担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

演習について

作成日：October 12, 2006　Version：1.0

担当教官： 川平　友規（かわひら　ともき，助手, kawahira@math.nagoya-u.ac.jp, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses.htm）

担当 TA： 恩田　健介（おんだ　けんすけ, M2）

演習の進め方： 毎回，問題のプリントを配布します．私（川平）が基本事項を確認したあと，問題を指定し，各自ノートに解いてもらいます．その後，私が黒板で解説する，という流れです．配布した問題のすべてを演習で扱うとは限りません．

演習で取り上げるテーマ： 前期で学習した内容をふまえ，数学を学ぶ上で必要な論証力，計算力のさらなる向上を目指します．具体的には：

- **連続性** (1 変数関数の場合に種々の**定義**の同値性を確認)
- **位相**に関わる論証 (主に**コンパクト性**)
- 整数と多項式 (**互除法**,「**互いに素**」という概念)
- 正方行列の**ジョルダン標準形**
- ラグランジュの**未定乗数法**
- **留数**を使った積分計算

を**直感的に理解し，かつ数学的に整備された形で記述できるようになる**ことを目標とします．

演習と講義は独立したものと考えられています．したがって，講義で扱わない内容を演習で扱うこともありますし，逆もありえます．

単位・成績： 成績に関係のある要素は，**出席回数，小テストの点数，宿題・レポートの提出（とその内容），期末テストの点数**です．成績の優・良・可は以下の基準で定めます．

- 上にあげた 4 つの要素のうち，出席，小テスト，宿題・レポートを計 50 点（便宜的に**平常点**とよぶ），期末テストを 50 点とし合計 100 点満点により成績を点数化する．
- 成績は 60 点未満を不可，60 − 74 点を可，75 − 89 点を良，90 点以上を優とする．

したがって，期末テストを受けるだけでは良い単位が取れません．出席，小テスト，宿題と，バランスよくこなしましょう．

出席： 授業の前半に出席を取ります．遅刻・欠席をする場合，事前に email 等で私に連絡し，かつやむを得ない事情だと判断される場合のみ，加点します．

小テスト： 皆さんの理解度を確認するため，後期の間に 3 回，30 分程度の小テストを行います．出題内容は，演習でやった問題をベースにした基本的な問題です．

宿題： 宿題はほぼ毎回出題されます．提出様式は，**A4 レポート用紙を使用し，必ず表紙をつけ，そこに名前，学籍番号，解いた問題の番号（『宿題 x-x』），提出日を記入**してください．また，**左上をホチキスでとめて**提出してください．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題の提出期限は次の演習の開始時間まで，提出場所は教室（理 1-309）です．提出期限に間に合わなかった宿題は後日提出してもかまいませんが，少し減点します．もし何らかの事情で授業時に提出できない場合，事前に email 等で連絡の上．(1) 川平の office(A439) に直接持ってくるか，(2) 事務室に提出してください．

レポート： 授業で扱えなかった問題や，やや進んだ内容の問題をレポート課題として指定することがあります．レポートの提出は任意ですが，提出されたレポートの質を判断して，平常点にボーナス加点します．レポートには提出期限を設けません．提出場所は教室です．提出様式は宿題の提出様式に準じます.（A4 レポート用紙使用，表紙をつける，etc.）ただし，たとえ同じ日に提出する場合でも，**レポートと宿題は必ず分けて提出してください．**（採点者が異なります.）

授業でやらなかった問題を自発的に解いた場合，レポートとして提出してください．

オフィスアワー： 授業中，授業後の質問は大歓迎です．それ以外の時間に質問したい場合は，オフィスアワー（教員ごとの質問受付時間）を利用してください．私のオフィスアワーは**毎週水曜日 12:00-13:30，場所は Cafe David（理学部 1 号館 2 階エレベーター前）**です．私とその他のスタッフも待機しているので，自由に質問してください．金曜日以外の昼休みにも Cafe David は開店しているので，どんどん活用しましょう．有識者への質問は，問題を解決するのにもっとも有効な手段です．自力解決にこだわらないで，スマートに勉強をこなしましょう．

上記以外の時間に質問したい場合は，必ず事前に email 等で appointment を取るようにしてください．

期末テスト： 「この程度の問題ができないのに 3 年生に上がってもらっては困るし，本人のためにもならない」という気持ちを込めて，基本レベルの問題を期末試験として出題します．

よく使う記号など：数の集合

(1) $\mathbb{C}$: 複素数全体	(2) $\mathbb{R}$: 実数全体	(3) $\mathbb{Q}$: 有理数全体
(4) $\mathbb{Z}$: 整数全体	(5) $\mathbb{N}$: 自然数全体	(6) $x \in \mathbb{R}$: x は実数

ギリシャ文字

(1) α: アルファ	(2) β: ベータ	(3) γ, Γ: ガンマ	(4) δ, Δ: デルタ	(5) ϵ: イプシロン
(6) ζ: ゼータ	(7) η: エータ	(8) θ, Θ: シータ	(9) ι: イオタ	(10) κ: カッパ
(11) λ, Λ: ラムダ	(12) μ: ミュー	(13) ν: ニュー	(14) ξ, Ξ: クシー	(15) o: オミクロン
(16) π, Π: パイ	(17) ρ: ロー	(18) σ, Σ: シグマ	(19) τ: タウ	(20) υ, Υ: ウプシロン
(21) ϕ, Φ: ファイ	(22) χ: カイ	(23) ψ, Ψ: プサイ	(24) ω, Ω: オメガ	

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

関数の連続性と級数の収束性（ちからだめしの復習）

作成日：October 12, 2006　Version：1.1

関数の連続性

『関数＝グラフ』というイメージは，すぐに破綻するアイディアである．たとえば複素関数は平面から平面のへの対応付けであり，すでに「グラフ」が描けない．そこで少し，工夫を試みる．

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の部分集合 D をひとつ固定する．どんな集合でもかまわない．$\mathbb{C}$ 自身でもよい．さてこのとき，D 上の複素数値の関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を考える．たとえば，$f(z) = z^2 - 2$ のよう具体的な関数を想像すればよい．

この場合，$X = \mathbb{C}$ というスクリーンにある D という図形を，別の $Y = \mathbb{C}$ というスクリーンに f という光源を用いて投影している，と考えてみる．スクリーンの間には歪んだレンズ A があって，それを通過することで z という点は $f(z)$ という点に写るのである．(ここで A は,「f の定義」に対応するモノである．たとえば，$f(z) = z^2 - 2$ という写像ならば $z^2 - 2$ という式に対応する.)

さて，この $f : D \to \mathbb{C}$ はどのような性質を持っていることが望ましいだろうか？ スクリーン $X = \mathbb{C}$ 上の，とくに部分集合 D に関する情報を出来るだけスクリーン $Y = \mathbb{C}$ に反映させたい．

たとえば，$D = \mathbb{C}$ かつ f が「全単射である」と嬉しいだろう．しかし，全単射は点の位置を入れ替えるだけなので，ぐちゃぐちゃに場所を入れ替えられてしまっては困る．むしろ，**近い点同士は写った先でも近い点同士になる**ことをまず期待したい．これを満たすのが，**連続性**の概念である：

定義その１：関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $z_0 \in D$ で**連続** (continuous) であるとは，任意の z_0 に収束する D 内の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，数列 $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(z_0)$ に収束するときをいう．すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n) = f(z_0)$$

であるときを言う．また，任意の $z_0 \in D$ で f が連続であるとき，f は D **上で連続**であるとは，特に，定義域全体で連続な関数を単に**連続関数**とよぶ.

「近い」という概念は相対的な（比較するものがあって意味を成す）概念であるから，定式化が難しい．そのかわりに，**「近づく」という性質（情報）が保存される写像**として連続写像を定式化する．ちなみに，一般には $z_n \neq z_0$ を満たしながら収束する点列を考えた方が都合がよいとされているが，あまり神経質になる必要はない.

問題 1. 上の連続性の定義を，ϵ-N 式に厳密に書き下せ.

問題 2. 複素数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ となることを，ϵ-N 式に厳密に証明せよ.

問題 3. $f : D \to \mathbb{C}$ と $g : D \to \mathbb{C}$ を D 上で連続関数とする．このとき，$h(z) = f(z)g(z)$ も D 上で連続な関数となることを定義その１に従って証明せよ.

上の問題のように，連続性の定義をうっかり ϵ-N 式に書き直した日には，とってもまわりくどい．これでも，各点での連続性を示すときには全く問題は起きないのだが，今後の応用を考えると次のような同値な言い換え（この同値性の証明は意外とややこしい）をしておいたほうが良い：

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定義その２：関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $z_0 \in D$ で**連続**であるとは，

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

とき[a]をいう．特に，f が D 上の各点で連続なとき，f **は** D **上で連続**という．

[a]すなわち,「任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，$|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ とできる」

問題 4. $f : D \to \mathbb{C}$ と $g : D \to \mathbb{C}$ を D 上で連続関数とする．このとき，$h(z) = f(z)+g(z)$ も D 上で連続な関数となることを定義その 2 に従って証明せよ．

問題 5. $f : D \to \mathbb{C}$ と $g : D \to \mathbb{C}$ を D 上で連続関数とする．このとき，$h(z) = f(z)g(z)$ も D 上で連続な関数となることを定義その 2 に従って示せ．

問題 6.（不連続性） ある実数上の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $x = x_0$ で連続でない ことを ϵ-δ 式に表現せよ．そのうえで，次のように与えられる f は $x = 0$ で連続でないことを示せ：

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \ (x \neq 0), \quad f(x) = 0 \ (x = 0)$$

問題 7. 関数 $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \longmapsto z(t)$ を以下で定めるとき，これらは（ $\mathbb{R}$ 上で）連続関数であることを示せ．

(1) $z : t \longmapsto z(t) := 3t + 4ti$

(2) $z : t \longmapsto z(t) := t + t^2 i$

(3) $z : t \longmapsto z(t) := e^{it} = \cos t + i \sin t$

一様連続性

定義その 2 にある状況は，もし z が z_0 から高々 δ しか移動しないならば，$f(z)$ は $f(z_0)$ から高々 ϵ しか動かない，という意味である．しかしこの δ の値（上限）は，z_0 や ϵ に強く依存している．

問題 8. $f(x) = x^2$ とおく．x が $\mathbb{R}$ 上を秒速 $\delta = 0.1$ で正の方向に動いている．今，x が $x_0 = 0$ から 1 秒間で $\delta = 0.1$ 動くとき，$f(x)$ は $f(x_0)$ からどの程度はなれるか？また，x が $x_0 = 100$ から同じ 1 秒間で $\delta = 0.1$ 動くときはどうか？

関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が D 上で**一様連続**であるとは，

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall z_0 \in D, \quad |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

とき[a]をいう．

[a]すなわち「任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，任意の $z_0 \in D$ について $|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ とできる」

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

もし z が秒速 δ 未満で $\mathbb{D}$ 内を動き回るとき，$f(z)$ の速さは秒速 ϵ 未満におさえられる．すなわち，スクリーン $X = \mathbb{C} \supset D$ の方で十分遅く動けば，スクリーン $Y = \mathbb{C}$ のほうの動きはいくらでも遅くできる．

問題 9. （一様連続でない例）任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し，実関数 $f(x) = x^2$ は閉区間 $[-N, N]$ 上で一様連続だが，$\mathbb{R}$ 上では一様連続でないことを示せ．

