担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

演習について

作成日：April 12, 2007　Version：1.0

担当教官： 川平　友規（かわひら　ともき，kawahira@math.nagoya-u.ac.jp, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses.htm）

演習で取り上げるテーマ： 4 年時の卒業研究科目では，日本語や英語のテキストを読んだり、その内容について発表したりと，自発的に数学に取り組まなくてはなりません．この演習は，そのためのウォーミングアップと位置づけられています．具体的には，以下の内容を予定しています：

(1) 英語で書かれた問題を解く.（解答もたまには英語で書いてみる.）

(2) 日本語もしくは英語のテキスト（の一部分）を，行間を埋めながら読む.

(3) あるテーマについて調べて，レポートにまとめる.

(4) （オプション）：あるテーマについて，10-15 分のプレゼンテーションをする.

演習の進め方： ほぼ毎週，問題プリントを配布します．私（川平）が基本事項を確認したあと，問題を指定し，各自ノートに解いてもらいます．その後，私が黒板で解説します．

配布した問題のすべてを演習で扱うとは限りません．扱わなかった問題については，**自分で解こうと試みた上で解答が欲しい場合のみ**，下記のオフィスアワーの時間等に私か TA に聞きに来てください．口頭で解説します．

プレゼンテーションの詳細については，クラスの様子を見ながら決めたいと思います．

単位・成績： 成績に関係のある要素は，**出席回数，レポートおよびプレゼンテーション**です．成績の優・良・可は以下の基準で定めます．

- 出席を 60 点満点，レポートを 40 点満点に点数化．プレゼンテーションに参加することで，最大で 20 点まで加点する．
- 成績は 60 点未満を不可，60 − 74 点を可，75 − 89 点を良，90 点以上を優とする．

出席： 授業の前半に出席を取ります．3 回までの遅刻・欠席は，事前に email 等で私に連絡し，かつやむを得ない事情だと判断される場合のみ，加点します．

レポート： レポート課題は前期中に計 3 回出題されます．提出様式は，**A4 レポート用紙を使用し，必ず表紙をつけ，そこに名前，学籍番号，解いた問題の番号（『問題 x-x』など），提出日を記入**してください．また，**左上をホチキスでとめて**提出してください．提出場所，提出期限についてはそのつど連絡します．**提出期限を過ぎたレポートは受理しません**ので注意してください．また，数人で共同して問題を解くことを奨励します．減点等の不利はありませんが，**必ず共同解答者名を明記し，よく理解した上で自分の言葉に直した解答を提出してください**.

オフィスアワー：　授業に関する質問は授業中もしくは授業の直後，教室で受け付けます．私の公式なオフィスアワー（質問受付時間）は**毎週木曜日 11:30-13:00，場所は Cafe David（理学部１号館２階エレベーター前）**です．私とその他のスタッフも待機しているので，自由に質問してください．木曜日以外の昼休みにも Cafe David は開店しているので，どんどん活用しましょう．有識者への質問は，問題を解決するのにもっとも有効な手段です．自力で解決することにこだわらず，勉強はスマートにこなしましょう．

上記以外の時間に質問したい場合は，必ず事前に email 等で appointment を取るようにしてください．

よく使う記号と英語での表現

(1) $\mathbb{C}$: set of complex numbers
(2) $\mathbb{R}$: set of real numbers
(3) $\mathbb{Q}$: set of rational numbers
(4) $\mathbb{Z}$: set of integers
(5) $\mathbb{N}$: set of natural numbers
(6) $x \in \mathbb{R}$: x is in $\mathbb{R}$, x belongs to $\mathbb{R}$
(7) p/q: p over q
(8) x^2, x^3: x squared, x cubed
(9) x^n: x to the n(th power)
(10) $\sqrt{x}$: square root of x
(11) $x^{1/N}$: nth root of x
(12) $n!$: n factorial
(13) $f(x)$: f of x
(14) a_n: a sub n
(15) $a < b$: a is smaller than b
(16) $a \geq b$: a is greater than or equal to b
(17) $f : X \to Y$: f maps X to Y
(18) $P \implies Q$: If P then Q
(19) $P \iff Q$: P if and only if Q

ギリシャ文字

(1) α: alpha
(2) β: beta
(3) γ, Γ: gamma
(4) δ, Δ: delta
(5) ϵ: epsilon
(6) ζ: zeta
(7) η: eta
(8) θ, Θ: theta
(9) ι: iota
(10) κ: kappa
(11) λ, Λ: lambda
(12) μ: mu
(13) ν: nu
(14) ξ, Ξ: xi
(15) o: omicron
(16) π, Π: pi
(17) ρ: rho
(18) σ, Σ: sigma
(19) τ: tau
(20) υ, Υ: upsilon
(21) ϕ, Φ: phi
(22) χ: chi
(23) ψ, Ψ: psi
(24) ω, Ω: omega

参考文献，ウェブサイト

- 野水克己『数学のための英語案内』サイエンス社
- 百科事典 Wikipedia で “Lebesgue measure” を探す：Google で「wiki Lebesgue measure」と検索してみる．日本語版の解説も見つかるかもしれない．もしくは MathWorld(`http://mathworld.wolfram.com/`) で search してみる．もしくは PlanetMath(`http://planetmath.org`) で find してみる．
- 数学英語の用法チェックには：
  Mathematical English Usage (`http://www.impan.gov.pl/Dictionary/`)
  数学者について調べるなら：
  The MacTutor History of Mathematics(`http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/`)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

英語で数学・基礎のキソ

作成日：April 12, 2007　Version：1.1

今日はいくつか英語の問題とその解答を読んでみましょう.

今後の予定

- 4/20：内容未定（レポート課題有！）
- 4/27：休講，5/4：祝日
- 5/11：授業再開

まずは小・中学生，高校生レベルの問題から

問題 1. John and Tom share a room at home. To paint their room, it will take John alone 8 hours and Tom alone 12 hours. How long does it take if they work together?

Hint: Regard the whole work 1, then in one hour John can do 1/8 and Tom 1/12.

問題 2. Fahrenheit(F) and Celsius (C) temperature readings are related by a linear equation.

(1) Given that $F = 32$ when $C = 0$ and $F = 212$ when $C = 100$, find F as a function of C.

(2) At what temperature does one have $F = C$?

【解答】（問題 2）

(1) By assumption there are constant a, b such that the function F of C is of the form $F = F(C) = aC + b$. From $F(0) = 32$ and $F(100) = 212$, we have

$$b = 32 \quad \text{and} \quad 100a + b = 212,$$

hence $a = \dfrac{180}{100} = \dfrac{9}{5}$. Thus the formula is $F = \dfrac{9}{5}C + 32 = 1.8C + 32$.

(2) We set $F = C$, that is, $\dfrac{9}{5}C + 32 = C$. Solving this, we find $C = -40$. This means that $C = -40$ and $F = -40$ at this temperature.

問題 3. Find the largest term in the sequence $\{x_n\}$ defined by $x_n = \dfrac{1000^n}{n!}$ for $n = 1, 2, \ldots$.

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

大学生レベルの問題

問題 4. Prove that $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ is divergent.

問題 5. 次の文章を読み，下の問に答えよ：

Let $I \subset \mathbb{N}$ be the set of natural numbers that do not contain the digit 9 in their decimal expansions. Let us show that $\sum_{n\in I} \frac{1}{n}$ is convergent.

Let $I_k := I \cap [10^k, 10^{k+1})$, $q_k := \#I_k$, and $S_k := \sum_{n\in I_k} 1/n$. For a fixed $k \geq 1$, each $n \in I_k$ has the decimal representation

$$[n_k n_{k-1} \cdots n_1 n_0]_{10}$$

where $n_i \neq 9$ for $0 \leq i \leq k$ and $n_k \neq 0$. Hence $n \in I_k$ is of the form $n = 10^k n_k + j$ with $1 \leq n_k \leq 8$ and $j \in I_s$ for some $0 \leq s \leq k-1$ $\underline{\text{or else } j = 0}_{(ア)}$. It follows in particular that $q_k = 8(q_0 + q_1 + \cdots + q_{k-1}) + 8$, which implies by an induction that $\underline{q_k = 8 \cdot 9^k}_{(イ)}$. Thus

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^{8} \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j\in I_s} \frac{1}{10^k i + j} + \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{10^k i} \\ &\leq_{(ウ)} 8 \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j\in I_s} \frac{1}{10^k} + \frac{8}{10^k} \\ &=_{(エ)} 10^{-k} \left(8 \sum_{s=0}^{k-1} q_s + 8 \right) \\ &= 10^{-k} q_k < 8 \cdot (0.9)^k. \end{aligned}$$

This implies

$$\sum_{n\in I} \frac{1}{n} = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k \leq S_0 + 8 \sum_{k=1}^{\infty} (0.9)^k = S_0 + 72 < 75.$$

□

(1) 下線部（ア）に対応する n の例をあげよ．

(2) 下線部（イ），不等号（ウ），等号 (エ) をそれぞれ確認せよ．

(3) 最後の式を確認せよ．

(4) （発展）I の代わりに「10 進展開したときどの桁も 2 でない自然数」全体 J を用いた場合，和 $\sum_{n\in J} 1/n$ はどうなるか？

(5) （さらに発展）I の条件を適当に緩めて集合 $I \subset I' \subset \mathbb{N}$ を考え，$\sum_{n\in I'} 1/n = \infty$ としたい．どのくらいまで条件を緩められるだろうか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

Möbius 変換群と双曲幾何

作成日：April 20, 2007　Version：1.1

今回は群の例として行列や Möbius 変換のなす群を扱います．双曲幾何と呼ばれる非ユークリッド幾何の世界も少し見てみましょう．レポート課題が別プリントにあるので，皆で協力して解いて来ましょう．

今後の予定

- 4/27：休講，5/4：祝日
- 5/11:授業再開（ゼータ関数をやる予定），レポート締切

特殊線形群

Let G be a set with a binary operation (= a map from $G \times G$ to G) $(g, h) \mapsto g * h$. The pair $(G, *)$ is called a *group* if G and $*$ satisfy the following conditions:

(G1) Associativity: $\forall\, g, h, k \in G, \quad (g * h) * k \;=\; g * (h * k)$.

(G2) Indentity element: $\exists\, e \in G$ s.t. $\forall\, g \in G, \quad e * g \;=\; g * e \;=\; g$.

(G3) Inverse element: $\forall\, g \in G,\ \exists\, h =: g^{-1} \in G$ s.t. $g * h \;=\; h * g \;=\; e$.

A group $(G, *)$ is often denoted just by G.

問題 1. (Special linear group) The *special linear group*（特殊線形群） is

$$SL(2, \mathbb{C}) \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;:\; a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

Show that $SL(2, \mathbb{C})$ satisfies (G1)-(G3) above if the group operation $*$ is given by the product of matrices.

A subset H of G is called a *subgroup* of $(G, *)$ if $(H, *)$ is again a group.

問題 2. (Special linear group over reals) Set

$$SL(2, \mathbb{R}) \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;:\; a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

Show that $SL(2, \mathbb{R})$ is a subgroup of $SL(2, \mathbb{C})$.

Riemann 球面と Möbius 変換群

Let $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ be the Riemann sphere. A *Möbius transformation* $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ is a map of the form

$$T(z) \;=\; \frac{az + b}{cz + d}$$

where $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ with $ad - bc \neq 0$.

問題 3. Show that any Möbius transformation T is bijective. (We use the following rules: $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$, $\infty + a = a + \infty = \infty$ for any $a \in \mathbb{C}$.)

問題 4. Let $\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$ be the set of Möbius transformations. Show that $\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$ is a group by regarding the composition $(T, S) \mapsto T \circ S$ as the group operator.

じつは $T \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$ に対し，次の性質が知られている．

- T は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円に写す全単射．
- T は角度と向きを保つ．
- T は ∞ とその逆像を除く点で複素微分可能である．

また，$\hat{\mathbb{C}}$ 上の任意の 3 点を任意の 3 点に写すような T が存在する．

問題 5. (Group homomorphism，群準同型) For $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, set $T_A(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$. Check the following relations:

(1) $\forall A, B \in SL(2, \mathbb{C}),\quad T_A \circ T_B \;=\; T_{AB}.$

(2) $\forall A \in SL(2, \mathbb{C}),\quad T_A^{-1} \;=\; T_{A^{-1}}.$

問題 6. (Kernel) Check that for any $S \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$, there exists an $A \in SL(2, \mathbb{C})$ with $S(z) = T_A(z) = T_{-A}$. Then find $A \in SL(2, \mathbb{C})$ with $T_A(z) = z$.

