\overrightarrow{OP} = a_1 u_1 + a_2 u_2$  なる実数  $a_1, a_2$  がただひと組定まるはずである．そのような  $a_1, a_2$  の大体の値（小数点以下 1 桁ぐらい）を求めよ．
- (3) 以下で定まるこのプリント  $\Pi$  上の部分集合を図示せよ．

$$S_1 = \{s u_1 + t u_2 \in \Pi : s = 2\}$$

$$S_2 = \{s u_1 + t u_2 \in \Pi : t = s + 1\}$$

$$S_3 = \{s u_1 + t u_2 \in \Pi : s^2 + t^2 = 1\}$$



上の問題で，Aretha さんはベクトル  $u_1, u_2$  を選び， $\overrightarrow{OP} = a_1 u_1 + a_2 u_2$  ( $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ) を得たとする．これを形式的に（行列の積のイメージで）

$$\overrightarrow{OP} = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

と表現する．この式は「ベクトル  $u_1, u_2$  を基準として計測した点  $P$  の座標値が  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  だった」と

解釈できる．このように，平面  $\Pi$  に座標系を定めるにあたって，基準として選ぶベクトルの組を  $\Pi$  の基底 (basis) と呼ぶ (この場合  $\{u_1, u_2\}$  は基底である．)

基底には，絶対的な (普遍的な) 選び方というものがない．たとえば，Otis さんは別の基底  $v_1, v_2$  を選び， $\vec{OP} = b_1 v_1 + b_2 v_2 = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  を得たとする．これは，同じ  $\vec{OP}$  というベクトルが，基底に応じて

$$\vec{OP} = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\text{基底}) \begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix}$$

と異なる表現をもつことを意味する．

これは，同じモノの長さを cm で測るか，mm で測るか，inch で測るか，といった状況と似ている．例えば一円玉の直径  $L$  は  $L = 2\text{cm} = 20\text{mm}$  と，単位に応じて異なる表現を持つ．同じ長さでも，異なる単位 (cm と mm) に応じて異なる数値 (2 と 20) をとるのである．とくに，単位が  $\frac{1}{10}$  倍されると，数値は 10 倍されることが分かる．

**問題 5. (異なる基底の関係)** Otis の基底  $v_1, v_2$  に対し，Aretha の基底を用いて

$$v_1 = u_1 - u_2, \quad v_2 = 2u_1 - u_2$$

という関係が与えられたとする．このとき，上の  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  の間の関係式を与えよ．

### ベクトル空間の基底 (一般の場合)

定義． $V$  を  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とする．ベクトルの組  $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V$  が  $V$  の基底であるとは，次を満たすときをいう：『任意の  $a \in V$  に対し実数の組  $(a_1, \dots, a_n)$  がただ一組存在して，

$$a = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = (u_1 \ \dots \ u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書ける』このような基底が存在する  $V$  を  $n$  次元ベクトル空間と呼ぶ．

**問題 6. (行列の基底?)** 実 2 次正方行列の全体  $M_2(\mathbb{R})$  を  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とみなしたとき，ベクトルの組  $\left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  は基底となることを示せ (よって  $M_2(\mathbb{R})$  の次元は?)

**問題 7. (同じベクトルの異なる表現)**  $V = \text{Poly}_2$  を考える．

- (1)  $u_1 = u_1(x) = 1, u_2 = u_2(x) = x, u_3 = u_3(x) = x^2$  とおくと，これらは  $V = \text{Poly}_2$  の基底になっていることを確かめよ．
- (2)  $v_1 = v_1(x) = 1, v_2 = v_2(x) = x - 1, v_3 = v_3(x) = (x - 1)^2$  も基底になっていることを確かめよ．
- (3)  $f = f(x) = -2 + x^2$  とおく．このとき，基底  $u_1, u_2, u_3$  で測った  $f$  の座標値と， $v_1, v_2, v_3$  で測った  $f$  の座標値を求め，比較せよ．

## 基底の変換

問題 8. (上の問題の続き) 上で与えられた  $V = \text{Poly}_2$  の 2 つの基底に対し,

$$(\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3)P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)$$

が成り立つような 3 次正方形行列  $P$  を求めよ. また, 任意のベクトル  $f = f(x) \in V$  に対し

$$f = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ならば,  $P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  が成り立つことを示せ.

基底と座標値の変換公式.  $n$  次元ベクトル空間  $V$  と任意のベクトル  $x \in V$  をとる. このとき,  $V$  の異なる基底  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  と  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  に対し,

$$x = (\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\text{基} \ \cdots \ \text{底}) \begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix}$$

と表されたとする. このときある  $n$  次 正則 行列  $P$  が存在して,

$$(\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_n)P = (\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n), \quad P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

基底の変換も, 長さの単位変換と考え方はまったく同じである. 単位が  $k$  倍されると数値が  $1/k$  倍されるように, 基底が「 $P$  倍」されると座標値は「 $P^{-1}$  倍」される.

問題 9. (次元は **well-defined**) ベクトル空間の次元は基底を用いて定義されたが, その値は基底の選び方に依存しない. その理由は何か?

## 今週の宿題・レポート

宿題 3-1. 数列の集合  $V = \{\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$  に対し (V1), (V2), (V3) を全てチェックし,  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間であることを確認せよ.

宿題 3-2. ベクトル空間  $V = \text{Poly}_3$  に対し,  $\mathbf{v}_1 = v_1(x) = 1$ ,  $\mathbf{v}_2 = v_2(x) = x - 1$ ,  $\mathbf{v}_3 = v_3(x) = (x - 1)(x - 2)$ ,  $\mathbf{v}_4 = v_4(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  は基底であることを示せ. また, もっとも自然な基底  $\mathbf{u}_1 = u_1(x) = 1$ ,  $\mathbf{u}_2 = u_2(x) = x$ ,  $\mathbf{u}_3 = u_3(x) = x^2$ ,  $\mathbf{u}_4 = u_4(x) = x^3$  に対し,

$$(\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4)P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_4)$$

となるような 4 次正方形行列  $P$  を求めよ. また,  $P$  が正則行列であることを確かめよ.

レポート問題 3-1. 宿題 3-1 のベクトル空間  $V$  の基底をひとつ求めよ. また,  $V$  の次元はいくつか?

## 一次独立性・部分ベクトル空間

作成日：May 14, 2010 Version：1.2

真っ白なベクトル空間に座標を入れる，その基準となるのが基底の役割でした．今日は基底の性質を掘り下げてみましょう．以下特に断らない限り， $V$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とします．

今後の予定

- 5/21：小テスト，集合と写像
- 5/28： $\epsilon$  と  $\delta$

## 基底になる，ならないの判定

**問題 1.**  $V = \text{Poly}_2$  上のベクトルの組を以下のように定める：

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \{1, x, x^2\}$$

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \{1, x-1, (x-1)^2\}$$

$$\{v_1, v_2\} = \{x, 1+x^2\}$$

$$\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \{1, 1+x, 1-x, 1-x^2\}$$

- (1) これらベクトルの組をそれぞれ用いて， $f = 2 - 2x + x^2 \in V$  を「1次結合」の形で表せ．例えば，適当な実数の組  $(d_1, d_2, d_3, d_4)$  を見つけて，

$$f = d_1 w_1 + d_2 w_2 + d_3 w_3 + d_4 w_4$$

の形で書き表せ．

- (2) ベクトルの組  $\{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $\{u_1, u_2, u_3\}$ ,  $\{v_1, v_2\}$  および  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  の中で， $V$  の基底になっているものを選び．基底とならないものについては，その理由を考えよ．

## 張る空間

定義：ベクトルの組  $\{v_1, \dots, v_N\} \subset V$  に対し，集合

$$\{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_N v_N : a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}\}$$

を  $\{v_1, \dots, v_N\}$  の張る空間 (span) と呼び， $\text{Span}\{v_1, \dots, v_N\}$  などと表す．