注意 任意の連続関数は定義域の任意のコンパクト部分集合（有界閉集合）上で一様連続である．

級数の収束

問題 10. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \in \mathbb{C})$ が収束すること，絶対収束することの定義を書け．

問題 11. 「級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ も収束する」ことを示したい．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき,「$\exists N \in \mathbb{N},\ \ n > N \implies |a_n| < 1$」を示せ.（Hint: $s_n = |a_1| + \cdots + |a_n|$ はコーシー列．$|s_n - s_{n-1}|$ を考えると$\cdots$）

(2) $|a_n| < 1$ のとき，$|a_n^2| < |a_n|$ である．これを用いて，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ も絶対収束することを示せ．

(3) 「級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ も収束する」と言えるような関数 $f(z)$ をひとつ探し，それを証明せよ．上は $f(z) = z^2$ の場合である．

今週の宿題

宿題 1-1. D を $\mathbb{C}$ の部分集合，$f : D \to \mathbb{C}$ と $g : D \to \mathbb{C}$ を D 上で連続な関数とする．もし $g(z) \neq 0$ $(\forall z \in D)$ ならば,，$h(z) = f(z)/g(z)$ も D 上で連続な関数となることを ϵ-δ 論法で示せ．

宿題 1-2. 複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．$z_n := x_n + y_n i$ と置くと，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列である．ことのき，以下を示せ：

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれある実数に収束すれば，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ もある複素数に収束する.（Hint: 直角三角形の「斜辺の長さ」は「他の 2 辺の長さの和」より短し）

(2) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数に収束すれば．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ もそれぞれある実数に収束する.（Hint: 直角三角形の斜辺は他の辺より長し）

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 1-3.　複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．極座標を考え，$z_n := r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ と置く．(ただし，$0 \le \theta_n < 2\pi$ とし，$z_n = 0$ のときは $r_n = 0$, $\theta_n = 0$ と定める.) このとき，数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列である．以下の問いに答えよ：

(1) 任意の θ, θ' に対し，

$$|(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta' + i\sin\theta')| \le |\theta - \theta'|$$

であることを幾何学的に説明せよ. (Hint: 東京からサンフランシスコ，船で行くのと，トンネルを掘って地中をまっすぐ進むのとどっちが近いか？)

(2) $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれある実数に収束すれば，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ もある複素数に収束することを示せ.

(3) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数に収束すれば. $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数に必ず収束するが，$\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するとは限らない．なぜか？そのような例をひとつ挙げよ.

今週のレポート問題

レポート 1.　複素数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束しない例を挙げよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しない例を挙げよ.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ はともに収束するが，ともに絶対収束しない例はあるか？

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \in \mathbb{R})$ が絶対収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ は収束するか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

$\mathbb{R}^n$ における連続性

作成日：October 19, 2006　Version：1.1

「近い点同士が近い点同士にうつる」のが，**連続性**の概念であった．これまでは本質的に $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ における写像しか扱ってこなかったが，連続性の概念自体は一般の位相空間における写像にまで拡張される．(むしろ，連続性を定義するために空間に位相を定義する．) そこにいたる抽象化のステップは，いくつかに分割するのがわかりやすい．今週はその最初のステップとして，「$\mathbb{R}^n$ における開集合の性質から連続性を規定する」ことを考えよう．

Euclid 空間と Euclid 距離

$n \in N$ に対し，n **次元 Euclid 空間** (n-dimensional Euclidean space) を

$$\mathbb{R}^n \;:=\; \{(x_1, \ldots, x_n) : \forall i,\;\; x_i \in \mathbb{R}\}$$

と定義する．$\mathbb{R}^n$ の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ の**距離** (distance) を次で定める：

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

問題 1. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ および上で与えられる距離 $d(\cdot, \cdot)$ に対し，以下を示せ：

(1) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$　　(2) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

(3) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$　　(4) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$　(三角不等式)

注：一般に上の (1)-(4) を満たす関数 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像を $\mathbb{R}^n$ 上の**距離**とよぶ．とくに，上で定義した $d(\cdot, \cdot)$ は **Euclid 距離** (Euclidean distance) と呼ばれる．

問題 2. $\mathbb{R}^2$ に対し，Euclid 距離以外の距離 $\hat{d}(\cdot, \cdot)$ をひとつ以上与えよ．また，その距離に関する「単位円」: $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \hat{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = 1\}$ を図示せよ．

開集合，閉集合など

点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ の ϵ**-近傍** (ϵ-neighbourhood) とは次の集合である：

$$B(\boldsymbol{a}, \epsilon) \;:=\; \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \epsilon\}.$$

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A に対して A の補集合を A^c もしくは $\mathbb{R}^n - A$ と書く[a].

- 点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ が A の**内点** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \epsilon > 0,\;\; B(\boldsymbol{a}, \epsilon) \subset A$.
- 点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ が A の**境界点** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \epsilon > 0,\; B(\boldsymbol{a}, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B(\boldsymbol{a}, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.
- $A^\circ \;:=\; \{\boldsymbol{a} \in A : \boldsymbol{a}$ は A の内点$\}$ を A の**内部** (interior) という．
- $\partial A \;:=\; \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{a}$ は A の境界点$\}$ を A の**境界** (boundary) という．
- $\overline{A} \;:=\; A^\circ \cup \partial A \;(= A \cup \partial A)$ を A の**閉包**という．
- A が**開集合** (open set) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A^\circ = A$
- A が**閉集合** (closed set) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\overline{A} = A$

[a] $\mathbb{R}^n - A$ を $\mathbb{R}^n \setminus A$ と書く人も多い．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. 以下の事実を自分なりに納得せよ．

(1) A が開集合 $\Longrightarrow$ A^c が閉集合
(2) A が閉集合 $\Longrightarrow$ A^c が開集合
(3) $\emptyset = \emptyset^\circ = \partial\emptyset = \overline{\emptyset}$
(4) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^\circ = \overline{\mathbb{R}^n}$, $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$
(5) $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は開集合かつ閉集合

問題 4. 任意の実数 $a < b$ に対し，開区間 (a, b) は $\mathbb{R}$ の開集合であることを示せ．

問題 5. 以下の $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A に対し，$A^\circ, \partial A, \overline{A}$ を求めよ．また A が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるものはどれか？

(1) $A = (a, b) \subset \mathbb{R},\ a < b$
(2) $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
(3) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x, y \in \mathbb{Z}\}$
(4) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 0 < x < 1,\ y = 0\}$
(5) $A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ :\ d(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = 1\}$
(6) $A = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ :\ \frac{1}{n} \le d(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) \le 1 - \frac{1}{n}\}$
(7) $A = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ :\ 1 - \frac{1}{n} < d(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) < 1 + \frac{1}{n}\}$

収束性・連続性の定義

点列 $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を考える．ある $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ が存在して，$d(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{a}) \to 0$ $(k \to \infty)$ となるとき，$\boldsymbol{x}_k$ は $\boldsymbol{a}$ に**収束する**といい，$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$ $(k \to \infty)$ もしくは $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ と表す．

問題 6. 上の定義を ϵ-N 式に書き直せ．

問題 7. $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ とする．このとき，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ を含む任意の開集合 O に対し，$\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall k > N$, $\boldsymbol{x}_k \in O$ を示せ．

以下，$\mathbb{R}^n$ のユークリッド距離および ϵ-近傍をそれぞれ $d^n(\cdot, \cdot), B^n(\cdot, \epsilon)$ と表すことにする．また，D を $\mathbb{R}^n$ の開集合と仮定する．

定義その1： 写像 $f : D \to \mathbb{R}^m$ が点 $\boldsymbol{a} \in D$ で**連続**であるとは，以下が成り立つときをいう：

$$\forall \{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n,\quad \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a} \implies \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{a}).$$

特に，f が D 上の各点で連続なとき，f は D **上 連続**（もしくは単に**連続**）という．

定義その2： 写像 $f : D \to \mathbb{R}^m$ が点 $\boldsymbol{a} \in D$ で**連続**であるとは，以下が成り立つときをいう：

$$\forall \epsilon > 0,\quad \exists \delta > 0,\quad d^n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \implies d^m(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{a})) < \epsilon.$$

すなわち，$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,

$$f(B^n(\boldsymbol{a}, \delta)) \ \subset\ B^m(f(\boldsymbol{a}), \epsilon) \iff B^n(\boldsymbol{a}, \delta) \ \subset\ f^{-1}(B^m(f(\boldsymbol{a}), \epsilon)).$$

特に，f が D 上の各点で連続なとき，f は D **上 連続**（もしくは単に**連続**）という．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定義その３ (New!!)： 写像 $f : D \to \mathbb{R}^m$ が**連続**であるとは，$\mathbb{R}^m$ の任意の開集合 O' の f による逆像 $f^{-1}(O')$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合になる[a]ことである

[a]もちろん，$f(D) \cap O' = \emptyset$ ということもありうるが，この場合 $f^{-1}(O') = \emptyset$ であり，やはり開集合である．

定理：定義その１，その２，その３で定義される f の連続性は互いに同値である．

この定理の証明はレポート問題としよう．重要な定理なので是非（自力で）トライして欲しい．

今週の宿題

宿題 2-1. A を $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合とする．以下の命題を開集合・閉集合・境界の定義に従って厳密に証明せよ．

(1) A が開集合 $\Longrightarrow$ A^c が閉集合

(2) A が閉集合 $\Longrightarrow$ A^c が開集合

(3) $\partial A = \mathbb{R}^n - A^\circ \cup (A^c)^\circ$ （Hint: 左辺 $\subset$ 右辺かつ右辺 $\subset$ 左辺を証明すること．例えば左辺 $\subset$ 右辺を示す場合，$\boldsymbol{x} \in \partial A$ ならば $\boldsymbol{x} \notin A^\circ$ かつ $\boldsymbol{x} \notin (A^c)^\circ$ を説明する）

宿題 2-2. $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ と $\forall r > 0$ に対し，$A := B(\boldsymbol{a}, r)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．(Hint: 任意の $\boldsymbol{x} \in A$ に対し，うまく $0 < \epsilon < r$ を選び $B(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subset A$ となることを示す．すなわち，$\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \epsilon) \Longrightarrow \boldsymbol{y} \in A$ を示す．このとき，三角不等式を使う.）

宿題 2-3. 複素数 $x + yi$ は $\mathbb{R}^2$ の元 (x, y) の別名だと思い，その意味で複素平面 C を $\mathbb{R}^2$ と同一視する．さて関数 $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto z(t)$ を以下で定めるとき，これらは（$\mathbb{R}$ 上で）連続な写像であることを示せ．また，$\mathbb{R}$ 上で一様連続でない $z(t)$ を選び，その理由を述べよ．

(1) $z : t \longmapsto z(t) := 3t + 4ti$

(2) $z : t \longmapsto z(t) := t + t^2 i$

(3) $z : t \longmapsto z(t) := e^{it} = \cos t + i \sin t$

今週のレポート問題

レポート 2-1. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が定義その１の意味で連続であることと，定義その２の意味で連続であることが同値であることを証明せよ．

レポート 2-2. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が定義その２の意味で連続であることと，定義その３の意味で連続であることが同値であることを証明せよ．