上半平面と単位円板

$\mathbb{C}$ 上の**単位円板** (unit disk) を $\mathbb{D}$ で表し，**上半平面** (upper half space) を次で定義する：

$$\mathbb{H} \;:=\; \{z = x + yi \in \mathbb{C} \,:\, y > 0\}$$

問題 7. 任意の $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ に対し，$T_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ となることを示せ．また，$\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H}) := \{T_A \,:\, A \in SL(2, \mathbb{R})\}$ とおくと，$\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H})$ は $\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$ の部分群となることを示せ．

問題 8. $w = S(z) := \dfrac{z-i}{z+i}$ と置くと，$S(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$ となることを示せ．また，

$$\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D}) := \left\{S \circ T_A \circ S^{-1} \,:\, A \in SL(2, \mathbb{R})\right\}$$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

とおくと，$\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ は $\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$ の部分群となることを示せ．

問題 9. 任意の $T \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ は

$$T(w) \;=\; e^{i\theta}\frac{w+a}{1+\bar{a}w} \quad (\theta \in \mathbb{R},\quad a \in \mathbb{D})$$

の形で書けることを証明せよ．また，

$$T(z) \;=\; \frac{aw+b}{\bar{b}w+\bar{a}} \quad (a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1)$$

とも書けることを示せ．

参考. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ で $a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1$ を満たすものの全体を $SU(1,1)$ と表し，**特殊 Lorentz 群**と呼ぶ．これも $SL(2, \mathbb{C})$ の部分群となるので確かめてみよう．

2 次元双曲空間

問題 10. (上半平面における双曲的長さの等長性) $\mathbb{H}$ 上の区分的に滑らかな曲線 γ に対し，その**双曲的長さ** (hyperbolic length) を

$$\mathrm{length}_{\mathbb{H}}\gamma \;:=\; \int_{\gamma}\frac{|dz|}{\mathrm{Im}\, z}$$

で定義する．このとき，任意の $T \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H})$ に対し

$$\mathrm{length}_{\mathbb{H}}T(\gamma) \;=\; \mathrm{length}_{\mathbb{H}}\gamma$$

となることを示せ．

問題 11. $\mathbb{D}$ 上の区分的に滑らかな曲線 γ' に対し，その**双曲的長さ**を

$$\mathrm{length}_{\mathbb{D}}\gamma' \;:=\; \int_{\gamma'}\frac{|dw|}{1-|w|^2}$$

で定義する．$\mathbb{H}$ 上の区分的に滑らかな曲線 γ と $w = S(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ に対し

$$\mathrm{length}_{\mathbb{D}}S(\gamma) \;=\; \mathrm{length}_{\mathbb{H}}\gamma$$

となることを示せ．

問題 12. (単位円板における双曲的長さの等長性) 上の 2 題の結果を用いて，任意の $T \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ と 任意の区分的に滑らかな曲線 $\gamma \subset \mathbb{D}$ に対し，

$$\mathrm{length}_{\mathbb{D}}T(\gamma) \;=\; \mathrm{length}_{\mathbb{D}}\gamma$$

となることを示せ．

双曲最短線． 単位円板 $\mathbb{D}$ 上の 2 点 α, β を結ぶ双曲的長さに関する最短曲線は，α, β を通り単位円に直交する円の，α, β を結ぶ円弧である．

問題 13. 枠内の命題を証明しよう．まず，任意に α, β を結ぶ曲線 γ をとる．このとき，単位円板における双曲的長さは $T \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ で写しても変化しない．従って，例えば

$$T(w) = \frac{w-\alpha}{1-\bar{\alpha}w}$$

で写したものを考えれば，$\alpha = 0$ と仮定してよい．

(1) さらに $0 \le \beta < 1$ と仮定しても良いことを示せ．

(2) w の微小変化 $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$ に対し，$|\Delta z| \ge |\Delta u|$ を示せ．

(3) $w = u + vi \in \mathbb{D}$ に対し，$1 - |z|^2 \le 1 - |u|^2$ を示せ．

(4) 0 と $\beta \in (0,1)$ を結ぶ任意の区分的に滑らかな曲線 γ に対し，

$$\int_\gamma \frac{|dw|}{1-|w|^2} \ge \int_0^\beta \frac{|du|}{1-|u|^2} = \log\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

を示せ．また，等号が成り立つのはいつか？

(5) $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ の元は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円に写すこと，角度を保つことを踏まえて，命題を結論付けよ．

$z, w \in \mathbb{D}$ の**双曲的距離** (hyperbolic distance) を

$$d_{\mathbb{D}}(z,w) = \log\frac{1+\frac{z-w}{1-\bar{z}w}}{1-\frac{z-w}{1-\bar{z}w}}$$

で定める．このとき，距離空間 $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}})$ を**双曲平面** (hyperbolic plane) とよぶ．双曲平面は，球面と並んで非ユークリッド幾何学の舞台のとなることが知られている重要な集合である．また，Riemann 面（1 次元複素多様体）のほとんどは双曲平面を材料に切り貼りすることで得られる．双曲空間は豊饒な幾何学的世界なのである．

問題 14. (発展) 実際に上の $d_{\mathbb{D}}$ が $\mathbb{D}$ 上の距離となることを確かめよ．

問題 15. (発展) $\mathbb{H}$ 上の 2 点間を結ぶ双曲的最短線はどんな曲線となるか？また，2 点間の双曲的距離の公式を与えてみよ．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

素数と Riemann ゼータ関数

作成日：May 10, 2007　Version：1.2

数学でもっとも注目されている関数の１つに，Riemann のゼータ関数というものがあります．皆さんもせっかく大学で数学を専攻されているわけですし，これが一体どんな関数なのか知っておいて損はしないと思います．

今後の予定

- 5/18：Fourier 解析??
- 5/25：Lie 群と Lie 環??（レポート課題有！）

素数

Euclid's Theorem. There exist infinitely many prime numbers.

問題 1. Prove it by contradiction.

定理１． There exist infinitely many primes of the form $p = 4k - 1$ $(k \in \mathbb{N})$.

問題 2. 定理１を証明してみよう．

(1) 2 以外の素数 p は $4k+1$ もしくは $4k-1$ の形 $(k \in \mathbb{N})$ に書けることを示せ．

(2) $4k-1$ の形の素数が有限個しかないと仮定する．それらを $p_1 = 3, p_2 = 7, \ldots, p_r$ とおくと，

$$N = 4p_1p_2\cdots p_r - 1$$

は $4k-1$ の形の素因数を持つことを示せ．

(3) (2) は矛盾である．なぜか？

発展． 上と同様の方法で，$6k-1$ の形の素数が無限個存在することを示せ．

Riemann のゼータ関数

次は A.Ivić "The Riemann Zeta-Function: Theory and Application"，本文１ページ目からの文章である（一部改変）：

The Riemann zeta-function $\zeta(s)$ is defined as

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\mathrm{Re}\, s > 1), \tag{1.1}$$

and the series (1.1) converges absolutely and uniformly in the half plane $\mathrm{Re}\, s \geq 1 + \epsilon$, since $|n^{-s}| \geq n^{-1-\epsilon}$ and $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\epsilon}$ converges. Here, n^{-s} for complex s is defined as $e^{-s\log n}$, where $\log n$ is the natural logarithm of n. The zeta-function seems to have been studied first by L.Euler (1707-1783), who considered only real values of s. The present notation and the notation $\zeta(s)$ as a function of the complex variable s are due to B.Riemann (1826-1866), who made a number of startling discoveries about $\zeta(s)$. Riemann wrote

$s = \sigma + it$ (σ, t real) for the complex variable s, and this tradition still persists, although some authors prefer the more logical$_{(ア)}$ notation $s = \sigma + i\tau$. Uniform convergence for $\sigma = \operatorname{Re} s \geq 1 + \epsilon$ of the series in (1.1) implies by a well-known theorem of Weierstrass$_{(イ)}$ that $\zeta(s)$ is regular for $\sigma > 1$, and its derivatives in this region may be obtained by termwise differentiation of the series in (1.1).

Historically, the zeta-function arose from the need for an analytic tool capable of dealing with problems involving prime numbers. It was observed already by Euler that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \tag{1.2}$$

for real $s > 1$, where the product is taken over all primes. The identity (1.2) plays a fundamental role in the analytic theory of primes and it in fact holds for $\operatorname{Re} s > 1$.

注. converges absolutely：絶対収束する，startling： 驚くべき，regular: 正則，， termwise: 項別の

問題 3. 上の文章を読んで，以下の問いに答えよ．

(1) $s = \sigma + it$ とする．$\sigma = 1 + \epsilon > 1$ のとき，本文に従って (1.1) が収束することを示せ．

(2) 下線部 (ア) について，何が，どう “more logical” なのか，説明せよ．

(3) 下線部 (イ) は Weierstrass のどのような定理を指すのか説明せよ．

オイラー積

上の (1.2) 右辺の形の積を**オイラー積** (Euler product) と呼ぶ．$\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ のとき，この等式を証明してみよう．証明の方針は，

- $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ のとき，右辺のオイラー積が収束することを示す．
- その収束した値が，$\zeta(s)$ の収束する値（存在は上の問題 3(1) で示した）と一致することを示す．

問題 4. 数列 a_n $(n \in \mathbb{N})$ に対し，無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することの定義を述べよ．

無限積については，次の事実が知られている：

> 複素数列 b_n $(n \in \mathbb{N})$ に対し，
>
> - $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ が収束すれば無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |b_n|)$ は収束する．さらに，
> - 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |b_n|)$ が収束すれば，無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ も収束する．

証明は，杉浦光夫『解析入門 I』の V 章 6 節などを参照せよ．

問題 5.

(1) $\sigma = \mathrm{Re}\, s > 1$ のとき，$(1-p^{-s})^{-1} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} p^{-js}$ を示せ．

(2) $\sum_{p:\text{素数}} \sum_{j=1}^{\infty} p^{-js}$ は絶対収束することを示せ．(Hint：これは $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ の部分和．)

(3) $\sigma = \mathrm{Re}\, s > 1$ のとき，Euler 積は収束することを示せ．

問題 6. 素数を小さい順に $2 = p_1 < 3 = p_2 < \cdots$ と表すことにする．$\sigma = \mathrm{Re}\, s > 1$ のとき，

(1) m が素因数に 2 と 3 しか現れない自然数全体をわたるとき，

$$\sum_m \frac{1}{m^s} = (1-2^{-s})^{-1}(1-3^{-s})^{-1}$$

を示せ．

(2) 素因数に $p_1, \cdots, p_N$ しか現れない自然数全体を X_N とする．このとき，p_N 以下の自然数は全て X_N に含まれることを示せ．

(3) $N \to \infty$ のとき

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \prod_{k=1}^{N} \left(1 - p_k^{-\sigma}\right)^{-1} \right| \le \sum_{n \ge p_N} \frac{1}{n^\sigma} \to 0$$

を示せ．

まめちしき． Euler は次のような Euclid's Theorem の別証明を与えている：

(1) 素数が有限個 $p_1, \cdots, p_r$ しかないと仮定せよ．このときも，$s > 1$ ならば (1.2) は成立している．

(2) $s \searrow 1$ とすると，(1.2) において右辺の Euler 積は収束するが左辺の $\zeta(s)$ は発散する．これは矛盾である． □

さらに Euler は，$\sum 1/p$ (p：素数) は発散することを主張した．これを Euler は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = \log\log(\infty)$$

と書き表したというが，この右辺は明解な意味を持たない．しかし，主張自体は正しい：$s > 1$ のとき，$\log \prod (1-p^{-s})^{-1} = \sum (p^{-s} + p^{-2s}/2 + p^{-3s}/3 + \cdots)$ となるが，$\sum (p^{-2s}/2 + p^{-3s}/3 + \cdots)$ の部分は $s \searrow 1$ としても収束することわかる．(1.2) より $\log \prod (1-p^{-s})^{-1} = \log \sum n^{-s} \to \infty$ だから，$\sum p^{-1} \ge \sum p^{-s} \to \infty$ となる．