**問題 2.**

- (1) 集合  $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ,  $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$  はどんな図形か説明せよ．

- (2)  $\text{Span}\{A, B\} \subset M_2(\mathbb{R})$  が対角行列全体になるように  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  を定めよ．

**問題 3.** ベクトル空間  $V$  において  $\{u_1, \dots, u_n\}$  が基底ならば， $V = \text{Span}\{u_1, \dots, u_n\}$  でなくてはならない．なぜか？

$V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_N\}$  であることは， $\{v_1, \dots, v_N\}$  が  $V$  の基底となるための必要条件である．



問題 4. 再び  $V = \text{Poly}_2$  を考える．上の問題で定義した  $\{v_1, v_2\}$  は  $V = \text{Span}\{v_1, v_2\}$  とならないことを確認せよ（したがって，基底となり得ない．）また， $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  は  $V = \text{Span}\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  を満たすことを確認せよ．

### 一次独立性

$N$  を自然数とする．ベクトルの組  $\{v_1, \dots, v_N\} \subset V$  に対し

$$\mathbf{0} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_N v_N \implies a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$$

が成立するとき， $\{v_1, \dots, v_N\}$  は一次独立（線形独立, linearly independent）であるという．

問題 5.  $V = \text{Poly}_2$  を考える．問題 1 の  $u_1, u_2, u_3$  は一次独立となることを確認せよ．また，

$$(u_1 \ u_2 \ u_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (u_1 \ u_2 \ u_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

であれば， $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$  を示せ．

### 問題 6. (座標値の一意性)

- (1)  $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V$  が基底ならば，一次独立であることを示せ．
- (2) あるベクトル  $x \in V$  について，Aretha が基底  $\{u_1, \dots, u_n\}$  を用いて座標値を求めたところ， $(a_1, \dots, a_n)$  となった．一方，Otis が同じ基底  $\{u_1, \dots, u_n\}$  を用いて，別の方法を用いて座標値を求めたところ， $(b_1, \dots, b_n)$  となった．このとき，実は  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$  が成り立つことを  $\{u_1, \dots, u_n\}$  の一次独立性を用いて証明せよ．

ベクトルの組の一次独立性は，座標値がただ 1 つに定まるための必要条件である．すなわち，基底となるための必要条件である．

問題 7. 再び  $V = \text{Poly}_2$  を考える．上の問題で定義した  $\{v_1, v_2\}$  は一次独立となることを確認せよ．また， $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  は一次独立ではないことを確認せよ（したがって，基底となり得ない．）

実は，次が成り立つ：

基底の定義の言い換え： $V$  のベクトルの組  $\{u_1, \dots, u_n\}$  が基底であることは，次と同値（互いに必要十分条件）である：

- $V = \text{Span}\{u_1, \dots, u_n\}$  であり，かつ （  $V$  全体を測ることができる ）
- $\{u_1, \dots, u_n\}$  が一次独立． （ 座標値は一意的に定まる ）

## 部分ベクトル空間

定義.  $V$  の (空でない) 部分集合  $W$  が  $V$  の部分ベクトル空間 (vector subspace) であるとは, 次を満たすときをいう:

(VS1) 任意の  $a, b \in W$  に対し  $a + b \in W$ , かつ

(VS2) 任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  と任意の  $a \in W$  に対し,  $\alpha a \in W$ .

部分ベクトル空間は, それ自体が閉じた (独立した) ベクトル空間になっている.

問題 8.  $W \subset V$  が部分ベクトル空間であれば,  $0 \in W$  を示せ.

問題 9. 以下のベクトル空間  $V$  とその部分集合  $W$  について, それが部分ベクトル空間かどうか判定せよ.

(1)  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $W_b = \{x \in V : Ax = b\}$ . ただし  $A$  は  $n$  次正方行列,  $b \in V$ .

(2)  $V = \mathbb{R}^\infty$ ,  $W = \{a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in V : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$ .

(3)  $V = \mathbb{R}^\infty$ ,  $W = \{a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in V : a_{n+1} = 2a_n + 1\}$ .

(4)  $V = \text{Poly}_d$ ,  $W = \text{Poly}_1$  (ただし  $d \geq 1$ ).

(5)  $V = \text{Poly}_d$ ,  $W = \{f = f(x) \in V : f(x) = f(-x)\}$ .

(6)  $V = M_2(\mathbb{R})$ ,  $W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : \text{tr} A = a + d = 0 \right\}$ .

## 今週の宿題・レポート

来週 (5/21) は授業のはじめに 30 分間の小テストをやるので, テスト勉強を今週の宿題とします. 自筆ノート (コピー不可) に限り参照を許可するので, 要点をまとめた手書きノートを作ってくると良いでしょう (ノートの提出, 採点はしません.) たとえば, 以下を確認しておくとう利がもしれません.

- $\epsilon$ - $N$  論法で, 極限の四則公式 (プリント K201) がすべて証明できますか?
- $a_n$  が収束列であればコーシー列であることは証明できますか?
- ベクトル空間の「基底」とはなんですか?
- $\text{Poly}_2$  の基底を 3 種類以上選ぶことができますか?

レポート問題 4-1 (行列の指数関数).  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  に対し,  $\|A\| := \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$  と定める.

(1)  $A, B \in M_2(\mathbb{R}) \implies \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (三角不等式) を示せ.

(2)  $A, B \in M_2(\mathbb{R}) \implies \|AB\| \leq 2\|A\|\|B\|$  を示せ.

(3)  $e_n(A) := E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!}$  とする. このとき, 数列  $\|e_n(A)\|$  は上に有界であることを示せ. (Hint:  $\|A^n\| \leq 2^{n-1}\|A\|^n \leq (2\|A\|)^n$  をまず証明せよ.)

(4) 次を示せ:  $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) \|e_n(A) - e_m(A)\| < \epsilon$ .

一般に  $A \in M_2(\mathbb{R})$  であれば  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(A) \in M_2(\mathbb{R})$  が存在し, これを  $\exp(A)$  と表す.

## 集合と写像

作成日：May 21, 2010 Version：1.2

集合と写像の取り扱いには足し算引き算のようにすらすらとできないと後で困ります。特に、単射と全射を明快にイメージできるようになること、それを論理的に取り扱えることが肝心です。

今後の予定

- 5/28： $\epsilon$  と  $\delta$
- 6/4：名大祭のため休講

## 集合の演算

**問題 1.**  $A, B$  を集合とする。次の記号の定義を述べよ。

- (1)  $A \subset B$ .      (2)  $A = B$ .      (3)  $A \cup B$ .      (4)  $A \cap B$ .      (5)  $A - B$ .

**問題 2.**  $X, Y, Z, W$  を集合とするとき、次の命題を証明せよ。

- (1)  $X \subset Z$  かつ  $Y \subset W \implies X \cup Y \subset Z \cup W$   
 (2)  $X \subset Z$  かつ  $Y \subset W \implies X \cap Y \subset Z \cap W$   
 (3)  $X \cup Y \subset X \cap Y \iff X \cup Y = X \cap Y \iff X = Y$

## 写像 vs. 逆像

**問題 3.**  $X, Y$  を集合とし、 $f$  を  $X$  から  $Y$  への写像とする。

- (1)  $X$  の部分集合  $A$  に対し、写像  $f$  による  $A$  の像 (image)  $f(A)$  の定義を述べよ。  
 (2)  $Y$  の部分集合  $B$  に対し、写像  $f$  による  $B$  の逆像 (preimage)  $f^{-1}(B)$  の定義を述べよ。

**問題 4.**  $f$  を集合  $X$  から集合  $Y$  への写像とする。 $X$  もしくは  $Y$  の部分集合  $A, B$  に対し、次が成り立つことを示せ。(3) では等号の成り立たない例も作れ。

- (1)  $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$                       (2)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$   
 (3)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$                       (4)  $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$   
 (5)  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$                       (6)  $f(f^{-1}(A)) \subset A$