(↑どちらかひとつだけ解いて提出しても良い．)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

距離空間の位相と連続性

作成日：October 26, 2006　Version：1.0

次回の演習は休日 (11/3) をはさんで再来週 11/10 となります．次回は授業の前半に小テストをやります．**小テストは自筆ノートのみ参照を許可する**ので，要点をまとめたノートを作っておくと良いでしょう．また，今週の宿題は提出方法がいつもと異なるので注意してください．

さて今日は一般の位相空間を扱う準備として,『距離空間』と呼ばれる位相空間のクラスを考えます．$\mathbb{R}^n$ (+ Euclid 距離) とほぼ同じ発想で物事が処理できるので，非常に扱いやすい空間です．今回はいろんな具体例に接しながら,「距離を入れる」という発想を身につけよう．

距離空間

S を空でない集合とし，以下の (D1)-(D4) を満たす関数 $d : S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在すると仮定する：任意の x, y, $z \in S$ に対し，

(D1) $d(x, y) \geq 0$

(D2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$

(D4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$　　(三角不等式)

このとき，d を S 上の**距離** (distance もしくは metric) とよぶ，集合 S に距離 d を付随させたペア (S, d) を一般に**距離空間** (metric space) と呼ぶ．[a]

[a] d が文脈上明らかな場合は，単に S と表す．

問題 1. $S = \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in S$ とする．このとき，以下の $d_\circ : S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に関して，$(S, d_\circ)$ が距離空間となることを確かめよ．

(1) $d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$

(2) $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$

(3) $d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$

問題 2. (d_∞ の無限次元版)　複素数列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ で $\sup_{n\geq 1} |x_n| < \infty$ を満たすものを有界点列 (bounded sequence) と呼び，その全体を l^∞ と表す．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in l^\infty$ に対し，距離を $d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sup_{n\geq 1} |x_i - y_i|$ と定めれば，(l^∞, d_∞) は距離空間となることを示せ．

問題 3. (d_2 の無限次元版)　複素数列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ で $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ を満たすもの全体を l^2 と表す．

(1) 任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in l^2$ および実数 t に対し，

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots) \quad t\boldsymbol{x} := (tx_1, tx_2, \ldots)$$

と定める．このとき，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in l^2$, $t\boldsymbol{x} \in l^2$ を示せ. (Hint: $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ を用いる)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(2) $|\boldsymbol{x}| := (|x_1|, |x_2|, \ldots)$ とすると，明らかに $|\boldsymbol{x}| \in l^2$ である．これと (1) を用いて，

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty}(|x_n|\,t + |y_n|)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)t^2 + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n||y_n|\right)t + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right) < \infty$$

を示せ．

(3) 次の Schwarz の不等式を示せ：

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n|\right)^2 \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right)$$

(4) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in l^2$ に対し，距離を $d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^2\right)^{1/2}$ と定めれば，(l^2, d_2) は距離空間となることを示せ．

問題 4. $l^2 \subsetneq l^\infty$ を示せ．

距離空間の開集合，閉集合など

- (S, d) を距離空間とする．点 $a \in S$ の **ϵ-近傍** (ϵ-neighbourhood) とは次の集合である：

$$B(a, \epsilon) := \{x \in S : d(x, a) < \epsilon\}.$$

- $a \in S$ が $A \subset S$ の**内点**であるとは,『$\forall\, a \in A,\ \exists\, \epsilon > 0,\quad B(a, \epsilon) \subset A$』となることを言う．$\mathbb{R}^n$ の場合と同様にして，$A \subset S$ の**内部，境界，閉包**，S の**開集合，閉集合**などが定義される．
- 点列 $x_k \in S$ $(k = 1, 2, \ldots)$ に対し，ある $a \in S$ が存在して，$d(x_k, a) \to 0$ $(k \to \infty)$ となるとき，x_k は a に**収束する**といい，$x_k \to a$ $(k \to \infty)$ もしくは $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ と表す．
- $a \in S$ が $A \subset S$ の**集積点**（accumulation point）であるとは，ある点列 $x_k \in A$ $(k = 1, 2, \ldots)$ が存在して，$x_k \to a$ $(k \to \infty)$ となることをいう．
- A の集積点全体は $\overline{A}$，すなわち A の**閉包** (closure) と一致する．

問題 5. 距離空間 S と $A \subset S$ に対し，以下は同値であることを示せ：

(1) A が閉集合，すなわち $\overline{A} = A$

(2) $x_k \in A$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $x_k \to a \in S$ $(k \to \infty)$ $\implies$ $a \in A$

(3) A^c が開集合

問題 6. $N \in \mathbb{N}$ に対し，l^∞ の部分集合 A_N，B_N を以下のように定める：

$$\begin{aligned} A_N &:= \{(x_1, x_2, \ldots) \in l^\infty : x_1 = \cdots = x_N = 0\} \\ B_N &:= \{(x_1, x_2, \ldots) \in l^\infty : |x_i| < 1/N\} \end{aligned}$$

(1) A_N は l^∞ の閉集合となることを示せ．(Hint: $(A_N)^c$ が開集合となることを示す．)

(2) B_N は l^∞ の開集合となることを示せ．

(3) $\displaystyle\bigcap_{N\in\mathbb{N}} A_N = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} B_N = \{\mathbf{0}\}$ を示せ．

問題 7. 「複素数列」の列 $\left\{\boldsymbol{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots)\right\}_{k=1}^\infty \subset l^2 \subset l^\infty$ に対し，距離空間 (l^2, d_2) の意味で $\boldsymbol{x}^k \to \mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$ $(k \to 0)$ であれば，距離空間 (l^∞, d_∞) の意味でも $\boldsymbol{x}^k \to \mathbf{0}$ $(k \to 0)$ となることを示せ．また，この逆は成り立たないことを示せ．

連続性の定義

(S, d), (S', d') を距離空間とし，それぞれ ϵ 近傍を $B(\cdot, \epsilon)$，$B'(\cdot, \epsilon)$ と表すことにする．

定理： 写像 $f : S \to S'$ に対し，以下は同値：

(1) $\forall a \in S$, $\forall \{x_k\}_{k=1}^\infty \subset S$,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \implies \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a).$$

(2) $\forall a \in S$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,

$$f(B(a, \delta)) \subset B'(f(a), \epsilon) \iff B(a, \delta) \subset f^{-1}(B'(f(a), \epsilon)).$$

(3) 任意の S' の開集合 O' に対し，$f^{-1}(O')$ は S の開集合．

上記のいずれがが成り立つとき，$f : S \to S'$ を**連続写像** (continuous map) とよぶ．

問題 8. $(x_1, x_2, \ldots) \in l^\infty$ に対し，$f : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, \dfrac{x_2}{2}, \dfrac{x_3}{3}, \ldots)$ は連続写像 $f : l^\infty \to l^2$ を定めることを示せ．

今週の宿題

TA の恩田さんより，宿題の採点基準のお知らせです：

- 原則として，毎回 20 満点で採点．
- 提出期限後はペナルティーとして一律 -5 点．
- 宿題の返却後，解き直して再提出してよい．(ただし，差分のみの提出は認めない．また，必ず表紙に「再提出」と書くこと．) 再提出された宿題も 20 点満点で採点はするが，成績上 15〜20 点はすべて 15 点として計上する．

今週の宿題は以下のいずれかの方法で提出してください：

- 11 月 2 日木曜日の <u>午前中まで</u> に私のオフィス (A-439) 前の封筒に入れる．
- 11 月 1 日水曜日の Cafe David で私に提出．(私がいなくても誰かにことづけてください．)
- 11 月 2 日木曜日の Cafe David で，TA の恩田さんに提出．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

宿題 3-1. 閉区間 $[\alpha,\beta]$ 上の連続関数 $f(x)$ で $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x)|^2dx<\infty$ を満たすもの全体を S とする．問題 3 を参考にして，以下の問いに答えよ：

(1) $f,\ g\in S$ に対し，次の不等式を示せ：

$$\left(\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|dx\right)^2 \le \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^2dx\right)\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^2dx\right)$$

(2) $f,\ g\in S$ に対し距離を $d(f,g):=\left(\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|^2dx\right)^{1/2}$ と定めれば，(S,d) は距離空間となることを示せ．

(3) 写像 $T:S\to\mathbb{R}$ を $T(f):=\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$ で定める．T は連続写像となることを示せ．(Hint: (1) で $g(x)\equiv 1$ と置いた不等式を使う．)

宿題 3-2. $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ で，導関数 $f'(x)$ も $\mathbb{R}$ 上連続，$\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|<\infty$ かつ $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|<\infty$ となるようなもの全体を W と表す．

(1) $f,g\in W$ に対し，$d_0(f,g):=\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|$ とする．このとき，(W,d_0) は距離空間となることを示せ．

(2) $d_1(f,g):=\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)-g'(x)|$ とする．このとき，(W,d_1) は距離空間となることを示せ．

(3) $\mathbf{0}(x)\equiv 0$（定数関数）とする．また，$n\in\mathbb{N}$ に対し，関数列 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin nx$, $g_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin x$ とする．このとき，

(a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n\in W$ かつ $g_n\in W$ を示せ．

(b) $d_0(f_n,\mathbf{0})\to 0\ (n\to\infty)$ かつ $d_0(g_n,\mathbf{0})\to 0\ (n\to\infty)$ を示せ．

(c) $d_1(f_n,\mathbf{0})\not\to 0\ (n\to\infty)$ だが $d_1(g_n,\mathbf{0})\to 0\ (n\to\infty)$ を示せ．

今週のレポート問題

レポート 3. $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，$1\le p<\infty$ とし，$\mathbb{R}^n$ の距離 $d_\circ:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ を次のように定める：

$$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\left(\sum_{k=1}^n|x_k-y_k|^p\right)^{1/p}$$

(1) (S,d_p) が距離空間となることを確かめよ．

(2) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を固定したとき，$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ $(p\to\infty)$ を示せ．

(3) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を固定したとき，$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ $(p\to 1)$ を示せ．

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

位相空間

作成日：November 9, 2006 Version：1.1

ある集合内の 2 要素に対し「距離」を適切に定義することで，集合 (set) は「(距離) 空間」(space) と呼ばれるようになり，要素 (element) は点 (point) と呼ばれるようになる.「距離を入れる」という行為は，抽象的な集合にわれわれの住む世界（3 次元空間）と同等な感覚を持ち込むための手続きなのである.

今回は「集合」を「空間」に変えるさらに一般的な方法を扱う．一般化の代償として，われわれは扱い慣れた「空間」の概念をかなり譲歩しなくてはならない.