ゼータ関数の積分表示と Riemann 予想

まず，$|z| < 1$ で定義された関数

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \cdots$$

を考えてみよう．この関数は定義域で

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z} \tag{1.3}$$

という表現をもつが，関数 $f(z) = 1/(1-z)$ 自体は複素平面全体で定義可能（ただし $z = 1$ で 1 位の極を持つ）である．逆に言えば，上の級数は関数 $f(z) = 1/(1-z)$ の $|z| < 1$ における「local な表現」に過ぎない．

同様に，$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}\, s > 1$ において

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

として定義されたが，実は次の積分で表されるような関数の「local な表現」である：

$$\zeta(s) = \frac{1}{(e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \tag{1.4}$$

ただし，C は (i) 実軸上を無限大から負の方向へある $\delta < 2\pi$ まで進み，(ii) さらに 円 $|z| = \delta$ を左回りに一周して，(iii) 再び δ から無限大へと実軸上を正の方向へ進むものとする．その際，z^{s-1} は $e^{(s-1)\log z}$ と解釈し，(i) では $\log z = \log |z|$，(iii) では $\log z = \log |z| + 2\pi i$ として計算する．また，関数 $\Gamma(s)$ は**ガンマ関数**であり，

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

と定義されるのであった．式 (1.4) で表される関数 $\zeta(s)$ もやはり Riemann のゼータ関数と呼ばれ，複素平面全体で定義可能（やはり $z = 1$ でのみ 1 位の極を持つ）となる．

次の **Riemann 予想**は，Clay Institute の掲げるミレニアム問題として 100 万ドル（≈ 1 億 2 千万円）の懸賞金が賭けられている：

> **Riemann 予想**　$\zeta(s) = 0$ であれば，s は負の偶数か，$\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ であろう．

見た目からは全く見当がつかないが，この予想が解けると素数の分布に関して深い結果が得られる．たとえば：

- x 以下の素数の数を $\pi(x)$ と表すと，関数
$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x}(1 + o(1)) \quad (x \to \infty)$$
に対し $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{1/2} \log x)$ が成り立つ．
- これより，$p_{n+1} - p_n = O(p_n^{1/2} \log p_n)$ が導かれる．現状では $p_{n+1} - p_n = O(p_n^{0.525..})$ が知られている．

問題 7. $\sigma = \mathrm{Re}\, s > 1$ のとき，式 (1.4) を示せ．

参考文献.

- A.Ivić. *The Riemann Zeta Function: Theory and Applicatioin*, Dover Publ. Inc., 1985
- H.M.Edwards. *Riemann's Zeta Function*, Dover Publ. Inc.,1974.
- 松本耕二.『リーマンのゼータ関数』, 朝倉書店，2006.
- 鹿野健・編.『リーマン予想』, 日本評論社，1991.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

内積と Fourier 級数

作成日：May 17, 2007　Version：1.2

与えられた関数を三角関数で展開する—Fourier 級数は熱方程式の解を与え，関数概念の確立を促し，積分の厳密な定義への強い動機となった．Cantor の集合論も，Fourier 級数の不連続点の研究がきっかけであったとされる．今回は Fourier 級数を，関数解析的な視点から眺めてみよう．基本はあくまで，微積・線形である．

今後の予定

- 5/25：Lie 群と Lie 環??（レポート課題有！）
- 6/1：プレゼンテーションに向けて??

ウォーミングアップ

問題 1. $\mathbb{R}^n$ の直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ を 1 つ定める．このとき，任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，この基底に関する座標表示

$$\boldsymbol{a} \;=\; a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$$

の係数 $a_1, \dots, a_n$ は

$$a_i \;=\; \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i\rangle_n}{\|\boldsymbol{u}_i\|^2} \;=\; \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i\rangle_n}{\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i\rangle_n} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

により与えられることを示せ．ここで，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i\rangle_n$ は通常のベクトル間の内積である．[1]

問題 2. 区間 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ 上で定義された実数値連続関数全体を $C(I)$ で表す．このとき，$C(I)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となることを確かめよ．

ベクトル空間 $C(I)$ の元 $\boldsymbol{f} = f(x)$, $\boldsymbol{g} = g(x)$ に対し，その**内積** (inner product) を

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle \;:=\; \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

により定める．特に，$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle = 0$ となるとき，関数 $\boldsymbol{f} = f(x)$ と $\boldsymbol{g} = g(x)$ は**直交する** (orthogonal) という．また，$\boldsymbol{f}$ の**ノルム** (norm) $\|f\|$ を $\|\boldsymbol{f}\|^2 = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}\rangle$ により定める．

問題 3. ここでは，$I := [0, 1]$ とする．自然数 n に対し，写像 $\pi_n : C(I) \to \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{f} = f(x) \in C(I)$ に対し，

$$\pi_n : \boldsymbol{f} = f(x) \;\longmapsto\; (f(0), f(1/n), f(2/n), \cdots, f((n-1)/n))$$

により定める．

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{\langle \pi_n(\boldsymbol{f}), \pi_n(\boldsymbol{g})\rangle_n}{n}$$

が成り立つことを示せ．

[1] $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ が正規直交基底の場合はより簡単に，$a_i = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i\rangle_n$ となる．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

直交基底と Fourier 多項式

以下では $I := [-\pi, \pi]$ とする．また，自然数 $n,\ m$ に対し，**Kronecker のデルタ** δ_{mn} を $m = n$ のとき $\delta_{mn} = 1$，$m \neq n$ のとき $\delta_{mn} = 0$ として定める．

問題 4. $C(I)$ のベクトルの列を $\boldsymbol{u}_n := \cos nx$ $(n \geq 0)$, $\boldsymbol{v}_n := \sin nx$ $(n \geq 1)$ により定める．このとき，$C(I)$ の内積について，$n, m \geq 1$ のとき

$$\langle \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_n \rangle \;=\; \langle \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_n \rangle \;=\; \pi\delta_{mn}$$

および $n \geq 0$，$m \geq 1$ のとき

$$\langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_m \rangle \;=\; 0 \qquad \langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0 \rangle \;=\; 2\pi$$

を示せ.（このような $\{\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を**直交関数系**とよぶ.）

問題 5. 自然数 $n \in \mathbb{N}$ を固定する．このとき，与えられた連続関数 $\boldsymbol{f} = f(x) \in C(I)$ を

$$f_n(x) \;=\; A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \;=\; A_0\boldsymbol{u}_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k\boldsymbol{u}_k + B_k\boldsymbol{v}_k) \;=\; \boldsymbol{f}_n$$

という形の関数（**Fourier 多項式**）で近似することを考えよう．特に，平均 2 乗誤差

$$\epsilon_n \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - f_n(x)\}^2\, dx \;=\; \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_n\|^2$$

が最小になるように係数 A_0, A_k, B_k を定めたい．

(1) 直交関数系 $\{\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の性質を用いて，次の式を示せ：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f_n(x)\}^2\, dx \;=\; 2\pi A_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (A_k^2 + B_k^2) \;=\; \|\boldsymbol{f}_n\|^2$$

(2) 定数 a_0，a_k ,b_k　$(k = 1, \ldots, n)$ を

$$\begin{aligned}
a_0 &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1\, dx \;=\; \frac{2\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_0 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_0\|^2} \\
a_k &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx \;=\; \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_k \rangle}{\|\boldsymbol{u}_k\|^2} \\
b_k &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx \;=\; \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_k \rangle}{\|\boldsymbol{v}_k\|^2}
\end{aligned}$$

と定める．このとき，次の式を示せ：

$$2\int_{-\pi}^{\pi} f(x) f_n(x)\, dx \;=\; 2\pi A_0 a_0 + 2\pi \sum_{k=1}^{n} (A_k a_k + B_k b_k) \;=\; 2\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_n \rangle.$$

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(3) (1)，(2) で得られた式を ϵ_n に代入し，次の式を示せ：

$$\begin{aligned}\epsilon_n &= \int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx + 2\pi\left(A_0 - \frac{1}{2}a_0\right)^2 \\ &\quad + \pi\sum_{k=1}^{n}\left\{(A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2\right\} - \pi\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right\}.\end{aligned}$$

(4) ϵ_n が最小となるように係数 A_0, A_k, B_k を定めよ．特に，

$$f_n(x) = \boldsymbol{f}_n = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_0\rangle}{\|\boldsymbol{u}_0\|^2}\boldsymbol{u}_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_k\rangle}{\|\boldsymbol{u}_k\|^2}\boldsymbol{u}_k + \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_k\rangle}{\|\boldsymbol{v}_k\|^2}\boldsymbol{v}_k\right\}$$

となることを確かめよ．また．この結果を**問題 1** と比較せよ．

上で得られる Fourier 多項式で $n \to \infty$ とした級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx + b_n\sin nx\} = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_0\rangle}{\|\boldsymbol{u}_0\|^2}\boldsymbol{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_n\rangle}{\|\boldsymbol{u}_n\|^2}\boldsymbol{u}_n + \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_n\rangle}{\|\boldsymbol{v}_n\|^2}\boldsymbol{v}_n\right\}$$

を $f(x)$ の **Fourier 級数** (Fourier series) と呼び，次のように表す：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx + b_n\sin nx\} \tag{1.1}$$

問題 6. (Bessel の不等式)

(1) $\epsilon_n \geq 0$ であることから，不等式

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$$

を示せ．[2]

(2) この不等式を用いて，区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された任意の連続関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx = 0$$

を示せ．

Fourier 級数が収束する例

式 (1.1) の右辺は形式的なものであり，収束性はとりあえず考えない．しかし，内積を用いた表示を見ると,「直交関数系を基底とする座標表示を与えるのが Fourier 級数だ」，と言いたくなる．これを正当化するには，式 (1.1) の右辺がいつ収束し，等号となるのか，という問題を考えなくてはならない．詳しくは関数解析で **Hilbert 空間**として学習するが，ここではひとつだけ，収束する具体例を見ておこう．

[2] 実は等号が成り立つことが知られており，**パーセバルの等式** (Parseval's equality) と呼ばれている．

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

定理. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は次の性質を満たすとする：

- 周期 2π の関数である．すなわち，$f(x)=f(x+2\pi)$.
- 区間 $-\pi<x<\pi$ では $f'(x)$ が存在し，連続.
- 極限 $f(-\pi+0):=\lim_{x\to-\pi+0}f(x)$ および $f(\pi-0):=\lim_{x\to\pi-0}f(x)$ が存在する.

このとき，連続点 $x\neq(2n+1)\pi\ (n\in\mathbb{Z})$ において

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx+b_n\sin nx\}$$

であり，不連続点 $x=(2n+1)\pi\ (n\in\mathbb{Z})$ においては

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx+b_n\sin nx\}$$

が成り立つ.（左右からの極限値の平均！）

問題 7. $f(x)=x\ (-\pi\le x<\pi)$，$f(x)=f(x+2\pi)$ で定義される関数 $f(x)$ の Fourier 級数展開を求めよう.

(1) $f(x)$ は奇関数であることを用いて，$a_n=0\ \ (n\ge 0)$ を示せ.

(2) $b_n\ \ (n\ge1)$ を求めよ．また，上の定理より，x を連続点として次の式を確かめよ

$$f(x) = 2\left\{\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}+\cdots\right\}$$

(3) この級数の不連続点での値はどうなっているか？

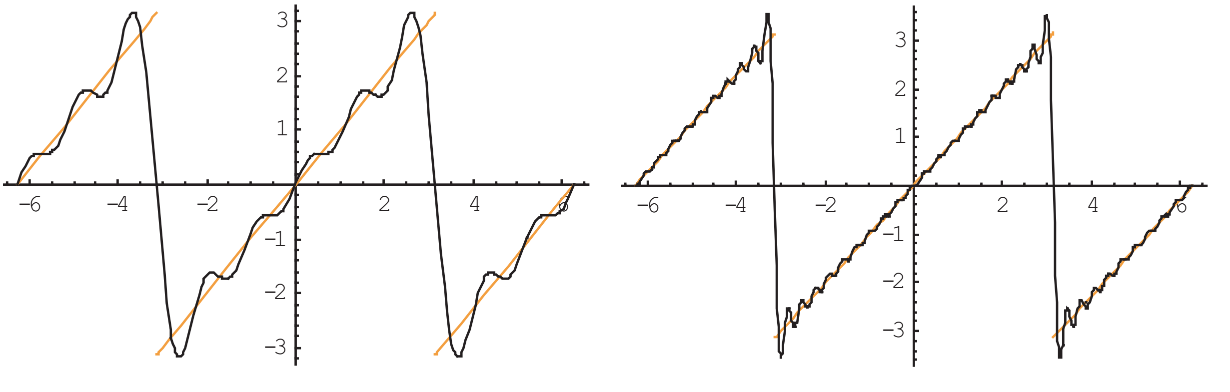


図 1: 問題 7 の $f(x)$ に対する $n=5$ のときと $n=20$ のときの Fourier 多項式.