## 単射 vs. 全射

**問題 5.**  $X, Y$  を集合とし、 $f$  を  $X$  から  $Y$  への写像とする。

- (1) 写像  $f: X \rightarrow Y$  が単射 (injection) であることの定義を述べよ。  
 (2) 写像  $f: X \rightarrow Y$  が全射 (surjection) であることの定義を述べよ。  
 (3) 写像  $f: X \rightarrow Y$  が全単射 (bijection) であることの定義を述べよ。

**問題 6.**  $X, Y, Z$  を集合とする。写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $f$  と  $g$  がともに単射であれば，合成写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  も単射である．
- (2)  $f$  と  $g$  がともに全射であれば，合成写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  も全射である．
- (3)  $f$  が単射であれば， $A \subset X$  のとき  $f^{-1}(f(A)) = A$  がなりたつ．

## 今週の宿題・レポート

宿題 5-1  $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}$  への写像（関数）全体を  $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  で表す． $f = f(x)$ ,  $g = g(x) \in \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対し， $f + g := f(x) + g(x)$ ,  $\alpha f := \alpha f(x)$  とすればこれは  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間となる（各自で確認せよ）

ベクトル空間  $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  の部分集合として  $W = \text{Span}\{1(\text{定数関数}), \cos x, \cos^2 x\}$  を考えよう．

- (1)  $W$  は  $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  の部分ベクトル空間であることを証明せよ．
- (2)  $\{1, \cos x, \cos^2 x\}$  は  $W$  の基底となることを証明したい．それには， $\{1, \cos x, \cos^2 x\}$  が一次独立であることを示せば十分である．理由を説明せよ．
- (3)  $\{1, \cos x, \cos^2 x\}$  が一次独立であることを示せ．（Hint:  $C = \cos x$  と置くと， $a_1 + a_2 \cos x + a_3 \cos^2 x \equiv 0$  (定数関数)  $\implies a_1 + a_2 C + a_3 C^2 = 0$  が全ての  $-1 \leq C \leq 1$  で成り立つ．）

宿題 5-2. 集合  $X, Y, Z$  にたいし，写像  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  が与えられている．

- (1)  $X$  の部分集合  $A$  に対し，
  - (a)  $f(X - A) \supset f(X) - f(A)$
  - (b)  $A \subset f^{-1}(f(A))$
 を示せ．また，それぞれ等号が成り立たない例を作れ．
- (2)  $Y$  の部分集合  $A, B$  に対し，次が成り立つことを示せ．
  - (c)  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
  - (d)  $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$
- (3)  $Z$  の部分集合  $C$  に対し，
  - (e)  $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$

を示せ．また， $g \circ f$  が全射ならば， $g$  も全射であることを示せ．

レポート 5-1 (宿題 5-1 のつづき)

- (1)  $W = \text{Span}\{1, \cos x, \sin^2 x\} = \text{Span}\{1, \cos x, \cos 2x\}$  を示せ．
- (2) 写像  $Q: W \rightarrow \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  を  $Q: f(x) \mapsto \frac{d^2}{dx^2} f(x)$  で定める．このとき， $Q(W) \subset W$  を示せ．
- (3) 写像を  $Q: W \rightarrow W$  とみたとき，これは全射か？単射か？それとも，どちらでもないか？

$\epsilon$  と  $\delta$ 

作成日：May 28, 2008 Version：1.1

今日は関数の連続性を厳密に扱う方法 ( $\epsilon$ - $\delta$  論法) を練習しましょう。いつものように、複素数の関数 (実数の関数) を扱います。実関数の連続性は「グラフが繋がっているかどうか」で直感的に判定できますが、複素数ではそうは行きません。

今後の予定

- 6/4: 名大祭のため休講
- 6/11:  $\epsilon$  と  $\delta$  (つづき), 関数の一様収束

## 関数の連続性

関数の連続性は、近くの点は近くの点に写ることの数学的な表現である：

連続性の定義 (その1): 複素平面  $\mathbb{C}$  の部分集合  $D$  上で定義された関数  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  が点  $z_0 \in D$  で連続 (continuous) であるとは、

$z_0$  に収束する任意の数列  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$  に対し、数列  $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が  $f(z_0)$  に収束する

ときをいう。すなわち、 $n \rightarrow \infty$  のとき

$$z_n \rightarrow z_0 \implies f(z_n) \rightarrow f(z_0)$$

であるときをいう (像の極限は極限の像)。また、 $f$  が  $D$  上で連続であるとは、任意の  $z_0 \in D$  で  $f$  が連続であるときをいう。

**問題 1. (不連続関数の例)** 関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $x \neq 0$  のとき  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ,  $x = 0$  のとき  $f(x) = 0$  と定める。このとき、 $f$  は  $x \neq 0$  のとき連続だが、 $x = 0$  では連続でないことを示せ。

以下、 $D \subset \mathbb{C}$  とする。

**問題 2. (不連続性)** 上の「連続性の定義 (その1)」に従って、以下の命題を書き下せ：

- (1) 関数  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  が  $z_0 \in D$  で連続でない。
- (2)  $f$  が  $D$  上で連続でない。

連続性の  $\epsilon$ - $\delta$  式定義

各点での連続性を示すときには上の定義で十分だが、今後の応用を考えると次のように同値な言い換えをしておいたほうが良い：

連続性の定義 (その2,  $\epsilon$ - $\delta$  式): 関数  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  が点  $z = z_0 \in D$  で連続であるとは、

任意の  $\epsilon > 0$  に対しある  $\delta > 0$  が存在して、 $|z - z_0| < \delta$  ならば  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$  とできる

ときをいう。とくに、 $f$  が  $D$  上の各点で連続なとき、 $f$  は  $D$  上で連続という。

**問題 3.** この定義 (その2) に対し、複素数バージョンと実数バージョンの絵を描き、自分なりに解釈を与えよ。

問題 4. (不連続関数の例) 定義(その 2)にしたがって, 問題 1 の関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $x = 0$  で連続でないことを示せ.

問題 5. (不連続性) 上の「連続性の定義(その 2)」に従って, 以下の命題を書き下せ:

- (1) 関数  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  が  $z_0 \in D$  で連続でない.
- (2)  $f$  が  $D$  上で連続でない.

問題 6. 実関数  $f(x) = x^2$  は  $x = 1$  で連続であることを  $\epsilon$ - $\delta$  式に示したい. 以下の  $\epsilon$  に対し, 「 $|x - 1| < \delta$  ならば  $|f(x) - f(1)| < \epsilon$  と出来る」ような  $\delta > 0$  を一つ決定せよ.

- (1)  $\epsilon = 3$
- (2)  $\epsilon = \frac{1}{10}$
- (3)  $\epsilon = \frac{1}{1000}$
- (4)  $\epsilon > 0$

### 連続性の証明

問題 7. (和/積/合成)  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  と  $g: D \rightarrow \mathbb{C}$  を  $D$  上で連続な関数とする.

- (1) 関数  $h(z) = f(z) + g(z)$  も  $D$  上で連続な関数となることを示せ.
- (2) 関数  $h(z) = f(z)g(z)$  も  $D$  上で連続な関数となることを示せ.
- (3)  $f(D) \subset D$  であるとき, 関数  $h(z) = g(f(z))$  も  $D$  上で連続な関数となることを示せ.

問題 8. (基本的な複素関数の連続性) 以下で定義される関数はすべて  $\mathbb{C}$  上で連続であることを示せ.

- (1)  $R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R(z) := \operatorname{Re} z$ .
- (2)  $I: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I(z) := \operatorname{Im} z$ .
- (3)  $C: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C(z) := \bar{z}$ .
- (4)  $M: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M(z) := |z|^2 = z\bar{z}$ .

### 今週の宿題・レポート

宿題 6-1.  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を複素関数とする.

- (1)  $f(z) = 2z + 1$  とするとき, これは全単射となることを示せ.
- (2)  $f(z) = z^2$  とするとき, これは全射だが単射ではないことを示せ.
- (3) (ボーナス問題: )  $f(z) = z/(|z| + 1)$  とするとき, これは単射だが全射ではないことを示せ. (Hint: 単射性は極表示を用いて示すと簡単. あとは  $f(\mathbb{C})$  が単位円板に含まれることをいえばよい.)