距離空間 S の開集合系

距離空間 (S,d) の開集合全体を $\mathcal{O}(S)$ で表す．このとき，$\mathcal{O}(S)$ は以下の性質を満たす：

(i) $S \in \mathcal{O}(S)$ かつ $\emptyset \in \mathcal{O}(S)$

(ii) $\forall m \in \mathbb{N},\ \ O_1, \dots, O_m \in \mathcal{O}(S) \implies O_1 \cap \cdots \cap O_m \in \mathcal{O}(S)$

(iii) 任意の集合 Λ を持ってきて，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し S 開集合 $O_\lambda \in \mathcal{O}(S)$ をひとつ決める．このとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}(S)$

問題 1. 上の (i)-(iii) を納得せよ．[1]

問題 2. $n \in \mathbb{N}$ に対し，開集合 $O_n \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ をひとつ定める．このとき，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \notin \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ となる例を挙げよ．

一般の集合 S の開集合系

集合 S に対し，部分集合の族（あつまり）$\mathcal{O}$ が S の**開集合系**であるとは，次の条件 (O1)-(O3) を満たすときをいう：

(O1) $S \in \mathcal{O}$ かつ $\emptyset \in \mathcal{O}$

(O2) $\forall m \in \mathbb{N},\ \ O_1, \dots, O_m \in \mathcal{O} \implies O_1 \cap \cdots \cap O_m \in \mathcal{O}$

(O3) 任意の集合 Λ を持ってきて，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対し $O_\lambda \in \mathcal{O}$ をひとつ決める．このとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

このとき,「$\mathcal{O}$ は S に位相構造を定める」といい，$\mathcal{O}$ の元を**開集合** (open set) とよぶ．このような位相構造が定められた集合 S を**位相空間** (topological space) という．[a]

[a] より正確には，$(S, \mathcal{O})$ というペアを位相空間とみなしている．

問題 3. 3 つの元からなる集合 $S = \{$父，母，子$\}$ に対し，以下のように部分集合の族 $\mathcal{O}$ を定める．このとき，$(S, \mathcal{O})$ が位相空間となるものはどれか？

(1) $\mathcal{O} = \{\emptyset,\ \{$父，母$\},\ \{$母，子$\},\ S\}$

(2) $\mathcal{O} = \{\emptyset,\ \{$父$\},\ \{$母$\},\ \{$子$\},\ S\}$

(3) $\mathcal{O} = \{\emptyset,\ \{$子$\},\ \{$父，子$\},\ \{$子，母$\},\ S\}$

[1] ちなみに $\mathcal{O}$ は筆記体をイメージした O（カリグラフィック体）である．アルファベットは次のようになる：$\mathcal{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$.

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. 距離空間 (S, d) の開集合全体を $\mathcal{O}(S)$，開集合全体を $\mathcal{C}(S)$ とする．このとき，$(S, \mathcal{O}(S))$ は必ず位相空間となるが，$(S, \mathcal{C}(S))$ は位相空間となるとは限らないないことを示せ．

問題 5. 距離空間が「2 点間の距離が定まる」という点でわれわれの住む世界に似ているのに対し，位相空間はどのような意味でわれわれの住む世界に似ている，と言えるか？

$(S, \mathcal{O})$ を位相空間とする．このとき，

- 部分集合 A が**閉集合**であるとは，その補集合が開集合となるときをいう．すなわち，$A^c = S - A \in \mathcal{O}$.
- 部分集合 A の**内部**とは，A に含まれる開集合全体の和集合のことをいい，A° と表す．
- 部分集合 A の**閉包**とは，A を含む閉集合全体の共通部分のことをいい，$\overline{A}$ と表す．
- 部分集合 A の**境界**とは，A の閉包から A の内部を除いたものを言い，∂A で表す．すなわち，$\partial A := \overline{A} - A^\circ$.

連続写像と位相

二つの位相空間 $(S, \mathcal{O})$, $(S', \mathcal{O}')$ について，写像 $f : S \to S'$ が**連続**であるとは，任意の S' の開集合の逆像がまた S の開集合となることを言う．すなわち，

$$O' \in \mathcal{O}' \implies f^{-1}(O') \in \mathcal{O}$$

問題 6. S, S' を位相空間とする．$f : S \to S'$ が連続であるための必要十分条件は，任意の S' の閉集合の逆像がまた S の閉集合となることである．これを示せ．

問題 7. $f : S \to S'$ を写像とする．位相構造 $(S', \mathcal{O}')$ に対し，S の部分集合族 $\mathcal{O}_0$ を

$$\mathcal{O}_0 \ := \ \left\{ f^{-1}(O') \subset S \ : \ O' \in \mathcal{O}' \right\}$$

と定める．このとき，$\mathcal{O}$ は開集合系であり，$(S, \mathcal{O}_0)$ は位相空間となっていることを確かめよ．[2]

集合 S に対し二つの開集合系 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ があるとする．さらに $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ が成り立つとき，$\mathcal{O}_1$ の定める位相構造は $\mathcal{O}_2$ の定める位相構造よりも**弱い**，と言う．[a]

[a]逆に，$\mathcal{O}_2$ の定める位相構造は $\mathcal{O}_1$ の定める位相構造よりも**強い**とも言う

問題 8. $f : (S, \mathcal{O}) \to (S', \mathcal{O}')$ が連続写像であるとき，$\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}$ となることを確かめよ．すなわち，$(S, \mathcal{O}_0)$ は f が連続となる最弱の位相である．

[2]このように定まる位相を**誘導位相** (induced topology) と呼ぶ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題

宿題 4-1.　3 つの元からなる集合 $S=\{1,2,3\}$ に対し，考えうるすべての位相（開集合系）を列挙せよ.（全部で 29 個ある.）

宿題 4-2.　5 つの元からなる集合 $S=\{$ 父, 母, 妹, 弟, 兄 $\}$ に対し，

$$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{\text{父}\}, \{\text{母}\}, \{\text{父}, \text{母}\}, \{\text{母}, \text{妹}\}, \{\text{父}, \text{母}, \text{妹}\}, S\}$$

とすると $(S,\mathcal{O})$ は位相空間となる．$A=\{$ 父, 母, 弟 $\}$ に対し，その内部 A°，閉包 $\overline{A}$，境界 ∂A を求めよ.

宿題 4-3.　f を集合 A から B への写像とする．B の部分集合 Q_1, Q_2 に対し，以下を証明せよ.

(1) $Q_1 \subset Q_2 \implies f^{-1}(Q_1) \subset f^{-1}(Q_2)$

(2) $f^{-1}(Q_1 \cap Q_2) = f^{-1}(Q_1) \cap f^{-1}(Q_2)$

(3) $f^{-1}(Q_1 \cup Q_2) = f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2)$

(4) $f^{-1}(B - Q_1) = A - f^{-1}(Q_1)$

今週のレポート問題

レポート 4.　前回のプリントで，集合としては $l^2 \subset l^\infty$ であった．このとき，(l^∞, d_∞) は (l^2, d_∞) を部分距離空間として持つ．今，(l^2, d_∞) の意味での開集合系を $\mathcal{O}_\infty(l^2)$，(l^2, d_2) の意味での開集合系を $\mathcal{O}_2(l^2)$ とするとき，$\mathcal{O}_\infty(l^2)$ と $\mathcal{O}_2(l^2)$ の定める l^2 の位相構造に強弱はあるだろうか？あるとすれば，どちらのほうが弱いか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

連続写像の性質

作成日：November 17, 2006　Version：1.1

写像 $f : X \to Y$ はスクリーン X の情報をスクリーン Y に投影している，と解釈できる．このとき，どのような情報が保存されて，どのような情報が切り捨てられるのか．今回はこのような観点から，連続写像というものを眺めてみよう．

開写像と閉写像

X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ について，

- X の任意の開集合の像が Y の開集合であるとき，f を**開写像** (open map) とよび，
- X の任意の閉集合の像が Y の閉集合であるとき，f を**閉写像** (closed map) とよぶ．

問題 1. $f : X \to Y$ が (1) 連続であること，(2) 開写像であること，(3) 閉写像であることの定義を比較せよ．

問題 2. 以下の連続写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射，単射，開写像，閉写像かどうか判定せよ[1]：

(1) $f(x) = 2x$　　(2) $f(x) = 1$
(3) $f(x) = \sin x$　　(4) $f(x) = \arctan x \in (-\pi/2, \pi/2)$

連続写像は一般に，開集合か閉集合か，という情報は保存しない！

同相写像

写像 $f : X \to Y$ が次の (H1) と (H2) を満たすとき，**同相写像** (homeomorphism or topological map) であるという：

(H1) f は全単射.（従って $f^{-1} : X \to Y$ が写像として意味を持つ.）

(H2) f と f^{-1} はともに連続.

X と Y の間に同相写像が（少なくともひとつ）存在するとき，X と Y は**同相** (homeomorphic) であるという．

問題 3. 次の写像 $f : X \to Y$ が同相写像かどうか判定せよ：

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

(2) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ f(x) = e^x$

(3) $f : (-\infty, 0] \cup (1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x \ \ (x \le 0),\ f(x) = x - 1 \ \ (x > 1)$

(4) $f : (0, 2\pi) \to f((0, 2\pi)),\ f(x) = e^{ix} \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

(5) $f : [0, 2\pi) \to f([0, 2\pi)),\ f(x) = e^{ix} \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

[1] 一般に $\mathbb{R}^n$ およびその部分集合には，特に断らない限り Euclid 距離による距離（位相）が入っている，と仮定する．このプリントでも，これに従うことにする．

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. 次の X と Y が同相であることを示せ．(Hint: Find an example of a homeomorphism between X and Y.)

(1) $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+(x_2-1/2)^2=1/4\}-\{(0,1)\}$, $Y=\mathbb{R}$.

(2) $X=\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$, $Y=\mathbb{C}$.

連結性

位相空間 X が**連結** (connected) であるとは，以下を満たす開集合 X_1, X_2 が存在しないときを言う：

$$X = X_1\cup X_2,\quad X_1\cap X_2=\emptyset,\quad X_1\neq\emptyset,\quad X_2\neq\emptyset \qquad (*)$$

例えば，$\mathbb{R}^n$ $(n=1,2,\dots)$ は連結であることが知られている．

問題 5. 上の $(*)$ をみたすような X_1 と X_2 は閉集合でもあることを示せ．

問題 6. 次の集合 X が（Euclid 距離の入った距離空間として）連結かどうか判定せよ．[2]

(1) $X=(-1,0)\cup(0,1)\quad\subset\mathbb{R}$

(2) $X=\mathbb{Q}\quad\subset\mathbb{R}$

(3) $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=1\}$

(4) $X=\overline{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\sin(1/x),\ x>0\}}$ （←難）

定理 A：X が連結な位相空間で，$f:X\to Y$ が連続ならば，$f(X)\subset Y$ も連結である！

問題 7. $\mathbb{R}$ が連結である，という事実と上の定理を用いて，以下の集合が連結であることを示せ：

(1) $a<b$ とするとき，区間 (a,b) および 区間 $[a,b]$.

(2) 単位円 $\mathbb{S}^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

$A\subset X$ が X の**連結成分** (connected component) であるとは，以下を満たすときをいう：

$$\exists A' : \text{連結},\quad A\subset A',\quad\Longrightarrow\quad A = A'$$

例えば，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 自身がただ 1 つの連結成分であり，$\mathbb{R}-\{0\}$ は 2 つの連結成分 $(-\infty,0)$ と $(0,\infty)$ をもつ．

問題 8. 以下の X の連結成分の個数 (1〜∞) を求めよ：

(1) $X=f^{-1}(I)$, $f(x)=x^2$, $I=(1,2)\subset\mathbb{R}$

(2) $X=\{z\in\mathbb{C} : z^3>0\}$

(3) $X=\{z\in\mathbb{C} : e^z=1\}$

[2] 例えば $X\subset\mathbb{R}^n$ とするとき，X の開集合全体 $\mathcal{O}(X)$ とは $\{X\cap O : O\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\}$ として定義できる．このようにして定まる X の位相を $\mathbb{R}^n$ からの**相対位相** (relative topology) とよぶ．$\mathcal{O}(X)$ は，距離空間 (X,d^n) として定義した開集合全体と一致することを確認せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 9.