参考文献.

- T.W. ケルナー.『 フーリエ解析大全（上・下)』(高橋陽一郎・訳），朝倉書店，1996.
- 垣田高夫.『フーリエ解析と超関数』，日本評論社，1994.
- 高木貞治.『解析概論（改訂第 3 版)』，岩波書店，1983.

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

線形 Lie 群とその Lie 環

作成日：May 24, 2007 Version：1.2

正多角形のもつ対称性が 2 面体群で表されるように，円や球面のもつ対称性は連続性をもった行列達のなす群で表される．行列全体を高次元ベクトル空間と思うことで，解析学的・幾何学的対象とみるのが線形 Lie 群論である．

今後の予定

- 6/1：プレゼンテーションに向けて（tentative）
- 6/8：名大祭のため休講
- 6/15：プレゼンしてみよう（tentative）

行列の指数関数

以下の文は B.C.Hall “Lie groups, Lie algebras, and representations” の Section 2.1 からの抜粋（一部改編）である：

Let X be an $n \times n$ real or complex matrix. We wish to define the exponential of X, denoted e^X or $\exp X$, by the usual power series

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}. \tag{1.1}$$

We will follow the convention of using letters such as X and Y for the variables in the matrix exponential.

Proposition 1. *For any $n \times n$ real or complex matrix, the series (1.1) converges. The matrix exponential e^X is a continuous function of X.*$_{(ア)}$

Before proving this, let us review some elementary analysis. Recall that the norm of a vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{C}^n$ is defined to be

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}.$$

We now define the norm of a matrix by thinking of the space $M_n(\mathbb{C})$ of all $n \times n$ matrices as $\mathbb{C}^{n^2}$. This means that we define

$$\|X\| = \left(\sum_{k,l=1}^{n} |X_{kl}|^2 \right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

This norm satisfies the inequalities

$$\|X+Y\| \le \|X\| + \|Y\|, \tag{1.3}$$
$$\|XY\| \le \|X\|\|Y\| \tag{1.4}$$

for all $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$. The first inequality is the triangle inequality and is a standard result from elementary analysis. The second of these inequalities follows from the Schwarz inequality. If X_m is a sequence of matrices, then it is easy to see that X_m converges to a matrix X [1]if and only if $\|X_m - X\| \to 0$ as $m \to \infty$.

問題 1. 上の文章を読んで，以下の問いに答えよ．

[1] X_m の成分がそれぞれ X のものに収束すること

担当教員：川平 友規　研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

(1) 本文に従い，(1.3)，(1.4) を証明せよ．

(2) 行列の列 $X_m \in M_n(\mathbb{C})$ が **Cauchy 列**であるとは，$\|X_m - X_l\| \to 0\ (m, l \to 0)$ のときをいう．このとき，ある行列 $X \in M_n(\mathbb{C})$ が存在して $X_m \to X\ (m \to \infty)$ となることを示せ．

(3) 行列の級数 $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} X_m = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots$ に対し，$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \|X_m\|$ が収束するときこの級数は**絶対収束する**という．$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} X_m$ が絶対収束すれば，ある $X \in M_n(\mathbb{C})$ が存在して $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} X_m = X$ となることを示せ．

(4) Proposition 1 の下線部（ア）以外の部分を証明せよ．

(5) 下線部（ア）の部分について，まずその意味を厳密に定義せよ．その上で，下線部（ア）を証明せよ．

問題 2.（いろんなノルム） $X = \{X_{kl}\} \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，

$$\|X\| := \sup_{|\boldsymbol{v}|=1,\ \boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n} |X\boldsymbol{v}| \quad \text{もしくは} \quad \|X\| := n \max_{1\le k,l\le n} |X_{kl}|$$

と定義しても，(1.3) および (1.4) を満たすことを証明せよ．[2]

指数関数の性質

(E1) 任意の $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ に対し，$e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X}e^{\beta X}$.

(E2) $XY = YX \implies e^{X+Y} = e^X e^Y$.

(E3) $\displaystyle\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^{tX}$．特に $\displaystyle\left.\frac{d}{dt}e^{tX}\right|_{t=0} = X$

(E4) $\det e^X = e^{\operatorname{tr} X}$.

問題 3. 参考書を見ながら，上の (E1), (E2), (E3), (E4) をそれぞれ証明せよ．また，これらを用いて e^X は正則行列であり，$(e^X)^{-1} = e^{-X}$ となることを示せ．

線形 Lie 群

一般線形群 $GL(n,\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ とその部分群について調べよう．念のため思い出しておくと，

$$GL(n,\mathbb{C}) := \{X \in M_n(\mathbb{C}) : \det X \neq 0\}$$

[2] 特に前者のノルムを**作用素ノルム** (operator norm) と呼び，関数解析の世界では非常に重要な役割を果たす．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. ここでは $n=2$ としよう．$M_2(\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}^4$ を同一視していることを念頭におき，以下を示せ：

(1) $M_2(\mathbb{C})$ から $\mathbb{C}$ への写像 $X \mapsto \det X$ は連続である．

(2) $G = GL(2,\mathbb{C})$ は $M_2(\mathbb{C})$ の開集合だが，閉集合ではない．

(3) $G \times G$ から G への写像 $(X,Y) \mapsto XY$ は連続かつ（偏）微分可能である．

(4) G から G への写像 $X \mapsto X^{-1}$ は連続かつ（偏）微分可能である．

一般線形群 $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群 G で $GL(n,\mathbb{C})$ の相対位相に関して閉じているとき（すなわち $X_m \in G$，$\lim X_m = X \in GL(n,\mathbb{C}) \implies X \in G$ のとき），G を**線形 Lie 群** (linear Lie group) とよぶ．[a]

[a] 一般に G が位相空間で，問題 4 の (3)(4) が成り立つときこれを Lie 群とよぶ．

問題 5. 以下の $GL(2,\mathbb{C})$ の部分集合が線形 Lie 群であることを示せ．

(1) 実一般線形群 $GL(2,\mathbb{R}) := GL(n,\mathbb{C}) \cap M_2(\mathbb{R})$.

(2) 特殊線形群 $SL(2,\mathbb{C}) := \{X \in GL(n,\mathbb{C}) \,:\, \det X = 1\}$.

(3) （実）直交群 $O(2) := \{X \in GL(n,\mathbb{R}) \,:\, {}^tXX = I\}$ （I は単位行列）

問題 6. $GL(2,\mathbb{R})$ と $O(2)$ は少なくとも 2 つの連結成分を持つことを示せ．(Hint: 行列式は連続関数)

線形 Lie 群の Lie 環

$GL(n,\mathbb{C})$ の部分線形 Lie 群 G に対し，G の **Lie 環** (もしくは **Lie 代数**，Lie algebra) $\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} \ := \ \left\{X \in M_n(\mathbb{C}) \,:\, \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tX} \in G\right\}$$

と定める．

注意． ちなみに $\mathfrak{g}$ はドイツ小文字で g にあたる．ドイツ文字は大文字小文字それぞれ $\mathfrak{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZabcdefghijklmnopqrstuvwxyz}$ である．(書き方は未だによく分からない.)

問題 7. 行列の指数関数の性質を用いて，以下をチェックせよ：

(1) $GL(2,\mathbb{C})$ の Lie 環：$\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) = M_2(\mathbb{C})$.

(2) $GL(2,\mathbb{R})$ の Lie 環：$\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) = M_2(\mathbb{R})$.

(3) $SL(2,\mathbb{C})$ の Lie 環：$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \,:\, \operatorname{tr} X = 0\}$.

(4) $O(2)$ の Lie 環：$\mathfrak{o}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) \,:\, {}^tX = -X\}$.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. 上の 4 つの Lie 環（$\mathfrak{g}$ で表す）はそれぞれ以下を満たすことを示せ：

(1) $\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad \alpha X\in\mathfrak{g}$

(2) $\forall X,Y\in\mathfrak{g},\quad X+Y\in\mathfrak{g}$

(3) $\forall X,Y\in\mathfrak{g},\quad [X,Y]:=XY-YX\in\mathfrak{g}$　　**（交換子積）**

注意． (1), (2) より，$\mathfrak{g}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．また，(3) より，$\mathfrak{g}$ は 交換子積 (commutator) について閉じている．この性質は，任意の線形 Lie 群の Lie 環についても成立することが知られている．

問題 9. 上の交換子積 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}, (X,Y)\mapsto[X,Y]$ について，次の性質をチェックせよ：

(C1) $[X+Y,Z] \;=\; [X,Z]+[Y,Z]$

(C2) $[\alpha X,Y] \;=\; \alpha[X,Y]\quad(\alpha\in\mathbb{C})$

(C3) $[X,Y] \;=\; -[Y,X]$

(C4) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] \;=\; 0$　　**（Jacobi 律）**

注意． 一般に，ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ が (C1)—(C4) を満たす積 $(X,Y)\mapsto[X,Y]$ を持つとき，これを Lie 環と呼ぶ．

Lie 環の意味

実は，**Lie 環 $\mathfrak{g}$ は Lie 群 G の単位元 I の近傍を近似する空間（接空間）だと思える．**例として $G=SL(2,\mathbb{C})$ の場合を直感的に解説しよう．まず $M_2(\mathbb{C})$ 上の関数 $z=\det(a,b,c,d)=\det\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)=ad-bc$ を考えると，G は $z=\det(a,b,c,d)=1$ を満たすベクトル $X=(a,b,c,d)$ の集合である．今，$X=I=(1,0,0,1)$ から $\Delta X:=(\Delta a,\Delta b,\Delta c,\Delta d)$ だけ増加して，かつ $I+\Delta X\in G$ だと仮定しよう．関数 z の全微分を考えると

$$\Delta z \;=\; \frac{\partial z}{\partial a}z\Delta a+\frac{\partial z}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial z}{\partial c}\Delta c+\frac{\partial z}{\partial d}\Delta d \;=\; d\Delta a-c\Delta b-b\Delta c+a\Delta d$$

となるが，このとき，$\Delta z=0$ かつ $(a,b,c,d)=(1,0,0,1)$ でなくてはならないから，$0=\Delta a+\Delta d$ が成立する．すなわち，$\mathrm{tr}\,\Delta X=0 \iff \Delta X\in\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ なのである．ここで ΔX はものすごく小さいベクトルだが，一般に $Y\in\mathfrak{g}$ ならば $t\approx 0$ のとき $tY\in\mathfrak{g}$ かつ $I+tY\approx e^{tY}\in G$ となって辻褄が合っている．これは，ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の原点付近の様子を I まで平行移動させれば，ほぼ G が得られる，ということである．

同様の議論は一般の線形Lie群でも成立する．上の例で，$SL(2,\mathbb{C})$ を定める方程式 $\det(a,b,c,d)=ad-bc=1$ から推察されるように，Lie 群は一般に「曲がった空間」であり，解析が難しい．そこで，Lie 環というベクトル空間で近似し，さらにその「曲がり具合」を交換子積で解析するのである．たとえば $X,Y\in\mathfrak{g}$ かつ $t\approx 0$ ならば

$$G \;\ni\; e^{tX}e^{tY} \;=\; e^{tY}e^{tX}\big(I+t^2[X,Y]+O(t^3)\big)$$

が成り立つことが知られており，「可換性からの 2 次の誤差」がちょうど交換子積 $[X,Y]$ として現れることが分かる．

参考文献. Lie 群，Lie 環（代数）に関する教科書は多い．ここでは比較的コンパクトにまとまっているものをテキトーにあげてみた：

- B.C.Hall “Lie groups, Lie algebras, and representations”, Springer, 2003.
- 小林俊行・大島利雄.『Lie 群と Lie 環 1,2』（岩波講座　現代数学の基礎），岩波書店，1999.
- 杉浦光夫・山内恭彦.『連続群論入門』培風館，1960.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数学におけるプレゼンテーション（基礎編）