宿題 6-2.  $D$  を  $\mathbb{C}$  の部分集合とする.



- (1)  $D$  上で連続な有限個の関数  $f_k : D \rightarrow \mathbb{C}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) に対し, 関数

$$S : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad S(z) := f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

は  $D$  上で連続であることを  $\epsilon$ - $\delta$  論法および数学的帰納法を用いて示せ.

- (2) 同様にして, 関数

$$P : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad P(z) := f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z)$$

は  $D$  上で連続であることを示せ.

- (3) (1)(2) を用いて, 多項式関数は  $\mathbb{C}$  上で連続な関数であることを示せ.

宿題 6-3. 次のように与えられる関数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を考える. :

$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(x) = 0 \quad (x = 0)$$

- (1)  $-1 \leq x \leq 1$  における  $f(x)$  のグラフを 丁寧に 描け ( $|f(x)| \leq |x|$  に注意.)  
 (2)  $x \rightarrow \pm\infty$  のとき,  $f(x)$  のグラフはある直線を漸近線を持つことを証明せよ.  
 (3)  $\epsilon$ - $\delta$  論法を用いて,  $f(x)$  は  $x = 0$  で連続となることを示せ.

注:  $x \rightarrow +\infty$  もしくは  $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$  が成り立つとき, 直線  $ax + b$  を  $f(x)$  の漸近線とよぶ.

レポート問題 6-1  $a_n$  は複素数列とする.

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束するが,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  は収束しない例を挙げよ.  
 (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  は収束するが,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束しない例を挙げよ.  
 (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  と  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  はともに収束するが, とともに絶対収束しない例はあるか?  
 (4) 実数列  $a_n$  に対し,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が絶対収束するとき,  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$  は収束するか? (Hint:  $|\sin x| \leq |x|$  を示す.)

レポート問題 6-2 複素関数  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を考える.

- (1) 関数  $z \mapsto f(z) + g(z)$  は  $\mathbb{C}$  上で連続だが,  $f$  と  $g$  はともに  $\mathbb{C}$  上連続でないような例を挙げよ.  
 (2) 関数  $z \mapsto f(z)g(z)$  は  $\mathbb{C}$  上で連続だが,  $f$  と  $g$  はともに  $\mathbb{C}$  上連続でないような例を挙げよ.  
 (3) 関数  $z \mapsto f(z)f(z) = f(z)^2$  は  $\mathbb{C}$  上で連続だが,  $f$  は  $\mathbb{C}$  上連続でないような例を挙げよ.  
 (4) 関数  $z \mapsto f(z) + g(z)$  および  $z \mapsto f(z)g(z)$  はともに  $\mathbb{C}$  上で連続だが,  $f$  と  $g$  はともに  $\mathbb{C}$  上連続でないような例を挙げよ.

$\epsilon$  と  $\delta$  ・ 一様連続性

作成日：June 11, 2010 Version：1.1

$\epsilon$ - $\delta$  論法を用いて、微分を定式化します。ついでに一様連続性について理解を深めましょう。

今後の予定

- 6/18：線形写像と表現行列
- 6/25：小テスト / 表現行列と像の次元

## 微分と連続性

以下， $a < b$  とする。

**Definition.** We say a function  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is *differentiable* (微分可能) at  $x_0 \in (a, b)$  if

$$(\exists A \in \mathbb{R}) (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \epsilon.$$

We call  $A$  the *derivative* (微分係数) of  $f$  at  $x_0$ , and denote it by  $f'(x_0)$ .

**問題 1.** 高校でならった  $f'(x_0)$  の定義を書け。上の定義と一致するか確かめよ。

**問題 2.** (微分可能なら連続) 『関数  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が  $x_0 \in (a, b)$  で微分可能であれば， $x_0$  で連続である』ことを示そう。

- (1)  $A = f'(x_0)$  とする。このときある  $\delta$  が存在して， $0 < |x - x_0| < \delta$  ならば  $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |A| + 1$  とできることを示せ。
- (2) (1) より， $f$  は  $x_0$  で連続であることを示せ。

**問題 3.** (微分係数とスピード)  $\mathbb{R}$  上で，関数  $y = f(x) = \sin x$  を考える。

- (1)  $x$  が秒速 1 で正の方向に動くとき， $y$  の速度がもっとも速くなるのはいつか？
- (2)  $x \geq x_0$  とする。微積分の基本定理

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

より， $M$  を区間  $[x_0, x]$  における  $|f'(t)|$  の最大値とすると，

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \int_{x_0}^x |f'(t)| dt \leq M|x - x_0|$$

が成り立つことを納得せよ。

- (3) 任意の異なる実数  $x, y$  について  $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 1$  となることを示せ。また，この式を図形的に説明せよ。

## 一様連続性

**問題 4.**  $f(x) = x^2$  とおく.  $x$  が  $\mathbb{R}$  上を秒速  $\delta = 0.1$  で正の方向に動いている. 今,  $x$  が  $x_0 = 0$  から 1 秒間で  $\delta = 0.1$  動くとき,  $f(x)$  は  $f(x_0)$  からどの程度はなれるか? また,  $x$  が  $x_0 = 100$  から同じ 1 秒間で  $\delta = 0.1$  動くときはどうか?  $\mathbb{R}$  上の 1 単位を 1m (メートル) とするとき,  $y = f(x)$  が光速 (秒速 30 万 km) を超えるのは原点から離れて何秒後か?

$D \subset \mathbb{C}$  とする (複素) 関数  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  が  $D$  上で一様連続 (uniformly continuous) であるとは, 次が成り立つときを言う:

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall z_0 \in D) \quad |z - z_0| < \delta \implies |f_n(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

ときをいう. もし  $z$  が秒速  $\delta$  未満で  $D$  内を動き回るとき,  $f(z)$  の速さは秒速  $\epsilon$  未満におさえられる. このように「動きが制御できること」は重要な性質で, 複素線積分を考えるとときにも要求される.

**問題 5.** 関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  は  $I \subset \mathbb{R}$  上で微分可能とする. もしある定数  $M > 0$  が存在して任意の  $x \in I$  に対し  $|f'(x)| \leq M$  が成り立てば,  $f$  は  $I$  上一様連続であることを示せ.

**問題 6.** 関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  を以下で定めるとき, 一様連続かどうか判定せよ.

- |   |   |
|---|---|
| (1) $f(t) = t + 2it$ ( $t \in \mathbb{R}$ )       | (2) $f(t) = t + i \sin t$ ( $t \in \mathbb{R}$ )      |
| (3) $f(t) = t + it \sin t$ ( $t \in \mathbb{R}$ ) | (4) $f(t) = \cos t + i \sin t$ ( $t \in \mathbb{R}$ ) |

## 今週の宿題・レポート

**宿題 7-1.** 集合  $X, Y, Z$  にたいし, 写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  が与えられている.

- (1)  $g \circ f$  が全射,  $g$  が単射であれば,  $f$  は全射,  $g$  は全単射であることを示せ.
- (2)  $g \circ f$  が単射のとき,  $f$  は単射となることを示せ.

**宿題 7-2.** 関数  $f(x) = x \sin(1/x)$  ( $x \neq 0$ );  $f(0) = 0$  は  $[0, 1]$  区間上で一様連続であることを示そう.

- (1) 任意に小さい  $\epsilon > 0$  を固定する. このとき  $x, y \in [0, \epsilon/4]$  であれば,  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  が成り立つことを示せ.
- (2) いま,  $\epsilon < 8$  と仮定してよい.  $x \in [\epsilon/8, 1]$  であれば,  $|f'(x)| \leq 1 + 8/\epsilon$  が成り立つことを示せ. (Hint:  $f(x)$  を実際に微分し, その絶対値に三角不等式を使う.)
- (3) 微積分の基本定理より,  $x, y \in [\epsilon/8, 1]$  であれば

$$|f(x) - f(y)| \leq 1 + \frac{8}{\epsilon} |x - y|$$

が成り立つことを示せ.