(1) $f : X \to Y$ が連続写像ならば, (X の連結成分の個数) $\geq$ ($f(X)$ の連結成分の個数) となることを示せ.

(2) $f : X \to Y$ が同相写像ならば, (X の連結成分の個数) $=$ ($f(X)$ の連結成分の個数) となることを示せ.

今週の宿題

宿題 5-1. X と Y を位相空間とする．$f : X \to Y$ が同相写像ならば，開写像かつ閉写像であることを示せ.

宿題 5-2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする.

(1) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ は閉集合であることを示せ.

(2) 写像 $F : \mathbb{R} \to \Gamma$ を $F(x) = (x, f(x))$ で定める．このとき，F は全単射であることを示せ.

(3) 写像 $F^{-1} : \Gamma \to \mathbb{R}$ を具体的に与えよ．すなわち，$F^{-1}((x, f(x))) =?$

(4) $\mathbb{R}$ と Γ が同相であることを示せ.

宿題 5-3.

(1) $\mathbb{R}$ から $(-1, 1)$ への同相写像をひとつ与えよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ |y| < 1\}$ への同相写像をひとつ与えよ.

今週のレポート問題

レポート 5.

(1) $f : X \to Y$ が同相写像ならば，任意の $x \in X$ に対し，$Y^* := X - \{x\}$ と $Y^* := Y - \{f(y)\}$ は同相となることを示せ.

(2) 次のように集合 $X,\ Y,\ Z \subset \mathbb{C}$ を定める：

$$\begin{aligned} X &= \left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq z^4 \leq 1\right\} \\ Y &= \left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq z^3 \leq 1\right\} \\ Z &= \left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq z^2 \leq 1\right\} \end{aligned}$$

このとき，X, Y, Z は互いに同相ではないことを証明せよ．(Hint: 問題 9(2) の対偶を考えよ．)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

複素数・複素級数・複素関数

作成日：November 22, 2006　Version：1.0

- 12/1（来週）：複素積分・コーシーの定理など
- 12/8：休講
- 12/15：小テスト・Jordan 標準形 (？)

復習

問題 1. 以下の z の値を $x+yi$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$ の形にせよ.

(1) $z=e^{2+\pi/3}$　　(2) $z^8=1$

(3) $z=\log(1+i)$　　(4) $z=i^i$

問題 2. 次の問いに答えよ.

(1) 複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を書け.

(2) 複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束することの定義を書け．また，絶対収束することの定義を書け.

- $\{z_n\}$ が Cauchy 列 $\iff$ $\{z_n\}$ が収束列
- $\sum z_n$ が絶対収束 $\implies$ $\sum z_n$ は収束

問題 3. (使える収束判定法)

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ に対し，$\forall n\in\mathbb{N},\ z_n\neq 0$ と仮定する．さらに，

$$\exists r<1,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n>N,\quad \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\leq r$$

であるとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は収束することを示せ.

(2) $\displaystyle\sin z:=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ は z の値によらず収束することを示せ.

問題 4. 以下の $X_i\subset\mathbb{C}$ について，$f(z)=z^2$ による像の概形を描け：

(1) $X_1 = \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z=C_1>0\}$

(2) $X_2 = \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z=C_2>0\}$

(3) $X_3 = \{z\in\mathbb{C} : |z-1|=1\}$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

正則性と Cauchy-Riemann の方程式

以下，$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とする．

問題 5. 複素関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が（D 上で）**正則** (holomorphic) であることの定義を書け．

Caucy-Riemann の方程式： 複素関数 $f : D \to \mathbb{C}$ に対し，$f(x+yi) = u + vi$ とするとき，

$$f \text{ が正則} \iff u_x = v_y \text{ かつ } u_y = -v_x$$

問題 6. $f : D \to \mathbb{C}$, $z = x + yi$, $f(z) = u + vi$ が正則のとき，以下を示せ：

(1) $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

(2) $\mathrm{Re}\, f(x)$ が定数関数 $\implies$ $f(z)$ も定数関数

(3) f を 2 変数関数

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

と解釈したときの Jacobian J_f を求めよ．さらに，$r \geq 0$ と $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して

$$J_f = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と書けることを示せ．

Riemann 球面と円

問題 7. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1/2)^2 = 1/4\}$，$N = \{(0,0,1)\} \subset S$ とする．このとき，$\mathrm{pr} : S - N \to \mathbb{C}$ を $\mathrm{pr}(x,y,z) := \dfrac{x+yi}{1-z}$ で定めると，$\mathrm{pr} : S - N \to \mathbb{C}$ は同相写像であることが知られている[1]．

(1) 平面 $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$ に対し，$S \cap P$ が円となるような a，b，c，d の条件を求めよ．

(2) 上のような P に対し，$\mathrm{pr}(S \cap P - N)$ は $\mathbb{C}$ 上の円または直線となることを示せ．

今週の宿題

宿題 6-1. 指数関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$, $z = x + iy \mapsto e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ について以下の問いに答えよ．

(1) 次の X，$X' \subset \mathbb{C}$ に対し，$f(X)$，$f(X') \subset \mathbb{C} - \{0\}$ を図示せよ．

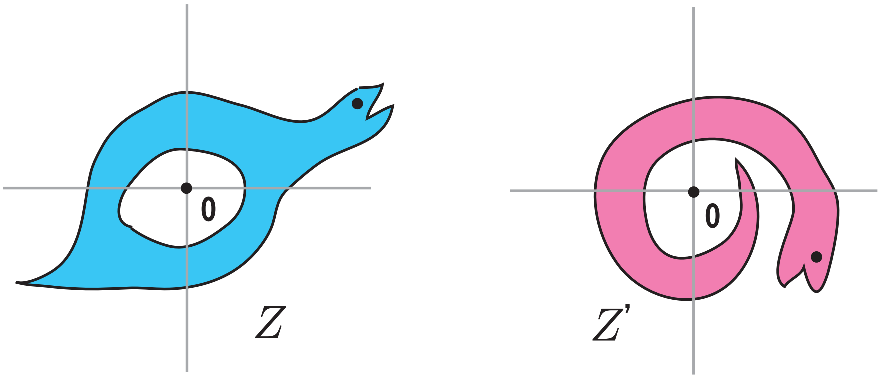
$$X = \{x + iy \in \mathbb{C} : x = c\,(\text{定数})\}, \quad X' = \{x + iy \in \mathbb{C} : y = d\,(\text{定数})\}$$

[1] この同相写像により $S - N$ を $\mathbb{C}$ の「別名」と考え，$N = \{\infty\}$ として $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とみなしたものがいわゆる Riemann 球面であり，この S を普通 $\hat{\mathbb{C}}$ で表す．

(2) 次の $Y,\ Y' \subset \mathbb{C}-\{0\}$ に対し，$f^{-1}(Y),\ f^{-1}(Y') \subset \mathbb{C}$ を図示せよ．

$$Y=\{z\in\mathbb{C} : \arg z=\theta(\text{定数})\},\quad Y'=\{z\in\mathbb{C} : |z|=r>0\,(\text{定数})\}$$

(3) 次の $Z,\ Z' \subset \mathbb{C}-\{0\}$ に対し，$f^{-1}(Z),\ f^{-1}(Z') \subset \mathbb{C}$ の概形を図示せよ．



宿題 6-2.　複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を考える．Cauchy-Riemann の方程式を用いて，以下の問題に答えよ：

(1) $f(z)=z+|z|^2=z+z\overline{z}$ は正則関数でないことを示せ．

(2) f が正則かつ $\operatorname{Im} f(z)$ が定数関数ならば，$f(z)$ も定数関数であることを示せ．

宿題 6-3.　A, C を実数，B, z を複素数とし，方程式

$$\Gamma:\ Az\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+C\ =\ 0$$

を考える．

(1) この方程式 Γ が $\mathbb{C}$ 上の直線を表すための必要十分条件は,「$A=0$ かつ $B\neq 0$」であることを示せ．

(2) この方程式 Γ が $\mathbb{C}$ 上の円を表すための必要十分条件は「$A\neq 0$ かつ $|B|^2-AC>0$」であることを示せ．

注意：従って，Γ は $|B|^2-AC>0$ のとき，またそのときに限り，Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円をあらわすことがわかる．

今週のレポート問題

レポート問題 6-1．　f が正則かつ $|f(z)|$ が定数関数ならば，$f(z)$ も定数関数であることを示せ．

レポート問題 6-2．　D を $\mathbb{C}$ の開集合とする．関数 $f:D\to\mathbb{C}$ が正則かつ像 $f(D)$ が $\mathbb{C}$ 内のある直線 ℓ に含まれるとき，$f(z)$ は定数関数であることを示せ．(Hint: If ℓ is parallel to the imaginary axis, then $\operatorname{Re} f(z)$ is a constant function.)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

複素線積分と Cauchy の定理・積分公式

作成日：November 30, 2006　Version：1.0

- 12/8（休講）：休講
- 12/15：小テスト・Jordan 標準形 (？)

曲線に沿った積分の復習

問題 1. $\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x} = (x, y)$ における「重力」が $f(\boldsymbol{x}) = x^2 + y^2$ で与えられている．このとき，点 $\boldsymbol{x}_0$ の十分小さな近傍における長さ $\Delta\ell \approx 0$ の線分の「重さ」は $f(\boldsymbol{x}_0)\Delta\ell + O(\Delta\ell^2)$ で与えられると仮定する． 点 $(1, 0)$ と点 $(0, 1)$ を結ぶ曲線

(1) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos\dfrac{\pi t}{2}, \sin\dfrac{\pi t}{2})$

(2) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1 - t, t)$

の「重さ」を次のようにして求めよ：

- $[0, 1]$ 上に N 等分する点 $0 = t_0, t_1, \ldots, t_N = 1$ を打つ．
- $\boldsymbol{x}_k = \gamma(t_k)$ とし，$\Delta\ell_k := d(\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_k) = O(1/N)$ （Euclid 距離）とする．
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(\boldsymbol{x}_k)\Delta\ell_k + \sum_{k=0}^{N-1} O(\Delta\ell_k^2)$ の $N \to \infty$ とした極限（$\displaystyle\int_\gamma f(\boldsymbol{x})d\ell$ と表す）をとる．

複素線積分

$f : \mathbb{C}(= \mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ を複素関数，γ を $\gamma = \{z(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\}$ で与えられる区分的に滑らかな曲線とするとき，**f の γ に沿った積分**を以下で定義する．

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\frac{dz}{dt}(t)\,dt$$

注意： γ を N 分割する点 $z_0, z_1, \ldots, z_N$ をとる．$\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$ （向きのある複素的長さ）とおき，$\sum_{k=0}^{N-1} f(z_k)\Delta z_k$（複素的重さの和） について $N \to \infty$ とした極限が左辺の積分の意味である．一方，実際の計算は**問題 1** のような原理にもとづき，右辺の形でおこなう．

問題 2. $\Delta t \approx 0$ に対し，$\Delta z := z(t + \Delta t) - z(t)$ とおく． $z = z(t) = re^{it}$ のとき，$\Delta z = ire^{i\theta}\Delta t$ を納得せよ．一般に，$dz = z'(t)dt$ を納得せよ．

問題 3. 次の関数を円周 $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r > 0\}$（左回り）に沿って一周積分せよ．

(1) $f(z) = z^2$　(2) $f(z) = \bar{z}$　(3) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

以下，$D \subset \mathbb{C}$ を領域，すなわち連結（ひとつながり）な開集合とする．

Cauchy 定理・積分公式： D 内の任意の可縮な単純閉曲線 γ とその中の点 z について，$f : D \to \mathbb{C}$ が正則関数ならば，

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \qquad \text{かつ} \qquad \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(z)$$

問題 4. 関数 $f(z)$ は $|z| < 3$ において正則とする．このとき，以下の γ それぞれに対し $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2-1}dz$ の値を求めよ．

(1) $\gamma : |z-1| = \dfrac{1}{2}$　　(2) $\gamma : |z+1| = \dfrac{1}{2}$　　(3) $\gamma : |z| = 2$

一様収束と微分・積分

問題 5.