作成日：May 31, 2007　Version：1.1

数学におけるプレゼンテーション（要するに発表・講演）について，基本的な技法を紹介します．いくつか具体例を見ながら，良いプレゼンとは何か，考えてみます．今後の参考にしてください．

今後の予定

- 6/8：名大祭のため休講
- 6/15：数学におけるプレゼンテーション（実践編）
- 6/22：同（実践編２もしくは応用編）

ニュートン君の発表

——ケンブリッジ大学のニュートン君は，方程式の近似解法に関する新しい発見をしたので，1670 年，江戸で行われる「国際算術学会」でこの方法を発表することにした．しかし，与えられた講演時間は質疑応答の時間も込みで **15 分**と，非常に短い．ニュートン君は十分に準備して，講演に臨むことにした．

発表では**黒板，OHP，パソコン**を使う３通りが考えられる．しかし，ニュートン君の住む大英帝国には OHP に文字を映し出せるような薄い紙（和紙？）はないし，パソコンでスライドを作るには**プレゼンテーションソフト**や TEX の使い方も覚えないといけない．そこで，今回は黒板で発表することにした．

ニュートン君はとりあえず，**10 分間**でトークを組み立てることにした.（念のために，質疑応答用の５分を確保しておきたいので.）このように短い講演では，行き当たりばったりで講演すると必ず時間が足なくなって，中途半端な講演になってしまう．ニュートン君は，友人の前で何度かリハーサルをすることに決めた．

問題 1. 今から，ニュートン君の最初のリハーサルを演じてみせます．以下の点に注意しながら，改善のポイントを列挙してください：

- 講演のテーマは明解に伝わっているか？
- 言葉の定義は明解か？
- 板書は見やすいか？
- 声は聞き取りやすいか？
- 例は分かりやすいか？
- 明解な結論が出ているか？
- 全体的な話の流れはスムーズか？

また，良い点があれば指摘してください．

——最初のリハーサルで友人に酷評されたニュートン君．はじめはムカッときたが，友人の率直なアドバイスを真摯に受け止めることにした．１週間後，ニュートン君は自分の発表ノートを工夫し，さらに**レジュメ**（handout）まで準備して，リベンジに挑んだ．

問題 2. 今から，ニュートン君の２回目のリハーサルを演じて見せます．最初のリハーサルに比べて，問題１の各項目に注意しながら

(1) 改善された点　　(2) 工夫が見られる点
(3) 悪くなった点　　(4) さらなる改善のポイント

を列挙してください．

——ニュートン君の講演準備はまだまだ続く..

問題解決型の講演

学会講演などでは,「問題とその解決策」という形をとるのが一般的である．とりあえずひとつの雛形として，次のような構成方法を覚えておくとよい．[1]

When giving a problem-solution speech, speakers often organize information according to this four-part structure.

Description of a **situation**	**Situation**
Identification and description of a **problem**	**Problem**
Discussion of one or more **solutions** or **responses** to the problem	**Solution**
Evaluation of the solution(s)	**Evaluation**

In the **situation** section, the speaker provides the necessary background information for understanding the problem and how it has arisen. In the **problem** section, the speaker identifies and discusses the problem. As part of the discussion, the speaker generally explains the reasons for the problem. S/he may also discuss inadequate solution to the problem. Depending one the nature of the problem, speakers may choose to combine the situation and problem sections. In the **solution** or **response** section, the speaker generally highlights one solution and discusses it in detail. In the **evaluation** section, the speaker evaluates the solution by pointing out its strength and weaknesses. The last two sections may overlap, depending on how the speaker organizes information.

Two reasons to use a problem-solution pattern of organization are

(1) When you are preparing your speech, this four-part structure provides you with a simple means of ordering and remembering information.

(2) This familiar patterns of organization helps your audience follow your talk because they will be able to predict how your presentation will develop.

問題 3. ニュートン君の２回目の講演で，それぞれ **Situation, Problem, Solution, Evaluation** に対応する部分を探してみよ．

参考文献. ここでは，インターネット上で見つけたプレゼンテーションに関するページをあげておく．分野は数学に限らないが，どれもよくまとまっていて参考になる．

- 河東泰之、『セミナー発表の準備の仕方について』
  http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/sem.htm
- 松田卓也、『プレゼン道入門』
  http://nova.planet.sci.kobe-u.ac.jp/~matsuda/review/presen.html
- 関山健治、『学会発表マニュアル』、
  http://members.tripod.com/~sekky/presman.html
- 島宗理、『研究発表マニュアル［口頭発表編］』
  http://www.naruto-u.ac.jp/~rcse/s_opre.html
- 龍昌治、『プレゼンテーション技法』
  http://project.aichi-u.ac.jp/class/mytext/hyogen/
- 米田知晃、『プレゼンテーション入門』
  http://www.ee.fukui-nct.ac.jp/~yoneda/text/other/presentation/

[1] S.M.Reinhart 著 “Giving Academic Presentation” の第 5 章，“Giving a Problem-Solution Speech” からの抜粋.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数学におけるプレゼンテーション（実践編１）

作成日：June 15, 2007　Version：1.1

今後の予定

- 6/22：数学におけるプレゼンテーション（実践編２）
- 6/29: 数学におけるプレゼンテーション（実践編３）

今回は具体的に数学の講演を組み立ててみましょう．

問題解決型の講演を構成してみよう

前回のプリント (K207) の後半を参考に，問題解決型の講演（10 分–15 分）を実際に組み立ててみましょう．

問題 1. まず，講演のテーマを選べ．特に，「問題提示とそれへの解答（対応）」という形になじむようにテーマを選ぶこと．たとえば...

> 複素数と四元数，関数の収束概念（各点収束と一様収束），級数の収束と発散，可算無限と非可算無限，$4k-1$ の形の素数が無限個あることの証明，素数定理について，フーリエ級数について，代数学の基本定理，フラクタルについて，etc.

数学に登場する概念や定理は，何かの必要に迫られて定義されたり，何かの目的があって証明されたりするものである．(少なくとも，論文にはこじつけであってもそのような「必要性」や「目的」を書く.) 従って，その概念や定理の歴史を入念に調べれば，数学者の営みの中に必ず「問題→解答」という図式が見えてくる．

次に，講演内容を大まかに 4 つのセクションに分解します．

(1) **Situation:** 背景，状況の説明

(2) **Problem:** そこに生じる問題とその説明

(3) **Solution:** 解決（対応）方法の提示

(4) **Evaluation:** その方法の評価（良い点・悪い点）

問題 2. 自分の選んだ講演テーマに対し，**Situation, Problem, Solution, Evaluation** に対応する部分をそれぞれ構成せよ．(ラフなアイディアを固めればよい．こじつけでもかまわない.)

それでは，具体的な講演内容を考えていきましょう．全体の流れとか起承転結は一旦忘れて，それぞれのセクションで話したい事項を思いつくままにあげてみましょう．その上で，10 分という短い講演時間に収まるように，話す内容を選んでいきます．

問題 3. 講演での板書の原稿を作れ．ただし，板書はしないが口でコメントしたい内容も書き込んでおくこと．また，それぞれが **Situation, Problem, Solution, Evaluation** のどの部分に対応するのか分かるように明記すること．(オーバーラップがあってもよい.)

次に，それが実際に 10 分間程度で話終える長さかどうか，自分でチェックしてみましょう．たとえば，軽くつぶやきながら，ノートを黒板だと思って「1 人リハーサル」してみると良いでしょう．

問題 4. 原稿をもとに，講演が 10 分程度で収まるかチェックせよ．その上で，講演内容を推敲せよ．

レジュメ

海外の講演ではあまり見かけませんが，日本の数学の講演では事前にレジュメ (handout) を配っておいて講演内容を補うことがよくあります．良い点も悪い点もあると思いますが，今回は練習として，A4 用紙 2-3 ページ程度でレジュメの内容も考えてみましょう．

問題 5. 上の講演に対し，A4 用紙 2-3 ページ程度の手書きレジュメを作成せよ．

講演の要項

- いよいよ来週・再来週にわたって，皆さんに発表していただこうかと思っています．今回はくじ引きを行い，講演者とその順番を事前に決めることにします.（アンケートではほとんどの人がくじ引きを支持していました.）人数分の番号をくじで割り振るので，その順番に講演してください．講演を希望しない人はパスすることが出来ます．この場合は，次の順番の人に講演のチャンスが回ってきます．
- 講演した人には一律 10 点を成績にボーナス加点します．クラス全員でそれぞれの講演を無記名評価し，合計点の上位 5 名にはそれぞれ 10 点，8 点，6 点，4 点，2 点をさらにボーナス加点します．
- 一人当たりの持ち時間は質疑応答も込みで 15 分間とします．講演の前に，講演の対象としている相手を宣言してください.（大学１，２年生対象，理系の高校生対象，などなど.）
- 講演をすることになった人で，レジュメを作成し，配布したい場合は事前に私に原稿を提出しておいてください.（締切は 6 月 21 日木曜の Cafe David までとします．ただし，29 日に講演することになった人は，28 日木曜の Cafe David まででかまいません.）もし，OHP や自前でパソコンを使いたい人も事前にメール等で申し出てください．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

数学におけるプレゼンテーション（実践編２，３）

作成日：June 21, 2007　Version：1.1

評価項目

各講演に対し，以下の８項目を

良い：３　　まあまあ：２　　いまいち：１　　悪い：０

の４段階で評価し，点数を記入してください．(講演者本人は自己評価を記入.)

(1) テーマの面白さ・明解さ
(2) 結論の面白さ・明解さ
(3) 板書・図・レジュメ
(4) 声・ジェスチャー・視線
(5) 背景（Situation）部分
(6) 問題（Problem）部分
(7) 解答・対応（Solution）部分
(8) 評価（Evaluation）部分

番号	講演者	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	合計

コメント（良かった点，改善すべき点，感想など）：

番号	講演者	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	合計

コメント（良かった点，改善すべき点，感想など）：

番号	講演者	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	合計

コメント（良かった点，改善すべき点，感想など）：

番号	講演者	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	合計

コメント（良かった点，改善すべき点，感想など）：

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

Jordan 曲線と非整数値次元

作成日：July 5, 2007 Version：1.2

今日は集合の「複雑さ」を定量的に捕らえる方法を紹介します.

今後の予定

- 7/13：ゲーム理論
- 7/20：保険（もしくはファイナンス）数理，レポート締切

面積正の Jordan 曲線

閉区間 $I = [0,1]$ の $\mathbb{R}^n$ の中への単射連続写像による像を **Jordan 曲線** と呼ぶ.

問題 1. 集合 $X \in \mathbb{R}^2$ は以下のように生成される図形である：

- 1 辺が 1 の閉正方形 S_0 から幅 ϵ （ただし，$0 < \epsilon < 1/8$）の十字路を削り，それぞれ閉正方形からなる 4 つの区域を得る．これら全体を S_1 とする.
- S_1 の 4 つの区域それぞれから幅 ϵ^2 の十字路を削ったものを S_2 とする.
- 同様に，S_n の 4^n 個の区域それぞれから幅 ϵ^{n+1} の十字路を削ったものを S_{n+1} とする.
- $X := \bigcap_{n \geq 0} S_n$ とする.

このとき，次を示せ：

(1) X は面積（2 次元 Lebesgue 測度）正である.

(2) X はコンパクト集合である.

(3) X は内点をもたない.

(4) X は孤立点をもたない.