- (4) 以上を用いて, ある  $\delta > 0$  が存在して,  $x, y \in [0, 1]$  かつ  $|x - y| < \delta$  であれば  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  とできることを示せ.

レポート問題 7-1 関数  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$  ( $x \neq 0$ );  $f(0) = 0$  は任意の  $x$  で微分可能であるが,  $f'(x)$  は連続でないことを示そう:

- (1)  $f'(0) = 0$  を示せ.
- (2)  $x \neq 0$  のとき,  $f'(x)$  を求めよ.
- (3) 任意の  $\eta > 0$  を固定するとき, すべての  $\delta > 0$  に対し,  $|x| < \delta$  かつ  $|f'(x)| > 1 - \eta$  を満たす  $x$  が存在することを示せ. すなわち,  $f'(x)$  は  $x = 0$  で連続ではない.

## 線形写像と表現行列

作成日：June 18, 2010 Version：1.0

抽象的なベクトル空間の間に線形写像があるとき，それをいかにして，数値的に表現するか．今回は表現行列の意義を理解しましょう．

今後の予定

- 6/25：小テスト / 表現行列と像の次元
- 7/2：ベクトルの内積

## 線形写像

**Definition.** Let  $U$  and  $V$  be vector spaces over  $\mathbb{R}$ . A map  $f : U \rightarrow V$  is called a **linear map** (線形写像) if the following two conditions holds :

(L1) For any  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  in  $U$ ,  $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$ ; and (和の像は像の和)

(L2) For any  $\mathbf{a} \in U$  and  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f(\alpha\mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a})$ . (定数倍の像は像の定数倍)

これは当たり前の性質ではない．線形写像とは，ベクトル空間の構造を保存する非常に特別な写像である：

**問題 1.** 以下のベクトル空間の間の写像が線形写像かどうか判定せよ．

(1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : x \mapsto \sin x$

(2)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y$

(3)  $D : \text{Poly}_2 \rightarrow \text{Poly}_2$ ,  $D : u(x) \mapsto u'(x) + 2u''(x)$

(4)  $T : \text{Poly}_\infty \rightarrow \text{Poly}_\infty$ ,  $T : u(x) \mapsto u(x) + u(x)^2$

(5)  $f : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \mapsto x_{2008}$

(6)  $f : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ ,  $f : \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \mapsto \{x_2, x_4, x_6, \dots\}$

(7)  $A \in M_3(\mathbb{R})$ ,  $f : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ ,  $f : X \mapsto AX$

(8)  $A \in M_3(\mathbb{R})$ ,  $f : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ ,  $f : X \mapsto X + A$

**問題 2. (線形写像と部分空間)**  $U, V$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間， $f : U \rightarrow V$  を線形写像とする．このとき以下を示せ：

(1)  $W \subset U$  が部分空間ならば， $f(W) \subset V$  も部分空間．

(2)  $W \subset V$  が部分空間ならば， $f^{-1}(W) \subset U$  も部分空間．

線形写像を基底を通して見ると ..

問題 3. (「ちからだめし」)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  とし, 線形写像  $f_A = f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が

$$f: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

で与えられているとする. いま,  $\mathbb{R}^2$  の基底として  $\mathbf{u}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  をとる.

(1)  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  とするとき, 「座標値」  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  の関係式を求めよ.

(2) 写像  $f$  が基底  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  を通して

$$f: (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \mapsto (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}$$

と表現されるとき,  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}$  の関係を  $\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  ( $B$  は正方行列) の形で表せ.

この行列  $B$  は写像  $f$  の基底  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  に関する表現行列 (representation) と呼ばれる.

問題 4. (行列の積の行列による表現?)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  とする. 線形写像  $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ ,  $f: X \mapsto AX$  にたいし,  $M_2(\mathbb{R})$  の基底

$$\left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

に関する表現行列を求めよ.

問題 5. (表現行列)  $V = \text{Poly}_2$  とする.

(1) 復習:  $\{1, x-1, (x-1)^2\}$  は  $V$  の基底であることを示せ.

(2)  $(1, x, x^2)P = (1, x-1, (x-1)^2)$  となる正方行列  $P$  を求めよ. また, それが正則であることを示せ.

(3) 写像  $L: V \rightarrow V$  を以下で定める:

$$L: \mathbf{f} = f(x) \mapsto L\mathbf{f} := (x-1)f'(x) - f''(x).$$

このとき,  $L$  は線形写像であることを示せ.



(4)  $f = a_1 + a_2x + a_3x^2 \in V$ ,  $L(f) = a'_1 + a'_2x + a'_3x^2$  とする．すなわち，

$$f = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto L(f) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}$$

である．このとき，

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

を満たす  $3 \times 3$  行列  $A$  を求めよ．これは写像  $L$  の基底  $1, x, x^2$  に関する表現行列と呼ばれる．

(5) 同様にして，写像  $L$  の基底  $\{1, x-1, (x-1)^2\}$  に関する表現行列  $B$  を求めよ．

(6)  $B = P^{-1}AP$  を示せ．

### 今週の宿題・レポート

来週 (6/25) は授業のはじめに 30 分間の小テストをやるので，テスト勉強を今週の宿題とします．自筆ノート (コピー不可) に限り参照を許可するので，要点をまとめた手書きノートを作ってくると良いでしょう (ノートの提出，採点はしません．) たとえば，以下を確認しておくとう利かもしれません．

- $\epsilon$ - $\delta$  論法で，連続関数の積が連続関数であることが証明できますか？
- K205 問題 4 のような問題はすらすら解けますか？写像  $f$  が全射，単射であることの定義は？
- ベクトル空間の「部分空間」の定義は？「線形写像」の定義は？

レポート問題 8-1 問題 3 において， $f$  を 2 回合成した線形写像  $f \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  の基底  $\{u_1, u_2\}$  に関する表現行列は  $B^2$  となることを示せ．より一般に， $n \in \mathbb{N}$  にたいし， $f$  を  $n$  回合成した写像の基底  $\{u_1, u_2\}$  に関する表現行列は  $B^n$  になることを示せ．

## 像・核・次元定理

作成日：June 25, 2010 Version：1.0

線形写像がどのくらいの情報量を保存し、どのくらいの情報量を失うのか。これを定式化するのが、次元定理です。以下、特に断らない限り  $U, V$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とし、 $f: U \rightarrow V$  は線形写像とします。

今後の予定

- 7/2：ベクトルの内積
- 7/9：無限級数と関数の一様収束

## 線形写像の像 vs 核

- 線形写像  $f: U \rightarrow V$  にたいし、 $f(U)$  を  $\text{Img } f$  で表し、 $U$  の  $f$  による像 (image) と呼ぶ。
- また、 $\text{Img } f$  の次元を  $f$  の階数 (rank) とよび、 $\text{rank } f$  で表す。すなわち、 $\text{rank } f := \dim(\text{Img } f)$ 。

注意。  $\text{Img } f$  はベクトル空間  $V$  の部分空間である (K208 問題 2)

注意 2。 ベクトル空間  $V$  に有限個の基底が取れないとき、 $V$  を無限次元ベクトル空間とよび、 $\dim V = \infty$  と定義する。ゼロベクトルだけからなる集合  $\{0\}$  もベクトル空間であるが、 $\dim(\{0\}) = 0$  と約束しておく。逆に (部分) ベクトル空間  $V$  で  $\dim V = 0$  となるのは  $V = \{0_V\}$  の形のときのみである (なぜか?)