(1) $f_n : D \to \mathbb{C}$ は $f : D \to \mathbb{C}$ に D 上一様収束すると仮定する．これを ϵ-δ 式に書き表せ．

(2) f_n が正則なとき，f も正則であることを示せ．

(3) γ を D 内の可縮な単純閉曲線とする．このとき，

$$\int_\gamma f_n(z)dz \longrightarrow \int_\gamma f(z)dz \quad (n \to \infty)$$

を示せ．

今週の宿題・レポート

再来週（12/15）は授業のはじめに 30 分の小テストをやるので，テスト勉強を今週の宿題とします．自筆ノート（コピー不可）に限り参照を許可するので，要点をまとめた手書きノートを作ってくると良いでしょう.（ノートの提出，採点はしません.）

レポート問題 7. I を $\mathbb{R}$ 上の閉区間もしくは開区間，$f_n : I \to \mathbb{R}$ は $f : I \to \mathbb{R}$ へと各点収束するが一様収束しないと仮定する．このとき，次を満たす I，f_n，f の例を挙げよ．

(1) f_n は I 上連続だが，f は I 上連続でない．

(2) f_n は I 上微分可能だが，f は I 上微分可能でない．

(3) $I = [a, b]$ とするとき，

$$\int_a^b f_n(x)dx \not\to \int_a^b f(x)dx \quad (n \to \infty).$$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

複素関数の諸性質

作成日：December 15, 2006　Version：1.0

一致の定理

問題 1. $P(z)$ と $Q(z)$ はともに d 次以下の多項式とする．異なる $(d+1)$ 個の点 $z_0, \dots z_d$ が存在して $P(z_k) = Q(z_k)$ $(k = 0, \dots, d)$ が成り立つとき，$P(z) = Q(z)$ であることを示せ．

一致の定理： $f, g : D \to \mathbb{C}$ を正則な複素関数とする．ある $w \in D$ と w に収束する点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ で，$f(z_n) = g(z_n)$ を満たすものが存在すれば，D 上で $f(z) = g(z)$ である．

問題 2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．$[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上で $f(z) = 0$ が成り立つならば，じつは $\mathbb{C}$ 全体で $f(z) = 0$ となることを示せ．(区間 $[a, b]$ はどんなに小さくても良い！)

問題 3. $f(z) = \sin(\pi/z)$ とすると，$\forall n \in \mathbb{N}$, $f(1/n) = 0$ であるが一般に $f(z) = 0$ ではない．これは一致の定理と矛盾するか？

偏角の原理

問題 4. $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対し，$C = C(a, r)$ で a 中心半径 r の円周上を左回りに回る経路をあらわすことにする．このとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (z-a)^m dz \quad (m \in \mathbb{Z})$$

の値を求めよ．

$f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．$a \in D$ に対し，ある $k \geq 0$ と正則関数 $g(z)$ で $g(a) \neq 0$ かつ $f(z) = (z-a)^k g(z)$ となるものが存在するとき，a を f の k **位の零点**（zero of order k）もしくは**重複度 k の零点** (zero with multiplicity k) と呼ぶ．

問題 5. $z = 0$ が位数 3 の零点になるような正則関数 f の例を多項式で 1 つ，それ以外で 1 つ挙げよ．

問題 6. $f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．$a \in D$ が f の k 位の零点であるとき，十分小さい $r > 0$ に対し

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \ = \ k$$

を示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

偏角の原理：D を単純閉曲線 γ で囲まれた領域，$f : D \to \mathbb{C}$ を正則関数とすると，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \ = \ (\gamma \text{ 内の零点の重複度込みの個数})$$

問題 7. $f(z) = z^3(z^2+1)^2(z^2-4) = z^3(z-i)^2(z+i)^2(z-2)(z+2)$ とする．偏角の原理を用いて，$r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ それぞれの場合に $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ の値を求めよ．

今週の宿題・レポート

宿題 8-1.

定理：連続関数 $f_n : D \to \mathbb{C}$ は D 上 $f : D \to \mathbb{C}$ に一様収束すると仮定する．このとき，

(1) f も連続．

(2) $C \subset D$ を（区分的に滑らかな）閉曲線とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)dz \ = \ \int_C f(z)dz \ = \ \int_C \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz$$

(3) f_n がすべて D 上正則ならば，f も D 上正則.

この定理の (1), (2), (3) を以下のヒントに従って厳密に証明せよ．

(1) 任意の $a \in D$ を固定し，その点の周りで f の連続性を ϵ-δ 式に証明すればよい．a に近い任意の $z \in D$ に対し，

$$\begin{aligned}|f(z)-f(a)| &\le |f(z)-f_n(z)+f_n(z)-f_n(a)+f_n(a)-f(a)| \\ &\le |f(z)-f_n(z)|+|f_n(z)-f_n(a)|+|f_n(a)-f(a)|\end{aligned}$$

であるが，$|f(z)-f_n(z)|$，$|f(a)-f_n(a)|$ は一様収束性から，$|f_n(z)-f_n(a)|$ は f_n の連続性から評価できる．

(2) (1) より $\int_C f(z)dz$ は存在する．今，

$$\int_C f_n(z)dz - \int_C f(z)dz \ = \ \int_C \{f_n(z)-f(z)\}dz$$

に注意する．C の長さを ℓ とすると，

$$\left|\int_C \{f_n(z)-f(z)\}dz\right| \ \le \ \int_C |f_n(z)-f(z)|dz \ \le \ \ell\cdot\max\{|f_n(z)-f(z)| \,:\, z\in C\}$$

だが，$f_n \to f$ の一様収束性よりこの値はいくらでも小さくできる．

(3) f_n に対し Cauchy の積分定理を使うと任意の閉曲線 $C \subset D$ について $\int_C f_n(z)dz = 0$. あとは f にたいし (2) と次の Morera の定理（既知としてよい）を適用する：

Morera の定理 $f : D \to \mathbb{C}$ が連続かつ任意の区分的に滑らかな閉曲線 $C \subset D$ に対し $\int_C f(z)dz = 0$ であれば，f は D 上正則.

宿題 8-2. $f(z) = z^3(z^2+1)^2(z^2-4) = z^3(z-i)^2(z+i)^2(z-2)(z+2)$ に対し，実際に $f'(z)/f(z) = (\log f(z))'$ を計算し $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ それぞれの場合における $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ の値を求めよ.

宿題 8-3.

最大値の原理： $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ を <u>定数でない</u> 連続関数で，D 上で正則と仮定する．もし $M = \max\left\{|f(z)| \,:\, z \in \overline{D}\right\}$ が存在するならば，$M = |f(w)|$ となる $w \in \partial D$ が存在し，$M = |f(w')|$ となる $w' \in D^\circ$ は存在しない.

すなわち，**絶対値の最大値は境界でのみ実現される．**これを用いて，以下の問いに答えよ：

(1) $f(x) = x^2 - 1$ を実関数とする．このとき，区間 $[-1, 1]$ での $|f(x)|$ の最大値を求めよ.（区間の境界での値 $f(-1)$ と $f(1)$ は最大値にならないことに注意．最大値の原理は実数の世界では成り立たない！）

(2) $f(z) = z^2 - 1$ を複素関数とする．このとき，閉単位円板 $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ 上での $|f(z)|$ の最大値を求めよ.（ただ値をもとめるだけでなく，最大であることの理由を述べること．）

レポート問題 8. $f,\ g : D \to \mathbb{C}$ を開集合 D 上で正則な関数とする．もし $f(z)g(z) = 0$ が任意の $z \in D$ で成り立てば，D 上 $f(z) = 0$ もしくは $g(z) = 0$ であることを示せ.（Hint: Suppose $f(a) = 0$ and $g(a) \neq 0$ at $a \in D$. By continuity of g, there exists a small disk U around a such that $g(z) \neq 0$ on U. Then what happens to $f(z)$ on U?）

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

留数計算速成コース・コンパクト性

作成日：December 20, 2006　Version：1.0

今日は留数を用いた積分計算に必要な最低限の技術を習得しよう．これさえマスターすれば，あとは力技で何とかなる，はず．

今後の予定

- 1/12：Jordan 標準形など
- 1/19：休講（センター試験準備日）
- 1/26：小テスト・未定乗数法など
- 2/2：期末試験（3 クラス合同）

Laurent 展開と留数定理

- 関数 $f(z)$ が $0<|z-a|<R$ で正則であるとき（$z=a$ で正則とは限らない），

$$f(z) \;=\; \cdots+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots$$

と**一意的に**ベキ級数展開される．これを $f(z)$ の $z=a$ における **Laurent 展開**[a]という．

- $\dfrac{1}{(z-a)}$ の係数 c_{-1} を f の $z=a$ における**留数** (residue) といい，$\mathrm{Res}(f,a)$ もしくは単に $\mathrm{Res}(a)$ であらわす．

- 特に $k\geq 1$ に対して $c_{-k}\neq 0$ かつ

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots$$

となるとき，$z=a$ は k **位の極** (pole of order k) であるという．

[a] Taylor 展開は Laurant 展開の特別な場合（$\forall\ k\in\mathbb{N},\ c_{-k}=0$）である．

留数定理．　D を単純閉曲線 C で囲まれる領域とし，関数 $f(z)$ は $D-\{a_1,\ldots,a_n\}$ で正則であるとする．このとき，

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(a_j) \;=\; 2\pi i \;\times\; (\text{各 } a_j \text{ での留数の和})$$

が成り立つ．

従って，**留数の求め方さえわかっていれば何とかなる．**留数の計算方法を知る前に，留数定理が成り立つ原理を確認しておこう．

問題 1. 関数 $f(z)$ の $0<|z-a|<R$ におけるローラン展開が $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ であるとき，$0<r<R$ について次を確認せよ：

$$\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot c_{-1}$$

問題 2. 留数定理と同じ状況を考える．各 a_j に対し r_j を十分小さく取り，円 $C_j=$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

$\{|z-a|=r_j\}$（左回り）が D 内に入るようにする．このとき，次を確認せよ：

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz$$

さらに，以上を踏まえ留数定理を納得せよ．

問題 3. 以下の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z}+2-z+z^2+5z^3-10z^4\right) dz$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=10} \left(\frac{1}{z-1}+\frac{2}{z-2}+\cdots+\frac{8}{z-8}+\frac{9}{z-9}\right) dz$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}\,dz$

留数の求め方

「留数を求める」＝「c_{-1} を求める」である．したがって，$z=a$ での展開さえできれば十分である．しかも，-1 次の係数さえわかればよいのだから，それ以外に無駄な労力は使ってはならない．知っておけばよいのは，次の公式たちのみである：