さらに X を用いて，面積正の Jordan 曲線を構成せよ.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

Koch 曲線

Koch（コッホ）曲線とは，下図のように K_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を生成したときの極限として得られる図形 K である．

問題 2. (report) Koch 曲線は Jordan 曲線であることを示せ．

問題 3. Koch 曲線 K を近似する折れ線 K_n について，K_n の長さは発散することを示せ．

問題 4. 平面上に Jordan 曲線 J が与えられたとき，その曲線の長さ $\mathrm{length}(J)$ を定義せよ．その上で，$\mathrm{length}(K) = \infty$ を示せ．

問題 5. (report) Koch 曲線 K の 2 次元 Lebesgue 測度（面積）は 0 になることを示せ．（Hint. Koch 曲線はある三角形から無数の正三角形を除いたもの，と見ることができる.）

相似（フラクタル）次元

次の事実に着目しよう：

- 長さ 1 の線分は長さ 1/2 の線分 2 個からなる．
- 1 辺の長さ 1 の正方形は 1 辺の長さ 1/2 の正方形 $4 = 2^2$ 個からなる．
- 1 辺の長さ 1 さ立方体は 1 辺の長さ 1/2 の立方体 $8 = 2^3$ 個からなる．

すなわち,「ある D 次元の集合 X が X と相似比 $1/a$ で相似な集合 N 個の和集合であるとき，$N = a^D$ である」といえる．これを一般化して，

> ある $\mathbb{R}^n$ 内の集合 X が X と相似比 $1/a$ で相似な集合 N 個の和集合であるとき，$\dim_S(X) := \log N / \log a$ を S の**相似次元**（similarity dimension）と呼ぶ

問題 6. Koch 曲線 K の相似次元 $\dim_S(K)$ を求めよ．

問題 7. (report)　「Cantor の 3 進集合」の定義を述べよ．また，その相似次元を求めよ．

Box 次元と Hausdorff 次元

相似次元のような非整数値次元は集合の複雑さを図るのに有用であるが，相似次元を定義できる集合には制限がある．一方，Koch 曲線のようにギザギザした曲線，曲面は自然界に無数に見られるわけで，このような一般的な集合に対しても図形の複雑さを図る非整数値次元を定義したくなるのは自然であろう．このような次元はいくつか定義されているが，もっとも一般的なのが **Hausdorff 次元**，もっとも計算しやすいのが **Box 次元**である．

- 集合 $Y \subset \mathbb{R}^n$ の**直径** (diameter) を $\operatorname{diam} Y := \sup_{x,y \in Y} \|x-y\|$ と定義する．
- X を $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合とする．集合族 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が X の **δ-被覆**であるとは，$X \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ を満たすときをいう．
- $H^s_\delta(X) := \inf_{\{U_i\}} \sum_{i\ge 0} (\operatorname{diam} U_i)^s$ （ただし $\{U_i\}$ は全ての δ 被覆を動く）とおき，$H^s(X) := \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(X)$ を X の **s 次元 Hausdorff 外測度**とよぶ．
- このとき，$H^s(X)=0$ $(d<s)$ かつ $H^s(X)=0$ $(0\le s<d)$ となるような 唯一の d が定まる．これを $d=\dim_{\mathrm{H}}(X)$ と表し，X の **Hausdorff 次元**と呼ぶ．
- 任意に小さい $r>0$ に対し，集合 X の r-被覆を作るのに必要な半径 r の n 次元閉球体の最小個数を $N(r)$ とする．このとき，極限

$$d' \;=\; \lim_{r\to 0} \frac{\log N(r)}{\log r}$$

  が存在するとき，この値を **Box 次元**（もしくは **Minkowski 次元**）とよび，$d' = \dim_{\mathrm{B}}(X)$ で表す．

問題 8. 一般に，$\dim_{\mathrm{H}}(X) \le \dim_{\mathrm{B}}(X)$ となることを示せ．

問題 9. (report)　$X := \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ とする．このとき，$0 = \dim_{\mathrm{H}}(X) \le \dim_{\mathrm{B}}(X) = 1/2$ となることを示せ．

Koch 曲線 K については

$$\dim_{\mathrm{S}}(K) \;=\; \dim_{\mathrm{H}}(K) \;=\; \dim_{\mathrm{B}}(K) \;=\; \frac{\log 4}{\log 3} \;=\; 1.2616\cdots$$

が成り立つことが知られている．しかし，$\dim_{\mathrm{H}}(K)$ の計算は一般に難しい．

いろいろな集合の Hausdorff 次元もしくは Box 次元（測定値ふくむ）

`http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension`，および『フラクタル』より引用．

- dim(アポロニアンガスケット) $=$ 1.3057..
- dim(シェルピンスキーの三角形) $= \log 3/\log 2 = 1.58..$
- dim($z^2 + c$ の Julia 集合) $= 1 + |c|^2/(4\log 2) + o(c^2) \quad (c \to 0)$
- dim(Mandelbrot 集合の境界) $= 2$
- dim(イギリスの海岸線) $= 1.24$
- dim(ノルウェーの海岸線) $= 1.52$
- dim(ブラウン運動が囲む領域の境界) $= 4/3 = 1.33..$
- dim(カリフラワー) $= \log 13/\log 3 = 2.33..$
- dim(ブロッコリー) $=$ 2.66..
- dim(脳の表面) $=$ 2.79..
- dim(肺の表面) $=$ 2.97..
- dim(コウモリの羽の血管) $=$ 2.3
- dim(アマゾン川) $=$ 1.85
- dim(雲) $=$ 1.35（写真を撮ったときの雲の境界線）

参考文献.

- 高安秀樹.『フラクタル』, 朝倉書店.
- 谷口雅彦.『フラクタル曲線についての解析学』培風館.
- K. ファルコナー.『フラクタル幾何学の技法』シュプリンガー・フェアラーク
- P.Mattila. ”Geometry of sets and measures in Euclidean spaces”, Cambredge.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ゲーム理論

作成日：July 13, 2007　Version：1.2

今日はゲーム理論の初歩です．実生活で役に立つような，立たないような….

今後の予定

- 7/20（最終回）：保険もしくはファイナンス数理，レポート締切

ケーキの分配

問題 1. 甘いものが大好きな兄と妹が，1 つのケーキを分け合おうとしている．ナイフでどのようにカットするか随分ともめていたので，見かねた母親が

- 兄がケーキを好きなように 2 つに切り分ける．
- その後で，妹に好きなほうを選ばせる．

という案を出したところ，二人は了解した．（このとき兄は，ケーキを「完全に二等分することは不可能」という現実を認識している．）

兄も妹も，食べられるケーキの量を最大化しようと行動するとき，二人がとるべき最適な行動は何か？

妹は必ず，切り分けられた後に「大きいほう」を選ぶはずである．（妹にそれ以外の選択方法はあり得ない．）すなわち，兄は常に「小さいほう」を食べる羽目になる．
従って兄の取るべき戦略は，『「小さいほう」をできるだけ大きくする』という方法である．これは，できるだけ 2 等分に近くなるようにケーキを切ることだと考えられる．
兄のこのような『「最小値」(minimum) を最大化する (maximize)』する戦略は，**マックスミニ戦略** (maxmin strategy) と呼ばれるものの初歩的な例である．

問題 2.（あとで考えてみよう） 母親の提案が，

- 兄が 妹に見えないように ケーキを 2 つに切り分け，それぞれを箱 A と箱 B に入れ，ふたを閉める．
- 妹は 兄に聞こえないように，母親に箱 A と箱 B のどちらを選ぶか宣言しておく．

だった場合，兄と妹のとるべき最適な行動は何か？

ゼロ和 2 人ゲーム

以下では，次のようなルールからなるゲームを考える：

(1) プレイヤーの数は 2.

(2) ゲームの結果について，2 人のプレイヤーの評価値（利得）の和は常にゼロ．

(3) 各プレイヤーの取りうる戦略の数は有限.

(4) ゲームは，各プレイヤーが 1 つの戦略を提示することで終了する．（すなわち，プレイされるのは 1 回限り.）

(5) 各プレイヤーは自分が戦略を選択する際に，相手がどの戦略を（どのような確率で）選択するかは知らないものとする．

このようなゲームを，**（有限）ゼロ和 2 人ゲーム** (finite zero-sum two-person game) と呼ぶ．

問題 3. 上のケーキの問題 1，問題 2 は，それぞれゼロ和 2 人ゲームとみなせるか？また，身の回りでこのようなゲームはあるだろうか？無ければ，何かひとつ考案せよ．

次のようなゼロ和 2 人ゲームを**行列ゲーム** (matrix game) と呼ぶ：

- プレイヤーはプレイヤー 1（P_1）とプレイヤー 2（P_2）の 2 人．
- P_1 と P_2 は，それぞれ戦略 $1,\dots,i,\dots,m$ と戦略 $1,\dots,j,\dots n$ を持つ．
- P_1 と P_2 がそれぞれ戦略 i と戦略 j を取ったとき，P_1 と P_2 の**利得** (payoff) をそれぞれ $f_1(i,j)$ および $f_2(i,j)$ で表す．
- ゼロ和 2 人ゲームの仮定 (2) より，$f_1(i,j)+f_2(i,j)=0$.
- $a_{ij}:=f_1(i,j)=-f_2(i,j)$ を満たす $m\times n$ 行列 $A:=\{a_{ij}\}$ をこのゲームの**利得行列** (payoff matrix) と呼ぶ．
- 2 人のプレイヤーは，この利得行列の値をすでに知っている．

各 a_{ij} は P_1 が P_2 から支払われる利得と考えられる．P_1 はこれを最大化しようとする**最大化プレイヤー** (maximizer) であり，P_2 はこれを最小化しようとする**最小化プレイヤー** (minimizer) である．すなわち，2 人の利害は完全に対立している．

ミニマックス原理

一般に行列ゲーム $A=(a_{ij})$ が与えられたとき，最大化プレイヤー P_1 は相手が利得を最小化しようすることを考慮して，自分が獲得可能と保障されている最大の利益

$$v_1 \;:=\; \max\left(\min_j a_{1j},\ \min_j a_{2j},\dots,\min_j a_{mj}\right) \;=\; \max_i \min_j a_{ij}$$

を実現しようとする．このときの P_1 の戦略を**マックスミニ戦略** (maxmin strategy)，この値 v_1 を**マックスミニ値** (maxmin value) と呼ぶ．

同様に，最小化プレイヤー P_2 は相手に支払うべき利得を最小にする

$$v_2 \;:=\; \min\left(\max_i a_{i1},\ \max_i a_{i2},\dots,\max_i a_{in}\right) \;=\; \min_j \max_i a_{ij}$$

を実現しようとする．このときの P_1 の戦略を**ミニマックス戦略** (minimax strategy)，この値 v_1 を**ミニマックス値** (minimax value) と呼ぶ．

このような両者の行動原理をまとめて**ミニマックス原理** (minimax principle) と呼ぶ．また，$v_1=v_2$ すなわち

$$\max_i \min_j a_{ij} \;=\; \min_j \max_i a_{ij}$$

となるとき，それを実現する戦略の組 (i^*,j^*) を**均衡点** (equilibrium point) とよぶ．

> 双六の上手といひし人に、その手立を問ひ侍りしかば、「勝たんと打つべからず。負けじと打つべきなり。いづれの手か疾(と)く負けぬべきと案じて、その手を使はずして、一目(ひとめ)なりともおそく負くべき手につくべし」と言ふ。道を知れる教(おしえ)、身を治め、国を保たん道も、またしかなり。(徒然草第百十段)

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. 一般に，$v_1 \leq v_2$ であることを示せ．

問題 5. 次のような利得行列が与えられた行列ゲームを考える：

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) まず P_1 の思考を辿ってみる．P_1 の各戦略 $i = 1, 2, 3$ に対し，最悪のケースとなるのは P_2 がどの戦略をとったときか？

(2) P_1 にとって,『「最悪のケース」の中でも最良』となるのはどのような戦略のペア (i, j) が取られたときか？

(3) つぎに，P_1 は P_2 の立場に立って考える．P_2 の各戦略 $j = 1, 2, 3$ に対し，<u>P_2 にとって</u>最悪のケースとなるのは P_1 がどの戦略をとったときか？

(4) P_2 にとって,『「最悪のケース」の中でも最良』となるのはどのような戦略のペア (i, j) が取られたときか？

(5) 結局，P_1 と P_2 はどの戦略を選ぶことが合理的といえるか？

問題 6. 利得行列が次のように与えられているとき，ミニマックス原理にもとづいて均衡点を（存在すれば）もとめよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