問題 1. K208 問題 1 で線形写像となる (2)(3)(5)(6) について、その階数を求めよ。

線形写像  $f: U \rightarrow V$  において、 $U$  上の全ての情報が  $V$  に伝達されるとは限らない。では一体、どのような情報を失っているのだろうか？それを明確にするのが、次の核の概念である。

- 線形写像  $f: U \rightarrow V$  において、 $f(a) = 0 (= 0_V \in V)$  となる  $a \in U$  の全体を核 (kernel) とよび、 $\text{Ker } f$  であらわす。すなわち、

$$\text{Ker } f := \{a \in U : f(a) = 0_V\} = f^{-1}(\{0_V\}).$$

問題 2. 上の  $f: U \rightarrow V$  に対し、 $\text{Ker } f$  は  $U$  の部分ベクトル空間になることを示せ。

問題 3. 次の線形写像に対し、像と核をもとめよ。また、それぞれの次元はなにか？

$$(1) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \end{pmatrix}$$

$$(2) D: \text{Poly}_2 \rightarrow \text{Poly}_{10}, D: \mathbf{f} = f(x) \mapsto \frac{d}{dx} f(x) = D(\mathbf{f})$$

$$(3) \text{K208 問題 5 の } L: \text{Poly}_2 \rightarrow \text{Poly}_2$$

## 次元定理

問題 4. 線形写像  $D: \text{Poly}_3 \rightarrow \text{Poly}_3$  を  $D: p(x) \mapsto \frac{d^2}{dx^2} p(x)$  で定める。

(1)  $D$  の核と像を求めよ (集合の形で書け)。

- (2)  $\dim(\text{Img } D) + \dim(\text{Ker } D) = \dim \text{Poly}_3$  を示せ .
- (3)  $\text{Poly}_3$  の基底  $1, x, x^2, x^3$  をとる . このとき ,  $D(1), D(x), D(x^2), D(x^3)$  は  $\text{Img } D$  の基底となっているか ?
- (4)  $D$  の基底  $1, x, x^2, x^3$  に関する表現行列  $A$  を求め , 行列の階数  $\text{rank } A$  が  $D$  の階数  $\text{rank } D$  と一致することを確認せよ .

線形写像において、「伝達された情報量 + 失われた情報量 = オリジナルの情報量」という解釈は当然であろう . これを定式化すると , 次の定理となる .

次元定理 線形写像  $f : U \rightarrow V$  において , 以下の等式が常に成り立つ :

$$\dim(\text{Img } f) + \dim(\text{Ker } f) = \dim U.$$

注意 :  $n \in \mathbb{N}$  もしくは  $n = \infty$  について  $\infty + n = n + \infty = \infty$  と約束すれば , 上の定理は無次元ベクトル空間に関しても正しい定理となる .

問題 5. 次のような線形写像  $f : U \rightarrow V$  の例を作れ .

- (1)  $\dim U = 3, \dim(\text{Img } f) = 2, \dim(\text{Ker } f) = 1.$
- (2)  $\dim U = 5, \dim(\text{Img } f) = 5, \dim(\text{Ker } f) = 0.$
- (3)  $\dim U = 5, \dim(\text{Img } f) = 0, \dim(\text{Ker } f) = 5.$
- (4)  $\dim U = \infty, \dim(\text{Img } f) = \infty, \dim(\text{Ker } f) = 1.$
- (5)  $\dim U = \infty, \dim(\text{Img } f) = 2010, \dim(\text{Ker } f) = \infty.$

### 線形写像の単射と全射

上の定理より , 線形写像において情報が失われないためには  $\dim(\text{Ker } f) = 0$  , すなわち  $\text{Ker } f = \{0_U\}$  が必要であることがわかる .

問題 6. 線形写像  $f : U \rightarrow V$  について , 次を示せ :

- (1)  $\text{Ker } f = \{0_U\} \iff f$  は単射
- (2)  $\dim(\text{Img } f) = \dim V \iff f$  は全射

- $f : U \rightarrow V$  が線形写像かつ全単射であるとき , 同型写像 (isomorphism) と呼ばれる .
- 定理 .  $U, V$  を有限次元ベクトル空間 ,  $f : U \rightarrow V$  が線形写像 であるとき ,
  - $f$  が単射  $\iff \text{Ker } f = \{0_U\} \iff \dim(\text{Ker } f) = 0$
  - $f$  が全射  $\iff \text{Img } f = V \iff \dim(\text{Img } f) = \dim V$
  - $f$  が同型写像  $\iff$  表現行列は正方正則行列  $\iff \dim U = \dim V$

## 今週の宿題

宿題 9-1(正方でない表現行列)  $U = \text{Poly}_2, V = \text{Poly}_3$  とする.

- (1)  $1, x+1, (x+1)^2$  は  $U$  の基底であることを示せ.
- (2)  $1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3$  は  $V$  の基底であることを示せ.
- (3)  $(1, x, x^2)P_1 = (1, x+1, (x+1)^2)$  となる行列を求めよ. また, それが正則であることを示せ.
- (4)  $(1, x, x^2, x^3)P_2 = (1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3)$  となる行列を求めよ. また, それが正則であることを示せ.
- (5) 写像  $T: U \rightarrow V$  を以下で定める:

$$U \ni \mathbf{f} = f(x) \mapsto T\mathbf{f} = (x+1)^2 \frac{d}{dx}(f(x)) \in V.$$

このとき,  $T$  は線形写像であることを示せ.

- (6)  $\mathbf{f} = f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 \in U, T(\mathbf{f}) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3$  とする. すなわち,

$$\mathbf{f} = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto T(\mathbf{f}) = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

である. このとき,

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

を満たす  $4 \times 3$  行列  $A$  を求めよ. これは写像  $T$  の基底  $1, x, x^2$  および  $1, x, x^2, x^3$  に関する表現行列と呼ばれる.

- (7) 同様にして, 写像  $T$  の基底  $1, x+1, (x+1)^2$  および  $1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3$  に関する表現行列  $B$  を求めよ.
- (8)  $B = P_2^{-1}AP_1$  を示せ.
- (9)  $\text{Im} T, \text{Ker} T$  をそれぞれ集合の形で表し, 次元をもとめよ. また, 次元定理が成り立つことを確認せよ.

今週のレポート問題はありません.

## 像・核・次元定理 (つづき)

作成日：July 02, 2010 Version：1.0

## 今後の予定

今週はおもに先週のプリントをやります。このプリントは宿題・レポートのみです。

- 7/9：無限級数と関数の一様収束
- 7/16：ベクトルの内積
- 7/23：期末試験 (509 教室)

## 今週の宿題

宿題 10-1 下の (1)-(3) であたえられたの線形写像  $f$  について，

- 適当な基底のもと，その表現行列  $A$  をもとめよ。
- $\text{Img } f$  とその次元を求め， $\dim \text{Img } f = \text{rank } A$  を確かめよ。
- 核とその次元を求め，次元定理が成立することを確認せよ。
- 以上の計算から， $f$  は全単射であることを説明せよ。

$$(1) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f: (x, y, z) \mapsto (y, z, x)$$

$$(2) f: \text{Poly}_2 \rightarrow \text{Poly}_2, f: p(x) \mapsto e^x \frac{d}{dx} \{e^{-x} p(x)\}$$

$$(3) f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), f: X \mapsto P^{-1}XP, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## レポート 10-1 .