- $\sin z$，$\cos z$，e^z など有名関数の Taylor 展開．
- $\displaystyle\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots \quad (|z|<1)$
- $\displaystyle(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\cdots \quad (|z|<1, \alpha\in\mathbb{R})$

問題 4. 次の関数について，カッコ内の点における留数を求めよ．

(1) $z^3e^{1/z}$ $\quad (z=0)$

(2) $\displaystyle\frac{\sin z}{(z-\pi)^3}$ $\quad (z=\pi)$

(3) $\displaystyle\frac{1}{(z+1)^2(z+2)^2}$ $\quad (z=-1)$

(4) $\displaystyle\frac{1}{(3z+1)(z+3)}$ $\quad (z=-\frac{1}{3})$

問題 5. 留数計算を利用して，定積分 $\displaystyle I := \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta}\,d\theta$ を求めよう．

(1) $z = e^{i\theta}$ と置くとき，$\displaystyle d\theta = \frac{1}{iz}\,dz$ となることを示せ．

(2) $\cos\theta$ を z を用いて表せ．

(3) $\displaystyle I = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{(3z+1)(z+3)}\,dz$ となることを示せ．

(4) $\{|z|<1\}$ 内にある極とそこでの留数をすべて求め，留数定理により積分を計算せよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

コンパクト性

X を距離空間とする．部分集合 $K \subset X$ が**コンパクト** (compact) であるとは，K 内の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が K 内の点に収束する部分列 $\{x_{n(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ を持つときをいう．

注意． この性質は一般に**点列コンパクト**と呼ばれる性質で，一般の位相空間（多様体など）においては開被覆を用いた定義を行う．

問題 6. 以下の集合の中でコンパクトでない と言い切れるものはどれか？

(1) $(0,1] \subset \mathbb{R}$　　(2) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

(3) $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$　　(4) $\mathbb{R}^2$

問題 7.

(1) $\mathbb{R}^2$ の点集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ はコンパクトであることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合はコンパクトであることを示せ．

(c1)$_n$　$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 $\iff$ $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合

(c2)　**コンパクト性は連続写像で保存される：** X，Y が距離空間，$K \subset X$ がコンパクトであるとき，任意の連続写像 $f : X \to Y$ に対し $f(K) \subset Y$ もコンパクトである．

(c3)　コンパクト集合上の実数値連続関数は最大値と最小値を持つ．($\Leftarrow$(c1)$_1$+(c2))

今週の宿題（冬休み特大号）

宿題 9-1.

(1) f を $0 < |z-a| < R$ で正則な関数とする．a が 1 位の極であるとき，そこでの Laurent 展開を用いて

$$\mathrm{Res}(a) = \lim_{z \to a}(z-a)f(z)$$

となることを証明せよ．

(2) $g(z) = 1/f(z)$ と置くと，$g(a) = 0$ となることを示せ．また，

$$(z-a)f(z) = \frac{z-a}{g(z)-g(a)}$$

を用いて，$\mathrm{Res}(a) = 1/g'(a)$ と書けることを示せ．

(3) $f(z) = \dfrac{1}{z^6-1}$ の $e^{k\pi i/3}$ $(k = 0, 1, \ldots, 5)$ における留数をそれぞれ求めよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

注意. (3) は次のように力技で求めても良い（むしろこちらを推奨）．$a = e^{k\pi i/3}$, $t = z - a$ とおく．$(z^6-1)^{-1} = ((t+a)^6-1)^{-1} = (a^6+6a^5t+\cdots+t^6-1)^{-1} = (6a^5t+O(t^2))^{-1} = (6a^5t)^{-1}(1+O(t))^{-1} = (6a^5t)^{-1}(1+O(t)) = 1/(6a^5t)+\cdots$ より，留数は $1/(6a^5)$．途中で $(1+x)^{-1} = 1-x+O(x^2)$ を用いた．

宿題 9-2. 上の結果などを用いつつ，次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} z^2 e^{-\frac{1}{z}}\,dz$　(2) $\displaystyle\int_{|z|=2} z^3\cos\frac{1}{z}\,dz$　(3) $\displaystyle\int_{|z-1|=2}\frac{1}{z^2(z^2-4)}\,dz$

(4) $\displaystyle\int_{|z-1|=2}\frac{e^z}{z^2(z^2-4)}\,dz$　(5) $\displaystyle\int_{|z-i|=1}\frac{1}{z^4-1}\,dz$　(6) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1}{z^6-1}\,dz$

宿題 9-3. $\displaystyle I = \int_0^{2\pi}\frac{1}{13+5\sin\theta}\,d\theta$ を求めよ．

宿題 9-4. $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^6+1}\,dx$ を以下のようにして求めよ：

(1) 積分路 γ を図のように定める．このとき，$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ を求めよ．

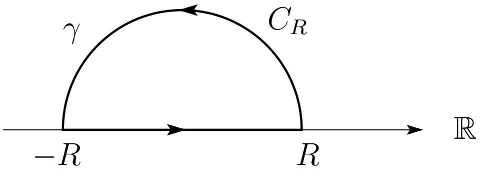
(2) $R>1$ とするとき，C_R 上 $|z^6+1| \geq R^6-1$ となることを説明せよ．(Hint: z^6 lies on a circle of radius R^6. Then what kind of circle z^6+1 lies on?)

(3) $z = Re^{i\theta}$ とおき，

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^6-1}d\theta = \frac{\pi R}{R^6-1}$$

を示せ．

(4) $R\to\infty$ とし，I の値を求めよ．(答えは $2\pi/3$.)



宿題 9-5. (c1)$_2$, (c2), (c3)（前頁枠内）を駆使して，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の連続関数 $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{C}$ について，$|f(z)|$ は最大値と最小値を持つことを証明せよ．

(2) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を連続関数とする．長さ ℓ の単純閉曲線 C に対し，ある $M\geq 0$ が存在して $\displaystyle\left|\int_C f(x)\,dz\right| \leq M\ell$ が成り立つことを示せ．(Hint：C はある連続写像 $\gamma:\mathbb{S}^1\to\mathbb{C}$ の像と考えられる．)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

Jordan 標準形

作成日：January 11, 2007　Version：1.0

今日は Jordan 標準形について演習します．まず原理を大雑把に理解し，与えられた行列に対しその Jordan 標準形と P を求める手続きをまとめよう．ちなみにヨルダン（ハシミテ王国）は英語で Jordan です．

今後の予定

- 1/19：休講（センター試験準備日）
- 1/26：小テスト・未定乗数法など
- 2/2：期末試験（3 クラス合同）

行列の共役類

n 次正方行列 A と B が**共役** (conjugate，もしくは**相似**) であるとは，ある正則行列 P が存在して，$B = P^{-1}AP$ と書けるときを言う．

$\mathbb{C}$ 係数 n 次正方行列全体を $M_n(\mathbb{C})$ で表すことにする．

問題 1. A と B が共役であるとき，$A \sim B$ と書くことにする．このとき，以下を示せ．

(E1) $\forall A,\ B \in M_n(\mathbb{C}),\quad A \sim B \implies B \sim A$

(E2) $\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\quad A \sim A$

(E3) $\forall A,\ B,\ C \in M_n(\mathbb{C}),\quad A \sim B,\ B \sim C \implies A \sim C$

すなわち，$\sim$ は $M_n(\mathbb{C})$ に同値関係を定める．

問題 2. $A \sim B$ ならば，A と B の固有値は一致することを示せ．(Hint: Check that $\det(\lambda E - A) = \det(\lambda E - P^{-1}AP)$ for any regular matrix P.)

Jordan 標準形

Jordan 標準形:　次の m 次正方行列

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}$$

を **Jordan 細胞** (Jordan block) という．任意の $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，ある正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, m_1) & & & O \\ & J(\lambda_2, m_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J(\lambda_s, m_s) \end{pmatrix}$$

とすることができる．これを A の **Jordan 標準形** (Jordan normal form) という．

便宜的に，$P^{-1}AP = J(\lambda_1, m_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_s, m_s)$ とも表すことにする．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

固有空間と広義固有空間

問題 3.

(1) 次の式の意味を説明せよ：$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_M$

(2) $\mathbb{C}^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, $V_k \neq \{\mathbf{0}\}$ $(k = 1, 2, 3)$ となるような V_k の具体例を挙げよ．

定理 1： $A \in M_n(\mathbb{C})$ の（互いに異なる）固有値を $\lambda_1, \ldots \lambda_M$ とおく．各 λ_k の固有空間を

$$W(\lambda_k) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n : A\boldsymbol{x} = \lambda_k \boldsymbol{x} \iff (A - \lambda_k E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

と表すとき，

$$A \text{ が対角化可能} \iff \mathbb{C}^n = W(\lambda_1) \oplus W(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_M)$$

問題 4. 定理と同じ記号のもと，$i \neq j$ のとき $W(\lambda_i) + W(\lambda_j) = W(\lambda_i) \oplus W(\lambda_j)$ を示せ．

問題 5. $A \in M_n(\mathbb{C})$ が異なる n 個の固有値を持つとき，A は対角化可能であることを示せ．

定理 2： $A \in M_n(\mathbb{C})$ の（互いに異なる）固有値を $\lambda_1, \ldots \lambda_M$ とおく．各 λ_k の**広義固有空間**を

$$V(\lambda_k) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n : \exists p \in \mathbb{N},\ (A - \lambda_k E)^p \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} \quad (\supset W(\lambda_k))$$

と定めるとき，

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_M).$$

問題 6.

(1) $A(V(\lambda_k)) \subset V(\lambda_k)$ を示せ．

(2) $i \neq j$ のとき $V(\lambda_i) + V(\lambda_j) = V(\lambda_i) \oplus V(\lambda_j)$ を示せ．(やや難．教科書等を参考にして考えてみよ．)

問題 7. $A \in M_5(\mathbb{C})$ は2つの異なる固有値 λ_1, λ_2 をもち，かつ $\dim V(\lambda_1) = 2$, $\dim V(\lambda_2) = 3$ とする．

(1) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ を $V(\lambda_1)$ の基底，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ を $V(\lambda_2)$ の基底とする．
このとき，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は $\mathbb{C}^5$ の基底となることを示せ．

(2) $P := (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ とすると，ある $B_1 \in M_2(\mathbb{C})$ と $B_2 \in M_3(\mathbb{C})$ が存在して
$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) B_1, B_2 の固有値はそれぞれ λ_1, λ_2 のみであることを示せ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(4) $B := P^{-1}AP$ とするとき，$B^k = \begin{pmatrix} B_1^k & O \\ O & B_2^k \end{pmatrix}$ を示せ．

(5) 2 次正則行列 P_1 と 3 次正則行列 P_2 に対し，$Q = \begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & O \\ O & P_2^{-1} \end{pmatrix} \text{ および } Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} P_1^{-1}B_1P_1 & O \\ O & P_2^{-1}B_2P_2 \end{pmatrix}$$ を示せ．

この問題を一般化すれば，結局 $A \in M_n(\mathbb{C})$ がただひとつの固有値 λ を持つ場合にそのヨルダン標準形を求めればよいことがわかる．**以下，そのように仮定する．** 次の目標は：

> 適当な正則行列 P を見つけて，$B = P^{-1}AP = J(\lambda, m_1) \oplus \cdots J(\lambda, m_s)$
> かつ $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$ となるものを探す！