混合戦略

一般の行列ゲームには均衡点が存在するとは限らない（すなわち $v_1 < v_2$ となりうる）ので，何か別の行動原理が必要となるであろう．以下は A.C. Doyle による短編集『シャーロック・ホームズの回想』に収められた『最後の事件』というエピソードをもとに，ゲーム理論の始祖 J. von Neumann と O.Morgenstern によって創作された**混合戦略** (mixed strategy) と呼ばれる方法の例である．

> 名探偵ホームズは，極悪天才数学者モリアーティに追われている．イギリス本土にいては身の危険があったため，大陸に逃げようとロンドン・ビクトリア駅からドーヴァー行きの汽車に乗り込んだ．そして汽車が駅を離れた瞬間，モリアーティがプラットホームに現れ，車中のホームズと目を合わせた．
>
> モリアーティはドーヴァーまで先回りしようと，すぐに特別列車を仕立て（闇の権力者なので何でもできるのだ！），ホームズの乗った列車を追った．しかし，ロンドンからドーヴァーまでには，唯一カンタベリという停車駅がある．ホームズはモリアーティーの行動を読んでそこで途中下車するかもしれないし，モリアーティもそのホームズの行動を読んで途中下車するかもしれない．ホームズはさらにその行動を読んで，あえてドーヴァーまで直行すべきかもしれない．次にホームズがモリアーティに見つかったときには，必ず殺されてしまう．ホームズはどのような戦略をとるべきだろうか？

担当教員：川平 友規　研究室：A439　　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

問題 7. 上の状況を，行列ゲームとして表現してみよう．ホームズを最大化プレイヤー P_1，モリアーティを最小化プレイヤー P_2 とする．両者はそれぞれ，$1=$ ドーヴァーまで直行，$2=$ 途中下車という 2 つの戦略がある．両者が出会ったときはホームズの死を意味するから，$f_1(1,1)=f_1(2,2)=0$ とする．また，ホームズが直行し，モリアーティが途中下車した場合，ホームズは安全な大陸に移動できるので，$f_1(1,2)=150$ とする．逆に，モリアーティが直行，ホームズが途中下車した場合，モリアーティの手からは逃れたが大陸にはいけなかったので，$f_1(2,1)=100$ とする．さらにモリアーティの利得は $f_2(i,j)=-f_1(i,j)$ をみたし，ゼロ和行列ゲームになっているとしよう．すなわち，利得行列は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 150 \\ 100 & 0 \end{pmatrix}$$

である

(1) この行列ゲームには，均衡点が存在しないことを確認せよ．

(2) ホームズは戦略を決めるために，直行を示す確率 p_1，途中下車を示す確率 $p_2=1-p_1$ となるようにくじを作成した．(このペアを $p=(p_1,p_2)$ と「確率ベクトル」の形であらわす.) このとき，モリアーティが直行した場合に得られる利得の期待値 $E(p,1)$ を求めよ．また，途中下車した場合の利得の期待値 $E(p,2)$ を求めよ．

(3) モリアーティも同様にくじを作成し，直行・途中下車を確率ベクトル $q=(q_1,q_2)$ に従って決定する．このとき，ホームズの利得の期待値 $E(p,q)$（これを**期待効用関数**とよぶ）を求めよ．さらに，$E(p,q)$ を p_1,q_1 であらわせ．

(4) ホームズが選びうる確率ベクトル $p=(p_1,1-p_1)$ それぞれに対し，ホームズにとって「最悪のケース」となるモリアーティの戦略 $q=(q_1,1-q_1)$ を与えよ．また,『「最悪のケース」の中で最良』となるのは $p=(p_1,1-p_1)$ をどのように選んだときか？

(5) 逆に，モリアーティにとって『「最悪のケース」の中で最良』なのは，どのように $q=(q_1,1-q_1)$ を選んだときか？

(6) $\max_p \min_q E(p,q) = \min_q \max_p E(p,q)$ が成り立つことをチェックせよ．

(7) 上の式の等号を成立させる (p^*,q^*) のペアをやはり**均衡点**と呼ぶ．均衡点の確率ベクトルに基づいてとる戦略を**最適戦略** (optimal strategy) と呼ぶ．ホームズとモリアーティが最適戦略をとった場合，二人が出会う確率はいくつか？すなわち，ホームズが死ぬ確率は？

一般に，次の定理が成り立つ：

ミニマックス定理 (J. von Neumann, 1928). 任意の行列ゲームにおいて，プレイヤー P_k $(k=1,\ 2)$ のとりうる戦略の確率ベクトルの集合を S_k，期待効用関数を $E(p,q)$ $(p \in S_1,\ q \in S_2)$ と表すとき，

$$\max_{p\in S_1}\min_{q\in S_2} E(p,q) \;=\; \min_{q\in S_2}\max_{p\in S_1} E(p,q)$$

が成立する．特に，等号を成立させる均衡点 $(p^*,q^*) \in S_1 \times S_2$ が少なくとも 1 つ存在する．

参考文献.

- W. パウンドストーン.『囚人のジレンマーフォン・ノイマンとゲームの理論』，青土社.
- 鈴木光夫.『ゲーム理論入門』，共立出版.
- R.J. オーマン.『ゲーム論の基礎』，勁草書房.
- G. Owen. “Game Theory (Third edtion)”, Academic Press.

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ポートフォリオ — 平均・分散分析

作成日：July 13, 2007　Version：1.2

今回は限られたお金を「効率的に」投資する方法を考えます．皆さんもいつか，家族の資産運用について考える日が来るでしょう．そのときは，今日得た知識で蘊蓄かましてください．

証券とは

個人投資家 (agent) であるあなたは，現在 ($t = 0$)，資金 $M > 0$ を持っている．このお金を株式や不動産，為替，債券，競馬，パチンコ，宝くじなどに投資して，一ヵ月後（$t = 1$）最大の利益が上がるように戦略を立てよう．

しかし，$t = 1$ における社会状況は一般に不明である．景気が良ければ株や不動産の価格は上がるだろうが，大恐慌が起こる可能性も否定できない．そこで，あなたは $t = 1$ で起こりうる社会状況事象の全体を離散集合 $\Omega = \{1, 2, \dots, S\}$ と仮定し，それぞれの事象が起こる確率 $\{P(\omega) : \omega \in \Omega\}$ を与える．当然ながら，$0 < P(\omega) < 1$ かつ $P(1) + P(2) + \cdots + P(S) = 1$ とする．

定義． **証券** (security) X とは，現在の証券価格 $q > 0$ (定数) と，配当 (dividend) と呼ばれる Ω 上の確率変数 $D(\omega)$ の組 $(q, D(\omega))$ のことである．

例えば，ある株式の現在の価格を q とすると，一ヵ月後にはそのときの社会状況 $\omega \in \Omega$ に応じて価格 $D(\omega)$ が定まる．従って，この株式は証券といえる．

問題 1. 競馬，パチンコ，宝くじは証券とみなせるか？他に，証券とみなせるものをあげよ．

- 証券 X の **（粗）収益率** (return) を
$$R(\omega) := \frac{D(\omega)}{q}$$
で表す．$R(\omega)$ も Ω 上の確率変数である．
- 証券 X の**期待収益率** (expected return) を
$$E(X) := \sum_{\omega} R(\omega)P(\omega)$$
で表す．
- 証券 X の収益率の**分散** (variance) を
$$V(X) := \sum_{\omega} \{R(\omega) - E(X)\}^2 P(\omega)$$
で表す．

問題 2. 次のような証券 X_1, X_2, X_3, X_4 があるとき，どの証券を選ぶのがもっとも「無難」か？

(1) $E(X_1)$：大きい，$V(X_1)$：大きい　(2) $E(X_2)$：大きい，$V(X_2)$：小さい
(3) $E(X_3)$：小さい，$V(X_3)$：大きい　(4) $E(X_4)$：小さい，$V(X_4)$：小さい

担当教員：川平 友規 研究室：A439 E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

ポートフォリオ

平均・分散分析では**リスク回避的** (risk-averse) な投資家を考察の対象とし，$V(X)$ をリスクの指標とする．すなわち，$V(X)$ が小さい証券が優位である，とみなす．

さて N 個の証券 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ を考え，それぞれ $X_i = (q_i, D_i(\omega))$ とし，収益率は $R_i(\omega)$ で表すことにする．これらに分散投資をすることを考えよう．証券 X_i への投資比率を θ_i であらわす．例えば，資金を株 X_1 と競馬 X_2 に半分ずつ投資する場合は $\theta_1 = \theta_2 = 1/2$ であり，それぞれを額面で $\theta_1 M = \theta_2 M = M/2$ ずつ購入することになる．一般に，

$$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N \ = \ 1$$

が成立することに注意しよう．この投資比率 $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ を<u>縦ベクトル</u>の集合 $\mathbb{R}^N$ の元とみなし，**ポートフォリオ** (portfolio) と呼ぶ．また，θ に従った保有証券の組み合わせ自体もポートフォリオと呼ぶ．[1]

問題 3. ポートフォリオ $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ を保有したとき，一ヵ月後の社会状況 $\omega \in \Omega$ におけるトータルの配当 $D_\theta(\omega)$ および収益率 $R_\theta(\omega)$ を求めよ．

問題 4. 上で求めた配当 $D_\theta(\omega)$ および収益率 $R_\theta(\omega)$ をもとに，ポートフォリオ $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ の期待収益率 $E(\theta)$ および収益率の分散 $V(\theta)$ を求めよ．

> X_i の期待収益率 $E(X_i)$ を μ_i で表し，$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N) \in \mathbb{R}^N$ とする．また，
>
> $$\sigma_{ij} \ = \ \sum_\omega (R_i(\omega) - \mu_i)(R_j(\omega) - \mu_j) P(\omega)$$
>
> によって与えられる $N \times N$ 対称行列 (σ_{ij}) を C で表し，**分散共分散行列**と呼ぶ．このとき，ポートフォリオ $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ を保有したときの期待収益率 $E(\theta)$ および収益率の分散 $V(\theta)$ は
>
> $$E(\theta) \ = \ \langle \theta, \mu \rangle \ = \ {}^t\theta\mu \qquad V(\theta) \ = \ \langle \theta, C\theta \rangle \ = \ {}^t\theta C\theta$$
>
> と表現できる．ただし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^N$ 内の通常の内積である．

問題 5. 上の枠内を証明せよ．また，Cauchy-Schwarz の不等式 $|\sigma_{ij}| \le \sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}$ を示せ．

最小分散ポートフォリオ

ここで，次のような問題を考える：

> **証券 $X_1, \ldots, X_N$ からなるポートフォリオ $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ において，期待収益率 $E(\theta)$ を一定値 E に保ったときに，収益率の分散 $V(\theta)$ を最小化するポートフォリオを求めよ．**

いま，すべての成分が 1 である $\mathbb{R}^N$ 内のベクトルを $\mathbf{1}$ と表すと，ポートフォリオ θ とは $\mathbb{R}^N$ のベクトルで $\langle \theta, \mathbf{1} \rangle = 1$ を満たすもの，と考えられる．ここでは，$\theta_i < 0$ となる場合も許す．(これは，いわゆる**空売り** (short selling) に対応する．すなわち，「その証券を保有していた」ことにし

[1] ポートフォリオとは，本来書類を入れる折りかばんのことをいうらしい．

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

て「売却」し，$t = 1$ において損益を清算する方法である．例えば為替証拠金取引などでは一般的である.）

以後は，次のことを仮定する：

仮定 1　μ と $\mathbf{1}$ は一次独立

仮定 2　分散共分散行列 C は正則.

すると，問題は次のように定式化できる：

> **$\theta \in \mathbb{R}^N$ が $\langle \theta, \mathbf{1} \rangle = 1$ かつ $\langle \mu, \theta \rangle = E$ （定数）を満たしながら動くとき，$V(\theta)$ を最小化する θ を見つけよ．**

問題 6. (2 証券への分散投資) $N = 2$ の場合を考える.（例えば，株と競馬など.）

(1) ポートフォリオ $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ を E および μ_1, μ_2 を用いて表せ.