- 宿題 10-1 の (2) で， $\text{Poly}_2$  を一般の  $\text{Poly}_d$  ( $d \in \mathbb{N}$ ) に換えて解きなおせ。また余裕があれば， $\text{Poly}_\infty$  の場合も考察せよ。
- 宿題 10-1 の (3) で， $P$  を一般の 2 次正則行列に換えて解きなおせ。

レポート 10-2 .  $U, V$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間， $f: U \rightarrow V$  を線形写像とする。

- $W_1, W_2 \subset U$  をともに部分空間とするとき， $f(W_1) \cup f(W_2) \subset V$  が部分空間となる場合，ならない場合の例をそれぞれ挙げよ。
- $W_1, W_2 \subset V$  をともに部分空間とするとき， $f^{-1}(W_1) \cup f^{-1}(W_2) \subset U$  が部分空間となる場合，ならない場合の例をそれぞれ挙げよ。

## 関数列の各点収束 vs. 一様収束

作成日：July 09, 2010 Version：1.1

関数の列がどんな関数に収束するか，という問題は，  
たとえば Taylor 展開

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \rightarrow \exp(x)?$$

などを考えると自然に派生します．今回は収束性・連続性の議論の応用として，関数列の収束についてその問題意識を理解しておきましょう．

今後の予定

- 7/16：ベクトルの内積
- 7/23：期末試験 (509 教室)

## 各点収束

関数列  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  が  $E \subset D$  上で関数  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  に各点収束 (pointwise convergence) するとは，

$$\text{任意の } z \in E \text{ に対し，数列の収束の意味で } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z).$$

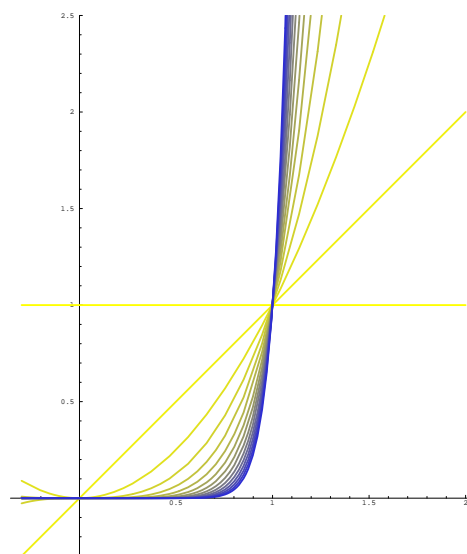
となることをいう．すなわち，

$$(\forall z \in E) (\forall \epsilon > 0) (\exists N = N_{z, \epsilon} \in \mathbb{N}) (\forall n > N) \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

**問題 1. (連続から不連続へ)** 実数の関数列

$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f_n(x) = x^n$  と定める．

- (1) この関数列は区間  $[0, 1]$  上で各点収束することを示せ．
- (2) 極限関数  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  は連続か？
- (3)  $x = 1/2$ ,  $\epsilon = 0.001$  のとき， $n > N$  ならば  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  となる  $N = N_{x, \epsilon}$  を見つけよ．
- (4)  $x = 1000/1024 = 0.976\dots$ ,  $\epsilon = 0.001$  の場合はどうか？  $\log_{10} 2 = 0.3010$  として計算せよ．



**問題 2. (連続から連続へ)** 実数の関数列  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を

- $0 \leq x \leq \frac{1}{2n}$  のとき  $f_n(x) = 2n^2 x$
- $\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}$  のとき  $f_n(x) = -2n^2 \left( x - \frac{1}{n} \right)$
- $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$  のとき  $f_n(x) = 0$

と定める．このとき，

- (1)  $f_n(x)$  のグラフを  $n = 1, 2, 3$  について描け．
- (2) この関数列は  $[0, 1]$  上で各点収束することを示せ．
- (3) 積分  $\int_0^1 f_n(x)dx$  は  $\int_0^1 f(x)dx$  に収束 しないことを示せ．

### 一様収束

上で見た例では、連続性・微分可能性・積分値など個々の関数列の性質が極限関数にきれいに反映されない。しかし、数学をやる上では

- 関数列  $f_n(x)$  が連続ならば極限関数  $f(x)$  も連続
- 関数列  $f_n(x)$  が微分可能ならば（適当な条件下で）極限関数  $f(x)$  も微分可能で、 $f'_n(x) \rightarrow f'(x)$
- 関数列が  $f_n(x)$  上で区間  $I$  上で積分可能ならば極限関数  $f(x)$  も区間  $I$  上で積分可能で、  

$$\int_I f_n(x)dx \rightarrow \int_I f(x)dx$$

が成り立つような、ハイ・クオリティーな収束があったほうが何かと便利であろう。それを実現するのが、一様収束の概念である。

関数列  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  が  $E \subset D$  上で関数  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  に一様収束 (uniform convergence) するとは、

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists N = N_\epsilon \in \mathbb{N}) (\forall n > N) (\forall z \in E) \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

が成り立つことを言う。

各点収束の場合と見比べてみよう。N 秒後、数列  $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$  は一斉に  $f(z)$  中心半径  $\epsilon$  の円の中に入っているのである。

**問題 3.** 一様収束の定義の最後の部分を、コーシー列を使って書き直せ。

**問題 4.** 実関数列の一様収束を説明する図を自分なりに描け。

**問題 5.** 問題 1 の  $f_n(x)$  は、任意の  $0 \leq r < 1$  にたいし区間  $[0, r]$  上で一様収束することを示せ。また、 $[0, 1]$  上では一様収束しないことを示せ。

**問題 6.** 問題 2 の  $f_n(x)$  では、どのような区間をとれば一様収束しているか？

**問題 7.** 関数列  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f_n(x) = x + \frac{1}{2\pi n} \sin 2\pi n x$  で定める。

- (1)  $f'_n(x), f_n(x)$  のグラフの概形を  $n = 1, 2, 3$  について描け。
- (2)  $n \rightarrow \infty$  のとき、 $f_n$  は  $f(x) = x$  に  $[0, 1]$  上一様収束することを示せ。
- (3) 積分  $\int_0^1 f_n(x)dx$  は  $\int_0^1 f(x)dx$  に収束することを示せ。



- (4) 導関数  $f'_n(x)$  は,  $[0, 1]$  上で  $f'(x)$  に各点収束しないことを示せ。(よって一様収束だけでは微分可能性は継承されない.)

注意.  $f_n$  の微分可能性が継承されるのは, 次の場合である: 『 $f_n, f'_n$  があるそれぞれある関数  $f, g$  に一様収束していれば,  $f$  は微分可能で  $f' = g$ . 』

### 今週の宿題・レポート (最終回)

宿題 11-1 (教科書等を参考にしてよい). 連続な関数列  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  が関数  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  に  $[0, 1]$  上一様収束している. このとき, 次を示せ.

- (1)  $f(x)$  も  $[0, 1]$  上連続.
- (2) 積分  $\int_0^1 f_n(x) dx$  は  $\int_0^1 f(x) dx$  に収束する.

宿題 11-2. 実関数列  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を次のように定める:

$$f_n(x) := \frac{1}{x^2 + 1^2} + \frac{1}{x^2 + 2^2} + \cdots + \frac{1}{x^2 + n^2}.$$

- (1) 数列  $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$  はコーシー列であることを示せ. したがって収束する. (Hint:  $n \geq m$  のとき,  $|a_n - a_m| \leq \int_{m-1}^n \frac{1}{x^2} dx$ .)
- (2) 上の関数列は  $\mathbb{R}$  上一様収束することを示せ. (Hint:  $(\forall x \in \mathbb{R}) |f_n(x) - f_m(x)| \leq |a_n - a_m|$ .)

レポート 11-1. 問題 2 の関数をうまく修正して, 以下の (a)-(c) をすべて満たす関数列  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) の例を構成せよ:

- (a) 関数列  $f_n$  は区間  $[0, 1]$  上で各点収束するが, 一様収束はしない.
- (b) 関数列  $f_n$  も  $f$  も, 区間  $(0, 1)$  上で微分可能である.
- (c) 積分  $\int_0^1 f_n(x) dx$  は  $\int_0^1 f(x) dx$  に収束 しない.

また, 上の (c) を

(c') 積分  $\int_0^1 f_n(x) dx$  は  $\int_0^1 f(x) dx$  に収束 する.

と変えた例も構成せよ.

## ベクトル空間の内積

作成日：July 16, 2010 Version：1.1

今後の予定

- 7/22 (金): 期末試験 (3 クラス合同, 509 教室). レポート提出の締め切り.