実は P よりも B のほうが先にわかってしまうのだが．

Calyley-Hamilton の定理と冪零行列

定義＋定理：$C \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，$f_C(x) := \det(xE - C)$ を C の**固有多項式** (characteristic polynomial) と呼ぶ．このとき，$f_C(C) = O$ が成り立つ．

問題 8. $(A - \lambda E)^n = O$ を示せ．また，$0 \leq p < n$ に対し，$(A - \lambda E)^p = O$ となるような A の例を挙げよ．

$N \in M_n(\mathbb{C})$ がある $p \in \mathbb{N}$ に対し $N^p = O$ となるとき，**冪零** (べきれい，nilpotent) という．

従って，$A - \lambda E$ は冪零である．

問題 9. $N_m = J(0, m)$ とするとき，$N_m^{m-1} \neq O$，$N_m^m = O$ となることを（例えば $m \leq 4$ のときを具体的に計算して）納得せよ．

問題 10. $N = N_3 \oplus N_2 \oplus N_2 \oplus N_1$ とするとき，N，N^2，N^3 とその階数を求めよ．

Jordan 標準形の構成

問題 11. $A \in M_{13}(\mathbb{C})$ と仮定する．いま，$B - \lambda E = N_{m_1} \oplus \cdots \oplus N_{m_s}$ （ただし $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$ かつ $m_1 + \cdots m_s = 13$ と書けている．）$\operatorname{rank}(B - \lambda E) = 9$, $\operatorname{rank}(B - \lambda E)^2 = 5$, $\operatorname{rank}(B - \lambda E)^3 = 2$, $\operatorname{rank}(B - \lambda E)^4 = 0$ であるとき，B の形を決定せよ．

問題 12. 一般に，Jordan 標準形 $B = P^{-1}AP$ は $r_k := \operatorname{rank}(B - \lambda E)^k$ $(1 \leq k \leq n)$ のみで与えることで決定できることを示せ．(やや難？)

問題 13. $1 \leq k \leq n$ とするとき，$\operatorname{rank}(A - \lambda E)^k = \operatorname{rank}(B - \lambda E)^k$ を示せ．

例えば，次のようなことがわかる：

- $\mathrm{rank}\,(A-\lambda E)^m = 0 \iff (A-\lambda E)^m = O$ となる m が m_1 を与える．すなわち，$J(\lambda, m)$ が最大の Jordan 細胞．
- $\mathrm{rank}\,(A-\lambda E)^{m-1}$ が $J(\lambda, m)$ の個数を与える．
- $\dim W(\lambda) = n - \mathrm{rank}\,(A-\lambda E)$ が Jordan 細胞の個数を与える．

問題 14. 次の行列 A に対して，$N = A - 2E$ とおくとき $N^k\,(1 \le k \le 4)$ とその rank を求めよ．また，これから A の Jordan 標準形を決定せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

P の決定

問題 15. 上の問題の行列について，P を以下の手順により求めよ．

(1) $N = A - 2E$，$P = (\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4)$ と置く．このとき，$AP = PB$ となることを用いて $N\boldsymbol{u}_1$，$N\boldsymbol{u}_2$，$N\boldsymbol{u}_3$，$N\boldsymbol{u}_4$ をそれぞれ $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_4$ を用いてあらわせ．

(2) (1) を満たすような $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_4$ を具体的にみつけよ．

問題 16. 次の行列の Jordan 標準形とその変換行列 P を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

今週の宿題・レポート

宿題 10.　授業でやらなかった 青字の 問題を 3 問選んで解け，1 月 19 日までに私（川平）の研究室（A439）前の封筒に提出すること．

レポート 10.　上の 3 問以外に，青字の 問題をできるだけ多く解け．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

勾配ベクトルと極値問題

作成日：January 27, 2007　Version：1.1

今後の予定

- 2/2（金）13:00-16:15 期末試験（1-509 教室），宿題・レポート締切（研究室 (A439) 前にある封筒に提出）
- 2/5（月）14:00-15:00 オフィスアワー，2/7（水）分 Cafe David の振替.

スカラー関数の勾配ベクトル場

以下で扱う関数は必要なだけ連続微分可能とする.

関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)\longmapsto f(\boldsymbol{x})$ を考える．このとき，

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \;:=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right)$$

を f の x における**勾配ベクトル** (gradient vector) と呼ぶ．$\operatorname{grad} f$ は ∇f とも書かれる.

問題 1. 以下の 2 変数関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対し，$C=f(x,y)$（定数）となる xy 平面上の曲線族を図示せよ．また，その上での勾配ベクトル $\operatorname{grad} f$ を図示せよ.

(1) $f(x,y) \;=\; \sqrt{3}x+y$

(2) $f(x,y) \;=\; x^2+y^2$

問題 2. $f(x,y) \;=\; \sqrt{3}x+y \;=\; (\sqrt{3},1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$（内積）と解釈する．$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が原点 $\mathbf{0}$ から $\Delta\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ へ移動するとき，$f(x,y)$ がもっとも変化する方向を与える θ は何か？また，まったく変化しない θ は何か？

問題 3. 関数 $f(\boldsymbol{x})=f(x,y)=x^2+y^2$ の $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 周辺での様子を考察しよう.

(1) f を $\boldsymbol{a}$ の回りで Taylor 展開せよ.

(2) $\boldsymbol{x}\approx\boldsymbol{a}$ のとき，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) \;&\approx\; f(\boldsymbol{a})+\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \\ \Longleftrightarrow\quad f(x,y)\;&\approx\; f(2,1)+\operatorname{grad} f(2,1)\cdot\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となることを確かめよ.

(3) $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ からある方向へわずかに移動するとき，$f(\boldsymbol{x})$ がもっとも変化するのはどの方向に動いたときか？また，ほとんど変化しないのはどの方向に動いたときか？

(4) 等高線 $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$ と $\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a})$ は直交することを説明せよ．

注意． 上の問題では $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ という条件を本質的に使っていない．すなわち，任意の $\boldsymbol{a}$ について (2)，(3)，(4) の性質は成り立つ．$f(x, y) = x^2 + y^2$ という条件についても同様である．

問題 4. xyz 空間中の温度分布が $f(x, y, z) = 20 \sin x \sin y \sin z$ （℃）で与えられている．暖かい場所の好きな虫が点 $(0, \pi/2, \pi/2)$ にいるとき，この虫はとりあえずどの方向に飛ぶのがよいか？

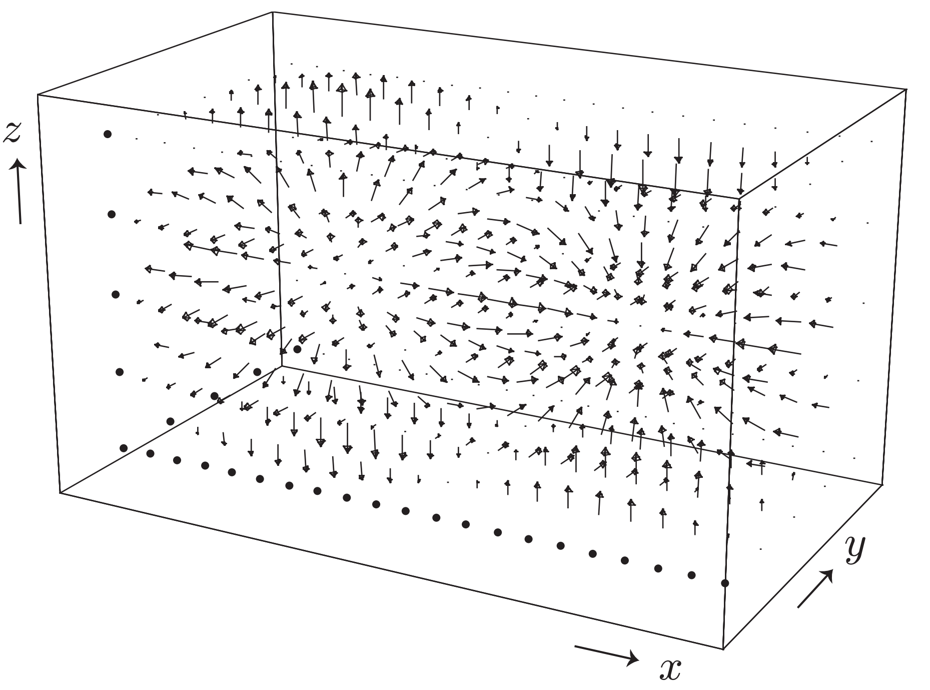


図 1: $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ の勾配ベクトル場．(図の範囲は $[-\pi, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$．ベクトルの長さは適当に縮小して表示している．)

未定乗数法

$x + y + z = 1$ という条件のもと，$f(x, y, z) = xy + yz + zx$ の極大値，極小値を求めてみよう．

Lagrange の未定乗数法： 拘束条件 $g(x_1, \ldots, x_n) = C$（定数） の下，$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ が $f(x_1, \ldots, x_n)$ の極値となるための必要条件は $\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a})$ と $\mathrm{grad}\, g(\boldsymbol{a})$ が平行になることである．すなわち，ある $\lambda \neq 0$ が存在して

$$\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a}) \;=\; \lambda\, \mathrm{grad}\, g(\boldsymbol{a}) \iff \mathrm{grad}\,(f(\boldsymbol{a}) - \lambda\, g(\boldsymbol{a})) \;=\; \boldsymbol{0}$$

となることである．このような λ を **Lagrange 乗数** (Lagrange multiplier) と呼ぶ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

注意． Lagrange の未定乗数法は極値の**必要条件**を与える．従って，上のような $\boldsymbol{a}$, λ の組が存在しても極値とならない場合もある．

問題 5. $g(x,y)=\sqrt{3}x+y=2$ という条件下で $f(x,y)=x^2+y^2$ の最小値を考えることにより，未定乗数法の意味を納得せよ．

問題 6. $g(x,y,z)=x+y+z=1$ という条件のもと，$f(\boldsymbol{x})=f(x,y,z)=xy+yz+zx$ の極値を求めよう．

(1) $h(\boldsymbol{x})=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$ とおく．$g(\boldsymbol{a})=0$ のとき，$\operatorname{grad} h(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ すなわち $h_x(\boldsymbol{a})=h_y(\boldsymbol{a})=h_z(\boldsymbol{a})=0$ となる $\boldsymbol{a}$ と λ を求めよ．

(2) 上の $\boldsymbol{a}$ において $f(\boldsymbol{a})$ が極大（最大）値であることを示せ．

問題 7. (エントロピー) $n\in\mathbb{N}$ を固定し，$p_1,\dots,p_n\geq 0$, $p_1+\cdots+p_n=1$ とする．エントロピー

$$H(p_1,\dots,p_n) \ := \ -\sum_{k=1}^{n} p_k\log p_k$$

は $p_1=\cdots=p_n=1/n$ のとき最大値をとること証明せよ．

エントロピー (entropy) は，事象 $A_1,\dots,A_n$ のいずれかが $p_1,\dots,p_n$ の確率で起きるとき，その「不確かさ」をあらわす関数である．たとえば，事象 A_1 が確率 0.99 で，事象 A_2 が確率 0.01 で起こる場合にくらべ，事象 A_1 と事象 A_2 がそれぞれ確率 0.5 で起きる場合の方が「不確かさ」は大きいだろう．実際，エントロピーは $H(0.99,0.1)=0.0560..$, $H(0.5,0.5)=0.6931..$ となる．