(2) $\sigma_{11} \neq 0$, $\sigma_{22} \neq 0$, $\sigma_{11} \neq \sigma_{22}$ と仮定する．このとき，$V(\theta)$ を E および μ_1, μ_2 を用いて表せ.

(3) Cauchy-Schwarz の不等式を用いて，V が E の下に凸な関数となることを示せ.

(4) この関数を $V = \phi(E)$ とすると，このグラフは (μ_1, σ_{11}) および (μ_2, σ_{22}) を通ることを確認せよ.

(5) このグラフの中で,「リスクが少なく効率的」といえるポートフォリオを与えるのはどの部分か？

(6) 単独投資では得られないリスクの軽減が得られるようなポートフォリオは存在するか？

$N > 2$ の場合

N が 2 より大きい場合は，Lagrange の未定乗数法を用いることで最適ポートフォリオを与えることができる．ここでは，簡単にその概略を説明しておこう．詳しくは下記の参考文献を参照のこと.

制約条件 $\langle \theta, \mathbf{1} \rangle = 1$ および $\langle \mu, \theta \rangle = E$ に対する Lagrange 乗数をそれぞれ λ, γ と表すことにする.（仮定 1 より，これらの制約条件は同値でない.）Lagrange 関数を

$$L(\theta, \lambda, \gamma) \ := \ \frac{1}{2} V(\theta) - \lambda(\langle \theta, \mathbf{1} \rangle - 1) - \gamma(\langle \mu, \theta \rangle - E)$$

とおくとき，この最適解 $\theta^* = ({\theta^*}_1, \ldots, {\theta^*}_N)$, λ^*, γ^* においては

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} \ = \ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \ = \ \frac{\partial L}{\partial \gamma} \ = \ 0$$

が任意の $i = 1, \ldots, N$ について成立しなくてはならない．この条件から，関係式

$$\theta^* \ = \ \lambda^* C^{-1} \mathbf{1} + \gamma^* C^{-1} \mu$$

担当教員：川平 友規　研究室：A439　E-mail:kawahira@math.nagoya-u.ac.jp

および次の連立一次方程式が導かれる：

$$a\lambda^* + b\gamma^* \ = \ 1, \qquad b\lambda^* + c\gamma^* \ = \ E$$

ただし

$$a \ := \ \left\langle C^{-1}\mathbf{1}, \mathbf{1}\right\rangle, \quad b \ := \ \left\langle C^{-1}\mu, \mathbf{1}\right\rangle, \quad c \ := \ \left\langle C^{-1}\mu, \mu\right\rangle$$

とおいた．このとき，C が正値対称行列になるという性質から $\Delta := ac - b^2 > 0$ が導かれるので，上の連立方程式は一意な解 $(\lambda^*, \gamma^*) = (c - Eb, aE - b)/\Delta$ をもつ．したがって，

$$\theta^* \ = \ \frac{c - Eb}{\Delta} C^{-1}\mathbf{1} + \frac{aE - b}{\Delta} C^{-1}\mu$$

を得る．もちろん，これは最適解の「必要条件」を求めたに過ぎないので，この値が実際に E を固定したときの $V(\theta)$ の最小値を与えることを確認しなければならない．(正値対称行列に関する知識が必要となる．)

さて，ここで $b = \left\langle C^{-1}\mu, \mathbf{1}\right\rangle \neq 0$ を仮定し，$\theta_g^* := C^{-1}\mathbf{1}/a$, $\theta_d^* := C^{-1}\mu/b$ とおいてみる．これらのベクトルもポートフォリオになっていることが計算で確かめられ，かつ上の θ^* は

$$\theta^* \ = \ \alpha\theta_g^* + \beta\theta_d^* \qquad (\alpha + \beta \ = \ 1)$$

と表されることがわかる．ただし，α と β は収益期待率 E の一次関数であり，$b \neq 0$ ならば任意の値を取りうる．すなわち，最小分散ポートフォリオは 2 つの μ と C のみで定まるポートフォリオ θ_g^* と θ_d^* によって張られる直線上にあることが分かる（**2-ファンド分離定理**）．特に θ_g^* と θ_d^* は，つぎの性質をみたす：

- ポートフォリオ θ_g^* は $\gamma^* = 0$ に対応する最適解であり，実現可能なポートフォリオのなかで最小の分散 $V(\theta_g^*) = 1/a$ を与える．これを**大域的最小分散ポートフォリオ** (global minimum-variance portfolio) とよぶ．
- ポートフォリオ θ_d^* は $\lambda^* = 0$ に対応する最適解である．その意味を述べるのは難しいが，図形的には $\sigma = V^{1/2}$ として「$E\sigma$ 平面上で最適ポートフォリオが与える双曲線へ原点から引いた接線」の接点を与えるポートフォリオとなっている．これを**分散化ポートフォリオ** (diversified portfolio) とよぶ．

参考文献.

- 津野義道.『数理ファイナンスの数学的基礎 — 離散モデル — 』，共立出版.

高次方程式の解を任意精度で与える方法について

アイザック ニュートン（Isaac Newton）
ケンブリッジ大学
isaac.luvz.gold@math.cambridge.ac.uk

1 June 1670

概 要

与えられた高次方程式に対し，その解を任意の精度で数値的に与える新しいアルゴリズムについて講演する．また，この方法が非常に効率の良いアルゴリズムであることを示す具体例も紹介したい．

1　方程式の解法

人類史上，方程式を解くことは実用上の問題であり，$x^2-2x-1=0$，$2x^3-x^2+2x-5=0$ と言った 2 次，3 次方程式には古くから解の公式（解法）が知られている．しかし，$x^{100}-12x^2-1=0$ のような次数の高い場合はどうだろうか？現在まで，

定理 1 (古代バビロニア人，デル・フェロ，フェラーリ) *4* 次以下の方程式に対しては解の公式（もしくは解法）が存在する．

という結果が知られているが，5 次以上の方程式については一般的な解の公式はまだ見つかっていない．5 次以上の高次方程式に対し解の公式を与えることは，今後とも代数学における大きな課題であろう．

しかし，解の公式は万能だろうか？仮に公式を用いて

$$x^2-2x-1=0 \iff x=1\pm\sqrt{2}$$

と解いても，$1\pm\sqrt{2}$ という数そのものについて具体的な値がわかるわけではなく，実用上の価値はない．さらに簡単な方程式 $x^2-2=0 \iff x=\pm\sqrt{2}$ ですら，実用的な情報はなんら含んでいないのである．

そこで,「方程式を解く」と言った場合，上のような代数的な記号による解の表示を目指すのではなく,「具体的な値を任意の精度で与えること」と解釈するのが実用的であろう．以下ではより一般に，

問題 1.　$m = 2, 3, 4, \ldots$ にたいし，方程式

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ = \ 0 \quad (a_m \neq 0)$$

の実数解を任意の精度で与えよ

という問題について，具体的な方法を与える．

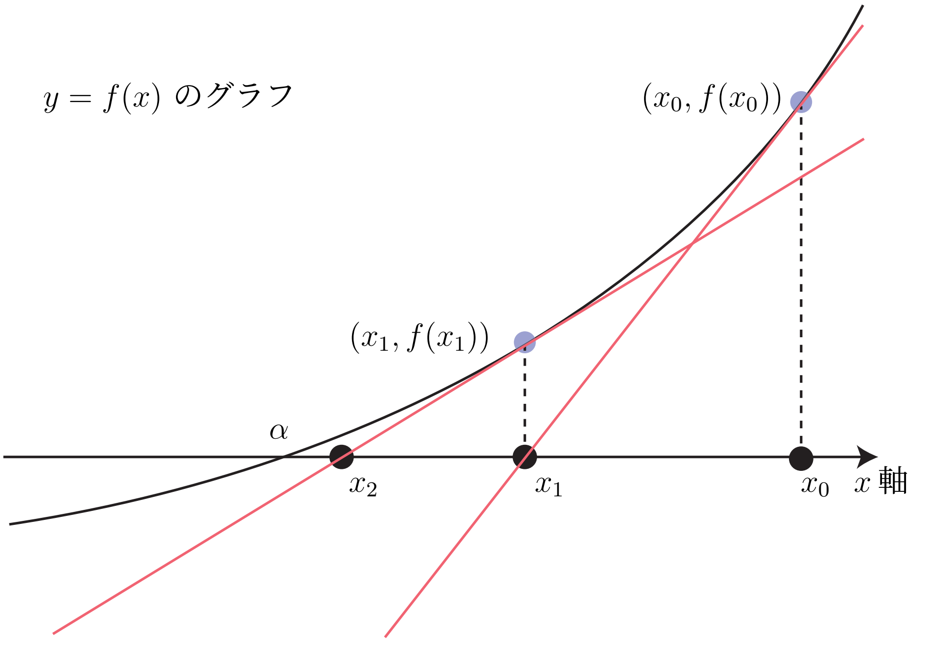
2　アルゴリズム

以下では，**問題 1** への 1 つの解答として，与えられた方程式の解を任意の精度で求める方法を説明する．

1. まず，与えられた m 次方程式
$$f(x) \ := \ a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ = \ 0$$
にたいし，関数のグラフ $y = f(x)$ を考える．
2. グラフの y 軸との交点を見れば，大体の解の位置がわかる．
3. 解 α （まだ正確な値はわからない）の**ある程度近い数** x_0 を選ぶ．
4. グラフ上の点 $(x_0, f(x_0))$ から接線を引き，y 軸との交点を $(x_1, 0)$ とする．
5. グラフ上の点 $(x_1, f(x_1))$ から接線を引き，y 軸との交点を $(x_2, 0)$ とする．
6. 同様にすれば，数 x_n から数 x_{n+1} が定まる．

この手順を続ければ，

$$x_0 \ \mapsto \ x_1 \ \mapsto \ x_2 \ \mapsto \ x_3 \ \mapsto \ x_4 \ \mapsto \ \cdots \ \mapsto \ \cdots \longrightarrow \alpha$$ （どんどん近づく !! ）



実際，次の定理を示すことができる：

定理 2 (N) 上のような方法で与えられる数列 x_n $(n = 0, 1, \ldots)$ は，漸化式

$$x_{n+1} \;=\; x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

を満たす．さらに，方程式 $f(x) = 0$ の解 α に対し，ある $\delta = \delta(\alpha) > 0$ が存在して，初期値 x_0 が $|x_0 - \alpha| \leq \delta$ を満たせば x_n は α に収束する．

証明は拙著 [N1] および [N2]（ともに近日出版予定）に記す予定である．

3 具体例

ここでは具体例として，方程式 $f(x) = x^2 - 2 = 0$ に対し上記のアルゴリズムを適用してみよう．

たとえば $x_0 = 2$ としてみる．公式

$$x_{n+1} \;=\; x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \;=\; \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

より，x_6 までを数値的に求めたものが以下の表である．

ステップ	x_n	x_n と $\sqrt{2}$ の誤差
0	2.0000000000000000000	0.586
1	1.5000000000000000000	0.0858
2	1.4166666666666666667	0.00245
3	1.4142156862745098039	2.12×10^{-6}
4	1.4142135623746899106	1.59×10^{-12}
5	1.4142135623730950488	8.99×10^{-25}
6	1.4142135623730950488	2.86×10^{-49}

このように，1 ステップごとに有効数字が 2 倍程度増える非常に早いアルゴリズムであることが分かる．一般に，α が重根でなければ $|x_{n+1} - \alpha| = O(|x_n - \alpha|^2)$ となることが証明できる．

4 最後に

最後に，今後の課題をいくつか挙げておく．

問題 A. 定理 2 において，δ の値を評価できるだろうか？

問題 B. 定理 2 は，α は複素数解としても成立するだろうか？

問題 C. 定理 2 において，任意に初期値 x_0 を与えた場合，漸化式 (1) で定まる数列は $f(x) = 0$ のいずれかの解に収束するだろうか？収束しないとすると，数列はどのような振る舞いをするだろうか？

上記の問題は現在いずれも未解決であり，筆者は部分的な解答しか持っていない．ジパングの皆さんにも是非トライしていただきたい．

参考文献

[N1] I. Newton. De Analysi per Aequationes Numeri Terminorum Infinitas. *To be published in 1671.*

[N2] I.Newton. De metodis fluxionum et serierum infinitarum. *In preparation.*