復習： $\mathbb{R}^3$  の内積と座標系

まずは  $\mathbb{R}^3$  において, 高校で学んだ内積  $a \cdot b$  がどのような意味を持っていたかを考えてみる. ただし, ここでは内積を  $\langle a, b \rangle$  で表すことにする.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ に対し, 内積 (標準内積) は}$$

$$\langle a, b \rangle := |a||b| \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

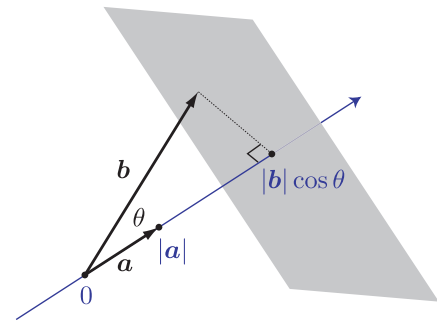
と定義されるのだった. ただし  $\theta$  は  $a$  と  $b$  を含む平面において, これらのベクトルがなす角度 ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) である.

ここで,  $\langle a, b \rangle = (b \text{ から見た } a \text{ の長さ}) \times (b \text{ の長さ})$  となることに注意.

問題 1.  $\mathbb{R}^3$  の標準基底を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく. このとき, 任意のベクトル  $a \in \mathbb{R}^3$  の標準基底  $e_1, e_2, e_3$  に関する座標は  $(\langle a, e_1 \rangle, \langle a, e_2 \rangle, \langle a, e_3 \rangle)$  で表されることを示せ. また, この事実を図形的に説明せよ.



内積  $\langle a, b \rangle$  が一定となる  $b$  は平面をなす.

問題 2.  $\mathbb{R}^3$  の基底を  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  とする.

(1)  $i \neq j \implies \langle u_i, u_j \rangle = 0$  を示せ.

(2) 任意のベクトル  $a \in \mathbb{R}^3$  の基底  $u_1, u_2, u_3$  に関する座標は  $\left( \frac{\langle a, u_1 \rangle}{|u_1|^2}, \frac{\langle a, u_2 \rangle}{|u_2|^2}, \frac{\langle a, u_3 \rangle}{|u_3|^2} \right)$  で表されることを示せ.

## 実ベクトル空間の内積

$V$  を  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とする. この空間に,  $\mathbb{R}^3$  の標準基底のような都合の良い基底を選ぶには, 以下のような性質を持つ「積」が定義されていれば十分である:

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  に対し, 内積 (inner product)  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$  とは以下の性質を満たすものをいう:  
 $\mathbf{a}' \in V, \alpha \in \mathbb{R}$  とするとき,

$$(IP1) \quad \langle \mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}', \mathbf{b} \rangle$$

$$(IP2) \quad \langle \alpha \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

$$(IP3) \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$

$$(IP4) \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0 \text{ ただし } \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

(IP4) より, 平方根  $\sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \geq 0$  が定まる. これをベクトル  $\mathbf{a}$  の長さと呼び,  $\|\mathbf{a}\|$  で表す.  
 また,  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$  であるとき,  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  は直交すると呼び,  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  と表す.

内積の定義されたベクトル空間を内積空間 (もしくは計量ベクトル空間, pre-Hilbert 空間) と呼ぶ.

**問題 3.** 先に定義した内積  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta$  が上の性質を満たすことを納得せよ.

**問題 4.** 以下が内積であることを確かめよ:

$$(1) \quad V = \mathbb{R}^3, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ のとき, } \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad V = \text{Poly}_2, \mathbf{a} = a(x), \mathbf{b} = b(x) \text{ のとき, } \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_{-1}^1 a(x)b(x)dx.$$

$$(3) \quad V = M_2(\mathbb{R}), \mathbf{a} = A, \mathbf{b} = B \text{ のとき, } \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \text{tr} A {}^t B. \text{ ただし } {}^t B \text{ は } B \text{ の転置行列.}$$

### ふたつの不等式

**問題 5. (Schwarz の不等式)**  $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$  を示したい.

(1) 準備:  $\alpha \in \mathbb{R}$  とする. このとき,  $\|\mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}\|^2 = \langle \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}, \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b} \rangle$  を内積の性質に従って計算せよ.

(2)  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  ならば不等式は明らかなので  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  を仮定する.  $\alpha = -\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2}$  を代入して  
 $0 \leq \|\mathbf{a}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2}{\|\mathbf{b}\|^2}$  を示せ.

**問題 6. (三角不等式)**  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$  を示したい.

(1)  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle$  を内積の性質に従って計算せよ.

(2) 上の計算と Schwarz の不等式を用いて,  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 \leq (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2$  を示せ.

## 直交系・直交基底

互いに直交するベクトルの組  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V - \{\mathbf{0}\}$  は直交系 (orthogonal system) と呼ばれる。さらに  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  が  $V$  の基底であるとき、これを直交基底 (orthogonal basis) と呼ぶ。直交系もしくは直交基底が全ての  $i = 1, \dots, n$  に対して  $\|\mathbf{u}_i\| = 1$  であるとき、正規直交系 (orthonormal system) もしくは正規直交基底 (orthonormal basis) と呼ぶ。

例： $\mathbb{R}^n$  の標準基底は正規直交基底である。

**問題 7.** 直交系  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  は部分空間  $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$  の基底となることを示せ。  
(Hint. 直交系  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  が一次独立であることを示せば十分.)

特に  $V = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  の場合、次のことが分かる：

内積の計算で座標の測定：任意の  $\mathbf{a} \in V$  に対し、その直交基底  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  に関する座標表示

$$\mathbf{a} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_n \mathbf{u}_n$$

の座標値は次の公式で与えられる。

$$a_i = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{u}_i \rangle}{\|\mathbf{u}_i\|^2} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}.$$

正規直交基底の場合はより簡単に、 $a_i = \langle \mathbf{a}, \mathbf{u}_i \rangle$  となる。

**問題 8.** 上を示せ。

**問題 9.**  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  が直交基底であるとする。 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  について、 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}_i \rangle$  が全ての  $i = 1, \dots, n$  で成り立つとき、 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  であることを示せ。

## Gram-Schmidt の直交化法

$V$  を内積空間とする。 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  ( $n < \dim V \leq \infty$ ) が直交系であるとき、適当に  $\mathbf{u}_{n+1} \in V$  をとれば、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}$  が直交系であるようにできる。また、 $\dim V < \infty$  であれば、この手続きを繰り返し  $n+1 = \dim V$  となった時点で直交基底を得る。

**問題 10.** 上の命題を示そう。 $\dim V = N \leq \infty$  と置く。

- (1)  $n < N$  のとき、 $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  に含まれない  $\mathbf{v} \in V$  が存在することを示せ。
- (2) この  $\mathbf{v}$  を用いて、

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \dots - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_n \rangle}{\|\mathbf{u}_n\|^2} \mathbf{u}_n$$

と置く。このとき、 $\mathbf{u}_{n+1} \neq \mathbf{0}$  を示せ。

(3)  $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_{n+1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を示せ.

注意.  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  が直交系であるとき,  $\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \dots, \frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|}$  は正規直交系となる.

問題 11.  $V = \mathbb{R}^3$  とする. このとき, 次の基底を考える.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

これを用いて, 標準内積に関する正規直交基底を見つけよ.

問題 12.  $V = \text{Poly}_2$  の問題 4 で与えた内積に関する正規直交基底をひとつ見つけよ.

### 直交補空間

有限次元内積空間  $V$  について, ある部分ベクトル空間  $W$  を考える.  $W$  の全てのベクトルに直交するベクトルの全体を  $W$  の直交補空間 (orthogonal subspace) と呼び,  $W^\perp$  で表す.

問題 13.

- (1)  $W^\perp$  も  $V$  の部分ベクトル空間となることを示せ.
- (2) 任意の  $\mathbf{a} \in V$  に対し, ある二つのベクトル  $\mathbf{a}_1 \in W$ ,  $\mathbf{a}_2 \in W^\perp$  がただ一組存在して,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$  と書けることを示せ (このような状況を,  $V = W \oplus W^\perp$  と表す.) この事実を, 図形的にイメージせよ.